



HAL
open science

**Champs de tenseurs. Bases mobiles et naturelles.
Torsion. Courbure**

Marc Renaud

► **To cite this version:**

Marc Renaud. Champs de tenseurs. Bases mobiles et naturelles. Torsion. Courbure. Rapport LAAS n° 17123. 2017, 199p. hal-01523409

HAL Id: hal-01523409

<https://laas.hal.science/hal-01523409>

Submitted on 16 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Champs de tenseurs. Bases mobiles et
naturelles. Torsion. Courbure

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse
LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INSA, Toulouse, France

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

Chapitre 1

Introduction

Les champs de tenseurs sont des fonctions différentiables sur le domaine (ouvert connexe) d'une variété différentielle.

Le but de ce rapport de recherche est d'étudier les champs indépendants de toute connexion de géométrie différentielle puis ceux qui en dépendent. Dans ce second cas l'accent est mis principalement sur le calcul des champs de tenseurs de torsion et de courbure de la connexion selon que la variété est quelconque ou riemannienne (i.e. dotée d'un champ de tenseurs très particulier appelé métrique). Lorsque la variété est riemannienne les calculs sont effectués pour une connexion quelconque et pour une connexion adaptée à la métrique dite connexion riemannienne. L'objectif est de préciser beaucoup mieux que ne le font les diverses références indiquées en bibliographie dans quel cadre précis les calculs sont effectués (connexion ou pas ? variété quelconque ou riemannienne ? connexion quelconque ou riemannienne ?).

Dans un but de simplification nous n'avons considéré que des variétés de classe C^∞ . M. Berger et B. Gostiaux [2] considèrent le cas, plus général, des variétés de classe C^s .

Nous considérons, tout d'abord, les champs de tenseurs de type (p, q) (i.e. p - fois contravariants et q - fois covariants) et donc d'ordre $p + q$. Ces champs sont mixtes lorsque $p, q \neq 0$. Beaucoup d'auteurs cités en référence ne considèrent que le cas plus restrictif des champs de tenseurs antisymétriques de type $(p, 0)$, appelés p - formes différentielles extérieures.

Pour définir les composantes des champs de tenseurs nous avons considéré le cas le plus général des bases mobiles et de leurs duales, comme seul le fait Y. Choquet-Bruhat [8], de préférence au cas particulier des bases naturelles et de leurs duales, comme les autres auteurs cités en référence le font..

Dans ce rapport nous utilisons toujours la convention d'Einstein qui consiste, pour les composantes des champs de tenseurs, à sommer par rapport aux indices covariants (en bas) et contravariants (en haut) identiques, sans pour autant utiliser un quelconque symbole de sommation (ce qui allège énormément les écritures).

Nous privilégions le plus souvent (mais pas toujours) les champs de tenseurs mixtes qui utilisent des composantes avec les indices covariants en tête. Le fait de panacher les indices conduit à des champs de tenseurs différents en raison de la non commutativité du produit tensoriel.

Plus précisément tout au long de ce rapport nous allons considérer :

◇ le cas particulier A des champs de tenseurs de type $(0, 0)$ ou champs de scalaires,

◇ le cas particulier B des champs de tenseurs de type $(0, 1)$ ou champs de vecteurs,

◇ le cas particulier C des champs de tenseurs de type $(1, 0)$ ou champs de covecteurs,

◇ le cas particulier D des champs de tenseurs de type $(0, 2)$,

◇ un cas particulier E de champs de tenseurs de type $(1, 1)$; ceux qui utilisent l'indice covariant en tête,

◇ le cas particulier F des champs de tenseurs de type $(2, 0)$,

◇ le cas particulier F -bis des champs de 2 - formes différentielles extérieures,

◇ un cas particulier G de champs de tenseurs de type $(2, 1)$ avec indice covariant en tête et dont un exemple est le champ de tenseurs de torsion,

◇ un cas particulier H de champs de tenseurs de type $(3, 1)$ avec indices covariants et contravariants panachés (précisé ci-après) et dont un exemple est le champ de tenseurs de courbure.

Les différentes notions introduites ne sont pas toujours exactement celles utilisées par tous les auteurs cités en référence du fait qu'ils ne posent pas tous les mêmes définitions. Par exemple nous avons choisi de ne définir la divergence que pour les champs de vecteurs, afin d'éviter tout confusion, alors que R. Deheuvels [9] la définit pour tous les champs de tenseurs et nous avons défini le gradient d'une fonction numérique (ou champ de scalaires) comme un champ de vecteurs alors que certains auteurs cités en référence considèrent qu'il s'agit d'un champ de covecteurs.

Les propriétés annoncées sont quasiment toutes démontrées. Des références de démonstration sont données pour les rares qui ne le sont pas.

- Dans la première partie (chapitre 2) nous définissons les tenseurs et leurs champs sur une variété différentielle quelconque. Nous présentons les changements de composantes qui sont dues aux changements de bases. Finalement nous définissons les coefficients de structure d'une base mobile à partir du crochet de deux champs de vecteurs (ces coefficients sont nuls pour une base naturelle).

- Dans la deuxième partie (chapitre 3) nous définissons les notions indépendantes de celle de connexion, qu'elles soient valables pour tous les champs de tenseurs ou uniquement pour les champs de formes différentielles extérieures. À savoir dans le premier cas la notion de dérivée de Lie selon un champ de vecteurs et dans le second les notions de dérivation et d'antidérivation comme la différentielle extérieure et le produit intérieur selon un champ de vecteurs.

- Dans la troisième partie (chapitre 4) nous définissons la notion de connexion (imposée a priori) et les notions qui en découlent : la différentielle selon un champ de vecteurs et la différentielle absolue ou covariante. Nous définissons les champs de tenseurs de torsion et de courbure de cette connexion, ainsi que le champ de tenseurs de Ricci (comme L. Brillouin [4] et contrairement à tous les autres auteurs cités en référence qui ne définissent cette notion que dans la partie suivante). Nous calculons explicitement les champs de tenseurs précédents pour les variétés différentielles à deux et trois dimensions.

- Dans la quatrième partie (chapitre 5) nous examinons les particularités des variétés riemanniennes (qui sont dotées d'un champ de 2 - formes symétriques dit champ de tenseur métrique) et des connexions riemanniennes (pour lesquelles la connexion est imposée par cette métrique). Nous calculons les champs de tenseurs de torsion, de courbure et de Ricci dans les deux cas

(dans le second cas le champ de tenseur de torsion est nul) et définissons les nouvelles notions de courbures scalaire et totale. Nous définissons le champ de tenseurs d'Einstein et les identités de conservation qui en découlent. Nous calculons explicitement les champs de tenseurs de torsion, de courbure, de Ricci et d'Einstein pour les variété et connexion riemanniennes à deux et trois dimensions.

- Dans la cinquième partie (chapitre 6) nous calculons la courbure d'une surface à deux dimensions plongée dans l'espace à trois dimensions.

Nous présentons :

- en Annexe A l'exemple des coordonnées polaires dans le plan,
- en Annexe B l'exemple des coordonnées sphériques dans l'espace,
- en Annexe C l'exemple des coordonnées hyper-sphériques dans l'hyper-espace (seule une courte introduction est développée),
- en Annexe D l'exemple du plan de Lobachevsky doté de coordonnées cartésiennes (à courbure négative),
- en Annexe E l'exemple de la sphère,
- en Annexe F l'exemple du tore,
- en Annexe G la démonstration des identités de Bianchi qui relie les champs de tenseurs de torsion et de courbure,
- en Annexe H la démonstration d'autres identités, que celles de Bianchi, qui relie les champs de tenseurs de torsion et de courbure,

Finalement nous présentons, dans le dernier annexe (Annexe I) le calcul complet des champs de tenseurs de torsion, de courbure, de Ricci et d'Einstein pour un exemple quelconque à trois dimensions tiré de [8]¹.

L'auteur remercie par avance toute personne qui lui signalerait des erreurs dans ce rapport.

1. pp. 45-46 Problème 6

Chapitre 2

Première partie : variété M quelconque

2.1 Notations

\mathbb{R} corps de base.

M variété différentielle de classe C^∞ , de dimension m (M comme “manifold”) (exemple le plus simple : $M = \mathbb{R}^m$).

U domaine de M i.e. ouvert connexe ($U \subset M$) et x point de U ($x \in U$).

$T_x M$ espace (vectoriel) tangent à M , en x , de dimension m [2]¹ [8]² (espace des vecteurs ou vecteurs contravariants [8]³).

$(e_{jx}) \triangleq (e_{1x}, \dots, e_{mx})$ base mobile de $T_x M$ [8]⁴.

$(\frac{\partial_x}{\partial x^b}) \triangleq (\frac{\partial_x}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial_x}{\partial x^m})$ base naturelle de $T_x M$ [8]⁵.

$T_x^* M \triangleq L(T_x M; \mathbb{R})$ espace (vectoriel) cotangent à M , en x où L est un ensemble de formes linéaires, de dimension m [8]⁶ (espace des covecteurs ou vecteurs covariants [8]⁷). $T_x^* M$ est l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel $T_x M$ [2]⁸.

$T_x^{**} M \triangleq L(T_x^* M; \mathbb{R}) \cong T_x M$ (\cong signifie isomorphe).

-
1. p. 88
 2. p. 19
 3. p. 28
 4. p. 28
 5. p. 28 mais qui parle de repère naturel
 6. p. 28
 7. p. 28
 8. p. 163 § 5.1.1

$(\theta_x^i) \triangleq (\theta_x^1, \dots, \theta_x^m)$ base mobile de T_x^*M , duale de la base mobile précédente, i.e. telle que $\theta_x^i(e_{jx}) = \delta_j^i$ (symbole de Kronecker) et $e_{jx}(\theta_x^i) = \delta_j^i$ [8]⁹.

$(d_x x^a) \triangleq (d_x x^1, \dots, d_x x^m)$ base naturelle duale de T_x^*M , duale de la base naturelle précédente, i.e. telle que $d_x x^a(\frac{\partial_x}{\partial x^b}) = \delta_b^a$ (symbole de Kronecker) et $\frac{\partial_x}{\partial x^b}(d_x x^a) = \delta_b^a$ [8]¹⁰.

$TM \triangleq \cup_{x \in U} T_x M$ fibré tangent à M , variété différentielle [2]¹¹ et [23]¹².

$T^*M \triangleq \cup_{x \in U} T_x^* M$ fibré cotangent à M , variété différentielle.

Les constantes (dimensions, rangs, types, ordres, ...) sont notées de la sorte : $m, n, p, q, r, s, k, k', k'', \dots$ alors que les indices (variables) sont notés de la sorte : i, j, k, l, m, n, o, p (en base mobile) et a, b, c, d, e, f, g, h (en base naturelle) avec la correspondance :

$$i \leftrightarrow a, j \leftrightarrow b, k \leftrightarrow c, l \leftrightarrow d, m \leftrightarrow e, n \leftrightarrow f, o \leftrightarrow g, p \leftrightarrow h.$$

ssi signifie : « si et seulement si ».

2.1.1 Espaces de tenseurs (sur l'espace tangent)

Cas général

$$\bigotimes_{\substack{q \\ p}} T_x^* M \triangleq L(\underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{q \text{ fois}}; \mathbb{R}), \text{ avec } L$$

ensemble de formes linéaires (notation de [27]¹³) : espace de tenseurs de type (p, q) ou (p, q) - tenseurs (tenseurs p fois covariants et q fois contravariants [8]¹⁴ et d'ordre $p + q$) (espace vectoriel de dimension m^{p+q}).

Remarque : certains auteurs font intervenir en tête, dans la définition précédente, les espaces duals [23]. Il est également possible de panacher les espaces et leurs duals de toutes les façons possibles ; on obtient à chaque fois un tenseur différent.

$$t_x \in \bigotimes_{\substack{q \\ p}} T_x^* M : \text{tenseur de type } (p, q) \text{ ou } (p, q) \text{ - tenseur et d'ordre } p+q.$$

9. p. 28

10. p. 28 mais qui parle de repère naturel dual

11. p. 94

12. p. 75

13. p. 537

14. p. 32

Soient, pour $k = 1, \dots, p$, $u_{kx} = u_{kx}^{j_k} e_{j_k x} \in T_x M$ où les $u_{kx}^{j_k}$ sont les composantes du vecteur u_{kx} dans la base mobile ($e_{j_k x}$) et, pour $l = 1, \dots, q$, $a_x^l = a_{i_l x}^l \theta_x^{i_l} \in T_x^* M$ où les $a_{i_l x}^l$ sont les composantes du covecteur a_x^l dans la base mobile duale ($\theta_x^{i_l}$). Donc $\theta_x^{i_l}(u_{kx}) = u_{kx}^{i_l}$ et $e_{j_k x}(a_x^l) = a_{j_k x}^l$. Alors :

$$T_x M \times \dots \times T_x M \times T_x^* M \times \dots \times T_x^* M \xrightarrow{t_x} \mathbb{R}$$

$$\begin{matrix} u_{1x} & & u_{px} & & a_x^1 & & a_x^q \\ \longmapsto & & & & & & \\ t_x(u_{1x}, \dots, u_{px}, a_x^1, \dots, a_x^q) \end{matrix}$$

Composantes d'un tenseur

On pose $t_{i_1 \dots i_p x}^{j_1 \dots j_q} \triangleq t_x(e_{i_1 x}, \dots, e_{i_p x}, \theta_x^{j_1}, \dots, \theta_x^{j_q}) \in \mathbb{R}$.

Alors $t_x(u_{1x}, \dots, u_{px}, a_x^1, \dots, a_x^q) = t_{i_1 \dots i_p x}^{j_1 \dots j_q} u_{1x}^{i_1} \dots u_{px}^{i_p} a_{j_1 x}^1 \dots a_{j_q x}^q$.

Remarque : on pourrait poser $t_{(i)x}^{(j)}$ à la place de $t_{i_1 \dots i_p x}^{j_1 \dots j_q}$ comme [11]¹⁵.

Produit tensoriel de tenseurs (noté \otimes)

$$\text{Soient } t_x \in \bigotimes_p T_x^* M \text{ et } t'_x \in \bigotimes_{p'} T_x^* M \text{ alors } (t \otimes t')_x \in \bigotimes_{p+p'} T_x^* M$$

est tel que, par définition :

$$(t \otimes t')_x(u_{1x}, \dots, u_{px}, u_{(p+1)x}, \dots, u_{(p+p')x}, a_x^1, \dots, a_x^q, a_x^{q+1}, \dots, a_x^{q+q'})$$

$$= t_x(u_{1x}, \dots, u_{px}, a_x^1, \dots, a_x^q) t'_x(u_{(p+1)x}, \dots, u_{(p+p')x}, a_x^{q+1}, \dots, a_x^{q+q'}).$$

Le produit tensoriel est non commutatif.

Et, en utilisant le produit tensoriel, on remarque que :

$$t_x = t_{i_1 \dots i_p x}^{j_1 \dots j_q} \theta_x^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta_x^{i_p} \otimes e_{j_1 x} \otimes \dots \otimes e_{j_q x}.$$

Composantes d'un produit tensoriel

$$(t \otimes t')_x(e_{i_1 x}, \dots, e_{i_p x}, e_{i_{p+1} x}, \dots, e_{i_{p+p'} x}, \theta_x^{j_1}, \dots, \theta_x^{j_q}, \theta_x^{j_{q+1}}, \dots, \theta_x^{j_{q+q'}})$$

$$= t_x(e_{i_1 x}, \dots, e_{i_p x}, \theta_x^{j_1}, \dots, \theta_x^{j_q}) t'_x(e_{i_{p+1} x}, \dots, e_{i_{p+p'} x}, \theta_x^{j_{q+1}}, \dots, \theta_x^{j_{q+q'}}), \text{ donc :}$$

$$(t \otimes t')_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+p'} x}^{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+q'}} = t_{i_1 \dots i_p x}^{j_1 \dots j_q} t'_{i_{p+1} \dots i_{p+p'} x}^{j_{q+1} \dots j_{q+q'}}.$$

Exemples :

$$\begin{matrix} 0 \\ \bigotimes T_x^* M = \mathbb{R} : \text{espace des scalaires, de dimension 1,} \\ 0 \end{matrix}$$

15. p. 267 éq. (10)

$\overset{1}{\otimes} T_x^* M \cong T_x M$: espace des vecteurs ou vecteurs contravariants, de dimension m,

$\overset{0}{\otimes} T_x^* M \cong T_x^* M$: espace des covecteurs ou vecteurs covariants ou 1 - formes, de dimension m,

$\overset{0}{\otimes} T_x^* M$: espace des p - formes.

Cas particulier important : espace des formes différentielles extérieures

$\wedge^p T_x^* M \triangleq L_a(T_x M \times \dots \times T_x M; \mathbb{R}) \subset \overset{0}{\otimes}_p T_x^* M$, avec L_a ensemble de formes linéaires *alternées* (notation de [2]¹⁶) : espace des p - formes différentielles extérieures (p - formes alternées ou tenseurs de type (p, 0) ou (p, 0) - tenseurs antisymétriques), de dimension $C_m^p \triangleq \frac{m!}{p!(m-p)!}$.

$\omega_x \in \wedge^p T_x^* M$: p - forme différentielle extérieure ou tenseur de type (p, 0) ou (p, 0) - tenseur antisymétrique.

On pose $\omega_{i_1 \dots i_p x} = \omega(e_{i_1 x}, \dots, e_{i_p x})$; alors $\omega_{i_1 \dots i_p x}$ est alterné.

Exemples :

$\wedge^0 T_x^* M = \overset{0}{\otimes} T_x^* M = \mathbb{R}$: espace des scalaires, de dimension 1,

$\wedge^1 T_x^* M = \overset{0}{\otimes}_1 T_x^* M \cong T_x^* M$: espace des covecteurs ou vecteurs covariants ou 1 - formes, de dimension m,

$\wedge^p T_x^* M = \emptyset$, si $m < p$.

Remarque : $\wedge T_x^* M \triangleq \bigoplus_{p=0}^m \wedge^p T_x^* M$ de dimension $\sum_{p=0}^m C_m^p$.

16. p. 163

Définition du fibré $\begin{matrix} q \\ \otimes \\ p \end{matrix} T^*M$

$$\begin{matrix} q \\ \otimes \\ p \end{matrix} T^*M \triangleq \cup_{x \in U} \begin{matrix} q \\ \otimes \\ p \end{matrix} T_x^*M. \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} q \\ \otimes \\ p \end{matrix} T^*M &= \cup_{x \in U} L \left(\underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{q \text{ fois}}; \mathbb{R} \right) \\ &= L \left(\underbrace{\cup_{x \in U} T_x M \times \dots \times \cup_{x \in U} T_x M}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{\cup_{x \in U} T_x^* M \times \dots \times \cup_{x \in U} T_x^* M}_{q \text{ fois}}; \cup_{x \in U} \mathbb{R} \right) \\ &= L \left(\underbrace{TM \times \dots \times TM}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{T^*M \times \dots \times T^*M}_{q \text{ fois}}; \cup_{x \in U} \mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

Exemples :

$$\begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M = \cup_{x \in U} \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T_x^*M = \cup_{x \in U} \mathbb{R},$$

$$\begin{matrix} 1 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M = \cup_{x \in U} \begin{matrix} 1 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T_x^*M = \cup_{x \in U} T_x M = TM,$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 1 \end{matrix} T^*M = \cup_{x \in U} \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 1 \end{matrix} T_x^*M = \cup_{x \in U} T_x^*M = T^*M.$$

Définition de $\Lambda^p T^*M$

$\Lambda^p T^*M = \Lambda^p \cup_{x \in U} T_x^*M = \cup_{x \in U} \Lambda^p T_x^*M$, fibré extérieur de base U et de fibres vectorielles $\Lambda^p T_x^*M$ [2]¹⁷ et [23]¹⁸.

Exemples :

$$\Lambda^0 T^*M = \cup_{x \in U} \Lambda^0 T_x^*M = \cup_{x \in U} \mathbb{R} = \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M,$$

$$\Lambda^1 T^*M = \cup_{x \in U} \Lambda^1 T_x^*M = \cup_{x \in U} T_x^*M = T^*M = \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 1 \end{matrix} T^*M,$$

$$\Lambda^p T^*M = \cup_{x \in U} \Lambda^p T_x^*M = M \times \emptyset = M, \text{ si } m < p.$$

17. p. 163 § 5.1.2

18. p. 84

2.1.2 Espaces des champs de tenseurs, sur le domaine U

I) Cas général

$C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{q \\ p}} T^*M)$: espace des champs de tenseurs de type (p, q) ou (p, q) - tenseurs et d'ordre $p + q$. C'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et un module sur l'anneau $C^\infty(U; \mathbb{R})$ des fonctions réelles différentiables sur U [23]¹⁹

Alors :

$$\begin{aligned} C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{q \\ p}} T^*M) &= C^\infty[U; L(\underbrace{TM \times \dots \times TM}_p \times \underbrace{T^*M \times \dots \times T^*M}_q; \mathbb{R})] \\ &= L[\underbrace{(C^\infty(U; TM) \times \dots \times C^\infty(U; TM))}_p \times \underbrace{(C^\infty(U; T^*M) \times \dots \times C^\infty(U; T^*M))}_q; C^\infty(U; \mathbb{R})], \end{aligned}$$

avec L ensemble d'applications linéaires.

$$t \in C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{q \\ p}} T^*M)$$

champ de tenseurs de type (p, q) ou (p, q) - tenseurs et d'ordre $p + q$. On

peut dire que t est une section, au dessus de U , du fibré vectoriel $\bigotimes_{\substack{q \\ p}} T^*M$.

D'après ce que nous venons de dire il y a deux conceptions de t :

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{t} \bigotimes_{\substack{q \\ p}} T^*M \\ \text{Première conception :} & \\ x &\longmapsto t_x \in \bigotimes_{\substack{q \\ p}} T_x^*M \end{aligned}$$

et :

Seconde conception :

$$C^\infty(U; TM) \times \dots \times C^\infty(U; TM) \times C^\infty(U; T^*M) \times \dots \times C^\infty(U; T^*M) \xrightarrow{t} C^\infty(U; \mathbb{R})$$

$t(u_1, \dots, u_p, a^1, \dots, a^q)$

avec :

$$U \xrightarrow{t(u_1, \dots, u_p, a^1, \dots, a^q)} \mathbb{R}$$

$x \longmapsto [t(u_1, \dots, u_p, a^1, \dots, a^q)]_x \triangleq t_x(u_{1x}, \dots, u_{px}, a_x^1, \dots, a_x^q)$

19. p. 77

Définition de λt si $\lambda \in C^\infty(U; \mathbb{R})$ et $t \in C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\overset{\text{q}}{\otimes}} T^*M)$ (propriété de module) :

$$U \xrightarrow{\lambda t} \underset{\text{p}}{\overset{\text{q}}{\otimes}} T^*M$$

$$x \longmapsto (\lambda t)_x \triangleq \lambda_x t_x \in \underset{\text{p}}{\overset{\text{q}}{\otimes}} T_x^*M$$

et alors $\lambda t \in C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\overset{\text{q}}{\otimes}} T^*M)$ qui est bien un module.

En particulier : $e_j \in C^\infty(U; \underset{0}{\overset{1}{\otimes}} T^*M) = C^\infty(U; TM); j = 1, \dots, m$

(champs de vecteurs) :

$$C^\infty(U; T^*M) \xrightarrow{e_j} C^\infty(U; \mathbb{R})$$

$$x \longmapsto e_{jx} \in \underset{0}{\overset{1}{\otimes}} T_x^*M \cong T_x M$$

Et $\theta^i \in C^\infty(U; \underset{1}{\overset{0}{\otimes}} T^*M) = C^\infty(U; T^*M); i = 1, \dots, m$ (champs de covecteurs) :

$$C^\infty(U; TM) \xrightarrow{\theta^i} C^\infty(U; \mathbb{R})$$

$$x \longmapsto \theta_x^i \in \underset{1}{\overset{0}{\otimes}} T_x^*M \cong T_x^*M$$

$(e_j) \triangleq (e_1, \dots, e_m)$ est une base mobile de $C^\infty(U; \underset{0}{\overset{1}{\otimes}} T^*M) = C^\infty(U; TM)$
et

$(\theta^i) \triangleq (\theta^1, \dots, \theta^m)$ la base mobile de $C^\infty(U; \underset{1}{\overset{0}{\otimes}} T^*M) = C^\infty(U; T^*M)$,
duale de la précédente, i.e telle que $\theta^i(e_j) \triangleq \delta_j^i$ (symbole de Kronecker) et $e_j(\theta^i) \triangleq \delta_j^i$ [car la base (e_j) est duale de la base (θ^i)].

Soient, pour $k = 1, \dots, p$, $u_k = u_k^{j_k} e_{j_k} \in C^\infty(U; TM)$ où les $u_k^{j_k}$ sont les composantes du champ de vecteurs u_k dans la base mobile (e_{j_k}) et, pour $l = 1, \dots, q$, $a^l = a_{i_l}^l \theta^{i_l} \in C^\infty(U; T^*M)$ où les $a_{i_l}^l$ sont les composantes du champ de covecteurs a^l dans la base mobile duale (θ^{i_l}) . Donc $\theta^{i_l}(u_k) = u_k^{i_l}$ et $e_{j_k}(a^l) = a_{j_k}^l$.

Composantes d'un champ de tenseurs

On pose :

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \triangleq t(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \theta^{j_1}, \dots, \theta^{j_q}) \in C^\infty(U; \mathbb{R}).$$

Remarque : on pourrait poser $t_{(i)}^{(j)}$ à la place de $t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ comme [11]²⁰.

$$\text{Alors } t(u_1, \dots, u_p, a^1, \dots, a^q) = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} u_1^{i_1} \dots u_p^{i_p} a_{j_1}^1 \dots a_{j_q}^q.$$

Produit tensoriel de champs de tenseurs (noté \otimes)

$$\text{Soient } t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M) \text{ et } t' \in C^\infty(U; \bigotimes_{p'}^{q'} T^*M) \text{ alors}$$

$$t \otimes t' \in C^\infty(U; \bigotimes_{p+p'}^{q+q'} T^*M) \text{ est tel que, par définition :}$$

$$(t \otimes t')(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+p'}, a^1, \dots, a^q, a^{q+1}, \dots, a^{q+q'}) \\ = t(u_1, \dots, u_p, a^1, \dots, a^q) t'(u_{p+1}, \dots, u_{p+p'}, a^{q+1}, \dots, a^{q+q'}).$$

Le produit tensoriel de champs de tenseurs est non commutatif.

Et, en utilisant le produit tensoriel de champs de tenseurs, on remarque que $t = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$.

Remarque : $(\lambda t)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \lambda t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ et par conséquent :

$$\lambda \otimes t = t \otimes \lambda = \lambda t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M).$$

Composantes d'un produit tensoriel de champs de tenseurs

$$(t \otimes t')(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{i_{p+1}}, \dots, e_{i_{p+p'}}, \theta^{j_1}, \dots, \theta^{j_q}, \theta^{j_{q+1}}, \dots, \theta^{j_{q+q'}}) \\ = t(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \theta^{j_1}, \dots, \theta^{j_q}) t'(e_{i_{p+1}}, \dots, e_{i_{p+p'}}, \theta^{j_{q+1}}, \dots, \theta^{j_{q+q'}}), \text{ donc :}$$

$$(t \otimes t')_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+p'}}^{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+q'}} = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} t'_{i_{p+1} \dots i_{p+p'}}^{j_{q+1} \dots j_{q+q'}}.$$

20. p. 267 éq. (10)

II) Cas particulier important : espace des champs de formes différentielles extérieures

$$\Omega^p(U) \triangleq C^\infty(U; \Lambda^p T^*M) \subset C^\infty(U; \bigotimes^p T^*M) : \text{espace des champs}$$

de p - formes différentielles extérieures ou formes différentielles extérieures d'ordre p [2]²¹. Certains disent degré et non ordre [27]. C'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et un module sur l'anneau $C^\infty(U; \mathbb{R})$ des fonctions réelles différentiables sur U .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \Omega^p(U) &= C^\infty[U; L_a(\underbrace{TM \times \dots \times TM}_{p \text{ fois}}; \mathbb{R})] \\ &= L_a[\underbrace{(C^\infty(U; TM) \times \dots \times C^\infty(U; TM))}_{p \text{ fois}}; C^\infty(U; \mathbb{R})], \text{ avec } L_a \text{ ensemble} \\ &\text{d'applications linéaires } \textit{alternées}. \end{aligned}$$

En particulier $\Omega^0(U) = C^\infty(U; \mathbb{R})$ et $\Omega^1(U) = C^\infty(U; T^*M)$.

$\omega \in \Omega^p(U)$ champ de p - formes différentielles extérieures ou formes différentielles extérieures d'ordre p . On peut dire que ω est une section, au dessus de U , du fibré vectoriel $\Lambda^p T^*M$. Il y a deux conceptions de ω :

Première conception :

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{\omega} \Lambda^p T^*M \\ x &\longmapsto \omega_x \in \Lambda^p T_x^*M \end{aligned}$$

et :

Seconde conception :

$$C^\infty(U; TM) \times \dots \times C^\infty(U; TM) \xrightarrow[u_1, \dots, u_p]{\omega} \Omega^0(U) \quad ; \text{ avec :}$$

$$U \xrightarrow{\omega(u_1, \dots, u_p)} \mathbb{R} \\ x \longmapsto [\omega(u_1, \dots, u_p)]_x \triangleq \omega_x(u_{1x}, \dots, u_{px})$$

$\lambda \in \Omega^0(U)$ champ de 0 - formes différentielles extérieures ou formes différentielles extérieures d'ordre 0 ou fonction numérique réelle.

Définition de $\lambda\omega$ si $\lambda \in \Omega^0(U)$ et $\omega \in \Omega^p(U)$ (propriété de module) :

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{\lambda\omega} \Lambda^p T^*M \\ x &\longmapsto (\lambda\omega)_x \triangleq \lambda_x \omega_x \in \Lambda^p T_x^*M \end{aligned}$$

et alors $\lambda\omega \in \Omega^p(U)$ qui est bien un module.

21. p. 164 § 5.2.1

Attention : si $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$ alors :

$$\omega \otimes \omega' \in C^\infty(U; \bigotimes_{p+p'} T^*M) \text{ mais } \omega \otimes \omega' \notin \Omega^{p+p'}(U).$$

- Composantes d'un champ de formes différentielles extérieures

On pose :

$$\omega_{i_1 \dots i_p} \triangleq \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}), \text{ avec } \omega_{i_1 \dots i_p} \text{ alterné.}$$

Alors en utilisant le produit tensoriel de champs de formes différentielles extérieures on remarque que :

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}, \text{ avec } \omega_{i_1 \dots i_p} \text{ alterné,}$$

Remarque : $(\lambda \omega)_{i_1 \dots i_p} = \lambda \omega_{i_1 \dots i_p}$ et par conséquent :

$$\lambda \otimes \omega = \omega \otimes \lambda = \lambda \omega \in \Omega^p(U).$$

II.1) Produit extérieur \wedge

On pourra consulter [8]²² [11]²³ [23]²⁴ [27]²⁵ et [30]²⁶.

Attention : dans [8] le produit extérieur est défini d'une manière légèrement différente de celles des autres références indiquées et de celle présentée ici dans ce rapport.

- Si $1 \leq p$ et $1 \leq p'$; soient $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$; alors le produit extérieur

$\omega'' \triangleq \omega \wedge \omega' \in \Omega^{p+p'}(U)$ est tel que, par définition :

$$\begin{aligned} \omega''_{i_1 \dots i_{p+p'}} &= \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \sum_{\sigma \in S_{p+p'}} \varepsilon_\sigma \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} \omega'_{i_{\sigma(p+1)} \dots i_{\sigma(p+p')}} \\ &= \sum_{\sigma \in A_{p+p'} \subset S_{p+p'}} \varepsilon_\sigma \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} \omega'_{i_{\sigma(p+1)} \dots i_{\sigma(p+p')}} \end{aligned}, \text{ où :}$$

$S_{p+p'}$ est le groupe symétrique d'ordre $p+p'$ des permutations σ , $A_{p+p'}$ le sous ensemble de $S_{p+p'}$ des permutations telles que : $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+p')$ et ε_σ la signature de la permutation σ (cf. exemples ci-après).

$\omega_{i_1 \dots i_p}$ et $\omega'_{i_1 \dots i_{p'}}$ étant alternés on vérifie que $\omega''_{i_1 \dots i_{p+p'}}$ ainsi défini l'est.

- Soient $\lambda \in \Omega^0(U)$ et $\omega \in \Omega^p(U)$. On a vu que $\lambda \omega \in \Omega^p(U)$; alors on

22. pp. 55-56

23. pp. 167-169 §3 et, en particulier, p. 165 éq. (18) mal écrite

24. pp. 118-119

25. pp. 528-530 §1.10

26. pp. 167-199 Leçon 5 et, en particulier, p. 174 §D

pose : $\lambda \wedge \omega = \omega \wedge \lambda \triangleq \lambda \omega$. Et, en particulier, si $\mu \in \Omega^0(U)$:
 $\lambda \wedge \mu = \mu \wedge \lambda \triangleq \lambda \mu = \mu \lambda \in \Omega^0(U)$.

On constate que $\wedge \in L[\Omega^p(U) \times \Omega^{p'}(U) \longrightarrow \Omega^{p+p'}(U)]$ et par conséquent, d'après la linéarité, si $k, k', k'' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (k\omega + k'\omega') \wedge \omega'' &= k\omega \wedge \omega'' + k'\omega' \wedge \omega'' \\ \omega \wedge (k'\omega' + k''\omega'') &= k'\omega \wedge \omega' + k''\omega \wedge \omega'' \quad [27]^{27}. \end{aligned}$$

Propriétés

- $\omega' \wedge \omega = (-1)^{pp'} \omega \wedge \omega'$ (commutativité ou anti-commutativité) ; deux champs de formes différentielles extérieures d'ordres impairs anti-commutent, sinon elles commutent.

Démonstration

$(\omega \wedge \omega')_{i_1 \dots i_{p+p'}} = \sum_{\sigma \in A_{p+p'} \subset S_{p+p'}} \varepsilon_\sigma \omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)} \omega'_{\sigma(i_{p+1}) \dots \sigma(i_{p+p'})}$,
avec $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+p')$. Par conséquent :

$(\omega' \wedge \omega)_{i_1 \dots i_{p'+p}} = \sum_{\sigma' \in A_{p'+p} \subset S_{p'+p}} \varepsilon_{\sigma'} \omega'_{\sigma'(i_1) \dots \sigma'(i_{p'})} \omega_{\sigma'(i_{p'+1}) \dots \sigma'(i_{p'+p})}$,
avec $\sigma'(1) < \dots < \sigma'(p')$ et $\sigma'(p'+1) < \dots < \sigma'(p'+p)$.

À la permutation $\sigma' \in A_{p'+p}$ associons la permutation $\sigma \in S_{p+p'}$ telle que :

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma'(p'+1), \dots, \sigma(p) = \sigma'(p'+p), \\ \sigma(p+1) &= \sigma'(1), \dots, \sigma(p+p') = \sigma'(p'). \end{aligned}$$

Alors on constate que $\sigma \in A_{p+p'}$, car :

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma'(p'+1) < \dots < \sigma(p) = \sigma'(p'+p) \text{ et} \\ \sigma(p+1) &= \sigma'(1) < \dots < \sigma(p+p') = \sigma'(p'). \end{aligned}$$

On constate également que $\varepsilon_{\sigma'} = (-1)^{pp'} \varepsilon_\sigma$ et par conséquent :

$(\omega' \wedge \omega)_{i_1 \dots i_{p'+p}} = \sum_{\sigma \in A_{p'+p} \subset S_{p'+p}} (-1)^{pp'} \varepsilon_\sigma \omega'_{\sigma(i_{p'+1}) \dots \sigma(i_{p'+p})} \omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)}$ et donc :

$$\begin{aligned} (\omega' \wedge \omega)_{i_1 \dots i_{p'+p}} &= (-1)^{pp'} (\omega \wedge \omega')_{i_1 \dots i_{p+p'}} \text{ soit :} \\ \omega' \wedge \omega &= (-1)^{pp'} \omega \wedge \omega' \text{ QED.} \end{aligned}$$

Et, en particulier, $\theta^{i_2} \wedge \theta^{i_1} = -\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2}$.

Donc si ω est d'ordre impair : $\omega \wedge \omega = 0$ et, en particulier, $\theta^i \wedge \theta^i = 0$.

• $(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'' = \omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')$ (associativité) et on peut donc écrire $\omega \wedge \omega' \wedge \omega''$ pour la valeur commune.

Démonstration [30]²⁸

Soient $\omega \in \Omega^p(U)$, $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$ et $\omega'' \in \Omega^{p''}(U)$. On peut écrire :

$(\omega \wedge \omega')_{i_1 \dots i_{p+p'}} = \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'}}^{j_1 \dots j_{p+p'}} \omega_{j_1 \dots j_p} \omega'_{j_{p+1} \dots j_{p+p'}}$ où $\varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'}}^{j_1 \dots j_{p+p'}}$ est le symbole de kronecker, égal à +1 ou -1 selon que le signe de la permutation de $i_1 \dots i_{p+p'}$ à $j_1 \dots j_{p+p'}$ est respectivement pair ou impair. Par conséquent :

$$\begin{aligned} & [(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'']_{i_1 \dots i_{p+p'+1} \dots i_{p+p'+p''}} \\ &= \frac{1}{(p+p')!} \frac{1}{p''!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}^{j_1 \dots j_{p+p'+p''}} (\omega \wedge \omega')_{j_1 \dots j_{p+p'}} \omega''_{j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''}}, \text{ mais :} \end{aligned}$$

$$(\omega \wedge \omega')_{j_1 \dots j_{p+p'}} = \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \varepsilon_{j_1 \dots j_{p+p'}}^{k_1 \dots k_{p+p'}} \omega_{k_1 \dots k_p} \omega'_{k_{p+1} \dots k_{p+p'}} \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned} & [(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'']_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \frac{1}{(p+p')!} \frac{1}{p''!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}^{j_1 \dots j_{p+p'+p''}} \varepsilon_{j_1 \dots j_{p+p'}}^{k_1 \dots k_{p+p'}} \omega_{k_1 \dots k_p} \omega'_{k_{p+1} \dots k_{p+p'}} \omega''_{j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''}}. \end{aligned}$$

La permutation de $(i_1 \dots i_{p+p'} i_{p+p'+1} \dots i_{p+p'+p''})$ à $(k_1 \dots k_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''})$ est le produit de la permutation de $(i_1 \dots i_{p+p'} i_{p+p'+1} \dots i_{p+p'+p''})$ à $(j_1 \dots j_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''})$ et de la permutation de $(j_1 \dots j_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''})$ à $(k_1 \dots k_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''})$.

Étant donné que la signature d'un produit de permutations est le produit de leurs signatures on en déduit que :

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'} i_{p+p'+1} \dots i_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'} i_{p+p'+1} \dots i_{p+p'+p''}}^{j_1 \dots j_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''}} \varepsilon_{j_1 \dots j_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'} j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''}}.$$

De plus :

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}^{j_1 \dots j_{p+p'+p''}} \varepsilon_{j_1 \dots j_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'+p''}} = (p! + p'!) \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'+p''}} \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned} & [(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'']_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \frac{1}{p''!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'+p''}} \varepsilon_{j_1 \dots j_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'+p''}} \omega_{k_1 \dots k_p} \omega'_{k_{p+1} \dots k_{p+p'}} \omega''_{j_{p+p'+1} \dots j_{p+p'+p''}} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \frac{1}{p''!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'+p''}} \omega_{k_1 \dots k_p} \omega'_{k_{p+1} \dots k_{p+p'}} \omega''_{k_{p+p'+1} \dots k_{p+p'+p''}}. \end{aligned}$$

On démontre de même que cette expression est $[\omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')]_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}$

28. pp. 176-178 Propriété P2

et par conséquent $[(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'']_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}} = [\omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')]_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}$,
soit $\omega \wedge (\omega' \wedge \omega'') = (\omega \wedge \omega') \wedge \omega''$ QED.

• $\theta^{j_1} \wedge \dots \wedge \theta^{j_p} = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon_\sigma \theta^{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \theta^{j_{\sigma(p)}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}$
[11]²⁹ et [27]³⁰.

Et on en déduit que

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}, \text{ avec } \omega_{i_1 \dots i_p} \text{ alterné (écriture forme),}$$

Démonstrations

On vient de voir que :

$$[\omega \wedge \omega' \wedge \omega'']_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}} = \frac{1}{p!} \frac{1}{p'} \frac{1}{p''} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'+p''}}^{k_1 \dots k_{p+p'+p''}} \omega_{k_1 \dots k_p} \omega'_{k_{p+1} \dots k_{p+p'}} \omega''_{k_{p+p'+1} \dots k_{p+p'+p''}}. \text{ Et donc, en particulier, si } p = p' = p'' = 1 :$$

$$(a \wedge a' \wedge a'')_{i_1 i_2 i_3} = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}^{k_1 k_2 k_3} a_{k_1} a'_{k_2} a''_{k_3} \text{ et}$$

$$a \wedge a' \wedge a'' = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}^{k_1 k_2 k_3} a_{k_1} a'_{k_2} a''_{k_3} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3}.$$

On généralise à :

$$(a^{j_1} \wedge \dots \wedge a^{j_p})_{i_1 \dots i_p} = \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} a_{k_1}^{j_1} \dots a_{k_p}^{j_p} \text{ et}$$

$$a^{j_1} \wedge \dots \wedge a^{j_p} = \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} a_{k_1}^{j_1} \dots a_{k_p}^{j_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}.$$

En particulier si $a^{j_1} = \theta^{j_1}, \dots, a^{j_p} = \theta^{j_p}$ on a $a_{k_1}^{j_1} = \delta_{k_1}^{j_1}, \dots, a_{k_p}^{j_p} = \delta_{k_p}^{j_p}$
(symboles de Kronecker) et :

$$(\theta^{j_1} \wedge \dots \wedge \theta^{j_p})_{i_1 \dots i_p} = \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_p}^{j_p} = \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \text{ QED}$$

et $\theta^{j_1} \wedge \dots \wedge \theta^{j_p} = \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}$ QED.

On a alors les trois écritures suivantes possibles pour le champ de p - formes différentielles extérieures ω :

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}, \text{ avec } \omega_{i_1 \dots i_p} \text{ alterné (écriture tenseur),}$$

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}, \text{ avec } \omega_{i_1 \dots i_p} \text{ alterné (écriture forme),}$$

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}.$$

29. p. 165

30. p. 528

Exemples de calcul de $\omega'' = \omega \wedge \omega'$:

• $p = 1, p' = 1$. Soient $a \in \Omega^1(U)$, $a' \in \Omega^1(U)$ et $\omega'' = a \wedge a' \in \Omega^2(U)$;
alors :

$$\omega''_{i_1 i_2} = a_{i_1} a'_{i_2} - a_{i_2} a'_{i_1}. \text{ Et } \omega'' = a \wedge a' = a \otimes a' - a' \otimes a.$$

• $p = 1, p' = 2$. Soient $a \in \Omega^1(U)$, $\omega' \in \Omega^2(U)$ et $\omega'' = a \wedge \omega' \in \Omega^3(U)$;
alors :

$$\omega''_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1} \omega'_{i_2 i_3} - a_{i_2} \omega'_{i_1 i_3} + a_{i_3} \omega'_{i_1 i_2}.$$

• $p = 2, p' = 1$. Soient $\omega \in \Omega^2(U)$, $a' \in \Omega^1(U)$ et $\omega'' = \omega \wedge a' \in \Omega^3(U)$;
alors :

$$\omega''_{i_1 i_2 i_3} = \omega_{i_2 i_3} a'_{i_1} - \omega_{i_1 i_3} a'_{i_2} + \omega_{i_1 i_2} a'_{i_3}.$$

• $p = 2, p' = 2$. Soient $\omega \in \Omega^2(U)$, $\omega' \in \Omega^2(U)$ et $\omega'' = \omega \wedge \omega' \in \Omega^4(U)$;
alors :

$$\omega''_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \omega_{i_1 i_2} \omega'_{i_3 i_4} - \omega_{i_1 i_3} \omega'_{i_2 i_4} + \omega_{i_1 i_4} \omega'_{i_2 i_3} + \omega_{i_2 i_3} \omega'_{i_1 i_4} - \omega_{i_2 i_4} \omega'_{i_1 i_3} + \omega_{i_3 i_4} \omega'_{i_1 i_2}.$$

• $p = 2, p' = 3$. Soient $\omega \in \Omega^2(U)$, $\omega' \in \Omega^3(U)$ et $\omega'' = \omega \wedge \omega' \in \Omega^5(U)$;
alors :

$$\begin{aligned} \omega''_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} &= \omega_{i_1 i_2} \omega'_{i_3 i_4 i_5} - \omega_{i_1 i_3} \omega'_{i_2 i_4 i_5} + \omega_{i_1 i_4} \omega'_{i_2 i_3 i_5} - \omega_{i_1 i_5} \omega'_{i_2 i_3 i_4} + \omega_{i_2 i_3} \omega'_{i_1 i_4 i_5} \\ &- \omega_{i_2 i_4} \omega'_{i_1 i_3 i_5} + \omega_{i_2 i_5} \omega'_{i_1 i_3 i_4} + \omega_{i_3 i_4} \omega'_{i_1 i_2 i_5} - \omega_{i_3 i_5} \omega'_{i_1 i_2 i_4} + \omega_{i_4 i_5} \omega'_{i_1 i_2 i_3}. \end{aligned}$$

Remarque :

$$\begin{aligned} \forall i_1, \dots, i_{p+p'} \text{ on a : } & \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'}}^{j_1 \dots j_{p+p'}} \omega_{j_1 \dots j_p} \omega'_{j_{p+1} \dots j_{p+p'}} \\ = \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'}}^{j_1 \dots j_{p+p'}} & [p \omega_{i_1 j_2 \dots j_p} \omega'_{j_{p+1} \dots j_{p+p'}} + (-1)^p p' \omega_{j_2 \dots j_{p+1}} \omega'_{i_1 j_{p+2} \dots j_{p+p'}}]. \end{aligned}$$

III) Cas particuliers de champs de tenseurs et de champs de formes différentielles extérieures

III.1) Cas A : espace des champs de (0, 0) tenseurs ou champs de 0 - formes ou champs de 0 - formes différentielles extérieures ou champs de scalaires ou fonctions numériques :

$$\Omega^0(U) \triangleq C^\infty(U; \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M) = C^\infty(U; \mathbb{R}).$$

Notation générique : $\lambda \in \Omega^0(U)$.

III.2) Cas B : espace des champs de vecteurs ou champs de (0, 1) tenseurs :

$$C^\infty(U; \begin{matrix} 1 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M) = C^\infty(U; TM).$$

$$\text{Notation générique : } u \in C^\infty(U; \begin{matrix} 1 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M) = C^\infty(U; TM) : u = u^{j_1} e_{j_1}$$

III.3) Cas C : espace des champs de covecteurs ou champs de (1, 0) tenseurs ou champs de 1 - formes différentielles extérieures :

$$\Omega^1(U) \triangleq C^\infty(U; \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 1 \end{matrix} T^*M) = C^\infty(U; \Lambda^1 T^*M) = C^\infty(U; T^*M).$$

$$\text{Notation générique : } a \in \Omega^1(U) : a = a_{i_1} \theta^{i_1}.$$

III.4) Cas D : espace des champs de (0, 2) tenseurs :

$$C^\infty(U; \begin{matrix} 2 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M).$$

$$\text{Notation générique : } t \in C^\infty(U; \begin{matrix} 2 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M) : t = t^{j_1 j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2}.$$

III.5) Cas E : un espace de champs de (1, 1) tenseurs, avec indice covariant en tête

$$C^\infty(U; \begin{matrix} 1 \\ \otimes \\ 1 \end{matrix} T^*M).$$

$$\text{Notation générique : } t \in C^\infty(U; \begin{matrix} 1 \\ \otimes \\ 1 \end{matrix} T^*M) : t = t_{i_1}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1}.$$

III.6) Cas F : espace des champs de (2, 0) tenseurs ou champs de 2 - formes

$$C^\infty(U; \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 2 \end{matrix} T^*M).$$

$$\text{Notation générique : } t \in C^\infty(U; \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ 2 \end{matrix} T^*M) : t = t_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2}.$$

III.6 bis) Cas F -bis : espace des champs de $(2, 0)$ tenseurs anti-symétriques ou champs de 2 - formes différentielles extérieures

$$\Omega^2(U) \triangleq C^\infty(U; \Lambda^2 T^*M).$$

Notation générique : $\omega \in \Omega^2(U) : \omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2}$, avec $\omega_{i_1 i_2}$ alterné.

III.7) Cas G : un espace de champs de $(2, 1)$ tenseurs, avec indices covariants en tête

$$C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} \underset{1}{T^*M}).$$

Notation générique : $t \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} \underset{1}{T^*M}) : t = t_{i_1 i_2}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes e_{j_1}$.

III.8) Cas H : un espace de champs de $(3, 1)$ tenseurs, avec indices covariants et contravariants mélangés

$$C^\infty(U; \underset{3}{\otimes} \underset{1}{T^*M}).$$

Notation générique : $t \in C^\infty(U; \underset{3}{\otimes} \underset{1}{T^*M}) :$

$$t = t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3}$$

Remarque : on utilisera par la suite, en particulier lors de l'étude des connexions riemanniennes, d'autres espaces de champs de tenseurs que ceux ci-devant qui mélangent différemment les indices covariants et contravariants.

2.2 Changement de bases

Les diverses composantes qui vont intervenir sont notées sans tilde dans les bases mobiles et leurs duales et avec tilde dans les bases naturelles et leurs duales. Les éléments des matrices carrées qui vont intervenir ont une indice de ligne situé en bas et un indice de colonne en haut.

2.2.1 Changement de bases mobiles et de leurs bases mobiles duales

Changement de base mobile (pour les champs de vecteurs)

Soient (e_j) et $(e_{k'})$, respectivement, une « ancienne » et une « nouvelle » base mobile de $C^\infty(U; \bigotimes_0^1 T^*M) = C^\infty(U; TM)$, avec :

$$e_j \triangleq e_j^{k'} e_{k'} \text{ et } e_{k'} \triangleq \theta_{k'}^j e_j. \text{ Alors :}$$

$e_j = e_j^{k'} \theta_{k'}^i e_i$; soit $e_j^{k'} \theta_{k'}^i = \delta_j^i$ (symbole de Kronecher) et $e_{k'} = \theta_{k'}^j e_j e_{l'}$; soit $\theta_{k'}^j e_j^{l'} = \delta_{k'}^{l'}$.

Changement de base mobile duale (pour les champs de covecteurs)

Soient (θ^i) l' « ancienne » base mobile duale de l' « ancienne » base mobile (e_j) , telle que, par définition, $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ et $(\theta^{l'})$ la « nouvelle » base mobile duale de la « nouvelle » base mobile $(e_{k'})$, telle que, par définition, $\theta^{l'}(e_{k'}) = \delta_{k'}^{l'}$. Alors $\theta^i = \theta_{l'}^i \theta^{l'}$ et $\theta^{l'} = e_{i'}^l \theta^i$.

Démonstrations

• Soit $\theta^i = b_{l'}^i \theta^{l'}$. On a $\delta_j^i = \theta^i(e_j) = b_{l'}^i \theta^{l'}(e_j^{k'} e_{k'}) = b_{l'}^i e_j^{k'} \theta^{l'}(e_{k'}) = b_{l'}^i e_j^{k'} \delta_{k'}^{l'} = e_j^{k'} b_{k'}^{l'}$ et $\delta_j^i = e_j^{k'} \theta_{k'}^i$; donc $b_{k'}^{l'} = \theta_{k'}^i$ et $\theta^i = \theta_{l'}^i \theta^{l'}$ QED.

• Soit $\theta^{l'} = a_i^{l'} \theta^i$. On a $\delta_{k'}^{l'} = \theta^{l'}(e_{k'}) = a_i^{l'} \theta^i(\theta_{k'}^j e_j) = a_i^{l'} \theta_{k'}^j \theta^i(e_j) = a_i^{l'} \theta_{k'}^j \delta_j^i = \theta_{k'}^j a_j^{l'}$ et $\delta_{k'}^{l'} = \theta_{k'}^j e_j^{l'}$; donc $a_j^{l'} = e_j^{l'}$ et $\theta^{l'} = e_{i'}^l \theta^i$ QED.

Soient $(e_j^{k'})$ la matrice carrée, d'ordre m , ayant pour élément $e_j^{k'}$ sur la ligne j et la colonne k' et $(\theta_{l'}^i)$ la matrice carrée, d'ordre m , ayant pour élément $\theta_{l'}^i$ sur la ligne l' et la colonne i . Alors, d'après ce qui précède, on a :

$$(\theta_{l'}^i) = (e_j^{k'})^{-1} \text{ et } (e_j^{k'}) = (\theta_{l'}^i)^{-1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (p, q) tenseurs lorsque les indices covariants sont en tête

$$t_{l'_1 \dots l'_p}^{\dots k'_1 \dots k'_q} = \theta_{l'_1}^{i_1} \dots \theta_{l'_p}^{i_p} e_{j_1}^{k'_1} \dots e_{j_q}^{k'_q} t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \text{ et :}$$

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = e_{i_1}^{l'_1} \dots e_{i_p}^{l'_p} \theta_{k'_1}^{j_1} \dots \theta_{k'_q}^{j_q} t_{l'_1 \dots l'_p}^{\dots k'_1 \dots k'_q}.$$

Cas particuliers

Changement de composantes pour les champs de vecteurs ou de (0, 1) tenseurs (cas B)

Soit u un champ de vecteurs : $u = u^{j_1} e_{j_1} = u^{k'_1} e_{k'_1}$. Alors :

$$u^{k'_1} = e_{j_1}^{k'_1} u^{j_1} \text{ et } u^{j_1} = \theta_{k'_1}^{j_1} u^{k'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de covecteurs ou de (1, 0) tenseurs (cas C)

Soit a un champ de covecteurs : $a = a_{i_1} \theta^{i_1} = a_{l'_1} \theta^{l'_1}$. Alors :

$$a_{l'_1} = \theta_{l'_1}^{i_1} a_{i_1} \text{ et } a_{i_1} = e_{i_1}^{l'_1} a_{l'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (0, 2) tenseurs (cas D)

Soit t un champ de (0, 2) tenseurs : $t = t^{j_1 j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2} = t^{k'_1 k'_2} e_{k'_1} \otimes e_{k'_2}$.
Alors :

$$t^{k'_1 k'_2} = e_{j_1}^{k'_1} e_{j_2}^{k'_2} t^{j_1 j_2} \text{ et } t^{j_1 j_2} = \theta_{k'_1}^{j_1} \theta_{k'_2}^{j_2} t^{k'_1 k'_2}.$$

Changement de composantes pour les champs de (1, 1) tenseurs (cas E)

Soit t un champ de (1, 1) tenseurs : $t = t_{i_1}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} = t_{l'_1}^{k'_1} \theta^{l'_1} \otimes e_{k'_1}$.
Alors :

$$t_{l'_1}^{k'_1} = \theta_{l'_1}^{i_1} e_{j_1}^{k'_1} t_{i_1}^{j_1} \text{ et } t_{i_1}^{j_1} = e_{i_1}^{l'_1} \theta_{k'_1}^{j_1} t_{l'_1}^{k'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (2, 0) tenseurs ou champs de 2 - formes (cas F)

Soit t un champ de (2, 0) tenseurs : $t = t_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} = t_{l'_1 l'_2} \theta^{l'_1} \otimes \theta^{l'_2}$.
Alors :

$$t_{l'_1 l'_2} = \theta_{l'_1}^{i_1} \theta_{l'_2}^{i_2} t_{i_1 i_2} \text{ et } t_{i_1 i_2} = e_{i_1}^{l'_1} e_{i_2}^{l'_2} t_{l'_1 l'_2}.$$

Et, en particulier, pour les champs de 2 - formes différentielles extérieures (cas F-bis) : $\omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} = \frac{1}{2} \omega_{l'_1 l'_2} \theta^{l'_1} \wedge \theta^{l'_2}$, avec $\omega_{i_1 i_2}$ et $\omega_{l'_1 l'_2}$ alternés.
Alors :

$$\omega_{l'_1 l'_2} = \theta_{l'_1}^{i_1} \theta_{l'_2}^{i_2} \omega_{i_1 i_2} \text{ et } \omega_{i_1 i_2} = e_{i_1}^{l'_1} e_{i_2}^{l'_2} \omega_{l'_1 l'_2}.$$

Changement de composantes pour les champs de (2, 1) tenseurs (cas G)

Soit t un champ de (2, 1) tenseurs :
 $t = t_{i_1 i_2}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes e_{j_1} = t_{l'_1 l'_2}^{k'_1} \theta^{l'_1} \otimes \theta^{l'_2} \otimes e_{k'_1}$. Alors :

$$t_{l'_1 l'_2}^{..k'_1} = \theta_{l'_1}^{i_1} \theta_{l'_2}^{i_2} e_{j_1}^{k'_1} t_{i_1 i_2}^{..j_1} \text{ et } t_{i_1 i_2}^{..j_1} = e_{i_1}^{l'_1} e_{i_2}^{l'_2} \theta_{k'_1}^{j_1} t_{l'_1 l'_2}^{..k'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (3, 1) tenseurs (cas H)

Soit t un champ de (3, 1) tenseurs :

$$t = t_{i_1 i_2 i_3}^{..j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3} = t_{l'_1 l'_2 l'_3}^{..k'_1} \theta^{l'_1} \otimes e_{k'_1} \otimes \theta^{l'_2} \otimes \theta^{l'_3}. \text{ Alors :}$$

$$t_{l'_1 l'_2 l'_3}^{..k'_1} = \theta_{l'_1}^{i_1} e_{j_1}^{k'_1} \theta_{l'_2}^{i_2} \theta_{l'_3}^{i_3} t_{i_1 i_2 i_3}^{..j_1} \text{ et } t_{i_1 i_2 i_3}^{..j_1} = e_{i_1}^{l'_1} \theta_{k'_1}^{j_1} e_{i_2}^{l'_2} e_{i_3}^{l'_3} t_{l'_1 l'_2 l'_3}^{..k'_1}.$$

2.2.2 Changement de bases mixtes et de leurs bases mixtes duales

Changement de bases mixtes (pour les champs de vecteurs)

Soient (e_j) et $(\frac{\partial}{\partial x^b})$, respectivement, une base *mobile* et une base *naturelle*
 1
de $C^\infty(U; \bigotimes_{0} T^*M) = C^\infty(U; TM)$, avec :

$$e_j \triangleq \tilde{e}_j^b \frac{\partial}{\partial x^b} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x^b} \triangleq \tilde{\theta}_b^j e_j. \text{ Alors :}$$

$$e_j = \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_b^i e_i; \text{ soit } \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_b^i = \delta_j^i \text{ et } \frac{\partial}{\partial x^b} = \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_j^a \frac{\partial}{\partial x^a}; \text{ soit } \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_j^a = \delta_b^a.$$

Changement de base mobile duale (pour les champs de covecteurs)

Soient (θ^i) la base mobile duale de la base mobile (e_j) , telle que, par définition, $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ et (dx^a) la base naturelle duale de la base naturelle $(\frac{\partial}{\partial x^b})$, telle que, par définition, $dx^a(\frac{\partial}{\partial x^b}) = \delta_b^a$. Alors (mêmes démonstrations que précédemment) :

$$\theta^i = \tilde{\theta}_a^i dx^a \text{ et } dx^a = \tilde{e}_i^a \theta^i.$$

Soient (\tilde{e}_j^b) la matrice carrée, d'ordre m , ayant pour élément \tilde{e}_j^b sur la ligne j et la colonne b et $(\tilde{\theta}_a^i)$ la matrice carrée, d'ordre m , ayant pour élément $\tilde{\theta}_a^i$ sur la ligne a et la colonne i . Alors, d'après ce qui précède, on a :

$$(\tilde{\theta}_a^i) = (\tilde{e}_j^b)^{-1} \text{ et } (\tilde{e}_j^b) = (\tilde{\theta}_a^i)^{-1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (p, q) tenseurs lorsque les indices covariants sont en tête

$$\tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{..b_1 \dots b_q} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \dots \tilde{\theta}_{a_p}^{i_p} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} \dots \tilde{e}_{j_q}^{b_q} t_{i_1 \dots i_p}^{..j_1 \dots j_q} \text{ et :}$$

$$t_{i_1 \dots i_p}^{..j_1 \dots j_q} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \dots \tilde{e}_{i_p}^{a_p} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \dots \tilde{\theta}_{b_q}^{j_q} \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{..b_1 \dots b_q}.$$

Cas particuliers

Changement de composantes pour les champs de vecteurs ou de (0, 1) tenseurs (cas B)

Soit u un champ de vecteurs : $u = u^{j_1} e_{j_1} = \tilde{u}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}}$. Alors :

$$\tilde{u}^{b_1} = \tilde{e}_{j_1}^{b_1} u^{j_1} \text{ et } u^{j_1} = \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{u}^{b_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de covecteurs ou de (1, 0) tenseurs (cas C)

Soit a un champ de covecteurs : $a = a_{i_1} \theta^{i_1} = \tilde{a}_{a_1} dx^{a_1}$ Alors :

$$\tilde{a}_{a_1} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} a_{i_1} \text{ et } a_{i_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{a}_{a_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (0, 2) tenseurs (cas D)

Soit t un champ de (0, 2) tenseurs : $t = t^{j_1 j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2} = \tilde{t}^{b_1 b_2} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_2}}$.
Alors :

$$\tilde{t}^{b_1 b_2} = \tilde{e}_{j_1}^{b_1} \tilde{e}_{j_2}^{b_2} t^{j_1 j_2} \text{ et } t^{j_1 j_2} = \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{\theta}_{b_2}^{j_2} \tilde{t}^{b_1 b_2}.$$

Changement de composantes pour les champs de (1, 1) tenseurs (cas E)

Soit t un champ de (1, 1) tenseurs : $t = t_{i_1}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} = \tilde{t}_{a_1}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}}$.
Alors :

$$\tilde{t}_{a_1}^{b_1} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} t_{i_1}^{j_1} \text{ et } t_{i_1}^{j_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{t}_{a_1}^{b_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (2, 0) tenseurs ou champs de 2 - formes (cas F)

Soit t un champ de (2, 0) tenseurs : $t = t_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} = \tilde{t}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2}$.
Alors :

$$\tilde{t}_{a_1 a_2} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} t_{i_1 i_2} \text{ et } t_{i_1 i_2} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{t}_{a_1 a_2}.$$

Et, en particulier, pour les champs de 2 - formes différentielles extérieures (cas F-bis) : $\omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2}$, avec $\omega_{i_1 i_2}$ et $\tilde{\omega}_{a_1 a_2}$ alternés. Alors :

$$\tilde{\omega}_{a_1 a_2} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \omega_{i_1 i_2} \text{ et } \omega_{i_1 i_2} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{\omega}_{a_1 a_2}.$$

Changement de composantes pour les champs de (2, 1) tenseurs (cas G)

Soit t un champ de (2, 1) tenseurs :
 $t = t_{i_1 i_2}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes e_{j_1} = \tilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}}$. Alors :

$$\tilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} t_{i_1 i_2}^{j_1} \text{ et } t_{i_1 i_2}^{j_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (3, 1) tenseurs (cas H)

Soit t un champ de (3, 1) tenseurs :

$$t = t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3} = \tilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes dx^{a_2} \otimes dx^{a_3}. \text{ Alors :}$$

$$\tilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{b_1} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \tilde{\theta}_{a_3}^{i_3} t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} \text{ et } t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{e}_{i_3}^{a_3} \tilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{b_1}.$$

2.2.3 Changement de bases naturelles et de leurs bases naturelles duales

Changement de bases naturelles (pour les champs de vecteurs)

Soient $(\frac{\partial}{\partial x^b})$ et $(\frac{\partial}{\partial x^{c'}})$, respectivement, une « ancienne » et une « nouvelle » base naturelle de $C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{1 \\ 0}} T^*M) = C^\infty(U; TM)$, avec :

$$\frac{\partial}{\partial x^b} \triangleq \frac{\partial x^{c'}}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^{c'}} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x^{c'}} \triangleq \frac{\partial x^b}{\partial x^{c'}} \frac{\partial}{\partial x^b}. \text{ Alors :}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^b} = \frac{\partial x^{c'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial x^{c'}} \frac{\partial}{\partial x^a}; \text{ soit } \frac{\partial x^{c'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^a}{\partial x^{c'}} = \delta_b^a \text{ et } \frac{\partial}{\partial x^{c'}} = \frac{\partial x^b}{\partial x^{c'}} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^{d'}}; \text{ soit :}$$

$$\frac{\partial x^b}{\partial x^{c'}} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^b} = \delta_{c'}^{d'}.$$

Changement de base mobile duale (pour les champs de covecteurs)

Soient (dx^a) l' « ancienne » base naturelle duale de l' « ancienne » base naturelle $\frac{\partial}{\partial x^b}$, telle que, par définition, $dx^a(\frac{\partial}{\partial x^b}) = \delta_b^a$ et $(dx^{d'})$ la « nouvelle » base naturelle duale de la « nouvelle » base naturelle $(\frac{\partial}{\partial x^{c'}})$, telle que, par définition, $dx^{d'}(\frac{\partial}{\partial x^{c'}}) = \delta_{c'}^{d'}$. Alors (mêmes démonstrations que précédemment) :

$$dx^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{d'}} dx^{d'} \text{ et } dx^{d'} = \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^a} dx^a.$$

Changement de composantes pour les champs de (p, q) tenseurs lorsque les indices covariants sont en tête

$$\tilde{t}_{d'_1 \dots d'_p}^{c'_1 \dots c'_q} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{d'_1}} \dots \frac{\partial x^{a_p}}{\partial x^{d'_p}} \frac{\partial x^{c'_1}}{\partial x^{b_1}} \dots \frac{\partial x^{c'_q}}{\partial x^{b_q}} \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} \text{ [27] }^{31} \text{ et :}$$

$$\tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} = \frac{\partial x^{d'_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial x^{d'_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{c'_1}} \dots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial x^{c'_q}} \tilde{t}_{d'_1 \dots d'_p}^{c'_1 \dots c'_q}.$$

31. p. 519 éq. (8)

Cas particuliers

Changement de composantes pour les champs de vecteurs ou de (0, 1) tenseurs (cas B)

Soit u un champ de vecteurs : $u = \tilde{u}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} = \tilde{u}^{c'_1} \frac{\partial}{\partial x^{c'_1}}$. Alors :

$$\tilde{u}^{c'_1} = \frac{\partial x^{c'_1}}{\partial x^{b_1}} \tilde{u}^{b_1} \text{ et } \tilde{u}^{b_1} = \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{c'_1}} \tilde{u}^{c'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de covecteurs ou de (1, 0) tenseurs (cas C)

Soit a un champ de covecteurs : $a = \tilde{a}_{a_1} dx^{a_1} = \tilde{a}_{d'_1} dx^{d'_1}$ Alors :

$$\tilde{a}_{d'_1} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{d'_1}} \tilde{a}_{a_1} \text{ et } \tilde{a}_{a_1} = \frac{\partial x^{d'_1}}{\partial x^{a_1}} \tilde{a}_{d'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (0, 2) tenseurs (cas D)

Soit t un champ de (0, 2) tenseurs : $t = \tilde{t}^{b_1 b_2} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_2}} = \tilde{t}^{c'_1 c'_2} \frac{\partial}{\partial x^{c'_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{c'_2}}$. Alors :

$$\tilde{t}^{c'_1 c'_2} = \frac{\partial x^{c'_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial x^{c'_2}}{\partial x^{a_2}} \tilde{t}^{a_1 a_2} \text{ et } \tilde{t}^{a_1 a_2} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{c'_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial x^{c'_2}} \tilde{t}^{c'_1 c'_2}.$$

Changement de composantes pour les champs de (1, 1) tenseurs (cas E)

Soit t un champ de (1, 1) tenseurs : $t = \tilde{t}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} = \tilde{t}^{c'_1} dx^{d'_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{c'_1}}$. Alors :

$$\tilde{t}^{c'_1} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{d'_1}} \frac{\partial x^{c'_1}}{\partial x^{b_1}} \tilde{t}^{b_1} \text{ et } \tilde{t}^{b_1} = \frac{\partial x^{d'_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{c'_1}} \tilde{t}^{c'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (2, 0) tenseurs ou champs de 2 - formes (cas F)

Soit t un champ de (2, 0) tenseurs : $t = \tilde{t}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} = \tilde{t}_{d'_1 d'_2} dx^{d'_1} \otimes dx^{d'_2}$. Alors :

$$\tilde{t}_{d'_1 d'_2} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{d'_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial x^{d'_2}} \tilde{t}_{a_1 a_2} \text{ et } \tilde{t}_{a_1 a_2} = \frac{\partial x^{d'_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial x^{d'_2}}{\partial x^{a_2}} \tilde{t}_{d'_1 d'_2}.$$

Et, en particulier, pour les champs de 2 - formes différentielles extérieures (cas F-bis) : $\omega = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{d'_1 d'_2} dx^{d'_1} \wedge dx^{d'_2}$, avec $\tilde{\omega}_{a_1 a_2}$ et $\tilde{\omega}_{d'_1 d'_2}$ alternés. Alors :

$$\tilde{\omega}_{d'_1 d'_2} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{d'_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial x^{d'_2}} \tilde{\omega}_{a_1 a_2} \text{ et } \tilde{\omega}_{a_1 a_2} = \frac{\partial x^{d'_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial x^{d'_2}}{\partial x^{a_2}} \tilde{\omega}_{d'_1 d'_2}.$$

Changement de composantes pour les champs de (2, 1) tenseurs (cas G)

Soit t un champ de (2, 1) tenseurs :

$t = \tilde{t}_{a_1 a_2}^{..b_1} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} = \tilde{t}_{d'_1 d'_2}^{..c'_1} dx^{d'_1} \otimes dx^{d'_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{c'_1}}$. Alors :

$$\tilde{t}_{d'_1 d'_2}^{..c'_1} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{d'_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial x^{d'_2}} \frac{\partial x^{c'_1}}{\partial x^{b_1}} \tilde{t}_{a_1 a_2}^{..b_1} \text{ et } \tilde{t}_{a_1 a_2}^{..b_1} = \frac{\partial x^{d'_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial x^{d'_2}}{\partial x^{a_2}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{c'_1}} \tilde{t}_{d'_1 d'_2}^{..c'_1}.$$

Changement de composantes pour les champs de (3, 1) tenseurs (cas H)

Soit t un champ de (3, 1) tenseurs :

$$t = \tilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{..b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes dx^{a_2} \otimes dx^{a_3} = \tilde{t}_{d'_1 d'_2 d'_3}^{..c'_1} dx^{d'_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{c'_1}} \otimes dx^{d'_2} \otimes dx^{d'_3}.$$

Alors :

$$\tilde{t}_{d'_1 d'_2 d'_3}^{..c'_1} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x^{d'_1}} \frac{\partial x^{c'_1}}{\partial x^{b_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial x^{d'_2}} \frac{\partial x^{a_3}}{\partial x^{d'_3}} \tilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{..b_1} \text{ et } \tilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{..b_1} = \frac{\partial x^{d'_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{c'_1}} \frac{\partial x^{d'_2}}{\partial x^{a_2}} \frac{\partial x^{d'_3}}{\partial x^{a_3}} \tilde{t}_{d'_1 d'_2 d'_3}^{..c'_1}.$$

2.2.4 Changement de plusieurs bases mobiles et naturelles et de leurs bases duales

Soient (e_j) et $(e_{k'})$ 2 bases mobiles et $(\frac{\partial}{\partial x^b})$ et $(\frac{\partial}{\partial x^{c'}})$ 2 bases naturelles et (θ^i) et $(\theta^{i'})$ leurs bases mobiles duales et (dx^a) et $(dx^{d'})$ leurs bases naturelles duales respectives.

On a alors, par exemple :

- $e_{k'} = \tilde{e}_{k'}^{c'} \frac{\partial}{\partial x^{c'}}, \frac{\partial}{\partial x^{c'}} = \tilde{\theta}_{c'}^{k'} e_{k'}, \theta^{i'} = \tilde{\theta}_{d'}^{i'} dx^{d'}, dx^{d'} = \tilde{e}_{i'}^{d'} \theta^{i'}, (\tilde{\theta}_{d'}^{i'}) = (\tilde{e}_{k'}^{c'})^{-1}, (\tilde{e}_{k'}^{c'}) = (\tilde{\theta}_{d'}^{i'})^{-1}.$

- $e_j = \tilde{e}_j^{c'} \frac{\partial}{\partial x^{c'}}, \frac{\partial}{\partial x^{c'}} = \tilde{\theta}_c^j e_j, \theta^i = \tilde{\theta}_{d'}^i dx^{d'}, dx^{d'} = \tilde{e}_i^{d'} \theta^i, (\tilde{\theta}_{d'}^i) = (\tilde{e}_j^{c'})^{-1}, (\tilde{e}_j^{c'}) = (\tilde{\theta}_{d'}^i)^{-1}.$

- $e_{k'} = \tilde{e}_{k'}^b \frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^b} = \tilde{\theta}_b^{k'} e_{k'}, \theta^{i'} = \tilde{\theta}_a^{i'} dx^a, dx^a = \tilde{e}_i^a \theta^{i'}, (\tilde{\theta}_a^{i'}) = (\tilde{e}_{k'}^b)^{-1}, (\tilde{e}_{k'}^b) = (\tilde{\theta}_a^{i'})^{-1}.$

2.2.5 Crochet de deux champs de vecteurs

On pourra consulter [1]³² et [8]³³.

Dérivée pfaffienne d'une fonction numérique

Soit $\lambda \in \Omega^0(U)$. Alors λ est une fonction numérique sur U . Soit $d\lambda$ la différentielle *classique* de cette fonction numérique. Alors on a :

$$d\lambda \triangleq (\partial_i \lambda) \theta^i \triangleq \frac{\partial \lambda}{\partial x^a} dx^a \in \Omega^1(U).$$

32. pp. 209-211 mais qui définit le crochet, appelé crochet de Poisson ou commutateur, avec un signe opposé au notre

33. pp. 25-26

On dit que $\partial_i \lambda$ est la dérivée *pfafienne* de λ de la même manière que $\frac{\partial \lambda}{\partial x^a}$ est sa dérivée *classique*.

On a $(\partial_i \lambda) \theta^i = \frac{\partial \lambda}{\partial x^a} \tilde{e}_i^a \theta^i$ et donc $\partial_i \lambda = \tilde{e}_i^a \frac{\partial \lambda}{\partial x^a}$ et inversement $\frac{\partial \lambda}{\partial x^a} = \tilde{\theta}_a^i \partial_i \lambda$.

Formule de Liebniz

Soient $\lambda \in \Omega^0(U)$ et $\mu \in \Omega^0(U)$. Alors $\partial_i(\lambda \mu) = (\partial_i \lambda) \mu + \lambda \partial_i \mu$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \partial_i(\lambda \mu) &= \tilde{e}_i^b \frac{\partial(\lambda \mu)}{\partial x^b} = \tilde{e}_i^b \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^b} \mu + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial x^b} \right) = \left(\tilde{e}_i^b \frac{\partial \lambda}{\partial x^b} \right) \mu + \lambda \left(\tilde{e}_i^b \frac{\partial \mu}{\partial x^b} \right) \\ &= (\partial_i \lambda) \mu + \lambda \partial_i \mu \text{ QED.} \end{aligned}$$

Crochet

Soient les deux champs de vecteurs $u \in C^\infty(U; TM)$ et $v \in C^\infty(U; TM)$ alors $w \triangleq [u, v] \in C^\infty(U; TM)$ est le champ de vecteurs crochet des deux champs de vecteurs u et v tel que, en base naturelle :

$$w = \tilde{w}^e \frac{\partial}{\partial x^e}, \text{ avec :}$$

$$\tilde{w}^e \triangleq \tilde{u}^d \frac{\partial \tilde{v}^e}{\partial x^d} - \tilde{v}^d \frac{\partial \tilde{u}^e}{\partial x^d} \text{ [8] }^{34}.$$

Alors, en base mobile, $w = w^j e_j$, avec :

$$w^j = u^i \partial_i v^j - v^k \partial_k u^j + c_{i,k}^j u^i v^k, \text{ avec les coefficients :}$$

$c_{i,k}^j \triangleq \tilde{\theta}_e^j (\partial_i \tilde{e}_k^e - \partial_k \tilde{e}_i^e) = -c_{k,i}^j$, qualifiés de *constantes de structure de la base mobile* [8] ³⁵.

Démonstration

$w^j = \tilde{\theta}_e^j \tilde{w}^e = \tilde{\theta}_e^j [(\tilde{e}_i^d u^i) \frac{\partial(\tilde{e}_k^e v^k)}{\partial x^d} - (\tilde{e}_k^d v^k) \frac{\partial(\tilde{e}_i^e u^i)}{\partial x^d}]$. Soit, d'après la formule de Liebniz :

$$\begin{aligned} w^j &= \tilde{e}_e^j \tilde{\theta}_e^j u^i \tilde{e}_i^d \frac{\partial v^k}{\partial x^d} - \tilde{e}_i^e \tilde{\theta}_e^j v^k \tilde{e}_k^d \frac{\partial u^i}{\partial x^d} + \tilde{\theta}_e^j \left(\tilde{e}_i^d \frac{\partial \tilde{e}_k^e}{\partial x^d} - \tilde{e}_k^d \frac{\partial \tilde{e}_i^e}{\partial x^d} \right) u^i v^k \\ &= \delta_k^j u^i \partial_i v^k - \delta_i^j v^k \partial_k u^i + \tilde{\theta}_e^j (\partial_i \tilde{e}_k^e - \partial_k \tilde{e}_i^e) u^i v^k \\ &= u^i \partial_i v^j - v^k \partial_k u^j + c_{i,k}^j u^i v^k, \text{ avec : } c_{i,k}^j \triangleq \tilde{\theta}_e^j (\partial_i \tilde{e}_k^e - \partial_k \tilde{e}_i^e) \text{ QED.} \end{aligned}$$

Autres expressions des constantes de structure de la base mobile

$$\text{On a } c_{i,k}^j = [e_i, e_k]^j = \tilde{e}_i^e \partial_k \tilde{\theta}_e^j - \tilde{e}_k^e \partial_i \tilde{\theta}_e^j \text{ [8] }^{36}.$$

Démonstrations

34. p. 25 éq. 13.3

35. p. 155 pour un groupe de Lie, mais attention à cette dénomination car ces coefficients ne sont pas des constantes dans le cas général !

36. p. 238 éq. (5.11) pour la première égalité

Comme $w^j = [u, v]^j = u^l \partial_l v^j - v^n \partial_n u^j + c_{l,n}^j u^l v^n$ on a :

$$[e_i, e_k]^j = \delta_i^l \partial_l \delta_k^j - \delta_k^n \partial_n \delta_i^j + c_{l,n}^j \delta_i^l \delta_k^n = c_{i,k}^j \text{ QED.}$$

Et comme $\tilde{e}_k^e \tilde{\theta}_e^j = \delta_k^j$ et $\partial_i \delta_k^j = 0$ on a, d'après la formule de Liebniz :

$\tilde{e}_k^e \partial_i \tilde{\theta}_e^j + \tilde{\theta}_e^j \partial_i \tilde{e}_k^e = 0$; soit $\tilde{\theta}_e^j \partial_i \tilde{e}_k^e = -\tilde{e}_k^e \partial_i \tilde{\theta}_e^j$ et, en permutant les indices i et k : $-\tilde{\theta}_e^j \partial_k \tilde{e}_i^e = \tilde{e}_i^e \partial_k \tilde{\theta}_e^j$. Par conséquent :

$$c_{i,k}^j = [e_i, e_k]^j = \tilde{e}_i^e \partial_k \tilde{\theta}_e^j - \tilde{e}_k^e \partial_i \tilde{\theta}_e^j \text{ QED.}$$

Remarque : les constantes de structure de la base naturelle $\tilde{c}_{d,f}^e = [\frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^f}]^e$ sont nulles.

Démonstration

On a, dans la base naturelle :

$$\tilde{w}^e \triangleq \tilde{u}^d \frac{\partial \tilde{v}^e}{\partial x^d} - \tilde{v}^d \frac{\partial \tilde{u}^e}{\partial x^d} = \tilde{u}^d \frac{\partial \tilde{v}^e}{\partial x^d} - \tilde{v}^f \frac{\partial \tilde{u}^e}{\partial x^f} + \tilde{c}_{d,f}^e \tilde{u}^d \tilde{v}^f \text{ donc } \tilde{c}_{d,f}^e = 0 \text{ QED.}$$

Propriétés du crochet

Soient $u, v, w \in C^\infty(U; TM)$ et $\lambda, \mu \in \Omega^0(U)$; alors :

- $[v, u] = -[u, v]$ (anti-commutativité) [8]³⁷.

Démonstration

Il suffit de vérifier qu'avec les composantes en base naturelle :

$$[\widetilde{v, u}]^e = -[\widetilde{u, v}]^e, \text{ ce qui est bien le cas QED.}$$

- $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (identité de Jacobi) [8]³⁸.

Démonstration

Il suffit de vérifier qu'avec les composantes en base naturelle :

$$[\widetilde{u, [v, w]}]^e + [\widetilde{v, [w, u]}]^e + [\widetilde{w, [u, v]}]^e = 0. \text{ Or :}$$

$$\begin{aligned} [\widetilde{u, [v, w]}]^e &\triangleq \tilde{u}^d \frac{\partial [\widetilde{v, w}]^e}{\partial x^d} - [\widetilde{v, w}]^d \frac{\partial \tilde{u}^e}{\partial x^d} \\ &= \tilde{u}^d \frac{\partial}{\partial x^d} (\tilde{v}^f \frac{\partial \tilde{w}^e}{\partial x^f} - \tilde{w}^f \frac{\partial \tilde{v}^e}{\partial x^f}) - (\tilde{v}^f \frac{\partial \tilde{w}^d}{\partial x^f} - \tilde{w}^f \frac{\partial \tilde{v}^d}{\partial x^f}) \frac{\partial \tilde{u}^e}{\partial x^d} \\ &= \tilde{u}^d (\tilde{v}^f \frac{\partial^2 \tilde{w}^e}{\partial x^d \partial x^f} + \frac{\partial \tilde{v}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \tilde{w}^e}{\partial x^f} - \tilde{w}^f \frac{\partial^2 \tilde{v}^e}{\partial x^d \partial x^f} - \frac{\partial \tilde{w}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \tilde{v}^e}{\partial x^f}) \\ &- \tilde{v}^f \frac{\partial \tilde{w}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \tilde{u}^e}{\partial x^d} + \tilde{w}^f \frac{\partial \tilde{v}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \tilde{u}^e}{\partial x^d}. \text{ Et alors :} \end{aligned}$$

37. p. 26

38. p. 26

$$\begin{aligned}
& \widetilde{[u, [v, w]]}^e + \widetilde{[v, [w, u]]}^e + \widetilde{[w, [u, v]]}^e \\
&= \widetilde{u}^d \left(\widetilde{v}^f \frac{\partial^2 \widetilde{w}^e}{\partial x^d \partial x^f} + \frac{\partial \widetilde{v}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \widetilde{w}^e}{\partial x^f} - \widetilde{w}^f \frac{\partial^2 \widetilde{v}^e}{\partial x^d \partial x^f} - \frac{\partial \widetilde{w}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \widetilde{v}^e}{\partial x^f} \right) \\
&+ \widetilde{v}^d \left(\widetilde{w}^f \frac{\partial^2 \widetilde{u}^e}{\partial x^d \partial x^f} + \frac{\partial \widetilde{w}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \widetilde{u}^e}{\partial x^f} - \widetilde{u}^f \frac{\partial^2 \widetilde{w}^e}{\partial x^d \partial x^f} - \frac{\partial \widetilde{u}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \widetilde{w}^e}{\partial x^f} \right) \\
&+ \widetilde{w}^d \left(\widetilde{u}^f \frac{\partial^2 \widetilde{v}^e}{\partial x^d \partial x^f} + \frac{\partial \widetilde{u}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \widetilde{v}^e}{\partial x^f} - \widetilde{v}^f \frac{\partial^2 \widetilde{u}^e}{\partial x^d \partial x^f} - \frac{\partial \widetilde{v}^f}{\partial x^d} \frac{\partial \widetilde{u}^e}{\partial x^f} \right) \\
&- \widetilde{v}^f \frac{\partial \widetilde{w}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \widetilde{u}^e}{\partial x^d} + \widetilde{w}^f \frac{\partial \widetilde{v}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \widetilde{u}^e}{\partial x^d} - \widetilde{w}^f \frac{\partial \widetilde{u}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \widetilde{v}^e}{\partial x^d} + \widetilde{u}^f \frac{\partial \widetilde{w}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \widetilde{v}^e}{\partial x^d} - \widetilde{u}^f \frac{\partial \widetilde{v}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \widetilde{w}^e}{\partial x^d} + \widetilde{v}^f \frac{\partial \widetilde{u}^d}{\partial x^f} \frac{\partial \widetilde{w}^e}{\partial x^d} \\
&= 0 \text{ car, les termes s'éliminent deux à deux étant donné que les indices muets } d \text{ et } f \text{ peuvent être permutés et que les dérivées partielles secondes mixtes ne dépendent pas de l'ordre de dérivation partielle QED.}
\end{aligned}$$

$$\bullet [\lambda u, \mu v] = \lambda \mu [u, v] + \lambda (u^l \partial_l \mu) v - \mu (v^l \partial_l \lambda) u \text{ }^{39}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
& [\lambda u, \mu v]^j \triangleq (\lambda u)^i \partial_i (\mu v)^j - (\mu v)^k \partial_k (\lambda u)^j + c_{i,k}^j (\lambda u)^i (\mu v)^k \\
&= \lambda u^i \partial_i \mu v^j - \mu v^k \partial_k \lambda u^j + c_{i,k}^j \lambda \mu u^i v^k. \text{ Soit, d'après la formule de Liebniz :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\lambda u, \mu v]^j = \lambda u^i (\mu \partial_i v^j + v^j \partial_i \mu) - \mu v^k (\lambda \partial_k u^j + u^j \partial_k \lambda) + c_{i,k}^j \lambda \mu u^i v^k \\
&= \lambda \mu (u^i \partial_i v^j - v^k \partial_k u^j + c_{i,k}^j u^i v^k) + \lambda (u^i \partial_i \mu) v^j - \mu (v^k \partial_k \lambda) u^j \\
&= \lambda \mu [u, v]^j + \lambda (u^i \partial_i \mu) v^j - \mu (v^k \partial_k \lambda) u^j, \text{ donc :}
\end{aligned}$$

$$[\lambda u, \mu v] = \lambda \mu [u, v] + \lambda (u^l \partial_l \mu) v - \mu (v^l \partial_l \lambda) u \text{ QED.}$$

Propriété des constantes de structure de la base mobile

On a $(c_{j,k}^l c_{i,l}^m + \partial_i c_{j,k}^m) + (c_{k,i}^l c_{j,l}^m + \partial_j c_{k,i}^m) + (c_{i,j}^l c_{k,l}^m + \partial_k c_{i,j}^m) = 0; \forall i, j, k, m.$ et, en particulier, dans le cas où les coefficients $c_{i,j}^k$ sont constants on a $c_{j,k}^l c_{i,l}^m + c_{k,i}^l c_{j,l}^m + c_{i,j}^l c_{k,l}^m = 0; \forall i, j, k, m$ [8] ⁴⁰.

Démonstration

$$[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0 \text{ (identité de Jacobi). Soit :}$$

$$[e_i, c_{j,k}^l e_l] + [e_j, c_{k,i}^l e_l] + [e_k, c_{i,j}^l e_l] = 0.$$

Mais d'après la dernière relation démontrée on a :

$$\begin{aligned}
& [e_i, c_{j,k}^l e_l] = c_{j,k}^l [e_i, e_l] + 1 (\delta_i^p \partial_p c_{j,k}^l) e_l - c_{j,k}^l (\delta_l^p \partial_p 1) e_i \\
&= c_{j,k}^l c_{i,l}^m e_m + (\partial_i c_{j,k}^l) e_l = (c_{j,k}^l c_{i,l}^m + \partial_i c_{j,k}^m) e_m. \text{ Donc :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [e_i, c_{j,k}^l e_l] + [e_j, c_{k,i}^l e_l] + [e_k, c_{i,j}^l e_l] \\
&= (c_{j,k}^l c_{i,l}^m + \partial_i c_{j,k}^m) e_m + (c_{k,i}^l c_{j,l}^m + \partial_j c_{k,i}^m) e_m + (c_{i,j}^l c_{k,l}^m + \partial_k c_{i,j}^m) e_m. \text{ Et :}
\end{aligned}$$

$$(c_{j,k}^l c_{i,l}^m + \partial_i c_{j,k}^m) + (c_{k,i}^l c_{j,l}^m + \partial_j c_{k,i}^m) + (c_{i,j}^l c_{k,l}^m + \partial_k c_{i,j}^m) = 0; \forall i, j, k, m \text{ QED.}$$

³⁹. lorsque l'on définit la dérivée de Lie selon un champ de vecteurs on verra que $[\mathcal{L}_u, \mu v] = \lambda \mu [u, v] + \lambda (\mathcal{L}_u \mu) v - \mu (\mathcal{L}_v \lambda) u$

⁴⁰. p. 155 éq. (7.7) dans le cas des constantes de structure d'un groupe de Lie

Changements de base mobile

$$c_{i'.k'}^{j'} = \theta_{i'}^i e_j^{j'} \theta_{k'}^k c_{i.k}^j + \theta_{i'}^i \partial_{k'} e_i^{j'} - \theta_{k'}^k \partial_{i'} e_k^{j'} \text{ et}$$

$$c_{i.k}^j = e_i^{i'} \theta_{j'}^j e_k^{k'} c_{i'.k'}^{j'} + e_i^{i'} \partial_k \theta_{i'}^j - e_k^{k'} \partial_{i'} \theta_{k'}^j$$

Donc les $c_{i.j}^k$ ne sont pas, en général, les composantes d'un champ de $(2, 1)$ tenseurs.

Chapitre 3

Deuxième partie : ce qui est indépendant des connexions

3.1 Ce qui est valable pour tous les champs de tenseurs t : la dérivée de Lie \mathcal{L}_u selon le champ de vecteurs u

On pourra consulter :

- pour la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs selon un champ de vecteurs : [8]¹ et [30]²,
- pour la dérivée de Lie d'un champ de tenseurs contravariants selon un champ de vecteurs : [8]³ et [30]⁴,
- pour la dérivée de Lie d'un champ de tenseurs covariants selon un champ de vecteurs : [8]⁵ et [30]⁶,
- pour la dérivée de Lie d'un champ de tenseurs quelconques selon un champ de vecteurs : [11]⁷ [23]⁸ et [30]⁹.

Certains auteurs notent ∂_u à la place de \mathcal{L}_u .

1. p. 26 et pp. 143-146 § 4
2. p. 116 éq. (3-6) et pp. 202-206 § 1.A.2
3. pp. 146-147 § 4
4. p. 206 éq. (6-3) et p. 211 éq. (6-12)
5. pp. 147-148 § 4
6. p. 206 éq. (6-4) et p. 211 éq. (6-11)
7. pp. 205-210 § 23-2
8. p. 81 éq. (12.1)
9. p. 212 éq. (6-13) § 1.A.6

3.1.1 Définition

Soit u un champ de vecteurs [$u \in C^\infty(U; TM)$] et t un champ de
 (p, q) -tenseurs [$t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$].

En base mobile si $t = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \dots \otimes e_{j_q}$ et $u = u^i e_i$
on a :

$$\mathcal{L}_u t \triangleq (\mathcal{L}_u t)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \dots \otimes e_{j_q}, \text{ avec :}$$

$$(\mathcal{L}_u t)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \triangleq$$

$$u^i (\partial_i t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + c_{i_1 i}^k t_{k i_2 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \dots + c_{i_p i}^k t_{i_1 \dots i_{p-1} k}^{j_1 \dots j_q} + c_{i.k}^{j_1} t_{i_1 \dots i_p}^{k j_2 \dots j_q} + \dots + c_{i.k}^{j_q} t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{q-1} k})$$

$$+ t_{k i_2 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \partial_{i_1} u^k + \dots + t_{i_1 \dots i_{p-1} k}^{j_1 \dots j_q} \partial_{i_p} u^k - t_{i_1 \dots i_p}^{k j_2 \dots j_q} \partial_k u^{j_1} - \dots - t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{q-1} k} \partial_k u^{j_q},$$

les dérivées pfaffiennes apparaissent donc [11]¹⁰.

En base naturelle si $t = \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_q}}$
et $u = \tilde{u}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ on a :

$$\widetilde{\mathcal{L}_u t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} \triangleq \tilde{u}^a \frac{\partial \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}}{\partial x^a} + \tilde{t}_{c a_2 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} \frac{\partial \tilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \dots + \tilde{t}_{a_1 \dots a_{p-1} c}^{b_1 \dots b_q} \frac{\partial \tilde{u}^c}{\partial x^{a_p}}$$

$$- \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{c b_2 \dots b_q} \frac{\partial \tilde{u}^{b_1}}{\partial x^c} - \dots - \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_{q-1} c} \frac{\partial \tilde{u}^{b_q}}{\partial x^c}.$$

Alors on constate aisément que :

$$\mathcal{L}_u \in L[C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M); C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)], \text{ i.e.}$$

si $t, t' \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$:

$$\mathcal{L}_u(t + t') = \mathcal{L}_u t + \mathcal{L}_u t', \text{ égalité dans } C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$$

et

$$\mathcal{L}_u(kt) = k \mathcal{L}_u t, \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \text{ égalité dans } C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M).$$

10. p. 206 éq. (15) mais écrite en base naturelle

3.1.2 Exemples

Cas A : $p = 0, q = 0$

Voir ci-après car il s'agit de la dérivée de Lie d'un champ particulier de formes différentielles extérieures. On verra que $\mathcal{L}_u \lambda = u^i \partial_i \lambda = \widetilde{u}^a \frac{\partial \lambda}{\partial x^a}$.

Cas B : $p = 0, q = 1$

$$v = v^{j_1} e_{j_1} = \widetilde{v}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \text{ et } \mathcal{L}_u v = (\mathcal{L}_u v)^{j_1} e_{j_1} = \widetilde{\mathcal{L}_u v}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}}, \text{ avec :}$$

$$(\mathcal{L}_u v)^{j_1} = u^i (\partial_i v^{j_1} + c_{i.k}^{j_1} v^k) - v^k \partial_k u^{j_1} \text{ et } \widetilde{\mathcal{L}_u v}^{b_1} = \widetilde{u}^a \frac{\partial \widetilde{v}^{b_1}}{\partial x^a} - \widetilde{v}^c \frac{\partial \widetilde{u}^{b_1}}{\partial x^c}.$$

Remarque : on constate que $\mathcal{L}_u v = [u, v]$.

$$\begin{aligned} \text{En effet } (\mathcal{L}_u v)^j &= u^i (\partial_i v^j + c_{i.k}^j v^k) - v^k \partial_k u^j \\ &= u^i \partial_i v^j - v^k \partial_k u^j + c_{i.k}^j u^i v^k = [u, v]^j. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{L}_u v = -\mathcal{L}_v u$ puisque $[u, v] = -[v, u]$ [8]¹¹ et [11]¹².

Cas C : $p = 1, q = 0$

Voir ci-après car il s'agit de la dérivée de Lie d'un champ particulier de formes différentielles extérieures.

Cas D : $p = 0, q = 2$

$$t = t^{j_1 j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2} = \widetilde{t}^{b_1 b_2} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_2}} \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_u t = (\mathcal{L}_u t)^{j_1 j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2} = \widetilde{\mathcal{L}_u t}^{b_1 b_2} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_2}}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_u t)^{j_1 j_2} &= u^i (\partial_i t^{j_1 j_2} + c_{i.k}^{j_1} t^{k j_2} + c_{i.k}^{j_2} t^{j_1 k}) - t^{k j_2} \partial_k u^{j_1} - t^{j_1 k} \partial_k u^{j_2} \text{ et} \\ \widetilde{\mathcal{L}_u t}^{b_1 b_2} &= \widetilde{u}^a \frac{\partial \widetilde{t}^{b_1 b_2}}{\partial x^a} - \widetilde{t}^{c b_2} \frac{\partial \widetilde{u}^{b_1}}{\partial x^c} - \widetilde{t}^{b_1 c} \frac{\partial \widetilde{u}^{b_2}}{\partial x^c}. \end{aligned}$$

Cas E : $p = 1, q = 1$

$$t = t_{i_1}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} = \widetilde{t}_{a_1}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_u t = (\mathcal{L}_u t)_{i_1}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} = \widetilde{\mathcal{L}_u t}_{a_1}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_u t)_{i_1}^{j_1} &= u^i (\partial_i t_{i_1}^{j_1} + c_{i_1.i}^k t_k^{j_1} + c_{i.k}^{j_1} t_{i_1}^k) + t_k^{j_1} \partial_{i_1} u^k - t_{i_1}^k \partial_k u^{j_1} \text{ et} \\ \widetilde{\mathcal{L}_u t}_{a_1}^{b_1} &= \widetilde{u}^a \frac{\partial \widetilde{t}_{a_1}^{b_1}}{\partial x^a} + \widetilde{t}_{c_1}^{b_1} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} - \widetilde{t}_{a_1}^c \frac{\partial \widetilde{u}^{b_1}}{\partial x^c}. \end{aligned}$$

11. p. 146 éq. 4.10

12. p. 207 éq. (18)

Cas F : $p = 2, q = 0$

$$\begin{aligned}
t &= t_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} = \widetilde{t}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \text{ et} \\
\mathcal{L}_u t &= (\mathcal{L}_u t)_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} = \widetilde{\mathcal{L}}_u t_{a_1 a_2} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2}, \text{ avec :} \\
(\mathcal{L}_u t)_{i_1 i_2} &= u^i (\partial_i t_{i_1 i_2} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{k i_2} + c_{i_2 \cdot i}^k t_{i_1 k}) + t_{k i_2} \partial_{i_1} u^k + t_{i_1 k} \partial_{i_2} u^k \text{ et} \\
\widetilde{\mathcal{L}}_u t_{a_1 a_2} &= \widetilde{u}^a \frac{\partial \widetilde{t}_{a_1 a_2}}{\partial x^a} + \widetilde{t}_{c a_2} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \widetilde{t}_{a_1 c} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_2}}.
\end{aligned}$$

Cas F-bis : $p = 2, q = 0$

Voir ci-après car il s'agit de la dérivée de Lie d'un champ particulier de formes différentielles extérieures.

Cas G : $p = 2, q = 1$

$$\begin{aligned}
t &= t_{i_1 i_2}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes e_{j_1} = \widetilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \text{ et} \\
\mathcal{L}_u t &= (\mathcal{L}_u t)_{i_1 i_2}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes e_{j_1} = \widetilde{\mathcal{L}}_u t_{a_1 a_2}^{b_1} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}}, \text{ avec :} \\
(\mathcal{L}_u t)_{i_1 i_2}^{j_1} &= u^i (\partial_i t_{i_1 i_2}^{j_1} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{k i_2}^{j_1} + c_{i_2 \cdot i}^k t_{i_1 k}^{j_1} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{i_1 k}^{j_1} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{i_1 i_2}^k) \\
&+ t_{k i_2}^{j_1} \partial_{i_1} u^k + t_{i_1 k}^{j_1} \partial_{i_2} u^k - t_{i_1 i_2}^{j_1} \partial_k u^{j_1} \text{ et} \\
\widetilde{\mathcal{L}}_u t_{a_1 a_2}^{b_1} &= \widetilde{u}^a \frac{\partial \widetilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1}}{\partial x^a} + \widetilde{t}_{c a_2}^{b_1} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \widetilde{t}_{a_1 c}^{b_1} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_2}} - \widetilde{t}_{a_1 a_2}^{c_1} \frac{\partial \widetilde{u}^{b_1}}{\partial x^c}
\end{aligned}$$

Cas H : $p = 3, q = 1$

$$\begin{aligned}
t &= t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3} = \widetilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes dx^{a_2} \otimes dx^{a_3} \text{ et} \\
\mathcal{L}_u t &= (\mathcal{L}_u t)_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3} = \widetilde{\mathcal{L}}_u t_{a_1 a_2 a_3}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes dx^{a_2} \otimes dx^{a_3}, \text{ avec :} \\
(\mathcal{L}_u t)_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} &= u^i (\partial_i t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{k i_2 i_3}^{j_1} + c_{i_2 \cdot i}^k t_{i_1 k i_3}^{j_1} + c_{i_3 \cdot i}^k t_{i_1 i_2 k}^{j_1} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{i_1 i_2 i_3}^k) \\
&+ t_{k i_2 i_3}^{j_1} \partial_{i_1} u^k + t_{i_1 k i_3}^{j_1} \partial_{i_2} u^k + t_{i_1 i_2 k}^{j_1} \partial_{i_3} u^k - t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} \partial_k u^{j_1} \text{ et} \\
(\mathcal{L}_u t)_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} &= u^i (\partial_i t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{k i_2 i_3}^{j_1} + c_{i_2 \cdot i}^k t_{i_1 k i_3}^{j_1} + c_{i_3 \cdot i}^k t_{i_1 i_2 k}^{j_1} + c_{i_1 \cdot i}^k t_{i_1 i_2 i_3}^k) \\
&+ t_{k i_2 i_3}^{j_1} \partial_{i_1} u^k + t_{i_1 k i_3}^{j_1} \partial_{i_2} u^k + t_{i_1 i_2 k}^{j_1} \partial_{i_3} u^k - t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1} \partial_k u^{j_1} \text{ et} \\
\widetilde{\mathcal{L}}_u t_{a_1 a_2 a_3}^{b_1} &= \widetilde{u}^a \frac{\partial \widetilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{b_1}}{\partial x^a} + \widetilde{t}_{c a_2 a_3}^{b_1} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \widetilde{t}_{a_1 c a_3}^{b_1} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_2}} + \widetilde{t}_{a_1 a_2 c}^{b_1} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_3}} - \widetilde{t}_{a_1 a_2 a_3}^{c_1} \frac{\partial \widetilde{u}^{b_1}}{\partial x^c}
\end{aligned}$$

3.1.3 Propriétés

Formules de Liebniz

- Si $\lambda \in \Omega^0(U) : \mathcal{L}_u(\lambda t) = (\mathcal{L}_u \lambda) t + \lambda \mathcal{L}_u t$, égalité dans $C^\infty(U; \overset{q}{\otimes} T^*M)$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration avec les composantes en base naturelle.

$$\widetilde{\mathcal{L}_u(\lambda t)}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \triangleq \widetilde{u}^a \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{\lambda t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} + \widetilde{\lambda t}_{ca_2 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \widetilde{u}^c + \dots + \widetilde{\lambda t}_{a_1 \dots a_{p-1}c}^{\dots b_1 \dots b_q} \frac{\partial}{\partial x^{a_p}} \widetilde{u}^c - \widetilde{\lambda t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots cb_2 \dots b_q} \frac{\partial}{\partial x^c} \widetilde{u}^{b_1} - \dots - \widetilde{\lambda t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_{q-1}c} \frac{\partial}{\partial x^c} \widetilde{u}^{b_q}.$$

$$\text{Mais } \widetilde{\lambda t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} = \lambda \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \text{ et } \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{\lambda t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} = \frac{\partial \lambda}{\partial x^a} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}_u(\lambda t)}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} &= \widetilde{u}^a \frac{\partial \lambda}{\partial x^a} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \\ &+ \lambda \left(\widetilde{u}^a \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} + \widetilde{t}_{ca_2 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \widetilde{u}^c + \dots + \widetilde{t}_{a_1 \dots a_{p-1}c}^{\dots b_1 \dots b_q} \frac{\partial}{\partial x^{a_p}} \widetilde{u}^c \right. \\ &\left. - \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots cb_2 \dots b_q} \frac{\partial}{\partial x^c} \widetilde{u}^{b_1} - \dots - \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_{q-1}c} \frac{\partial}{\partial x^c} \widetilde{u}^{b_q} \right). \text{ Soit :} \end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}_u(\lambda t)}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} = (\mathcal{L}_u \lambda) \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} + \lambda \widetilde{\mathcal{L}_u t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \text{ et donc :}$$

$$\mathcal{L}_u(\lambda t) = (\mathcal{L}_u \lambda) t + \lambda \mathcal{L}_u t \text{ QED.}$$

Une seconde démonstration est indiquée ci-après.

• Si $t \in C^\infty(U; \underset{p}{\otimes}^q T^*M)$ et $t' \in C^\infty(U; \underset{p'}{\otimes}^{q'} T^*M)$ alors

$$t \otimes t' \in C^\infty(U; \underset{p+p'}{\otimes}^{q+q'} T^*M) \text{ et :}$$

$$\mathcal{L}_u(t \otimes t') = (\mathcal{L}_u t) \otimes t' + t \otimes \mathcal{L}_u t', \text{ égalité dans } C^\infty(U; \underset{p+p'}{\otimes}^{q+q'} T^*M)$$

[8]¹³ [11]¹⁴ et [30]¹⁵.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration avec les composantes en base naturelle.

$$\text{Soit } t'' = t \otimes t'; \text{ alors } \widetilde{t''}_{a_1 \dots a_{p+p'}}^{\dots b_1 \dots b_{q+q'}} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \widetilde{t'}_{a_{p+1} \dots a_{p+p'}}^{\dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}}.$$

Calculs préliminaires

13. p. 147 éq. (4.14) donnée pour les champs de tenseurs contravariants et rappelée pour les champs de tenseurs covariants mais non démontrée

14. p. 209 exercice 1 non traité

15. p. 212 mais non démontrée

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_1 \dots b_q \right) \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} + \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{ca_2 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

...

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_{p-1} c a_{p+1} \dots a_{p+p'}} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p c a_{p+2} \dots a_{p+p'}} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

...

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}. \text{ Et :}$$

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

...

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

...

$$\widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} = \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}.$$

$$\text{Donc } \widetilde{\mathcal{L}}_u \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'}$$

$$\begin{aligned} &= \widetilde{u}^a \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} + \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \dots + \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_{p+1}}} \\ &+ \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_{p+1}}} + \dots + \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_{p+p'}}} \\ &- \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_1}} - \dots - \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_q}} \\ &- \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_{q+1}}} - \dots - \widetilde{t}'' \dots b_1 \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_{q+q'}}} \\ &= \left(\widetilde{u}^a \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q + \widetilde{t}_{ca_2 \dots a_p} \dots b_q \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \dots + \widetilde{t}_{a_1 \dots a_{p-1} c} \dots b_q \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_p}} \right. \\ &- \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_1}} - \dots - \left. \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_q}} \right) \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} \\ &+ \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \left(\widetilde{u}^a \frac{\partial}{\partial x^a} \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} + \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_{p+1}}} + \dots + \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_{p+p'}}} \right. \\ &- \left. \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_{q+1}}} - \dots - \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{b_{q+q'}}} \right) \\ &= \widetilde{\mathcal{L}}_u \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} + \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p} \dots b_q \widetilde{\mathcal{L}}_u \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'} \\ &= (\mathcal{L}_u t) \otimes \widetilde{t}' + t \otimes \mathcal{L}_u \widetilde{t}' \dots b_{q+1} \dots b_{q+q'}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}_u t'' = \mathcal{L}_u (t \otimes t') = (\mathcal{L}_u t) \otimes t' + t \otimes \mathcal{L}_u t' \text{ QED.}$$

Remarque :

$\mathcal{L}_u(\lambda t) = \mathcal{L}_u(\lambda \otimes t) = (\mathcal{L}_u \lambda) \otimes t + \lambda \otimes \mathcal{L}_u t = (\mathcal{L}_u \lambda)t + \lambda \mathcal{L}_u t$; il s'agit de la seconde démonstration de cette propriété.

Autres propriétés

$$\mathcal{L}_{u+u'} = \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_{u'} \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_{ku} = k \mathcal{L}_u \text{ (} k \in \mathbb{R} \text{) mais}$$

$$\mathcal{L}_{\lambda u} \neq \lambda \mathcal{L}_u \text{ [} \lambda \in \Omega^0(U) \text{] et donc } \mathcal{L}_{u^i e_i} \neq u^i \mathcal{L}_{e_i}.$$

Démonstrations

Les démonstrations des deux premières propriétés sont évidentes QED. Démontrons la troisième en utilisant les composantes en base naturelle.

Le calcul montre que $\forall t \in C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{q \\ p}} T^*M)$:

$$\widetilde{\mathcal{L}_{\lambda u} t_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}} = \lambda \widetilde{\mathcal{L}_u t_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}} + (\widetilde{t_{ca_2 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{a_1}} + \dots + \widetilde{t_{a_1 \dots a_{p-1} c}^{b_1 \dots b_q}} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{a_p}}) \widetilde{u}^c - (\widetilde{t_{a_1 \dots a_p}^{cb_2 \dots b_q}} \widetilde{u}^{b_1} + \dots + \widetilde{t_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_{q-1} c}} \widetilde{u}^{b_q}) \frac{\partial \lambda}{\partial x^c} \text{ et donc :}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}_{\lambda u} t_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}} \neq \lambda \widetilde{\mathcal{L}_u t_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}} ; \text{ soit :}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}_{\lambda u} t} \neq \lambda \widetilde{\mathcal{L}_u t} ; \forall t \text{ et finalement :}$$

$$\mathcal{L}_{\lambda u} \neq \lambda \mathcal{L}_u \text{ QED.}$$

Identité de Jacobi

$$\mathcal{L}_u \mathcal{L}_{u'} u'' + \mathcal{L}_{u'} \mathcal{L}_u u'' + \mathcal{L}_{u''} \mathcal{L}_u u' = 0.$$

Démonstration

Il s'agit de l'identité de Jacobi :

$$[u, [u', u'']] + [u', [u'', u]] + [u'', [u, u']] = 0 \text{ déjà démontrée QED.}$$

3.1.4 Définition du crochet $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v]$ pour $u, v \in C^\infty(U; TM)$

$\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v \in L[C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M); C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)]$, espace vectoriel, donc il en est de même pour $\mathcal{L}_u \circ \mathcal{L}_v, \mathcal{L}_v \circ \mathcal{L}_u$ et $\mathcal{L}_u \circ \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \circ \mathcal{L}_u$.

On pose $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] \triangleq \mathcal{L}_u \circ \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \circ \mathcal{L}_u$,
égalité dans $L[C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M); C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)]$.

Propriété

$$[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] = \mathcal{L}_{[u, v]} \triangleq \mathcal{L}_{\mathcal{L}_u v}$$

$$\text{i.e. } [\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] t = \mathcal{L}_{[u, v]} t \triangleq \mathcal{L}_{\mathcal{L}_u v} t; \forall t \in C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)$$

[8]¹⁶ [11]¹⁷ et [30]¹⁸.

Démonstration par récurrence

- Nous allons établir tout d'abord cette propriété pour $\lambda \in \Omega^0(U)$.

$\mathcal{L}_{[u, v]} \lambda = [u, v]^j \partial_j \lambda = (u^i \partial_i v^j - v^k \partial_k u^j + c_{i,k}^j u^i v^k) \partial_j \lambda$
 $= u^i (\partial_i v^j) (\partial_j \lambda) - v^k (\partial_k u^j) (\partial_j \lambda) + u^i v^k [\partial_i (\partial_k \lambda) - \partial_k (\partial_i \lambda)]$, car on établira ci-après la relation $c_{i,k}^j \partial_j \lambda = \partial_i (\partial_k \lambda) - \partial_k (\partial_i \lambda)$.

Étant donné que $\mathcal{L}_u \lambda = u^a \partial_a \lambda$ et $\mathcal{L}_v \lambda = v^b \partial_b \lambda$ on a :

$$\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v \lambda = u^i \partial_i (v^b \partial_b \lambda) = u^i (\partial_i v^j) (\partial_j \lambda) + u^i v^k \partial_i (\partial_k \lambda) \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_v \mathcal{L}_u \lambda = v^k \partial_k (u^a \partial_a \lambda) = v^k (\partial_k u^j) (\partial_j \lambda) + v^k u^i \partial_k (\partial_i \lambda).$$

Par conséquent $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] \lambda \triangleq \mathcal{L}_u \mathcal{L}_v \lambda - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u \lambda = \mathcal{L}_{[u, v]} \lambda$ et la propriété est vraie pour $t = \lambda \in \Omega^0(U)$ QED.

- Supposons que $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] t = \mathcal{L}_{[u, v]} t$; pour $t \in C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)$ et

16. p. 146 éq. (4.11) écrite pour $t = w \in C^\infty(U; TM)$ et qualifiée d'identité de Jacobi car alors $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] w = \mathcal{L}_{[u, v]} w$ s'écrit $\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v w - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u w - \mathcal{L}_{[u, v]} w$, soit $[u, [v, w]] - [v, [u, w]] - [[u, v], w]$ ou $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]]$, ce qui est bien l'identité de Jacobi

17. pp. 207-208 Théorème 1 écrite pour $t = \lambda \in \Omega^0(U)$

18. p. 234 Exercice 8 écrite pour $t = \omega \in \Omega^p(U)$

$[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] t' = \mathcal{L}_{[u,v]} t'$; pour $t' \in C^\infty(U; \underset{p'}{\otimes} T^*M)$ alors nous allons établir

que $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] t'' = \mathcal{L}_{[u,v]} t''$; pour $t'' \triangleq t \otimes t' \in C^\infty(U; \underset{p+p'}{\otimes} T^*M)$ ce qui,

de proche en proche, suffira à établir la propriété.

$$\begin{aligned}
& \bullet [\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] t'' \triangleq \mathcal{L}_u \mathcal{L}_v t'' - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u t'' \\
& = \mathcal{L}_u ((\mathcal{L}_v t) \otimes t' + t \otimes \mathcal{L}_v t') - \mathcal{L}_v ((\mathcal{L}_u t) \otimes t' + t \otimes \mathcal{L}_u t') \\
& \mathcal{L}_u ((\mathcal{L}_v t) \otimes t') + \mathcal{L}_u (t \otimes \mathcal{L}_v t') - \mathcal{L}_v ((\mathcal{L}_u t) \otimes t') - \mathcal{L}_v (t \otimes \mathcal{L}_u t') \\
& = (\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v t) \otimes t' + (\mathcal{L}_v t) \otimes \mathcal{L}_u t' + (\mathcal{L}_u t) \otimes \mathcal{L}_v t' + t \otimes \mathcal{L}_u \mathcal{L}_v t' \\
& - (\mathcal{L}_v \mathcal{L}_u t) \otimes t' - (\mathcal{L}_u t) \otimes \mathcal{L}_v t' - (\mathcal{L}_v t) \otimes \mathcal{L}_u t' - t \otimes \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u t' \\
& = (\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v t - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u t) \otimes t' + t \otimes (\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v t' - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u t') = (\mathcal{L}_{[u,v]} t) \otimes t' + t \otimes \mathcal{L}_{[u,v]} t' \\
& = \mathcal{L}_{[u,v]} t'' \text{ QED.}
\end{aligned}$$

3.2 Ce qui est valable uniquement pour les champs de formes différentielles extérieures

D (dérivation), de degré r .

A (antidérivation), de degré r .

d (différentielle extérieure), antidérivation de degré 1.

i_u (produit intérieur selon le champ de vecteurs u),

- dérivation de degré -1 si p est pair et :
- antidérivation de degré -1 si p est impair.

$D \in L[\Omega^p(U); \Omega^{p+r}(U)]$. $A \in L[\Omega^p(U); \Omega^{p+r}(U)]$.

$d \in L[\Omega^p(U); \Omega^{p+1}(U)]$. $i_u \in L[\Omega^p(U); \Omega^{p-1}(U)]$.

3.2.1 Dérivation D et antidérivation A

On pourra consulter [23]¹⁹ et [30]²⁰.

$$\text{Dérivation } D, \text{ de degré } r^{21} : \Omega^p(U) \xrightarrow[\omega]{D} \Omega^{p+r}(U)$$

19. pp. 87-88 § 15

20. p. 218 § D

21. On pourrait généraliser ces notions au cas des champs de tenseurs et non plus uniquement à celui des champs de formes différentielles extérieures; on montrerait alors que la dérivée de Lie est une dérivation ainsi que la différentielle suivant un champ de vecteurs (cf. ci-après)

$$D \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire} : \Omega^{p+p'}(U) \xrightarrow[\omega \wedge \omega']{D} \Omega^{p+p'+r}(U),$$

$$\xrightarrow{\quad} D(\omega \wedge \omega') \triangleq (D\omega) \wedge \omega' + \omega \wedge D\omega'$$

avec $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$

Exemples : (cf. ci-après)

\mathcal{L}_u est une dérivation de degré 0

i_u , si p est pair, est une dérivation de degré -1

$$\text{Antidérivation } A, \text{ de degré } r : \Omega^p(U) \xrightarrow[\omega]{A} \Omega^{p+r}(U)$$

$$\xrightarrow{\quad} A\omega$$

$$A \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire} : \Omega^{p+p'}(U) \xrightarrow[\omega \wedge \omega']{A} \Omega^{p+p'+r}(U),$$

$$\xrightarrow{\quad} A(\omega \wedge \omega') \triangleq (A\omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge A\omega'$$

avec $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$

Exemples : (cf. ci-après)

d est une antidérivation de degré 1

i_u , si p est impair, est une antidérivation de degré -1

3.2.2 La différentielle extérieure d

On pourra consulter [8]²², [11]²³, [23]²⁴ et [30]²⁵.

Définition

Soit ω une p - forme différentielle extérieure [$\omega \in \Omega^p(U)$] alors $d\omega$ est une $p+1$ - forme différentielle extérieure [$d\omega \in \Omega^{p+1}(U)$] telle que si :

$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} = \frac{1}{p!} \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$, avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ et $\tilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}$ alternés, alors :

$$d\omega \triangleq \frac{1}{(p+1)!} (d\omega)_{i_0 \dots i_p} \theta^{i_0} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \triangleq \frac{1}{(p+1)!} \tilde{d}\omega_{a_0 \dots a_p} dx^{a_0} \wedge \dots \wedge dx^{a_p},$$

avec $(d\omega)_{i_0 \dots i_p}$ et $\tilde{d}\omega_{a_0 \dots a_p}$ alternés tels que :

$$(d\omega)_{i_0 \dots i_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q \partial_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_q \dots i_p}$$

$$+ \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} c_{i_q i_r}^i \omega_{i i_0 \dots \hat{i}_q \dots \hat{i}_r \dots i_p} \quad (\hat{i}_q \text{ et } \hat{i}_r \text{ termes omis}) \text{ et :}$$

$$\tilde{d}\omega_{a_0 \dots a_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_0 \dots \hat{a}_q \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \quad (\hat{a}_q \text{ terme omis}).$$

22. pp. 59-63 § 5

23. pp. 228-237 Chapitre 4 § 25

24. pp. 93-98 § 18, pp. 120-121 § 29.3 et pp. 210-211 § 16.4

25. pp. 188-199 § 4

En effet on va démontrer que $\widetilde{d}\omega_{a_0 \dots a_p}$ ainsi défini, est effectivement alterné ce qui prouvera que $(d\omega)_{i_0 \dots i_p}$, ainsi défini, l'est également.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}\omega_{a_0 \dots a_p} &= \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_p}}{\partial x^{a_q}}. \text{ Donc, si } r < r' : \\
&* \widetilde{d}\omega_{a_0 \dots a_r \dots a_{r'} \dots a_p} \\
&= \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_r \dots a_{r'} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} + (-1)^r \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots \widehat{a}_r \dots a_{r'} \dots a_p}}{\partial x^{a_r}} \\
&+ \sum_{q=r+1}^{r'-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_r \dots \widehat{a}_q \dots a_{r'} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} + (-1)^{r'} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_r \dots \widehat{a}_{r'} \dots a_p}}{\partial x^{a_{r'}}} \\
&+ \sum_{q=r'+1}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_r \dots a_{r'} \dots \widehat{a}_q \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&= - \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&+ (-1)^r \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_{r'} \dots a_p}}{\partial x^{a_r}} \\
&- \sum_{q=r+1}^{r'-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots \widehat{a}_q \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&+ (-1)^{r'} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_r \dots a_{r'-1} a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_{r'}}} \\
&- \sum_{q=r'+1}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots \widehat{a}_q \dots a_p}}{\partial x^{a_q}}. \text{ Et :} \\
&* \widetilde{d}\omega_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p} \\
&= \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&+ (-1)^{r'} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} \widehat{a}_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_{r'}}} \\
&+ \sum_{q=r+1}^{r'-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots \widehat{a}_q \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&+ (-1)^r \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} \widehat{a}_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_r}} \\
&+ \sum_{q=r'+1}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots \widehat{a}_q \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&= \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&- (-1)^{r'} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_r \dots a_{r'-1} a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_{r'}}} \\
&+ \sum_{q=r+1}^{r'-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots \widehat{a}_q \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \\
&- (-1)^r \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_{r'} \dots a_p}}{\partial x^{a_r}} \\
&+ \sum_{q=r'+1}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots \widehat{a}_q \dots a_p}}{\partial x^{a_q}}. \\
&* \text{ Et on constate que} \\
\widetilde{d}\omega_{a_0 \dots a_{r-1} a_{r'} a_{r+1} \dots a_{r'-1} a_r a_{r'+1} \dots a_p} &= -\widetilde{d}\omega_{a_0 \dots a_r \dots a_{r'} \dots a_p} \text{ QED.}
\end{aligned}$$

Alors on constate aisément que $d \in L[\Omega^p(U); \Omega^{p+1}(U)]$ i.e.

si $\omega, \omega' \in \Omega^p(U)$:

$$d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega', \text{ égalité dans } \Omega^{p+1}(U) \text{ et}$$

$$d(k\omega) = k d\omega, \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \text{ égalité dans } \Omega^{p+1}(U).$$

Le champ de formes différentielles ω est dit *fermé* ssi $d\omega = 0$ et *exact* ssi il existe un champ de formes différentielles ω' tel que $\omega = d\omega'$.

Exemples

- $p = 0$; cas A

Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors $d\lambda \in \Omega^1(U)$ est à la fois la différentielle extérieure de la 0 - forme différentielle λ et la différentielle de la fonction numérique λ [8]²⁶.

$$d\lambda = (d\lambda)_{i_0} \theta^{i_0} = \widetilde{d}\lambda_{a_0} dx^{a_0} \in \Omega^1(U), \text{ avec } (d\lambda)_{i_0} = \partial_{i_0}\lambda \text{ et } \widetilde{d}\lambda_{a_0} = \frac{\partial\lambda}{\partial x^{a_0}}.$$

- $p = 1$; cas C [30]²⁷

Si $a = a_{i_1} \theta^{i_1} = \widetilde{a}_{a_1} dx^{a_1} \in \Omega^1(U)$ alors

$$da = \frac{1}{2} (da)_{i_0 i_1} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1} = \frac{1}{2} \widetilde{d}a_{a_0 a_1} dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \in \Omega^2(U) \text{ avec } (da)_{i_0 i_1} \text{ et } \widetilde{d}a_{a_0 a_1} \text{ alternés tels que :}$$

$$(da)_{i_0 i_1} = \partial_{i_0} a_{i_1} - \partial_{i_1} a_{i_0} - c_{i_0, i_1}^i a_i \text{ et } \widetilde{d}a_{a_0 a_1} = \frac{\partial \widetilde{a}_{a_1}}{\partial x^{a_0}} - \frac{\partial \widetilde{a}_{a_0}}{\partial x^{a_1}}.$$

Par exemple si $m = 3$:

$$\widetilde{d}a_{23} = \frac{\partial \widetilde{a}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \widetilde{a}_2}{\partial x^3}, \widetilde{d}a_{31} = \frac{\partial \widetilde{a}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \widetilde{a}_3}{\partial x^1}, \widetilde{d}a_{12} = \frac{\partial \widetilde{a}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \widetilde{a}_1}{\partial x^2} \text{ [11]}^{28} \text{ et [27]}^{29}.$$

- $p = 2$; cas F -bis

Si $\omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} = \frac{1}{2} \widetilde{\omega}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \in \Omega^2(U)$, avec $\omega_{i_1 i_2}$ et $\widetilde{\omega}_{a_1 a_2}$ alternés, alors

$$d\omega = \frac{1}{6} (d\omega)_{i_0 i_1 i_2} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} = \frac{1}{6} \widetilde{d}\omega_{a_0 a_1 a_2} dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \in \Omega^3(U),$$

avec $(d\omega)_{i_0 i_1 i_2}$ et $\widetilde{d}\omega_{a_0 a_1 a_2}$ alternés tels que :

$$(d\omega)_{i_0 i_1 i_2} = \partial_{i_0} \omega_{i_1 i_2} - \partial_{i_1} \omega_{i_0 i_2} + \partial_{i_2} \omega_{i_0 i_1} - c_{i_0, i_1}^i \omega_{ii_2} + c_{i_0, i_2}^i \omega_{ii_1} - c_{i_1, i_2}^i \omega_{ii_0}$$

$$\text{et } \widetilde{d}\omega_{a_0 a_1 a_2} = \frac{\partial \omega_{a_1 a_2}}{\partial x^{a_0}} - \frac{\partial \omega_{a_0 a_2}}{\partial x^{a_1}} + \frac{\partial \omega_{a_0 a_1}}{\partial x^{a_2}}.$$

26. p. 60

27. pp. 197-198 Exercice 11

28. p. 230 avec des signes faux

29. p. 555

- $p = 3$

Si $\omega = \frac{1}{6} \omega_{i_1 i_2 i_3} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} = \frac{1}{6} \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3} \in \Omega^3(U)$, avec $\omega_{i_1 i_2 i_3}$ et $\widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3}$ alternés, alors :

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{24} (d\omega)_{i_0 i_1 i_2 i_3} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} \\ &= \frac{1}{24} \widetilde{d\omega}_{a_0 a_1 a_2 a_3} dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3} \in \Omega^4(U), \text{ avec } (d\omega)_{i_0 i_1 i_2 i_3} \text{ et } \\ &\widetilde{d\omega}_{a_0 a_1 a_2 a_3} \text{ alternés tels que :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d\omega)_{i_0 i_1 i_2 i_3} &= \partial_{i_0} \omega_{i_1 i_2 i_3} - \partial_{i_1} \omega_{i_0 i_2 i_3} + \partial_{i_2} \omega_{i_0 i_1 i_3} - \partial_{i_3} \omega_{i_0 i_1 i_2} \\ &- c_{i_0 i_1}^i \omega_{ii_2 i_3} + c_{i_0 i_2}^i \omega_{ii_1 i_3} - c_{i_0 i_3}^i \omega_{ii_1 i_2} - c_{i_1 i_2}^i \omega_{ii_0 i_3} + c_{i_1 i_3}^i \omega_{ii_0 i_2} - c_{i_2 i_3}^i \omega_{ii_0 i_1} \text{ et} \\ \widetilde{d\omega}_{a_0 a_1 a_2 a_3} &= \frac{\partial \omega_{a_1 a_2 a_3}}{\partial x^{a_0}} - \frac{\partial \omega_{a_0 a_2 a_3}}{\partial x^{a_1}} + \frac{\partial \omega_{a_0 a_1 a_3}}{\partial x^{a_2}} - \frac{\partial \omega_{a_0 a_1 a_2}}{\partial x^{a_3}}. \end{aligned}$$

Propriétés

Soient $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$ alors

• $d(\omega \wedge \omega') = (d\omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge d\omega'$, égalité dans $\Omega^{p+p'+1}$ [23]³⁰.
 d est donc une antidérivation A de degré $r = 1$.

Démonstration cf. [8]³¹

$$\begin{aligned} \omega &= a_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \text{ (donc } a_{a_1 \dots a_p} = \frac{1}{p!} \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} \text{ alterné) donc :} \\ d\omega &= da_{a_1 \dots a_p} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega' &= b_{b_1 \dots b_{p'}} dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_{p'}} \text{ (donc } b_{b_1 \dots b_{p'}} = \frac{1}{p'!} \widetilde{\omega}'_{b_1 \dots b_{p'}} \text{ alterné) donc :} \\ d\omega' &= db_{b_1 \dots b_{p'}} \wedge dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_{p'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega' &= a_{a_1 \dots a_p} b_{b_1 \dots b_{p'}} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_{p'}} \text{ donc :} \\ d(\omega \wedge \omega') &= d(a_{a_1 \dots a_p} b_{b_1 \dots b_{p'}}) \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_{p'}} \\ &= [(da_{a_1 \dots a_p}) b_{b_1 \dots b_{p'}} + a_{a_1 \dots a_p} db_{b_1 \dots b_{p'}}] \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_{p'}} \\ &= da_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge b_{b_1 \dots b_{p'}} dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_{p'}} \\ &+ (-1)^p a_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge db_{b_1 \dots b_{p'}} dx^{b_1} \wedge \dots \wedge dx^{b_{p'}} \\ &= d\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge d\omega' \text{ QED.} \end{aligned}$$

En particulier :

* si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors $d(\lambda\omega) = d(\lambda \wedge \omega) = (d\lambda) \wedge \omega + \lambda \wedge d\omega$
 $= (d\lambda) \wedge \omega + \lambda d\omega$ et si la fonction numérique λ est constante et égale à $k \in \mathbb{R}$ on retrouve $d(k\omega) = k d\omega$.

30. p. 96 Proposition 2.4

31. p. 61 éq. 3

* si $\lambda, \mu \in \Omega^0(U)$ alors $d(\lambda\mu) = d(\lambda \wedge \mu) = (d\lambda) \wedge \mu + \lambda \wedge d\mu = \mu(d\lambda) + \lambda d\mu$.

• $d \circ d = 0$ [8]³² [23]³³.

Démonstration

Soient $\omega \in \Omega^p(U)$, $\omega' \triangleq d\omega \in \Omega^{p+1}(U)$ et $\omega'' \triangleq d\omega' \triangleq d^2\omega \in \Omega^{p+2}(U)$.

$$\widetilde{\omega}'_{a_0 \dots a_p} = \widetilde{d}\omega_{a_1 \dots a_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_p}}{\partial x^{a_q}} \text{ ou :}$$

$$\widetilde{\omega}'_{b_1 \dots b_{p+1}} = \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots \widehat{b}_{q+1} \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_{q+1}}}. \text{ Et :}$$

$$\widetilde{\omega}''_{b_0 \dots b_{p+1}} = \widetilde{d}\omega'_{b_0 \dots b_{p+1}} = \widetilde{d^2}\omega_{b_0 \dots b_{p+1}} = \sum_{r=0}^{p+1} (-1)^r \frac{\partial \widetilde{\omega}'_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_r}}.$$

Or on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}'_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots b_{p+1}} &= \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_q \dots \widehat{b}_r \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_q}} \\ + \sum_{q=r+1}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots \widehat{b}_q \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_q}}. \text{ Et par conséquent :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}''_{b_0 \dots b_{p+1}} &= \sum_{r=0}^{p+1} (-1)^r \frac{\partial [\sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_q \dots \widehat{b}_r \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_q}} + \sum_{q=r+1}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots \widehat{b}_q \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_q}}]}{\partial x^{b_r}} \\ &= \sum_{r=1}^{p+1} \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^{q+r} \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_q \dots \widehat{b}_r \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_r} \partial x^{b_q}} \\ &+ \sum_{r=0}^p \sum_{q=r+1}^{p+1} (-1)^{q+r-1} \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots \widehat{b}_q \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_r} \partial x^{b_q}}. \end{aligned}$$

Si on remarque que $\sum_{r=1}^{p+1} \sum_{q=0}^{r-1} \alpha_{rq} = \sum_{q=0}^p \sum_{r=q+1}^{p+1} \alpha_{rq}$, $\forall \alpha_{rq}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}''_{b_0 \dots b_{p+1}} &= \sum_{q=0}^p \sum_{r=q+1}^{p+1} (-1)^{q+r} \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_q \dots \widehat{b}_r \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_r} \partial x^{b_q}} \\ + \sum_{r=0}^p \sum_{q=r+1}^{p+1} (-1)^{q+r-1} \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots \widehat{b}_q \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_r} \partial x^{b_q}} \\ &= \sum_{r=0}^p \sum_{q=r+1}^{p+1} (-1)^{r+q} \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots \widehat{b}_q \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_q} \partial x^{b_r}} \\ + \sum_{r=0}^p \sum_{q=r+1}^{p+1} (-1)^{q+r-1} \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_r \dots \widehat{b}_q \dots b_{p+1}}}{\partial x^{b_r} \partial x^{b_q}} = 0 \text{ QED.} \end{aligned}$$

Donc un champ de formes différentielles exact est fermé. En effet si $\omega = d\omega'$ alors $d\omega = d(d\omega') = 0$.

32. p. 90 Propriété 3; la très succincte démonstration invoque la symétrie des dérivées secondes croisées p. 61

33. p. 96 Proposition 2.6; la démonstration se fait p. 97 à partir de la propriété fondamentale indiquée ci-après

Remarque : si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors :
 $a \triangleq d\lambda = a_{i_1} \theta^{i_1} = (d\lambda)_{i_1} \theta^{i_1} = (\partial_{i_1} \lambda) \theta^{i_1}$. Et
 $0 = d^2\lambda = da = \frac{1}{2} (da)_{i_0 i_1} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1}$ avec
 $0 = (da)_{i_0 i_1} = \partial_{i_0} a_{i_1} - \partial_{i_1} a_{i_0} - c_{i_0, i_1}^i a_i$; soit :

$$\partial_{i_0} (\partial_{i_1} \lambda) - \partial_{i_1} (\partial_{i_0} \lambda) - c_{i_0, i_1}^i \partial_i \lambda = 0 \text{ ou } \partial_i (\partial_k \lambda) - \partial_k (\partial_i \lambda) = c_{i, k}^j \partial_j \lambda.$$

Formule de Maurer-Cartan ou équations de structure de Maurer-Cartan

$$d\theta^j = -\frac{1}{2} c_{i, k}^j \theta^i \wedge \theta^k \quad [8]^{34}$$

Démonstration

$$\theta^j = \tilde{\theta}_d^j dx^d \text{ donc } d\theta^j = \tilde{\theta}_d^j d^2 x^d + (d\tilde{\theta}_d^j) \wedge dx^d = [(\partial_i \tilde{\theta}_d^j) \theta^i] \wedge (\tilde{e}_k^d \theta^k) \\ = \tilde{e}_k^d (\partial_i \tilde{\theta}_d^j) \theta^i \wedge \theta^k \text{ (car } d^2 x^l = 0).$$

Cependant $\tilde{e}_k^l (\partial_i \tilde{\theta}_l^j)$ n'est pas égal à $\frac{1}{2} (d\theta^j)_{ik}$ car non alterné.

Par contre $d\theta^j = -\frac{1}{2} [\tilde{e}_i^l (\partial_k \tilde{\theta}_l^j) - \tilde{e}_k^l (\partial_i \tilde{\theta}_l^j)] \theta^i \wedge \theta^k = -\frac{1}{2} c_{i, k}^j \theta^i \wedge \theta^k$, avec $c_{i, k}^j$ alterné QED. Donc $(d\theta^j)_{ik} = -c_{i, k}^j$.

Généralisation de la formule de Maurer-Cartan

$$d(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^p c_{i_0, k}^{i_q} \theta^{i_0} \wedge \dots \wedge \theta^{i_{q-1}} \wedge \theta^k \wedge \theta^{q+1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$$

Démonstration

Par récurrence sur p. Si p = 1 la relation précédente est exacte car il s'agit de la formule de Maurer-Cartan. Supposons la vraie pour p. Alors :

$$\begin{aligned} d(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \wedge \theta^{i_{p+1}}) &= d(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) \wedge \theta^{i_{p+1}} \\ &+ (-1)^p \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \wedge d\theta^{i_{p+1}} \\ &= (-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^p c_{i_0, k}^{i_q} \theta^{i_0} \wedge \dots \wedge \theta^{i_{q-1}} \wedge \theta^k \wedge \theta^{q+1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) \wedge \theta^{i_{p+1}} \\ &+ (-1)^p \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} (-\frac{1}{2} c_{i_0, k}^{i_{p+1}} \theta^{i_0} \wedge \theta^k) \\ &= (-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^p c_{i_0, k}^{i_q} \theta^{i_0} \wedge \dots \wedge \theta^{i_{q-1}} \wedge \theta^k \wedge \theta^{q+1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) \wedge \theta^{i_{p+1}} \\ &- \frac{1}{2} c_{i_0, k}^{i_{p+1}} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \wedge \theta^k \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{p+1} c_{i_0, k}^{i_q} \theta^{i_0} \wedge \dots \wedge \theta^{i_{q-1}} \wedge \theta^k \wedge \theta^{q+1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_{p+1}}. \end{aligned}$$

Donc la relation précédente est vraie pour p + 1 QED.

On a donc également :

$$d(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p (-1)^q c_{i_0, k}^{i_q} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\theta^{i_q}} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \wedge \theta^{i_0} \wedge \theta^k.$$

34. p. 155 éq. (7.5), p. 156 éq. (3.4), p. 239 éq. (5.12)

Cas particuliers

- $p = 1 : d\theta^{i_1} = -\frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_1} \theta^{i_0} \wedge \theta^k.$
- $p = 2 : d(\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2}) = -\frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_1} \theta^{i_0} \wedge \theta^k \wedge \theta^{i_2} - \frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_2} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1} \wedge \theta^k$
 $= -\frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_1} \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_0} \wedge \theta^k + \frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_0} \wedge \theta^k.$
- $p = 3 : d(\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3}) = -\frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_1} \theta^{i_0} \wedge \theta^k \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3}$
 $- \frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_2} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1} \wedge \theta^k \wedge \theta^{i_3} - \frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_3} \theta^{i_0} \wedge \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^k$
 $= -\frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_1} \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} \wedge \theta^{i_0} \wedge \theta^k$
 $+ \frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_3} \wedge \theta^{i_0} \wedge \theta^k - \frac{1}{2} c_{i_0.k}^{i_3} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_0} \wedge \theta^k.$

3.2.3 Le produit intérieur i_u selon le champ de vecteurs u

On pourra consulter [8]³⁵ [11]³⁶ et [30]³⁷.

Définition

Soit $u \in C^\infty(U; TM)$. Pour $p \geq 1$ soit $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$
 $= \frac{1}{p!} \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$, avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ et $\widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}$ alternés. Alors :

$i_u \omega \triangleq \frac{1}{(p-1)!} (i_u \omega)_{i_2 \dots i_p} \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \triangleq \frac{1}{(p-1)!} \widetilde{i_u \omega}_{a_2 \dots a_p} dx^{a_2} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$,
avec $(i_u \omega)_{i_2 \dots i_p}$ et $\widetilde{i_u \omega}_{a_2 \dots a_p}$ alternés tels que :

$$(i_u \omega)_{i_2 \dots i_p} \triangleq u^k \omega_{ki_2 \dots i_p} \text{ et } \widetilde{i_u \omega}_{a_2 \dots a_p} \triangleq \widetilde{u^c \omega}_{ca_2 \dots a_p} \text{ [8] }^{38}.$$

Pour $p = 0$ alors ω se note λ et $i_u \lambda \triangleq 0$.

Alors on constate aisément que $i_u \in L[\Omega^p(U); \Omega^{p-1}(U)]$,
avec $u \in C^\infty(U; TM)$ i.e.

si $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^p(U)$:

$i_u(\omega + \omega') = i_u \omega + i_u \omega'$ [8]³⁹, égalité dans $\Omega^{p-1}(U)$ et
 $i_u(k\omega) = k i_u \omega$, avec $k \in \mathbb{R}$ [11]⁴⁰, égalité dans $\Omega^{p-1}(U)$.

35. p. 149

36. p. 237 exercice 3

37. pp. 213-215 § 2-A

38. p. 149 éq. (4.23)

39. p. 149 éq. (4.23 a))

40. p. 237 exercice 3 a)

Exemples

- $p = 0$; cas A

Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors :

$$i_u \lambda = 0.$$

- $p = 1$; cas C [30]⁴¹

Si $a = a_{i_1} \theta^{i_1} = \tilde{a}_{a_1} dx^{a_1} \in \Omega^1(U)$ alors :

$$i_u a = u^k a_k = \tilde{u}^c \tilde{a}_c \in \Omega^0(U).$$

Donc $i_{e_j} \theta^i = \delta_j^k \delta_k^i = \delta_j^i$ et $i_{\frac{\partial}{\partial x^b}} dx^a = \delta_b^c \delta_c^a = \delta_b^a$.

- $p = 2$; cas F -bis

Si $\omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \in \Omega^2(U)$, avec $\omega_{i_1 i_2}$ et $\tilde{\omega}_{a_1 a_2}$ alternés, alors :

$$i_u \omega = (i_u \omega)_{i_2} \theta^{i_2} = \widetilde{i_u \omega}_{a_2} dx^{a_2}, \text{ avec :}$$

$$(i_u \omega)_{i_2} = u^k \omega_{k i_2} \text{ et } \widetilde{i_u \omega}_{a_2} = \tilde{u}^c \tilde{\omega}_{c a_2}.$$

Donc si $\omega = d\theta^j = \frac{1}{2} (d\theta^j)_{ik} \theta^i \wedge \theta^k = -\frac{1}{2} c_{i,k}^j \theta^i \wedge \theta^k$ on a :

$$i_{e_i} d\theta^j = (i_{e_i} d\theta^j)_{i_2} \theta^{i_2}, \text{ avec :}$$

$$(i_{e_i} d\theta^j)_{i_2} \theta^{i_2} = \delta_i^k (d\theta^j)_{k i_2} = (d\theta^j)_{i i_2} = -c_{i, i_2}^j \text{ et}$$

$$i_{e_i} d\theta^j = -c_{i,k}^j \theta^k = (d\theta^j)_{ik} \theta^k.$$

- $p = 3$

Si $\omega = \frac{1}{6} \omega_{i_1 i_2 i_3} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} = \frac{1}{6} \tilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3} \in \Omega^3(U)$, avec $\omega_{i_1 i_2 i_3}$ et $\tilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3}$ alternés, alors :

$$i_u \omega = \frac{1}{2} (i_u \omega)_{i_2 i_3} \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} = \frac{1}{2} \widetilde{i_u \omega}_{a_2 a_3} dx^{a_2} \wedge dx^{a_3}, \text{ avec :}$$

$$(i_u \omega)_{i_2 i_3} = u^k \omega_{k i_2 i_3} \text{ et } \widetilde{i_u \omega}_{a_2 a_3} = \tilde{u}^c \tilde{\omega}_{c a_2 a_3}.$$

Propriétés

- $i_u(\omega \wedge \omega') = (i_u \omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge i_u \omega'$, égalité dans $\Omega^{p+p'-1}$ si $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}$ [23]⁴².

i_u est donc une dérivation D de degré $r = -1$ si p est pair et une antidérivation A de degré $r = -1$ si p est impair.

41. pp. 197-198 Exercice 11

42. p. 88 Théorème 4

Démonstration

Soit $\omega'' = \omega \wedge \omega'$; alors :

$$(i_u \omega'')_{i_2 \dots i_{p+p'}} \triangleq u^{i_1} \omega''_{i_1 i_2 \dots i_{p+p'}} = u^{i_1} \left(\frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+p'}}^{j_1 \dots j_{p+p'}} \omega_{j_1 \dots j_p} \omega'_{j_{p+1} \dots j_{p+p'}} \right).$$

Soit, d'après la remarque faite lors de la présentation du produit extérieur :

$$\begin{aligned} & (i_u \omega'')_{i_2 \dots i_{p+p'}} \\ = & u^{i_1} \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \varepsilon_{i_2 \dots i_{p+p'}}^{j_2 \dots j_{p+p'}} \left[p \omega_{i_1 j_2 \dots j_p} \omega'_{j_{p+1} \dots j_{p+p'}} + (-1)^p p' \omega_{j_2 \dots j_{p+1}} \omega'_{i_1 j_{p+2} \dots j_{p+p'}} \right] \\ = & \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{p'!} \varepsilon_{i_2 \dots i_{p+p'}}^{j_2 \dots j_{p+p'}} (u^{i_1} \omega_{i_1 j_2 \dots j_p}) \omega'_{j_{p+1} \dots j_{p+p'}} \\ + & (-1)^p \frac{1}{p!} \frac{1}{(p'-1)!} \varepsilon_{i_2 \dots i_{p+p'}}^{j_2 \dots j_{p+p'}} \omega_{j_2 \dots j_{p+1}} (u^{i_1} \omega'_{i_1 j_{p+2} \dots j_{p+p'}}) \\ = & \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{p'!} \varepsilon_{i_2 \dots i_{p+p'}}^{j_2 \dots j_{p+p'}} (i_u \omega)_{j_2 \dots j_p} \omega'_{j_{p+1} \dots j_{p+p'}} \\ + & (-1)^p \frac{1}{p!} \frac{1}{(p'-1)!} \varepsilon_{i_2 \dots i_{p+p'}}^{j_2 \dots j_{p+p'}} \omega_{j_2 \dots j_{p+1}} (i_u \omega')'_{j_{p+2} \dots j_{p+p'}} \\ = & ((i_u \omega) \wedge \omega')_{i_2 \dots i_{p+p'}} + (-1)^p \omega \wedge (i_u \omega')_{i_2 \dots i_{p+p'}}. \end{aligned}$$

Donc $i_u(\omega \wedge \omega') = (i_u \omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge i_u \omega'$ QED.

- $i_u \circ i_u = 0$ [8]⁴³ [9]⁴⁴ et [23]⁴⁵

Démonstration

Soit $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$, avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ alterné. Posons $\omega' \triangleq i_u \omega$, alors $\omega'_{i_2 \dots i_p} = u^k \omega_{k i_2 \dots i_p}$ et $\omega'' \triangleq i_u \omega' = i_u^2 \omega$, alors $\omega''_{i_3 \dots i_p} = u^l \omega'_{l i_3 \dots i_p} = u^l u^k \omega_{k l i_3 \dots i_p} = 0$ car $\omega_{i_1 \dots i_p}$ est alterné. Par conséquent $i_u^2 \omega = 0$; $\forall \omega$ et $i_u \circ i_u = i_u^2 = 0$ QED.

- $(i_u \omega)(u_2, \dots, u_p) = \omega(u, u_2, \dots, u_p)$;
 $\forall u, u_2, \dots, u_p \in C^\infty(U; TM)$ [11]⁴⁶.

Démonstration

Soit $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$, avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ alterné.

43. p. 149 éq. (4.24) Propriété 2

44. p. 437

45. p. 90 Proposition 1.2

46. p. 237 exercice 3

$$\begin{aligned}
& \diamond (i_u \omega)(u_2, \dots, u_p) = \frac{1}{(p-1)!} (i_u \omega)_{i_2 \dots i_p} (\theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})(u_2, \dots, u_p) \\
& = (i_u \omega)_{i_2 \dots i_p} (\theta^{i_2} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p})(u_2, \dots, u_p) = u^k \omega_{ki_2 \dots i_p} u_2^{i_2} \dots u_p^{i_p}. \\
& \diamond \omega(u, u_2, \dots, u_p) = \frac{1}{p!} \omega_{ki_2 \dots i_p} (\theta^k \wedge \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})(u, u_2, \dots, u_p) \\
& = \omega_{ki_2 \dots i_p} (\theta^k \otimes \theta^{i_2} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p})(u, u_2, \dots, u_p) = \omega_{ki_2 \dots i_p} u^k u_2^{i_2} \dots u_p^{i_p}. \\
& \diamond \text{ donc } (i_u \omega)(u_2, \dots, u_p) = \omega(u, u_2, \dots, u_p) \text{ QED.}
\end{aligned}$$

3.2.4 La dérivée de Lie \mathcal{L}_u des champs de formes différentielles extérieures ω selon le champ de vecteurs u

On pourra consulter [8]⁴⁷ [23]⁴⁸ et [30]⁴⁹.

Il s'agit d'un cas particulier de la dérivée de Lie des champs de tenseurs selon un champ de vecteurs.

Définition

Soit u un champ de vecteurs [$u \in C^\infty(U; TM)$] et ω un champ de p -formes différentielles extérieures [$\omega \in \Omega^p(U)$].

En base mobile $\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$, avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ alterné et $u = u^i e_i$; alors :

$\mathcal{L}_u \omega \triangleq (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} = \frac{1}{p!} (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \in \Omega^p(U)$, avec :

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 \dots i_p} \triangleq u^k (\partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} + c_{i_1, k}^j \omega_{ji_2 \dots i_p} + \dots + c_{i_p, k}^j \omega_{i_1 \dots i_{p-1} j}) \\
& + \omega_{ki_2 \dots i_p} \partial_{i_1} u^k + \dots + \omega_{i_1 \dots i_{p-1} k} \partial_{i_p} u^k \\
& = u^k \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} + \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} (\partial_{i_q} u^j + c_{i_q, k}^j u^k) \omega_{ji_1 \dots \widehat{i_q} \dots i_p}.
\end{aligned}$$

Les dérivées pfaffiennes apparaissent donc.

En base naturelle $\omega = \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p}$
 $= \frac{1}{p!} \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$, avec $\widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}$ alterné et $u = \widetilde{u}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$; alors :

$\mathcal{L}_u \omega \triangleq \widetilde{\mathcal{L}_u \omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p} = \frac{1}{p!} \widetilde{\mathcal{L}_u \omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$, avec :

47. pp. 148-149 § 4

48. pp. 91-93 § 17

49. pp. 206-207 § 6.A.4 et pp. 212-213 § 6.A.7

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_u \omega_{a_1 \dots a_p} &\triangleq \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^c} + \widetilde{\omega}_{ca_2 \dots a_p} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \dots + \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_{p-1}c} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_p}} \\ &= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^c} + \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} \left(\frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_q}} \widetilde{\omega}_{ba_1 \dots \widehat{a}_q \dots a_p} \right) \end{aligned}$$

Exemples :

- $p = 0$; cas A

Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors $\mathcal{L}_u \lambda = u^k \partial_k \lambda = \widetilde{u}^c \frac{\partial \lambda}{\partial x^c}$.

- $p = 1$; cas C

Si $a \in \Omega^1(U)$; $a = a_{i_1} \theta^{i_1} = \widetilde{a}_{a_1} dx^{a_1}$ et alors
 $\mathcal{L}_u a = (\mathcal{L}_u a)_{i_1} \theta^{i_1} = \widetilde{\mathcal{L}}_u a_{a_1} dx^{a_1}$, avec :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_u a)_{i_1} &= u^k (\partial_k a_{i_1} + c_{i_1,k}^j a_j) + a_k \partial_{i_1} u^k = u^k \partial_k a_{i_1} + (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1,k}^j u^k) a_j \\ \text{et } \widetilde{\mathcal{L}}_u a_{a_1} &= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{a}_{a_1}}{\partial x^c} + \widetilde{a}_c \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} = \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{a}_{a_1}}{\partial x^c} + \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_1}} \widetilde{a}_b. \end{aligned}$$

- $p = 2$; cas F -bis

Si $\omega \in \Omega^2(U)$; $\omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} = \frac{1}{2} \widetilde{\omega}_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2}$ alors
 $\mathcal{L}_u \omega = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} = \frac{1}{2} \widetilde{\mathcal{L}}_u \omega_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2}$, avec :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2} &= u^k (\partial_k \omega_{i_1 i_2} + c_{i_1,k}^j \omega_{j i_2} + c_{i_2,k}^j \omega_{i_1 j}) + \omega_{k i_2} \partial_{i_1} u^k + \omega_{i_1 k} \partial_{i_2} u^k \\ &= u^k \partial_k \omega_{i_1 i_2} + (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1,k}^j u^k) \omega_{j i_2} - (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2,k}^j u^k) \omega_{j i_1} \text{ et :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_u \omega_{a_1 a_2} &= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 a_2}}{\partial x^c} + \widetilde{\omega}_{ca_2} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \widetilde{\omega}_{a_1 c} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_2}} \\ &= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 a_2}}{\partial x^c} + \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_1}} \widetilde{\omega}_{ba_2} - \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_2}} \widetilde{\omega}_{ba_1}. \end{aligned}$$

- $p = 3$

Si $\omega \in \Omega^3(U)$; $\omega = \frac{1}{6} \omega_{i_1 i_2 i_3} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} = \frac{1}{6} \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3}$
alors
 $\mathcal{L}_u \omega = \frac{1}{6} (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} = \frac{1}{6} \widetilde{\mathcal{L}}_u \omega_{a_1 a_2 a_3} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3}$, avec :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3} &\triangleq u^j \partial_j \omega_{i_1 i_2 i_3} \\ &+ \omega_{j i_2 i_3} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1,k}^j u^k) + \omega_{i_1 j i_3} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2,k}^j u^k) + \omega_{i_1 i_2 j} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3,k}^j u^k) \text{ et :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_u \omega_{a_1 a_2 a_3} &= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3}}{\partial x^c} + \widetilde{\omega}_{ca_2 a_3} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \widetilde{\omega}_{a_1 c a_3} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_2}} + \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 c} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_3}} \\ &= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3}}{\partial x^c} + \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_1}} \widetilde{\omega}_{ba_2 a_3} - \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_2}} \widetilde{\omega}_{ba_1 a_3} + \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_3}} \widetilde{\omega}_{ba_1 a_2} \end{aligned}$$

- $p = 4$

Si $\omega \in \Omega^4(U)$; $\omega = \frac{1}{24} \omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} \wedge \theta^{i_4}$
 $= \frac{1}{24} \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3 a_4} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3} \wedge dx^{a_4}$ alors
 $\mathcal{L}_u \omega = \frac{1}{24} (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} \wedge \theta^{i_4}$
 $= \frac{1}{24} \widetilde{\mathcal{L}}_u \omega_{a_1 a_2 a_3 a_4} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3} \wedge dx^{a_4}$, avec :

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4} \triangleq u^j \partial_j \omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} \\
& + \omega_{j i_2 i_3 i_4} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) + \omega_{i_1 j i_3 i_4} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) \\
& + \omega_{i_1 i_2 j i_4} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) + \omega_{i_1 i_2 i_3 j} (\partial_{i_4} u^j + c_{i_4.k}^j u^k) \text{ et :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_u \omega_{a_1 a_2 a_3 a_4} &= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3 a_4}}{\partial x^c} \\
&+ \widetilde{\omega}_{c a_2 a_3 a_4} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_1}} + \widetilde{\omega}_{a_1 c a_3 a_4} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_2}} + \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 c a_4} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_3}} + \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3 c} \frac{\partial \widetilde{u}^c}{\partial x^{a_4}} \\
&= \widetilde{u}^c \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3 a_4}}{\partial x^c} + \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_1}} \widetilde{\omega}_{b a_2 a_3 a_4} - \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_2}} \widetilde{\omega}_{b a_1 a_3 a_4} + \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_3}} \widetilde{\omega}_{b a_1 a_2 a_4} - \frac{\partial \widetilde{u}^b}{\partial x^{a_4}} \widetilde{\omega}_{b a_1 a_2 a_3}.
\end{aligned}$$

Propriété

$(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 \dots i_p}$ ainsi défini est alterné.

Démonstration

Nous allons le démontrer pour $p = 3$ et $p = 4$; ce qui suffit pour comprendre la démonstration générale respectivement pour p impair et pair.

- $p = 3$

On a :

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_u \omega)_{i_2 i_1 i_3} \triangleq u^j \partial_j \omega_{i_2 i_1 i_3} \\
& + \omega_{j i_1 i_3} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) + \omega_{i_2 j i_3} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) + \omega_{i_2 i_1 j} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) \\
& = -u^j \partial_j \omega_{i_1 i_2 i_3} \\
& - \omega_{i_1 j i_3} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) - \omega_{j i_2 i_3} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) - \omega_{i_1 i_2 j} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) \\
& \triangleq -(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_u \omega)_{i_3 i_2 i_1} \triangleq u^j \partial_j \omega_{i_3 i_2 i_1} \\
& + \omega_{j i_2 i_1} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) + \omega_{i_3 j i_1} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) + \omega_{i_3 i_2 j} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) \\
& = -u^j \partial_j \omega_{i_1 i_2 i_3} \\
& - \omega_{i_1 i_2 j} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) - \omega_{i_1 j i_3} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) - \omega_{j i_2 i_3} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) \\
& \triangleq -(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3}.
\end{aligned}$$

Ces deux transpositions suffisent à démontrer que $(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3}$ ainsi défini est alterné QED.

- $p = 4$

On a :

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_u \omega)_{i_2 i_1 i_3 i_4} \triangleq u^j \partial_j \omega_{i_2 i_1 i_3 i_4} \\
& + \omega_{j i_1 i_3 i_4} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) + \omega_{i_2 j i_3 i_4} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) \\
& + \omega_{i_2 i_1 j i_4} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) + \omega_{i_2 i_1 i_3 j} (\partial_{i_4} u^j + c_{i_4.k}^j u^k) \\
& = -u^j \partial_j \omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} \\
& - \omega_{i_1 j i_3 i_4} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) - \omega_{j i_2 i_3 i_4} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) \\
& - \omega_{i_1 i_2 j i_4} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) - \omega_{i_1 i_2 i_3 j} (\partial_{i_4} u^j + c_{i_4.k}^j u^k) \triangleq -(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_u \omega)_{i_3 i_2 i_1 i_4} \triangleq u^j \partial_j \omega_{i_3 i_2 i_1 i_4} \\
& + \omega_{j i_2 i_1 i_4} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) + \omega_{i_3 j i_1 i_4} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) \\
& + \omega_{i_3 i_2 j i_4} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) + \omega_{i_3 i_2 i_1 j} (\partial_{i_4} u^j + c_{i_4.k}^j u^k) \\
& = -u^j \partial_j \omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} \\
& - \omega_{i_1 i_2 j i_4} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) - \omega_{i_1 j i_3 i_4} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) \\
& - \omega_{j i_2 i_3 i_4} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) - \omega_{i_1 i_2 i_3 j} (\partial_{i_4} u^j + c_{i_4.k}^j u^k) \triangleq -(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_u \omega)_{i_4 i_2 i_3 i_1} \triangleq u^j \partial_j \omega_{i_4 i_2 i_3 i_1} \\
& + \omega_{j i_2 i_3 i_1} (\partial_{i_4} u^j + c_{i_4.k}^j u^k) + \omega_{i_4 j i_3 i_1} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) \\
& + \omega_{i_4 i_2 j i_1} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) + \omega_{i_4 i_2 i_3 j} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) \\
& = -u^j \partial_j \omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} \\
& - \omega_{i_1 i_2 i_3 j} (\partial_{i_4} u^j + c_{i_4.k}^j u^k) - \omega_{i_1 j i_3 i_4} (\partial_{i_2} u^j + c_{i_2.k}^j u^k) \\
& - \omega_{i_1 i_2 j i_4} (\partial_{i_3} u^j + c_{i_3.k}^j u^k) - \omega_{j i_2 i_3 i_4} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k) \triangleq -(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4}.
\end{aligned}$$

Ces trois transpositions suffisent à démontrer que $(\mathcal{L}_u \omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ ainsi défini est alterné QED.

Remarque : si $p \geq 2$ on a aussi :

$$\begin{aligned}
& \bullet \mathcal{L}_u \omega = \frac{1}{p!} [u^k \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} + p \omega_{j i_2 \dots i_p} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k)] \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} \\
& = \frac{1}{p!} [\tilde{u}^c \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^c} + p \tilde{\omega}_{b a_2 \dots a_p} \frac{\partial \tilde{u}^b}{\partial x^{a_1}}] dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} [8]^{50} \text{ mais les coefficients} \\
& [u^k \partial_k \omega_{i_1 \dots i_p} + p \omega_{j i_2 \dots i_p} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k)] \text{ et } [\tilde{u}^c \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^c} + p \tilde{\omega}_{b a_2 \dots a_p} \frac{\partial \tilde{u}^b}{\partial x^{a_1}}] \text{ ne} \\
& \text{sont pas alternés.}
\end{aligned}$$

Exemples :

• $p = 2$: cas C

$$\begin{aligned}
& \text{Si } \omega \in \Omega^2(U) \text{ alors } \mathcal{L}_u \omega = \frac{1}{2} [u^k \partial_k \omega_{i_1 i_2} + 2 \omega_{j i_2} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k)] \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \\
& = \frac{1}{2} [\tilde{u}^c \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 a_2}}{\partial x^c} + 2 \tilde{\omega}_{b a_2} \frac{\partial \tilde{u}^b}{\partial x^{a_1}}] dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \text{ mais les coefficients} \\
& [u^k \partial_k \omega_{i_1 i_2} + 2 \omega_{j i_2} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k)] \text{ et } [\tilde{u}^c \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 a_2}}{\partial x^c} + 2 \tilde{\omega}_{b a_2} \frac{\partial \tilde{u}^b}{\partial x^{a_1}}] \text{ ne sont pas} \\
& \text{alternés}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet p = 3 : \text{ si } \omega \in \Omega^3(U) \text{ alors} \\
& \mathcal{L}_u \omega = \frac{1}{6} [u^k \partial_k \omega_{i_1 i_2 i_3} + 3 \omega_{j i_2 i_3} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k)] \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \theta^{i_3} \\
& = \frac{1}{6} [\tilde{u}^c \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3}}{\partial x^c} + 3 \tilde{\omega}_{b a_2 a_3} \frac{\partial \tilde{u}^b}{\partial x^{a_1}}] dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge dx^{a_3} \text{ mais les coefficients} \\
& [u^k \partial_k \omega_{i_1 i_2 i_3} + 3 \omega_{j i_2 i_3} (\partial_{i_1} u^j + c_{i_1.k}^j u^k)] \text{ et } [\tilde{u}^c \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 a_2 a_3}}{\partial x^c} + 3 \tilde{\omega}_{b a_2 a_3} \frac{\partial \tilde{u}^b}{\partial x^{a_1}}] \text{ ne sont pas} \\
& \text{alternés.}
\end{aligned}$$

Alors on constate que $\mathcal{L}_u \in L[\Omega^p(U); \Omega^p(U)]$, i.e. si $\omega, \omega' \in \Omega^p(U)$:

$$\mathcal{L}_u(\omega + \omega') = \mathcal{L}_u \omega + \mathcal{L}_u \omega', \text{ égalité dans } \Omega^p(U)$$

50. p. 129 éq. (4.22)

$\mathcal{L}_u(k\omega) = k\mathcal{L}_u\omega$, avec $k \in \mathbb{R}$, égalité dans $\Omega^p(U)$.

On montrera par la suite que si $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$ alors :

$$\mathcal{L}_u(\omega \otimes \omega') = (\mathcal{L}_u\omega) \otimes \omega' + \omega \otimes \mathcal{L}_u\omega', \text{ égalité dans } C^\infty(U; \bigotimes_{p+p'}^0 T^*M)$$

et $\mathcal{L}_u(\omega \wedge \omega') = (\mathcal{L}_u\omega) \wedge \omega' + \omega \wedge \mathcal{L}_u\omega'$, égalité dans $\Omega^{p+p'}(U)$
(donc \mathcal{L}_u est une dérivation de degré 0).

3.2.5 Liens entre le produit intérieur et la dérivée de Lie, selon des champs de vecteurs

On pourra consulter [8]⁵¹ [9]⁵² [23]⁵³. et [30]⁵⁴.

On a $i_{[u,v]} = [\mathcal{L}_u, i_v] \triangleq \mathcal{L}_u \circ i_v - i_v \circ \mathcal{L}_u$; $\forall u, v \in C^\infty(U; TM)$.

Démonstration par récurrence

Remarquons tout d'abord que la relation précédente est plausible. En effet si $\omega \in \Omega^p(U)$ alors $i_{[u,v]}\omega \in \Omega^{p-1}(U)$, $\mathcal{L}_u(i_v\omega) \in \Omega^{p-1}(U)$, $i_v(\mathcal{L}_u\omega) \in \Omega^{p-1}(U)$ et donc $[\mathcal{L}_u, i_v]\omega \in \Omega^{p-1}(U)$.

• si $p = 0$; ω se note λ . On a $i_{[u,v]}\lambda = 0$ et $[\mathcal{L}_u, i_v]\lambda = \mathcal{L}_u(i_v\lambda) - i_v(\mathcal{L}_u\lambda) = \mathcal{L}_u 0 - 0 = 0$ et la relation à démontrer est vérifiée.

• Supposons que $i_{[u,v]}\omega = [\mathcal{L}_u, i_v]\omega$ pour $\omega \in \Omega^p(U)$ et $i_{[u,v]}\omega' = [\mathcal{L}_u, i_v]\omega'$ pour $\omega' \in \Omega^{p'}(U)$. Nous allons montrer que $i_{[u,v]}(\omega \wedge \omega') = [\mathcal{L}_u, i_v](\omega \wedge \omega')$ avec $\omega \wedge \omega' \in \Omega^{p+p'}(U)$, ce qui suffira à démontrer la proposition annoncée.

$$\begin{aligned} & [\mathcal{L}_u, i_v](\omega \wedge \omega') = \mathcal{L}_u(i_v(\omega \wedge \omega')) - i_v(\mathcal{L}_u(\omega \wedge \omega')) \\ &= \mathcal{L}_u((i_v\omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge i_v\omega') - i_v((\mathcal{L}_u\omega) \wedge \omega' + \omega \wedge \mathcal{L}_u\omega') \\ &= \mathcal{L}_u((i_v\omega) \wedge \omega') + (-1)^p \mathcal{L}_u(\omega \wedge i_v\omega') - i_v((\mathcal{L}_u\omega) \wedge \omega') - i_v(\omega \wedge \mathcal{L}_u\omega') \\ &= (\mathcal{L}_u(i_v\omega)) \wedge \omega' + (i_v\omega) \wedge \mathcal{L}_u\omega' + (-1)^p [(\mathcal{L}_u\omega) \wedge i_v\omega' + \omega \wedge \mathcal{L}_u(i_v\omega')] \\ &\quad - (i_v(\mathcal{L}_u\omega)) \wedge \omega' - (-1)^p (\mathcal{L}_u\omega) \wedge i_v\omega' - (i_v\omega) \wedge \mathcal{L}_u\omega' - (-1)^p \omega \wedge i_v(\mathcal{L}_u\omega') \\ &= [\mathcal{L}_u(i_v\omega) - i_v(\mathcal{L}_u\omega)] \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge [\mathcal{L}_u(i_v\omega') - i_v(\mathcal{L}_u\omega')] \\ &= (i_{[u,v]}\omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge (i_{[u,v]}\omega') = i_{[u,v]}(\omega \wedge \omega') \text{ QED.} \end{aligned}$$

51. p. 150 la propriété 5 est écrite de façon inexacte mais elle est écrite correctement p. 157

52. p. 437

53. p. 92 éq. (17.2) Proposition 1

54. pp. 233-234 Exercice 7

Remarque : [30]⁵⁵ donne une autre démonstration.

Par exemple si $p = 1$ alors ω se note a et on a :

$$i_{[u,v]}a = [\mathcal{L}_u, i_v]a = (u^i \partial_i v^j - v^k \partial_k u^j + c_{i,k}^j u^i v^k) a_j \in \Omega^0(U).$$

3.2.6 Différence entre $(\mathcal{L}_{u_0}\omega)(u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)]$

$$\begin{aligned} & \text{On a } (\mathcal{L}_{u_0}\omega)(u_1, \dots, u_p) = \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] \\ & - \sum_{r=1}^p \omega(u_1, \dots, [u_0, u_r], \dots, u_p) \\ & = \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] + \sum_{r=1}^p (-1)^r \omega([u_0, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \quad [23]^{56}. \end{aligned}$$

Démonstration

Nous allons nous servir du produit intérieur i_u et plusieurs fois de la propriété $i_u \circ \mathcal{L}_{u_0} = \mathcal{L}_{u_0} \circ i_u - i_{[u_0, u]}$:

$$\begin{aligned} i_{u_1} \mathcal{L}_{u_0} \omega &= \mathcal{L}_{u_0} i_{u_1} \omega - i_{[u_0, u_1]} \omega, \\ i_{u_2} i_{u_1} \mathcal{L}_{u_0} \omega &= i_{u_2} \mathcal{L}_{u_0} i_{u_1} \omega - i_{u_2} i_{[u_0, u_1]} \omega = \mathcal{L}_{u_0} i_{u_2} i_{u_1} \omega - i_{u_2} i_{[u_0, u_1]} \omega - i_{[u_0, u_2]} i_{u_1} \omega, \\ i_{u_3} i_{u_2} i_{u_1} \mathcal{L}_{u_0} \omega &= i_{u_3} \mathcal{L}_{u_0} i_{u_2} i_{u_1} \omega - i_{u_3} i_{u_2} i_{[u_0, u_1]} \omega - i_{u_3} i_{[u_0, u_2]} i_{u_1} \omega \\ &= \mathcal{L}_{u_0} i_{u_3} i_{u_2} i_{u_1} \omega - i_{u_3} i_{u_2} i_{[u_0, u_1]} \omega - i_{u_3} i_{[u_0, u_2]} i_{u_1} \omega - i_{[u_0, u_3]} i_{u_2} i_{u_1} \omega, \\ & \dots, \\ i_{u_p} \dots i_{u_1} \mathcal{L}_{u_0} \omega &= \mathcal{L}_{u_0} i_{u_p} \dots i_{u_1} \omega - \sum_{r=1}^p i_{u_p} \dots i_{[u_0, u_r]} \dots i_{u_1} \omega \quad [23]^{57}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \diamond (\mathcal{L}_{u_0}\omega)(u_1, \dots, u_p) &= (i_{u_1} \mathcal{L}_{u_0}\omega)(u_2, \dots, u_p) \\ &= (i_{u_2} i_{u_1} \mathcal{L}_{u_0}\omega)(u_3, \dots, u_p) = \dots = i_{u_p} \dots i_{u_1} \mathcal{L}_{u_0}\omega, \end{aligned}$$

$$\diamond \mathcal{L}_{u_0} i_{u_p} \dots i_{u_1} \omega = \mathcal{L}_{u_0} [\omega(u_1, \dots, u_p)] \text{ et :}$$

$$\diamond \omega(u_1, \dots, [u_0, u_r], \dots, u_p) = i_{u_p} \dots i_{[u_0, u_r]} \dots i_{u_1} \omega \text{ et par conséquent :}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{u_0}\omega)(u_1, \dots, u_p) &= \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] \\ &- \sum_{r=1}^p \omega(u_1, \dots, [u_0, u_r], \dots, u_p) \text{ QED.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{De plus comme } \omega(u_1, \dots, [u_0, u_r], \dots, u_p) \\ &= (-1)^{r-1} \omega([u_0, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \text{ on a :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{u_0}\omega)(u_1, \dots, u_p) &= \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] \\ &+ \sum_{r=1}^p (-1)^r \omega([u_0, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \text{ QED.} \end{aligned}$$

55. pp. 233-234

56. pp. 92-93 éq. (17.3) Proposition 3 pour la première égalité

57. p. 93

Exemples

- $p = 1$; cas A

$$(\mathcal{L}_{u_0} a)(u_1) = \mathcal{L}_{u_0}[a(u_1)] - a([u_0, u_1]).$$

- $p = 2$; cas C

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{u_0} \omega)(u_1, u_2) &= \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, u_2)] - \omega([u_0, u_1], u_2) - \omega(u_1, [u_0, u_2]) \\ &= \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, u_2)] - \omega([u_0, u_1], u_2) + \omega([u_0, u_2], u_1). \end{aligned}$$

3.2.7 Propriété fondamentale

On pourra consulter [8]⁵⁸ [9]⁵⁹ [11]⁶⁰ [23]⁶¹ et [30]⁶².

$\mathcal{L}_u = d \circ i_u + i_u \circ d$. Cette propriété, qualifiée de fondamentale par [30] ou d'identité du calcul des variations par [23]⁶³, peut servir de définition à \mathcal{L}_u , dans le contexte des champs de formes différentielles extérieures. Elle est parfois qualifiée de formule magique !

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration, avec les composantes en base naturelle.

Soit $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \triangleq i_u \omega \in \Omega^{p-1}(U)$. Alors $d\omega \in \Omega^{p+1}(U)$ et $d\omega' \in \Omega^p(U)$.

$$\widetilde{\omega}'_{b_2 \dots b_p} = \widetilde{u}^c \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p} \text{ ou } \widetilde{\omega}'_{a_1 \dots a_{p-1}} = \widetilde{u}^c \widetilde{\omega}_{ca_1 \dots a_{p-1}}.$$

• $\widetilde{d}\omega_{b_0 b_1 \dots b_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_q \dots b_p}}{\partial x^{b_q}} = \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}}{\partial x^{b_0}} + \sum_{q=1}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_0 \dots \widehat{b}_q \dots b_p}}{\partial x^{b_q}}$,
donc :

$$\begin{aligned} \widetilde{d}\omega_{cb_1 \dots b_p} &= \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}}{\partial x^c} + \sum_{q=1}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{c \dots \widehat{b}_q \dots b_p}}{\partial x^{b_q}} \text{ et} \\ \widetilde{i}_u \widetilde{d}\omega_{b_1 \dots b_p} &= \widetilde{u}^c \left[\frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}}{\partial x^c} + \sum_{q=1}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{c \dots \widehat{b}_q \dots b_p}}{\partial x^{b_q}} \right] \\ &= \widetilde{u}^c \left[\frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}}{\partial x^c} - \frac{\partial \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p}}{\partial x^{b_1}} + \sum_{q=2}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{c \dots \widehat{b}_q \dots b_p}}{\partial x^{b_q}} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \widetilde{d}\omega'_{a_0 \dots a_{p-1}} &= \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}'_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_{p-1}}}{\partial x^{a_q}} \\ &= \frac{\partial \widetilde{\omega}'_{a_1 \dots a_{p-1}}}{\partial x^{a_0}} + \sum_{q=1}^{p-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}'_{a_0 \dots \widehat{a}_q \dots a_{p-1}}}{\partial x^{a_q}}, \text{ ou :} \end{aligned}$$

58. pp. 149-150 Propriété 3 éq. (4.25)

59. p. 437

60. p. 237

61. p. 93 éq. (18.1)

62. p. 216 éq. (6-17) Théorème fondamental

63. p. 93 éq. (18.1)

$$\begin{aligned} \widetilde{d\omega'}_{b_1 b_1 \dots b_p} &= \frac{\partial \widetilde{\omega'}_{b_2 \dots b_p}}{\partial x^{b_1}} + \sum_{q=1}^{p-1} (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega'}_{b_1 \dots \widehat{b_{q+1}} \dots b_p}}{\partial x^{b_{q+1}}} \\ &= \frac{\partial \widetilde{\omega'}_{b_2 \dots b_p}}{\partial x^{b_1}} + \sum_{q=2}^p (-1)^{q-1} \frac{\partial \widetilde{\omega'}_{b_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p}}{\partial x^{b_q}}. \text{ Soit :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{d(i_u \omega)}_{b_1 \dots b_p} &= \frac{\partial(\widetilde{u^c \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p}})}{\partial x^{b_1}} + \sum_{q=2}^p (-1)^{q-1} \frac{\partial(\widetilde{u^c \widetilde{\omega}_{cb_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p}})}{\partial x^{b_q}} \\ &= \widetilde{u^c} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p}}{\partial x^{b_1}} + \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p} \frac{\partial \widetilde{u^c}}{\partial x^{b_1}} + \widetilde{u^c} \sum_{q=2}^p (-1)^{q-1} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{cb_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p}}{\partial x^{b_q}} \\ &+ \sum_{q=2}^p (-1)^{q-1} \widetilde{\omega}_{cb_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p} \frac{\partial \widetilde{u^c}}{\partial x^{b_q}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet i_u d\omega + d(i_u \omega)_{b_1 \dots b_p} &= \widetilde{u^c} \left[\frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}}{\partial x^c} - \frac{\partial \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p}}{\partial x^{b_1}} + \sum_{q=2}^p (-1)^q \frac{\partial \widetilde{\omega}_{c \dots \widehat{b_q} \dots b_p}}{\partial x^{b_q}} \right] \\ &+ \widetilde{u^c} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p}}{\partial x^{b_1}} + \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p} \frac{\partial \widetilde{u^c}}{\partial x^{b_1}} + \widetilde{u^c} \sum_{q=2}^p (-1)^{q-1} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{cb_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p}}{\partial x^{b_q}} \\ &+ \sum_{q=2}^p (-1)^{q-1} \widetilde{\omega}_{cb_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p} \frac{\partial \widetilde{u^c}}{\partial x^{b_q}} \\ &= \widetilde{u^c} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}}{\partial x^c} + \widetilde{\omega}_{cb_2 \dots b_p} \frac{\partial \widetilde{u^c}}{\partial x^{b_1}} + \sum_{q=2}^p (-1)^{q-1} \widetilde{\omega}_{cb_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p} \frac{\partial \widetilde{u^c}}{\partial x^{b_q}} \\ &= \widetilde{u^c} \frac{\partial \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}}{\partial x^c} + \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} \widetilde{\omega}_{cb_1 \dots \widehat{b_q} \dots b_p} \frac{\partial \widetilde{u^c}}{\partial x^{b_q}} = \widetilde{\mathcal{L}_u \omega}_{b_1 \dots b_p}. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$i_u d\omega + d(i_u \omega) = \mathcal{L}_u \omega, \forall \omega \text{ et } d \circ i_u + i_u \circ d = \mathcal{L}_u \text{ QED.}$$

Remarque : si $\lambda \in \Omega^0(U)$: $d(i_u \lambda) + i_u d\lambda = \mathcal{L}_u \lambda$, mais $i_u \lambda = 0$ et donc : $i_u d\lambda = \mathcal{L}_u \lambda$ [30]⁶⁴.

Conséquences

$$\begin{aligned} \text{Pour } \omega \in \Omega^p(U) \text{ on a } \mathcal{L}_{u_0} \omega &= d(i_{u_0} \omega) + i_{u_0}(d\omega) \text{ et} \\ (\mathcal{L}_{u_0} \omega)(u_1, \dots, u_p) &= (d(i_{u_0} \omega))(u_1, \dots, u_p) + (i_{u_0}(d\omega))(u_1, \dots, u_p) \\ &= (d(i_{u_0} \omega))(u_1, \dots, u_p) + (d\omega)(u_0, u_1, \dots, u_p); \text{ soit :} \end{aligned}$$

$(d\omega)(u_0, \dots, u_p) = (\mathcal{L}_{u_0} \omega)(u_1, \dots, u_p) - (d(i_{u_0} \omega))(u_1, \dots, u_p)$ [23]⁶⁵. Et également, d'après la différence entre $(\mathcal{L}_{u_0} \omega)(u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)]$:

$$\begin{aligned} (d\omega)(u_0, \dots, u_p) &= \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] - \sum_{r=1}^p \omega(u_1, \dots, [u_0, u_r], \dots, u_p) \\ &- (d(i_{u_0} \omega))(u_1, \dots, u_p) \\ &= \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] + \sum_{r=1}^p (-1)^r \omega([u_0, u_r], u_1, \dots, \widehat{u_r}, \dots, u_p) \\ &- (d(i_{u_0} \omega))(u_1, \dots, u_p). \end{aligned}$$

Autres propriétés : formules de Liebniz

$$\bullet \text{ Si } \lambda \in \Omega^0(U) : \mathcal{L}_u(\lambda \omega) = (\mathcal{L}_u \lambda) \omega + \lambda \mathcal{L}_u \omega$$

$$\bullet \text{ Si } \omega \in \Omega^p(U) \text{ et } \omega' \in \Omega^{p'}(U) \text{ alors } \omega \otimes \omega' \in C^\infty(U; \begin{matrix} 0 \\ \otimes \\ p+p' \end{matrix} T^*M) \text{ et}$$

64. pp. 232-233 Exercice 6

65. p. 94 éq. (18.3)

$$\mathcal{L}_u(\omega \otimes \omega') = (\mathcal{L}_u \omega) \otimes \omega' + \omega \otimes \mathcal{L}_u \omega', \text{ égalité dans } C^\infty(U; \bigotimes_{p+p'}^0 T^*M)^{66}$$

(il ne s'agit que d'un cas particulier de la formule de Liebniz démontrée ci-devant pour tous champs de tenseurs).

Mais on a également :

$$\mathcal{L}_u(\omega \wedge \omega') = (\mathcal{L}_u \omega) \wedge \omega' + \omega \wedge \mathcal{L}_u \omega', \text{ égalité dans } \Omega^{p+p'}(U) [11]^{67} \text{ et } [30]^{68} \text{ (donc } \mathcal{L}_u \text{ est une dérivation de degré 0).}$$

Démonstration

Utilisons la propriété fondamentale.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(\omega \wedge \omega') &= d(i_u(\omega \wedge \omega')) + i_u(d(\omega \wedge \omega')) \\ &= d((i_u \omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge i_u \omega') + i_u(d\omega \wedge \omega' \\ &\quad + (-1)^p \omega \wedge d\omega') \\ &= d((i_u \omega) \wedge \omega') + (-1)^p d(\omega \wedge i_u \omega') + i_u(d\omega \wedge \omega') + (-1)^p i_u(\omega \wedge d\omega') \\ &= (d(i_u \omega)) \wedge \omega' + (-1)^{p-1} (i_u \omega) \wedge d\omega' \\ &\quad + (-1)^p [(d\omega) \wedge i_u \omega' + (-1)^p \omega \wedge d(i_u \omega')] \\ &\quad + (i_u(d\omega)) \wedge \omega' + (-1)^{p+1} (d\omega) \wedge i_u \omega' + (-1)^p [(i_u \omega) \wedge d\omega' \\ &\quad + (-1)^p \omega \wedge i_u(d\omega')] \\ &= [d(i_u \omega) + i_u(d\omega)] \wedge \omega' + \omega \wedge [d(i_u \omega') + i_u(d\omega')] \\ &= (\mathcal{L}_u \omega) \wedge \omega' + \omega \wedge \mathcal{L}_u \omega' \text{ QED (il y a eu 4 simplifications dans le calcul).} \end{aligned}$$

Autres propriétés

$$\forall \omega \in \Omega^p(U) :$$

$$\mathcal{L}_{u+u'}\omega = \mathcal{L}_u \omega + \mathcal{L}_{u'}\omega \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_{ku}\omega = k \mathcal{L}_u \omega \text{ (k} \in \mathbb{R}) \text{ mais}$$

$$\mathcal{L}_{\lambda u}\omega \neq \lambda \mathcal{L}_u \omega \text{ } [\lambda \in \Omega^0(U)] \text{ et donc } \mathcal{L}_{u^i e_i}\omega \neq u^i \mathcal{L}_{e_i}\omega.$$

$$[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v]\omega = \mathcal{L}_{[u,v]}\omega, \text{ égalité dans } \Omega^p(U) [11]^{69} [23]^{70} \text{ et } [30]^{71}.$$

66. et (attention) non dans $\Omega^{p+p'}(T^*M)$

67. p. 210 Exercice 2

68. p. 213

69. pp. 207-208 pour $p = 0$

70. p. 93 Proposition 4

71. p. 234 Exercice 8

3.2.8 Liens entre la différentielle extérieure d et la dérivée de Lie \mathcal{L}_u

La différentielle extérieure d et la dérivée de Lie \mathcal{L}_u et commutent

On a $d \circ \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_u \circ d$ [8]⁷² [11]⁷³ [23]⁷⁴ et [30]⁷⁵.

Démonstration

Utilisons la propriété fondamentale.

- $d \circ \mathcal{L}_u = d \circ (d \circ i_u + i_u \circ d) = d \circ i_u \circ d$, car $d \circ d = 0$.
- $\mathcal{L}_u \circ d = (d \circ i_u + i_u \circ d) \circ d = d \circ i_u \circ d$, car $d \circ d = 0$.
- Donc $d \circ \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_u \circ d$ QED.

Formule de Cartan

On pourra consulter [9]⁷⁶ [11]⁷⁷ et [23]⁷⁸.

Soit $\omega \in \Omega^p(U)$; alors $d\omega \in \Omega^{p+1}(U)$ et :

$$(d\omega)(u_0, \dots, u_p) = \sum_{q=0}^p (-1)^q \mathcal{L}_{u_q}[\omega(u_0, \dots, \hat{u}_q, \dots, u_p)] \\ + \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} \omega([u_q, u_r], u_0, \dots, \hat{u}_q, \dots, \hat{u}_r, \dots, u_p) \in \Omega^0(U)$$

ou :

$$(d\omega)(u_1, \dots, u_{p+1}) = \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \mathcal{L}_{u_q}[\omega(u_1, \dots, \hat{u}_q, \dots, u_{p+1})] \\ + \sum_{q=1}^p \sum_{r=q+1}^{p+1} (-1)^{q+r} \omega([u_q, u_r], u_1, \dots, \hat{u}_q, \dots, \hat{u}_r, \dots, u_{p+1}) \in \Omega^0(U).$$

Démonstration par récurrence

• La formule de Cartan est vraie pour $p = 0$. En effet dans ce cas ω se note λ et on a $(d\lambda)(u_0) = (\partial_{i_0}\lambda) u_0^{i_0}$, alors que $\mathcal{L}_{u_0}(\lambda) = u_0^k \partial_k \lambda$ soit $(d\lambda)(u_0) = \mathcal{L}_{u_0}\lambda$.

• Supposons que la formule de Cartan est vraie pour $\omega \in \Omega^{p-1}(U)$ i.e; que :

72. p. 150 Propriété 4

73. p. 237

74. p. 97 Proposition 3

75. p. 207 PR2 et p. 218 éq. (6-18)

76. p. 194 Théorème IV.14.A

77. p. 233 éq. (11) où cette formule de Cartan est démontrée pour $p = 1$ mais avec visiblement une erreur au premier membre

78. p. 95 éq. (18.4) avec visiblement une erreur de signe dans le second terme du second membre

$$(d\omega)(u_1, \dots, u_p) = \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} \mathcal{L}_{u_q}[\omega(u_1, \dots, \widehat{u}_q, \dots, u_p)] \\ + \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} \omega([u_q, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_q, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p).$$

• Soit $\omega \in \Omega^p(U)$; alors $i_{u_0}\omega \in \Omega^{p-1}(U)$ et d'après l'hypothèse récursive on a :

$$(d(i_{u_0}\omega))(u_1, \dots, u_p) = \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} \mathcal{L}_{u_q}[(i_{u_0}\omega)(u_1, \dots, \widehat{u}_q, \dots, u_p)] \\ + \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} (i_{u_0}\omega)([u_q, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_q, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \\ = \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} \mathcal{L}_{u_q}[\omega(u_0, u_1, \dots, \widehat{u}_q, \dots, u_p)] \\ + \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} \omega(u_0, [u_q, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_q, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \\ = \sum_{q=1}^p (-1)^{q-1} \mathcal{L}_{u_q}[\omega(u_0, \dots, \widehat{u}_q, \dots, u_p)] \\ - \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} \omega([u_q, u_r], u_0, \dots, \widehat{u}_q, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p).$$

Mais on a vu que :

$$(d\omega)(u_0, \dots, u_p) = \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] \\ + \sum_{r=1}^p (-1)^r \omega([u_0, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \\ - (d(i_{u_0}\omega))(u_1, \dots, u_p) \text{ et par conséquent :}$$

$$(d\omega)(u_0, \dots, u_p) = \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, \dots, u_p)] \\ + \sum_{r=1}^p (-1)^r \omega([u_0, u_r], u_1, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \\ + \sum_{q=1}^p (-1)^q \mathcal{L}_{u_q}[\omega(u_0, \dots, \widehat{u}_q, \dots, u_p)] \\ + \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} \omega([u_q, u_r], u_0, \dots, \widehat{u}_q, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p) \\ = \sum_{q=0}^p (-1)^q \mathcal{L}_{u_q}[\omega(u_0, \dots, \widehat{u}_q, \dots, u_p)] \\ + \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{r=q+1}^p (-1)^{q+r} \omega([u_q, u_r], u_0, \dots, \widehat{u}_q, \dots, \widehat{u}_r, \dots, u_p). \text{ Il s'agit bien}$$

de la formule de Cartan pour $\omega \in \Omega^p(U)$ QED.

Exemples :

- $p = 0$; cas A

Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors $(d\lambda)(u_0) = \mathcal{L}_{u_0}\lambda \in \Omega^0(U)$ (déjà dit).

- $p = 1$; cas C

Si $a \in \Omega^1(U)$ alors :

$$(da)(u_0, u_1) = \mathcal{L}_{u_0}[a(u_1)] - \mathcal{L}_{u_1}[a(u_0)] - a([u_0, u_1]) \in \Omega^1(U) \text{ [23]}^{79}.$$

- $p = 2$; cas F -bis

Si $\omega \in \Omega^2(U)$ alors :

$$(d\omega)(u_0, u_1, u_2) = \mathcal{L}_{u_0}[\omega(u_1, u_2)] - \mathcal{L}_{u_1}[\omega(u_0, u_2)] + \mathcal{L}_{u_2}[\omega(u_0, u_1)] \\ - \omega([u_0, u_1], u_2) + \omega([u_0, u_2], u_1) - \omega([u_1, u_2], u_0) \in \Omega^2(U).$$

79. p. 95 éq. (18.6)

3.2.9 Le produit intérieur i_u et la dérivée de Lie \mathcal{L}_u commutent

On a $i_u \circ \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_u \circ i_u = i_u \circ d \circ i_u$ [8]⁸⁰ et [30]⁸¹.

Démonstration

Utilisons la propriété fondamentale.

$$\diamond i_u \circ \mathcal{L}_u = i_u \circ (d \circ i_u + i_u \circ d) = i_u \circ d \circ i_u, \text{ car } i_u \circ i_u = 0.$$

$$\diamond \mathcal{L}_u \circ i_u = (d \circ i_u + i_u \circ d) \circ i_u = i_u \circ d \circ i_u, \text{ car } i_u \circ i_u = 0.$$

$$\diamond \text{Donc } i_u \circ \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_u \circ i_u = i_u \circ d \circ i_u \text{ QED.}$$

80. p. 150 Propriété 4

81. p. 218 éq. (6-18)

Chapitre 4

Troisième partie : ce qui dépend des connexions

On pourra consulter [8]¹ et [11]².

On définit a priori des fonctions numériques $\gamma_{i.k}^j$; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, m$ [$\gamma_{i.k}^j \in \Omega^0(U)$; $\gamma_{k.i}^j \neq \gamma_{i.k}^j$, en général], appelées coefficients de connexion ou des fonctions numériques $\Gamma_{a.c}^b = \tilde{\gamma}_{a.c}^b$; $a = 1, \dots, m$; $b = 1, \dots, m$; $c = 1, \dots, m$ [$\Gamma_{a.c}^b \in \Omega^0(U)$; $\Gamma_{c.a}^b \neq \Gamma_{a.c}^b$, en général], appelées symboles de Christoffel de 2^e espèce.

Les symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a.c}^b$ se se déduisent des coefficients de connexion $\gamma_{i.k}^j$, par changements de bases mixtes et inversement, comme nous allons le voir.

4.1 La différentielle ∇_u selon le champ de vecteurs u

On pourra consulter [8]³. Le symbole ∇ s'appelle *del*, *nabla* (du nom d'une harpe hébraïque de même forme) ou *atled* (qui est *delta* écrit à l'envers).

1. pp. 228-279 Chapitre VI

2. pp. 264-276 § 28

3. p. 235

4.1.1 Définition

Soit u un champ de vecteurs [$u \in C^\infty(U; TM)$] et
 $\nabla_u \in L[C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M); C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)]$.

Donc si $t, t' \in C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)$ on a :

$\nabla_u(t + t') = \nabla_u t + \nabla_u t'$, égalité dans $C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)$ [8]⁴ et

$\nabla_u(kt) = k \nabla_u t$, avec $k \in \mathbb{R}$, égalité dans $C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)$.

Et ∇_u est tel que, par définition :

◇ en base mobile :

- $\nabla_u \lambda \triangleq u^i \partial_i \lambda \in \Omega^0(U)$ (soit $\nabla_{e_i} \lambda = \partial_i \lambda$).
- $\nabla_u e_k \triangleq (\gamma_{i,k}^j u^i) e_j \in C^\infty(U; TM)$
(soit $\nabla_{e_i} e_k = \gamma_{i,k}^j e_j$ ou $\gamma_{i,k}^j = (\nabla_{e_i} e_k)^j$).
- $\nabla_u \theta^j \triangleq -(\gamma_{i,k}^j u^i) \theta^k \in \Omega^1(U)$
(soit $\nabla_{e_i} \theta^j = -\gamma_{i,k}^j \theta^k$ ou $\gamma_{i,k}^j = -(\nabla_{e_i} \theta^j)_k$).

◇ en base naturelle :

- $\nabla_u \lambda \triangleq \tilde{u}^a \frac{\partial \lambda}{\partial x^a} \in \Omega^0(U)$ (soit $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x^a}$).
- $\nabla_u \frac{\partial}{\partial x^c} \triangleq (\Gamma_{a,c}^b \tilde{u}^a) \frac{\partial}{\partial x^b} \in C^\infty(U; TM)$
(soit $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^c} = \Gamma_{a,c}^b \frac{\partial}{\partial x^b}$ ou $\Gamma_{a,c}^b = \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^c}}^b$).
- $\nabla_u dx^b \triangleq (-\Gamma_{a,c}^b \tilde{u}^a) dx^c \in \Omega^1(U)$
(soit $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} dx^b = -\Gamma_{a,c}^b dx^c$ ou $\Gamma_{a,c}^b = -\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} dx^b}_c$).

- Si $t \in C^\infty(U; \underset{\text{p}}{\otimes} T^*M)$ et $t' \in C^\infty(U; \underset{\text{p}'}{\otimes} T^*M)$ alors :

4. p. 235 éq. (4.2)

$$\nabla_u (t \otimes t') = (\nabla_u t) \otimes t' + t \otimes \nabla_u t' \text{ [égalité dans } C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{q+q' \\ p+p'}} T^*M)]$$

i.e. ∇_u opère comme une *dérivation* sur le produit tensoriel [8]⁵.

Ces définitions permettent le calcul de $\nabla_u t; \forall t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$:

soit t un champ de (p, q) -tenseurs :

$$t = t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \dots \otimes e_{j_q}$$

$$= \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_q}}. \text{ Alors :}$$

$$\nabla_u t = (\nabla_u t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \dots \otimes e_{j_q}$$

$$= \widetilde{\nabla_u t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_q}}, \text{ avec :}$$

$$(\nabla_u t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} = u^i (\partial_i t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} + \gamma_{i,k}^{j_1} t_{i_1 \dots i_p}^{\dots k j_2 \dots j_q} + \dots + \gamma_{i,k}^{j_q} t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_{q-1} k} - \gamma_{i,i_1}^k t_{k i_2 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} - \dots - \gamma_{i,i_p}^k t_{i_1 \dots i_{p-1} k}^{\dots j_1 \dots j_q}) \text{ [8] }^6 \text{ (donc la parenthèse est } (\nabla_{e_i} t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q})$$

et :

$$\widetilde{\nabla_u t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} = \widetilde{u}^a \left(\frac{\partial \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q}}{\partial x^a} + \Gamma_{a,c}^{b_1} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots c b_2 \dots b_q} + \dots + \Gamma_{a,c}^{b_q} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_{q-1} c} - \Gamma_{a,a_1}^{c_1} \widetilde{t}_{c a_2 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} - \dots - \Gamma_{a,a_p}^{c_p} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_{p-1} c}^{\dots b_1 \dots b_q} \right) \text{ (donc la parenthèse est } \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q}).$$

Démonstration, par exemple en base mobile

Par définition de ∇_u et car $\lambda t = \lambda \otimes t; \forall t$, on a :

$$\nabla_u t = (\nabla_u t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q}) \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} + t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} (\nabla_u \theta^{i_1}) \otimes \dots \otimes e_{j_q} + \dots$$

$$+ t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes (\nabla_u \theta^{i_p}) \otimes \dots \otimes e_{j_q}$$

$$+ t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes (\nabla_u e_{j_1}) \otimes \dots \otimes e_{j_q} + \dots + t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes (\nabla_u e_{j_q})$$

$$= (u^i \partial_i t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q}) \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} + t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} (-\gamma_{i,k}^{i_1} u^i \theta^k) \otimes \dots \otimes e_{j_q} + \dots$$

$$+ t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes (-\gamma_{i,k}^{i_p} u^i \theta^k) \otimes \dots \otimes e_{j_q}$$

$$+ t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes (\gamma_{i,j_1}^j u^i e_j) \otimes \dots \otimes e_{j_q} + \dots + t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes (\gamma_{i,j_q}^j u^i e_j).$$

Soit $\nabla_u t \triangleq (\nabla_u t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \dots \otimes e_{j_q}$, avec :

5. p. 235 éq. (4.3)

6. p. 236 éq. (4.7)

$(\nabla_u t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \triangleq u^i (\partial_i t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} + \gamma_{i,k}^{j_1} t_{i_1 \dots i_p}^{\dots k j_2 \dots j_q} + \dots + \gamma_{i,k}^{j_q} t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_{q-1} k} - \gamma_{i,i_1}^k t_{k i_2 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} - \dots - \gamma_{i,i_p}^k t_{i_1 \dots i_{p-1} k}^{\dots j_1 \dots j_q})$ [on a fait $j_1 \rightarrow k$ et $j \rightarrow j_1$ dans le quatrième terme du second membre, $j_q \rightarrow k$ et $j \rightarrow j_q$ dans le cinquième terme du second membre, $k \leftrightarrow i_1$ dans le deuxième terme du second membre et $k \leftrightarrow i_p$ dans le troisième terme du second membre (sans compter les points de suspension) et on a permuté les termes du résultat] QED.

Donc (rappel) de même que :

$$\begin{aligned} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} &= \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \dots \widetilde{\theta}_{a_p}^{i_p} \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} \dots \widetilde{e}_{j_q}^{b_q} t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \text{ et} \\ t_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} &= \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \dots \widetilde{e}_{i_p}^{a_p} \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \dots \widetilde{\theta}_{b_q}^{j_q} \widetilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} \text{ on a :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla_u t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q} &= \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \dots \widetilde{\theta}_{a_p}^{i_p} \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} \dots \widetilde{e}_{j_q}^{b_q} (\nabla_u t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \text{ et} \\ (\nabla_u t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} &= \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \dots \widetilde{e}_{i_p}^{a_p} \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \dots \widetilde{\theta}_{b_q}^{j_q} \widetilde{\nabla_u t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q}. \end{aligned}$$

Les dérivées pfaffiennes et les coefficients de connexion apparaissent donc dans le calcul de $(\nabla_u t)_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q}$ alors que les dérivées classiques et les symboles Christoffel de 2^e espèce apparaissent dans celui de $\widetilde{\nabla_u t}_{a_1 \dots a_p}^{\dots b_1 \dots b_q}$.

Cas particulier des champs de formes différentielles extérieures

On pourra consulter [8]⁷.

Si $\omega \in \Omega^p(U) \subset C^\infty(U; \bigotimes_p T^*M)$ i.e. :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} = \frac{1}{p!} \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}, \text{ alors} \\ \nabla_u \omega &\in C^\infty(U; \bigotimes_p T^*M) \text{ i.e.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_u \omega &= (\nabla_u \omega)_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} = \widetilde{\nabla_u \omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p}, \text{ avec :} \\ (\nabla_u \omega)_{i_1 \dots i_p} &= u^i (\partial_i \omega_{i_1 \dots i_p} - \gamma_{i,i_1}^k \omega_{k i_2 \dots i_p} - \dots - \gamma_{i,i_p}^k \omega_{i_1 \dots i_{p-1} k}) \text{ et :} \\ \widetilde{\nabla_u \omega}_{a_1 \dots a_p} &= \widetilde{u}^a \left(\frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^a} - \Gamma_{a,a_1}^c \widetilde{\omega}_{c a_2 \dots a_p} - \dots - \Gamma_{a,a_p}^c \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_{p-1} c} \right). \end{aligned}$$

On peut vérifier que $(\nabla_u \omega)_{i_1 \dots i_p}$ est alterné en (i_1, \dots, i_p) et que $\widetilde{\nabla_u \omega}_{a_1 \dots a_p}$ l'est en (a_1, \dots, a_p) .

Par conséquent, en fait, $\nabla_u \omega \in \Omega^p(U)$ et :

7. pp. 236-237, p. 248 éqs. (11.10), (11.11) et (11.12)

$\nabla_u \omega = \frac{1}{p!} (\nabla_u \omega)_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} = \frac{1}{p!} \widetilde{\nabla_u \omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$
 $\in \Omega^p(U)$, avec les valeurs de $(\nabla_u \omega)_{i_1 \dots i_p}$ et $\widetilde{\nabla_u \omega}_{a_1 \dots a_p}$ précédentes.

Lien avec la différentielle

Plaçons nous en bases naturelles. Ssi la connexion est *symétrique*, i.e. telle que par définition $\Gamma_{a.c}^b = \Gamma_{c.a}^b$ (on verra plus loin qu'elle est alors sans *torsion*) on a :

$$\widetilde{d\omega}_{a_0 \dots a_p} = \frac{1}{p!} \varepsilon_{a_0 \dots a_p}^{b_0 \dots b_p} \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{b_0}}}} \omega_{b_1 \dots b_p}, \text{ où } \widetilde{d\omega}_{a_0 \dots a_p} \text{ est bien alterné en } (a_0, \dots, a_p) \text{ [8]}^8.$$

Les cas particuliers qui correspondent à $p = 0, 1, 2$ sont indiqués ci-après.

4.1.2 Propriétés

Formule de Liebniz

- Si $\lambda \in \Omega^0(U) : \nabla_u(\lambda t) = (\nabla_u \lambda) t + \lambda \nabla_u t$.

Démonstration

$$\nabla_u(\lambda t) = \nabla_u(\lambda \otimes t) = (\nabla_u \lambda) \otimes t + \lambda \otimes \nabla_u t = (\nabla_u \lambda) t + \lambda \nabla_u t \text{ QED.}$$

Remarque : la relation de définition de $\nabla_u :$

$\nabla_u(t \otimes t') = (\nabla_u t) \otimes t' + t \otimes \nabla_u t'$ peut être, elle même, qualifiée de formule de Liebniz.

Autres propriétés

Si $t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$ et $u, u' \in C^\infty(U; TM)$ alors :

$$\nabla_{u+u'} t = \nabla_u t + \nabla_{u'} t \text{ et}$$

$$\nabla_{ku} t = k \nabla_u t \text{ (} k \in \mathbb{R} \text{) mais}$$

$\nabla_{\lambda u} t = \lambda \nabla_u t$ [$\lambda \in \Omega^0(U)$] (c'est une différence notable, avec la dérivée de Lie \mathcal{L}_u).

Ces propriétés sont évidentes à démontrer.

Si $\lambda, \lambda' \in \Omega^0(U)$ on a donc :

8. p. 248 éq. (11.12)

$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda u}(\lambda' u') &= \lambda \nabla_u(\lambda' u') = \lambda[(\nabla_u \lambda') u' + \lambda' \nabla_u u'] \\ &= \lambda(\nabla_u \lambda') u' + \lambda \lambda' \nabla_u u' = \lambda(\mathcal{L}_u \lambda') u' + \lambda \lambda' \nabla_u u' \text{ car on verra que} \\ \nabla_u \lambda' &= \mathcal{L}_u \lambda'.\end{aligned}$$

Calcul des symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a.c}^b$ à partir des coefficients de connexion $\gamma_{i.k}^j$ et inversement

$$\text{On a } \Gamma_{a.c}^b = \tilde{e}_j^b (\tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j + \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}) \text{ et inversement } \gamma_{i.k}^j = \tilde{\theta}_b^j (\tilde{e}_i^a \tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b + \partial_i \tilde{e}_k^b).$$

Démonstrations

$$\begin{aligned}\Gamma_{a.c}^b &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^c} \stackrel{b}{=} \tilde{e}_j^b [\nabla_{\tilde{\theta}_a^i e_i} (\tilde{\theta}_c^k e_k)]^j = \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_a^i [\nabla_{e_i} (\tilde{\theta}_c^k e_k)]^j \\ &= \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_a^i [\tilde{\theta}_c^k \nabla_{e_i} e_k + (\nabla_{e_i} \tilde{\theta}_c^k) e_k]^j = \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_a^i [\tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j + (\partial_i \tilde{\theta}_c^k) \delta_k^j] \\ &= \tilde{e}_j^b [\tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j + \tilde{\theta}_a^i \partial_i \tilde{\theta}_c^j] = \tilde{e}_j^b (\tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j + \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}) \text{ QED.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{i.k}^j &= (\nabla_{e_i} e_k)^j = \tilde{\theta}_b^j \nabla_{\tilde{\theta}_a^i e_i} e_k \stackrel{b}{=} \tilde{\theta}_b^j \nabla_{\tilde{e}_i^a} \frac{\partial}{\partial x^c} (\tilde{e}_k^c \frac{\partial}{\partial x^c}) \stackrel{b}{=} \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_i^a \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} (\tilde{e}_k^c \frac{\partial}{\partial x^c}) \\ &= \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_i^a [\tilde{e}_k^c \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^c} + (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \tilde{e}_k^c) \frac{\partial}{\partial x^c}] = \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_i^a [\tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b + (\frac{\partial \tilde{e}_k^c}{\partial x^a}) \delta_c^b] \\ &= \tilde{\theta}_b^j [\tilde{e}_i^a \tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b + \tilde{e}_i^a \frac{\partial \tilde{e}_k^b}{\partial x^a}] = \tilde{\theta}_b^j (\tilde{e}_i^a \tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b + \partial_i \tilde{e}_k^b) \text{ QED.}\end{aligned}$$

Les relations précédentes sont les formules de changement entre une base mobile et une base naturelle. On voit donc que les $\gamma_{i.k}^j$ et les $\Gamma_{a.c}^b$ ne sont pas les composantes d'un champ de (2, 1) tenseurs [8]⁹.

Éléments $\pi_{i.k}^j \in \Omega^1(U)$ (j et k fixés) et $\Pi_c^b \in \Omega^1(U)$ (b et c fixés)

$$\begin{aligned}\text{On pose } \pi_{i.k}^j &\triangleq \gamma_{i.k}^j \theta^i \in \Omega^1(U) \text{ (j et k fixés) [8]¹⁰ et} \\ \Pi_c^b &\triangleq \Gamma_{a.c}^b dx^a \in \Omega^1(U) \text{ (b et c fixés).}\end{aligned}$$

Liens entre $\pi_{i.k}^j$ et Π_c^b dans $\Omega^1(U)$

$$\text{On a } \Pi_c^b = \tilde{e}_j^b (\tilde{\theta}_c^k \pi_{i.k}^j + d \tilde{\theta}_c^j) \text{ et inversement } \pi_{i.k}^j = \tilde{\theta}_b^j (\tilde{e}_k^c \Pi_c^b + d \tilde{e}_k^b)$$

Démonstrations

$$\begin{aligned}\Pi_c^b &= \Gamma_{a.c}^b dx^a = \tilde{e}_j^b (\tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j + \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}) \tilde{e}_l^a \theta^l = \tilde{e}_j^b [(\tilde{e}_l^a \tilde{\theta}_a^i) \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j \theta^l + (\tilde{e}_l^a \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}) \theta^l] \\ &= \tilde{e}_j^b [\delta_l^i \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j \theta^l + (\partial_l \tilde{\theta}_c^j) \theta^l] = \tilde{e}_j^b (\tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j \theta^i + d \tilde{\theta}_c^j) \\ &= \tilde{e}_j^b (\tilde{\theta}_c^k \pi_{i.k}^j + d \tilde{\theta}_c^j) \text{ QED et inversement :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_{i.k}^j &= \gamma_{i.k}^j \theta^i = \tilde{\theta}_b^j (\tilde{e}_i^a \tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b + \partial_i \tilde{e}_k^b) \tilde{\theta}_a^i dx^a \\ &= \tilde{\theta}_b^j [(\tilde{\theta}_d^i \tilde{e}_i^a) \tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b dx^d + (\tilde{\theta}_d^i \partial_i \tilde{e}_k^b) dx^d] = \tilde{\theta}_b^j (\delta_d^a \tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b dx^d + \frac{\partial \tilde{e}_k^b}{\partial x^d} dx^d) \\ &= \tilde{\theta}_b^j (\tilde{e}_k^c \Gamma_{a.c}^b dx^a + d \tilde{e}_k^b) = \tilde{\theta}_b^j (\tilde{e}_k^c \Pi_c^b + d \tilde{e}_k^b) \text{ QED.}\end{aligned}$$

9. p. 230

10. p. 229 éq. (1.6)

Les relations précédentes sont les formules de changement entre une base mobile et une base naturelle. On voit donc que les $\pi_{.k}^j$ et les $\Pi_{.c}^b$ ne sont pas les composantes d'un champ de $(1, 1)$.

On peut appeler les matrices $(\pi_{.k}^j)$, k indice de ligne et j indice de colonne et $(\Pi_{.c}^b)$, c indice de ligne et b indice de colonne, matrices de connexion.

Éléments $\sigma^j \in \Omega^2(U)$ (j fixé) et $\Sigma^b \in \Omega^2(U)$ (b fixé)

On pose $\sigma^j \triangleq \pi_{.k}^j \wedge \theta^k + d\theta^j \in \Omega^2(U)$ (j fixé) et $\Sigma^b \triangleq \Pi_{.c}^b \wedge dx^c \in \Omega^2(U)$ (b fixé).

On a donc $\sigma^j = \frac{1}{2} (\sigma^j)_{ik} \theta^i \wedge \theta^k$ avec $(\sigma^j)_{ik} = \gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j$ tel que $(\sigma^j)_{ki} = -(\sigma^j)_{ik}$ [et donc $(\sigma^j)_{ii} = 0$] et $\Sigma^b = \frac{1}{2} \widetilde{\Sigma}_{ac}^b dx^a \wedge dx^c$ avec $\widetilde{\Sigma}_{ac}^b = \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b$ tel que $\widetilde{\Sigma}_{ca}^b = -\widetilde{\Sigma}_{ac}^b$ (et donc $\widetilde{\Sigma}_{aa}^b = 0$).

Liens entre σ^j et Σ^b dans $\Omega^2(U)$

On a $\Sigma^b = \widetilde{e}_j^b \sigma^j$ et inversement $\sigma^j = \widetilde{\theta}_b^j \Sigma^b$.

Démonstrations

$\Sigma^b = \Pi_{.c}^b \wedge dx^c = \widetilde{e}_j^b (\widetilde{\theta}_c^k \pi_{.k}^j + d\widetilde{\theta}_c^j) \wedge (\widetilde{e}_l^c \theta^l) = \widetilde{e}_j^b [(\widetilde{e}_l^c \widetilde{\theta}_c^k) \pi_{.k}^j + \widetilde{e}_l^c (\partial_i \widetilde{\theta}_c^j) \theta^i] \wedge \theta^l$
 $= \widetilde{e}_j^b (\delta_l^k \pi_{.k}^j \wedge \theta^l + d\theta^j) = \widetilde{e}_j^b (\pi_{.k}^j \wedge \theta^k + d\theta^j) = \widetilde{e}_j^b \sigma^j$ QED et inversement :

$\sigma^j = \widetilde{\theta}_b^j \Sigma^b$ QED.

Mais alors $\widetilde{\Sigma}_{ac}^b = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{\theta}_c^k (\Sigma^b)_{ik} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{\theta}_c^k (\widetilde{e}_j^b \sigma^j)_{ik} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \widetilde{\theta}_c^k (\sigma^j)_{ik}$, soit :
 $\Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \widetilde{\theta}_c^k (\gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j)$ et inversement :

$(\sigma^j)_{ik} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \widetilde{e}_k^c \widetilde{\Sigma}_{ac}^b$, soit : $\gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \widetilde{e}_k^c (\Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b)$.

Remarque :

$\Sigma^b = \widetilde{e}_j^b \sigma^j \implies \Sigma^b \frac{\partial}{\partial x^b} = \sigma^j (\widetilde{e}_j^b \frac{\partial}{\partial x^b}) = \sigma^j e_j$.

Différentielles

On a donc, par différentiation de σ^j et Σ^b :

$d\sigma^j = d\pi_{.k}^j \wedge \theta^k - \pi_{.k}^j \wedge d\theta^k$ [8]¹¹ et $d\Sigma^b = d\Pi_{.c}^b \wedge dx^c$.

Éléments $\omega_i^j \in \Omega^2(U)$ (i et j fixés) et $\Omega_a^b \in \Omega^2(U)$ (a et b fixés)

On pose $\omega_i^j \triangleq d\pi_{.i}^j + \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m \in \Omega^2(U)$ (i et j fixés) [8]¹² et

11. p. 241 éq. (7.3)

12. p. 240 éq. (6.10)

$\Omega_a^b \triangleq d\Pi_a^b + \Pi_{.e}^b \wedge \Pi_{.a}^e \in \Omega^2(U)$ (a et b fixés)

On a donc $\omega_i^j = \frac{1}{2} (\omega_i^j)_{kl} \theta^k \theta^l$ avec

$(\omega_i^j)_{kl} = \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j$ et $\Omega_a^b = \frac{1}{2} \widetilde{\Omega}_{a\ cd}^b dx^c dx^d$
avec $\widetilde{\Omega}_{a\ cd}^b = \frac{\Gamma_{d.a}^b}{dx^c} - \frac{\Gamma_{c.a}^b}{dx^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b$

Liens entre ω_i^j et Ω_a^b dans $\Omega^2(U)$

On a $\Omega_a^b = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \omega_i^j$ et inversement $\omega_i^j = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \Omega_a^b$.

Démonstrations

• $\Pi_{.a}^b = \widetilde{e}_j^b (\widetilde{\theta}_a^i \pi_{.i}^j + d\widetilde{\theta}_a^j)$ donc

$$d\Pi_{.a}^b = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b d\pi_{.i}^j + \widetilde{e}_j^b (d\widetilde{\theta}_a^i) \wedge \pi_{.i}^j + \widetilde{\theta}_a^i (d\widetilde{e}_j^b) \wedge \pi_{.i}^j + (d\widetilde{e}_j^b) \wedge (d\widetilde{\theta}_a^j).$$

$$\begin{aligned} & \bullet \Pi_{.e}^b \wedge \Pi_{.a}^e = \widetilde{e}_j^b (\widetilde{\theta}_e^m \pi_{.m}^j + d\widetilde{\theta}_e^j) \wedge \widetilde{e}_n^e (\widetilde{\theta}_a^i \pi_{.i}^n + d\widetilde{\theta}_a^n) \\ &= \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b (\widetilde{e}_n^e \widetilde{\theta}_e^m) \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^n + \widetilde{e}_j^b (\widetilde{e}_n^e \widetilde{\theta}_e^m) \pi_{.m}^j \wedge d\widetilde{\theta}_a^n + \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_n^e (\widetilde{e}_j^b d\widetilde{\theta}_e^j) \wedge \pi_{.i}^n \\ &+ \widetilde{e}_j^b (\widetilde{e}_n^e d\widetilde{\theta}_e^j) \wedge d\widetilde{\theta}_a^n \\ &= \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \delta_n^m \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^n + \widetilde{e}_j^b \delta_n^m \pi_{.m}^j \wedge d\widetilde{\theta}_a^n + \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_n^e (-\widetilde{\theta}_e^j d\widetilde{e}_j^b) \wedge \pi_{.i}^n \\ &+ \widetilde{e}_j^b (-\widetilde{\theta}_e^j d\widetilde{e}_n^e) \wedge d\widetilde{\theta}_a^n \\ &= \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m + \widetilde{e}_j^b \pi_{.m}^j \wedge d\widetilde{\theta}_a^m - \widetilde{\theta}_a^i (\widetilde{e}_n^e \widetilde{\theta}_e^j) (d\widetilde{e}_j^b) \wedge \pi_{.i}^n \\ &- (\widetilde{\theta}_e^j \widetilde{e}_j^b) (d\widetilde{e}_n^e) \wedge d\widetilde{\theta}_a^n \\ &= \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m + \widetilde{e}_j^b \pi_{.i}^j \wedge d\widetilde{\theta}_a^i - \widetilde{\theta}_a^i \delta_n^j (d\widetilde{e}_j^b) \wedge \pi_{.i}^n - \delta_e^b (d\widetilde{e}_n^e) \wedge d\widetilde{\theta}_a^n \\ &= \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m - \widetilde{e}_j^b (d\widetilde{\theta}_a^i) \wedge \pi_{.i}^j - \widetilde{\theta}_a^i (d\widetilde{e}_j^b) \wedge \pi_{.i}^j - (d\widetilde{e}_n^e) \wedge (d\widetilde{\theta}_a^n) \\ &= \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m - \widetilde{e}_j^b (d\widetilde{\theta}_a^i) \wedge \pi_{.i}^j - \widetilde{\theta}_a^i (d\widetilde{e}_j^b) \wedge \pi_{.i}^j - (d\widetilde{e}_j^b) \wedge (d\widetilde{\theta}_a^j). \text{ Alors :} \end{aligned}$$

• $\Pi_{.a}^b + \Pi_{.e}^b \wedge \Pi_{.a}^e = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b (\pi_{.i}^j + \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m)$ soit $\Omega_a^b = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \omega_i^j$ QED et inversement :

$$\omega_i^j = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \Omega_a^b \text{ QED.}$$

Mais alors $\widetilde{\Omega}_{a\ cd}^b = \widetilde{\theta}_c^k \widetilde{\theta}_d^l (\Omega_a^b)_{kl} = \widetilde{\theta}_c^k \widetilde{\theta}_d^l (\widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \omega_i^j)_{kl} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \widetilde{\theta}_c^k \widetilde{\theta}_d^l (\omega_i^j)_{kl}$ soit :
 $\frac{\Gamma_{d.a}^b}{dx^c} - \frac{\Gamma_{c.a}^b}{dx^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b$
 $= \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \widetilde{\theta}_c^k \widetilde{\theta}_d^l (\partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j)$ et inversement :

$$\begin{aligned} & (\omega_i^j)_{kl} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \widetilde{e}_k^c \widetilde{e}_l^d \widetilde{\Omega}_{a\ cd}^b \text{ soit :} \\ & \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j \\ &= \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \widetilde{e}_k^c \widetilde{e}_l^d \left(\frac{\Gamma_{d.a}^b}{dx^c} - \frac{\Gamma_{c.a}^b}{dx^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b \right). \end{aligned}$$

Différentielles

On a $d\sigma^j = \omega_k^j \wedge \theta^k - \pi_{.k}^j \wedge \sigma^k$ [8]¹³ et $d\Sigma^b = \Omega_c^b \wedge dx^c - \Pi_{.c}^b \wedge \Sigma^c$.

Démonstrations

$$\begin{aligned} d\sigma^j &= d\pi_{.k}^j \wedge \theta^k - \pi_{.k}^j \wedge d\theta^k = (\omega_k^j - \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.k}^m) \wedge \theta^k - \pi_{.k}^j \wedge d\theta^k \\ &= \omega_k^j \wedge \theta^k - (\pi_{.k}^j \wedge \pi_{.i}^k \wedge \theta^i + \pi_{.k}^j \wedge d\theta^k) \\ &= \omega_k^j \wedge \theta^k - \pi_{.k}^j \wedge (\pi_{.i}^k \wedge \theta^i + d\theta^k) = \omega_k^j \wedge \theta^k - \pi_{.k}^j \wedge \sigma^k \text{ QED et de même :} \end{aligned}$$

$$d\Sigma^b = \Omega_c^b \wedge dx^c - \Pi_{.c}^b \wedge \Sigma^c \text{ QED.}$$

Par différentiation de ω_i^j et Ω_a^b on a :

$$d\omega_i^j = d\pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m - \pi_{.m}^j \wedge d\pi_{.i}^m \text{ [8]}^{14} \text{ et } d\Omega_a^b = d\Pi_{.e}^b \wedge \Pi_{.a}^e - \Pi_{.e}^b \wedge d\Pi_{.a}^e.$$

Mais on a également :

$$d\omega_i^j = \omega_m^j \wedge \pi_{.i}^m - \pi_{.m}^j \wedge \omega_i^m \text{ [8]}^{15} \text{ et } d\Omega_a^b = \Omega_e^b \wedge \Pi_{.a}^e - \Pi_{.e}^b \wedge \Omega_a^e.$$

Démonstrations

$$\begin{aligned} d\omega_i^j &= d\pi_{.m}^j \wedge \pi_{.i}^m - \pi_{.m}^j \wedge d\pi_{.i}^m \\ &= (\omega_m^j - \pi_{.n}^j \wedge \pi_{.m}^n) \wedge \pi_{.i}^m - \pi_{.m}^j \wedge (\omega_i^m - \pi_{.n}^m \wedge \pi_{.i}^n) \\ &= \omega_m^j \wedge \pi_{.i}^m - \pi_{.m}^j \wedge \omega_i^m - \pi_{.n}^j \wedge \pi_{.m}^n \wedge \pi_{.i}^m + \pi_{.m}^j \wedge \pi_{.n}^m \wedge \pi_{.i}^n \\ &= \omega_m^j \wedge \pi_{.i}^m - \pi_{.m}^j \wedge \omega_i^m \text{ (car les 2 derniers termes de l'expression précédente} \\ &\text{disparaissent puisque les indices } m \text{ et } n \text{ sont muets et peuvent être permutés)} \\ &\text{QED. De même :} \end{aligned}$$

$$d\Omega_a^b = \Omega_e^b \wedge \Pi_{.a}^e - \Pi_{.e}^b \wedge \Omega_a^e \text{ QED.}$$

4.1.3 Cas particuliers

Cas A

Il s'agit du cas particulier de champ de formes différentielles extérieures pour lequel $p = 0$.

$$\text{Si } \lambda \in \Omega^0(U) \text{ alors } \nabla_u \lambda = u^i \partial_i \lambda = \tilde{u}^a \frac{\partial \lambda}{\partial x^a} \in \Omega^0(U).$$

$$\text{On a bien } \widetilde{d\lambda}_{a_0} = \frac{1}{0!} \varepsilon_{a_0}^{b_0} \nabla_{\frac{\partial \lambda}{\partial x^{b_0}}} \lambda = \nabla_{\frac{\partial \lambda}{\partial x^{a_0}}} \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x^{a_0}}.$$

Remarque : on constate que $\nabla_u \lambda = \mathcal{L}_u \lambda$.

13. p. 241 éq. (7.4)

14. p. 241

15. p. 241

Cas B

Si $v \in C^\infty(U; TM)$ alors $\nabla_u v = (\nabla_u v)^{j_1} e_{j_1} = \widetilde{\nabla_u v}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \in C^\infty(U; TM)$, avec :

$$(\nabla_u v)^{j_1} = u^i (\partial_i v^{j_1} + \gamma_{i.k}^{j_1} v^k) \text{ et } \widetilde{\nabla_u v}^{b_1} = \tilde{u}^a \left(\frac{\partial \tilde{v}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \tilde{v}^c \right)$$

De même que $\tilde{v}^{b_1} = \tilde{e}_{j_1}^{b_1} v^{j_1}$ et $v^{j_1} = \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{v}^{b_1}$ on a :

$$\widetilde{\nabla_u v}^{b_1} = \tilde{e}_{j_1}^{b_1} (\nabla_u v)^{j_1} \text{ et } (\nabla_u v)^{j_1} = \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{\nabla_u v}^{b_1}.$$

Cas C

Il s'agit du cas particulier de champ de formes différentielles extérieures pour lequel $p = 1$.

Si $a \in \Omega^1(U)$ alors $\nabla_u a = (\nabla_u a)_{i_1} \theta^{i_1} = \widetilde{\nabla_u a_{a_1}} dx^{a_1} \in \Omega^1(U)$, avec :

$$(\nabla_u a)_{i_1} = u^i (\partial_i a_{i_1} - \gamma_{i.i_1}^k a_k) \text{ et } \widetilde{\nabla_u a_{a_1}} = \tilde{u}^a \left(\frac{\partial \tilde{a}_{a_1}}{\partial x^a} - \Gamma_{a.a_1}^c \tilde{a}_c \right);$$

De même que $\tilde{a}_{a_1} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} a_{i_1}$ et $a_{i_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{a}_{a_1}$ on a :

$$\widetilde{\nabla_u a_{a_1}} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} (\nabla_u a)_{i_1} \text{ et } (\nabla_u a)_{i_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{\nabla_u a_{a_1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ssi la connexion est symétrique on a bien } \widetilde{d a_{a_0 a_1}} &= \frac{1}{1!} \varepsilon_{a_0 a_1}^{b_0 b_1} \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{b_0}}} a_{b_1}} \\ &= \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{a_0}}} a_{a_1}} - \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{a_1}}} a_{a_0}} = \left(\frac{\partial \tilde{a}_{a_1}}{\partial x^{a_0}} - \Gamma_{a_0.a_1}^c \tilde{a}_c \right) - \left(\frac{\partial \tilde{a}_{a_0}}{\partial x^{a_1}} - \Gamma_{a_1.a_0}^c \tilde{a}_c \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{a}_{a_1}}{\partial x^{a_0}} - \frac{\partial \tilde{a}_{a_0}}{\partial x^{a_1}}, \text{ alterné en } (a_0, a_1). \end{aligned}$$

Cas D

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in C^\infty(U; \bigotimes_0^2 T^*M) \text{ alors } \nabla_u t &= (\nabla_u t)^{j_1 j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \\ &= \widetilde{\nabla_u t}^{b_1 b_2} \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_2}} \in C^\infty(U; \bigotimes_0^2 T^*M), \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_u t)^{j_1 j_2} &= u^i (\partial_i t^{j_1 j_2} + \gamma_{i.k}^{j_1} t^{k j_2} + \gamma_{i.k}^{j_2} t^{j_1 k}) \text{ et} \\ \widetilde{\nabla_u t}^{b_1 b_2} &= \tilde{u}^a \left(\frac{\partial \tilde{t}^{b_1 b_2}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \tilde{t}^{c b_2} + \Gamma_{a.c}^{b_2} \tilde{t}^{b_1 c} \right) \end{aligned}$$

De même que $\tilde{t}^{b_1 b_2} = \tilde{e}_{j_1}^{b_1} \tilde{e}_{j_2}^{b_2} t^{j_1 j_2}$ et $t^{j_1 j_2} = \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{\theta}_{b_2}^{j_2} \tilde{t}^{b_1 b_2}$ on a :

$$\widetilde{\nabla_u t}^{b_1 b_2} = \tilde{e}_{j_1}^{b_1} \tilde{e}_{j_2}^{b_2} (\nabla_u t)^{j_1 j_2} \text{ et } (\nabla_u t)^{j_1 j_2} = \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{\theta}_{b_2}^{j_2} \widetilde{\nabla_u t}^{b_1 b_2}.$$

Cas E

$$\begin{aligned}
t &\in C^\infty(U; \bigotimes_1 T^*M) \text{ alors } \nabla_u t = (\nabla_u t)_{i_1}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \\
&= \widetilde{\nabla}_u t_{a_1}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \in C^\infty(U; \bigotimes_1 T^*M), \text{ avec :} \\
(\nabla_u t)_{i_1}^{j_1} &= u^i (\partial_i t_{i_1}^{j_1} + \gamma_{i.k}^{j_1} t_{i_1}^k - \gamma_{i.i_1}^k t_k^{j_1}) \text{ et} \\
\widetilde{\nabla}_u t_{a_1}^{b_1} &= \tilde{u}^a (\frac{\partial \tilde{t}_{a_1}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \tilde{t}_{a_1}^c - \Gamma_{a.a_1}^c \tilde{t}_c^{b_1}) \\
\text{De même que } \tilde{t}_{a_1}^{b_1} &= \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} t_{i_1}^{j_1} \text{ et } t_{i_1}^{j_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{t}_{a_1}^{b_1} \text{ on a :} \\
\widetilde{\nabla}_u t_{a_1}^{b_1} &= \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} (\nabla_u t)_{i_1}^{j_1} \text{ et } (\nabla_u t)_{i_1}^{j_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{\nabla}_u t_{a_1}^{b_1}.
\end{aligned}$$

Cas F-bis

Il s'agit du cas particulier de champ de formes différentielles extérieures pour lequel $p = 2$.

$$\begin{aligned}
\omega &\in \Omega^2(U) \text{ alors } \nabla_u \omega = \frac{1}{2} (\nabla_u \omega)_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \\
&= \frac{1}{2} \widetilde{\nabla}_u \omega_{a_1 a_2} dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \in \Omega^2(U), \text{ avec :} \\
(\nabla_u \omega)_{i_1 i_2} &= u^i (\partial_i \omega_{i_1 i_2} - \gamma_{i.i_1}^k \omega_{k i_2} - \gamma_{i.i_2}^k \omega_{i_1 k}) \text{ et} \\
\widetilde{\nabla}_u \omega_{a_1 a_2} &= \tilde{u}^a (\frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 a_2}}{\partial x^a} - \Gamma_{a.a_1}^c \tilde{\omega}_{c a_2} - \Gamma_{a.a_2}^c \tilde{\omega}_{a_1 c})
\end{aligned}$$

On vérifie bien que $(\nabla_u \omega)_{i_1 i_2}$ et $\widetilde{\nabla}_u \omega_{a_1 a_2}$ sont alternés respectivement en (i_1, i_2) et (a_1, a_2) .

De même que $\tilde{\omega}_{a_1 a_2} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \omega_{i_1 i_2}$ et $\omega_{i_1 i_2} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{\omega}_{a_1 a_2}$ on a :

$$\widetilde{\nabla}_u \omega_{a_1 a_2} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} (\nabla_u \omega)_{i_1 i_2} \text{ et } (\nabla_u \omega)_{i_1 i_2} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \widetilde{\nabla}_u \omega_{a_1 a_2}.$$

Ssi la connexion est symétrique on a bien $\widetilde{d}\omega_{a_0 a_1 a_2} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{a_0 a_1 a_2}^{b_0 b_1 b_2} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^{b_0}}} \omega_{b_1 b_2}$, soit, tous calculs faits :

$$\widetilde{d}\omega_{a_0 a_1 a_2} = \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_1 a_2}}{\partial x^{a_0}} - \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_0 a_2}}{\partial x^{a_1}} + \frac{\partial \tilde{\omega}_{a_0 a_1}}{\partial x^{a_2}}, \text{ alterné en } (a_0, a_1, a_2).$$

Cas F

$$\begin{aligned}
& t \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M) \text{ alors } \nabla_u t = (\nabla_u t)_{i_1 i_2} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \\
& = \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M), \text{ avec :} \\
& (\nabla_u t)_{i_1 i_2} = u^i (\partial_i t_{i_1 i_2} - \gamma_{i, i_1}^k t_{k i_2} - \gamma_{i, i_2}^k t_{i_1 k}) \text{ et} \\
& \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2} = \tilde{u}^a \left(\frac{\partial \tilde{t}_{a_1 a_2}}{\partial x^a} - \Gamma_{a, a_1}^c \tilde{t}_{c a_2} - \Gamma_{a, a_2}^c \tilde{t}_{a_1 c} \right) \\
& \text{De même que } \tilde{t}_{a_1 a_2} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} t_{i_1 i_2} \text{ et } t_{i_1 i_2} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{t}_{a_1 a_2} \text{ on a :} \\
& \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} (\nabla_u t)_{i_1 i_2} \text{ et } (\nabla_u t)_{i_1 i_2} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2}.
\end{aligned}$$

Cas G (utile pour la torsion)

$$\begin{aligned}
& t \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M) \text{ alors } \nabla_u t = (\nabla_u t)_{i_1 i_2}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes e_{j_1} \\
& = \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2}^{b_1} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \\
& \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M), \text{ avec :} \\
& (\nabla_u t)_{i_1 i_2}^{j_1} = u^i (\partial_i t_{i_1 i_2}^{j_1} + \gamma_{i, i_1}^{j_1} t_{i_1 i_2}^{k} - \gamma_{i, i_1}^k t_{k i_2}^{j_1} - \gamma_{i, i_2}^k t_{i_1 k}^{j_1}) \text{ et} \\
& \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2}^{b_1} = \tilde{u}^a \left(\frac{\partial \tilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a, c}^{b_1} \tilde{t}_{a_1 a_2}^{c} - \Gamma_{a, a_1}^c \tilde{t}_{c a_2}^{b_1} - \Gamma_{a, a_2}^c \tilde{t}_{a_1 c}^{b_1} \right). \\
& \text{De même que } \tilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} t_{i_1 i_2}^{j_1} \text{ et } t_{i_1 i_2}^{j_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \tilde{t}_{a_1 a_2}^{b_1} \text{ on a :} \\
& \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2}^{b_1} = \tilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \tilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \tilde{e}_{j_1}^{b_1} (\nabla_u t)_{i_1 i_2}^{j_1} \text{ et } (\nabla_u t)_{i_1 i_2}^{j_1} = \tilde{e}_{i_1}^{a_1} \tilde{e}_{i_2}^{a_2} \tilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{\nabla}_u t_{a_1 a_2}^{b_1}
\end{aligned}$$

Cas H (utile pour la courbure)

$$\begin{aligned}
& t \in C^\infty(U; \underset{3}{\otimes} T^*M) \text{ alors } \nabla_u t = (\nabla_u t)_{i_1, i_2, i_3}^{j_1} \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3} \\
& = \widetilde{\nabla}_u t_{a_1, a_2, a_3}^{b_1} dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes dx^{a_2} \otimes dx^{a_3} \in C^\infty(U; \underset{3}{\otimes} T^*M), \text{ avec :}
\end{aligned}$$

$$(\nabla_u t)_{i_1.i_2i_3}^{j_1} = u^i (\partial_i t_{i_1.i_2i_3}^{j_1} + \gamma_{i.k}^{j_1} t_{i_1.i_2i_3}^k - \gamma_{i.i_1}^k t_{k.i_2i_3}^{j_1} - \gamma_{i.i_2}^k t_{i_1.ki_3}^{j_1} - \gamma_{i.i_3}^k t_{i_1.i_2k}^{j_1})$$

et

$$\widetilde{\nabla}_u t_{a_1.a_2a_3}^{b_1} = \widetilde{u}^a \left(\frac{\partial \widetilde{t}_{a_1.a_2a_3}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \widetilde{t}_{a_1.a_2a_3}^c - \Gamma_{a.a_1}^c \widetilde{t}_{c.a_2a_3}^{b_1} - \Gamma_{a.a_2}^c \widetilde{t}_{a_1.ca_3}^{b_1} - \Gamma_{a.a_3}^c \widetilde{t}_{a_1.a_2c}^{b_1} \right).$$

De même que $\widetilde{t}_{a_1.a_2a_3}^{b_1} = \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} \widetilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \widetilde{\theta}_{a_3}^{i_3} t_{i_1.i_2i_3}^{j_1}$ et $t_{i_1.i_2i_3}^{j_1} = \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{e}_{i_2}^{a_2} \widetilde{e}_{i_3}^{a_3} \widetilde{t}_{a_1.a_2a_3}^{b_1}$
on a :

$$\widetilde{\nabla}_u t_{a_1.a_2a_3}^{b_1} = \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} \widetilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \widetilde{\theta}_{a_3}^{i_3} (\nabla_u t)_{i_1.i_2i_3}^{j_1} \text{ et } (\nabla_u t)_{i_1.i_2i_3}^{j_1} = \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{e}_{i_2}^{a_2} \widetilde{e}_{i_3}^{a_3} \widetilde{\nabla}_u t_{a_1.a_2a_3}^{b_1}.$$

4.1.4 La divergence div d'un champ de vecteurs

Soit $v \in C^\infty(U; TM)$ alors :

$$\text{div } v \triangleq (\nabla_{e_i} v)^i \triangleq \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^a}} v^a \in \Omega^0(U) \text{ [8]}^{16} \text{ [9]}^{17} \text{ et [27]}^{18}. \text{ Soit :}$$

$$\text{div } v = \partial_i v^i + \gamma_{i.k}^i v^k = \frac{\partial \widetilde{v}^a}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^a \widetilde{v}^c \text{ [38]}^{19}.$$

Remarque : on peut définir la divergence pour un champ de tenseurs quelconque [9]²⁰ et [36]²¹ et donc en particulier pour un champ de formes différentielles. Cependant pour éviter toute confusion nous ne le ferons pas.

4.2 La différentielle absolue ou covariante ∇

On pourra consulter [8]²² [11]²³ et [35].

La différentielle absolue ou covariante ∇ augmente de un la covariance, d'où son nom.

4.2.1 Définition

∇ est tel que :

-
- 16. p. 246 éq. (11.1) pour la 1^e égalité
 - 17. p. 189 pour la 2^e égalité
 - 18. pp. 555-556 § 2.4.6 Exemple 2 pour la 2^e égalité, p. 557 § 2.4.7 Application pour la 2^e égalité
 - 19. p. 1 pour la 2^e égalité
 - 20. pp. 465-466
 - 21. p. 7
 - 22. p. 235
 - 23. pp. 264-276 § 28 mais les auteurs mélangent trop ∇_u et ∇

$$\nabla t \triangleq \theta^i \otimes \nabla_{e_i} t; \forall t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M). \text{ Alors } \nabla t \in C^\infty(U; \bigotimes_{p+1}^q T^*M)$$

et on constate que :

$$\nabla \in L[C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M); C^\infty(U; \bigotimes_{p+1}^q T^*M)].$$

Donc si $t, t' \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$ on a :

$$\nabla(t + t') = \nabla t + \nabla t', \text{ égalité dans } C^\infty(U; \bigotimes_{p+1}^q T^*M) \text{ [8]}^{24} \text{ et}$$

$$\nabla(kt) = k \nabla t, \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \text{ égalité dans } C^\infty(U; \bigotimes_{p+1}^q T^*M).$$

En base mobile si :

$$t = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \dots \otimes e_{j_q}, \text{ on a :}$$

$$\nabla t \triangleq (\nabla t)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \dots \otimes e_{j_q}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} (\nabla t)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= (\nabla_{e_i} t)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \triangleq \partial_i t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \gamma_{i.k}^{j_1} t_{i_1 \dots i_p}^{kj_2 \dots j_q} + \dots + \gamma_{i.k}^{j_q} t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{q-1}k} \\ &- \gamma_{i.i_1}^k t_{ki_2 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \dots - \gamma_{i.i_p}^k t_{i_1 \dots i_{p-1}k}^{j_1 \dots j_q}. \end{aligned}$$

Les dérivées pfaiennes et les coefficients de connexion apparaissent donc.

En base naturelle si :

$$t = \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_q}}, \text{ on a :}$$

$$\nabla t = \widetilde{\nabla} \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} dx^a \otimes dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_q}}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla} \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} &= \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} \triangleq \frac{\partial \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{cb_2 \dots b_q} + \dots + \Gamma_{a.c}^{b_q} \tilde{t}_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_{q-1}c} \\ &- \Gamma_{a.a_1}^c \tilde{t}_{ca_2 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} - \dots - \Gamma_{a.a_p}^c \tilde{t}_{a_1 \dots a_{p-1}c}^{b_1 \dots b_q}. \end{aligned}$$

Les dérivées classiques et les symboles de Christoffel de 2^e espèce apparaissent donc.

24. p. 235 éq. (4.2)

Cas particulier des champs de formes différentielles extérieures

Si $\omega \in \Omega^p(U)$ i.e. :

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} = \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p}. \text{ Alors :}$$

$$\nabla \omega = (\nabla \omega)_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} = \widetilde{\nabla \omega}_{aa_1 \dots a_p} dx^a \otimes dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p}, \text{ avec :}$$

$$(\nabla \omega)_{i_1 \dots i_p} = (\nabla_{e_i} \omega)_{i_1 \dots i_p} = \partial_i \omega_{i_1 \dots i_p} - \gamma_{i.i_1}^k \omega_{ki_2 \dots i_p} - \dots - \gamma_{i.i_p}^k \omega_{i_1 \dots i_{p-1}k}$$

$$\widetilde{\nabla \omega}_{aa_1 \dots a_p} = \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \omega}_{a_1 \dots a_p} = \frac{\partial \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^a} - \Gamma_{a.a_1}^c \widetilde{\omega}_{ca_2 \dots a_p} - \dots - \Gamma_{a.a_p}^c \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_{p-1}c}.$$

4.2.2 Propriétés

Formule de Liebniz

- Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ et $t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$ on a :

$\nabla(\lambda t) = (\nabla \lambda) \otimes t + \lambda \nabla t$. Et si λ est une fonction numérique *constante* égale à k on a $\nabla k = 0$ et on retrouve $\nabla(kt) = k \nabla t$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda t) &\triangleq \theta^i \otimes \nabla_{e_i}(\lambda t) = \theta^i \otimes [(\nabla_{e_i} \lambda)t + \lambda \nabla_{e_i} t] \\ &= \theta^i \otimes [(\nabla_{e_i} \lambda) \otimes t + \lambda \nabla_{e_i} t] = (\theta^i \otimes \nabla_{e_i} \lambda) \otimes t + \lambda \theta^i \otimes \nabla_{e_i} t \\ &= (\nabla \lambda) \otimes t + \lambda \nabla t \text{ QED.} \end{aligned}$$

Remarque : attention si $t \in C^\infty(U; \bigotimes_p^q T^*M)$ et $t' \in C^\infty(U; \bigotimes_{p'}^{q'} T^*M)$

alors, en général :

$\nabla(t \otimes t') \neq (\nabla t) \otimes t' + t \otimes \nabla t'$, en raison de la non-commutativité du produit tensoriel [8]²⁵

4.2.3 Cas particuliers

Cas A

Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors $\nabla \lambda = (\nabla \lambda)_i \theta^i = \widetilde{\nabla \lambda}_a dx^a \in \Omega^1(U)$ (cas C), avec :

$$(\nabla \lambda)_i = \partial_i \lambda \text{ et } \widetilde{\nabla \lambda}_a = \frac{\partial \lambda}{\partial x^a}. \text{ Alors on remarque que } \nabla \lambda = d\lambda.$$

25. p. 236 exercice

On a $\widetilde{\nabla} \lambda_a = \widetilde{\theta}_a^i (\nabla \lambda)_i$ et $(\nabla \lambda)_i = \widetilde{e}_a^i \widetilde{\nabla} \lambda_a$.

Cas B

Si $v \in C^\infty(U; TM)$ alors $\nabla v = (\nabla v)_i^{j_1} \theta^i \otimes e_{j_1} = \widetilde{\nabla} v_a^{b_1} dx^a \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}}$
 $\in C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{1 \\ 1}} T^*M)$ (cas E), avec :

$$(\nabla v)_i^{j_1} = \partial_i v^{j_1} + \gamma_{i.k}^{j_1} v^k \text{ et } \widetilde{\nabla} v_a^{b_1} = \frac{\partial \widetilde{v}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \widetilde{v}^c.$$

On a $\widetilde{\nabla} v_a^{b_1} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} (\nabla v)_i^{j_1}$ et $(\nabla v)_i^{j_1} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{\nabla} v_a^{b_1}$

Cas C

Si $a \in \Omega^1(U)$ alors

$\nabla a = (\nabla a)_{ii_1} \theta^i \otimes \theta^{i_1} = \widetilde{\nabla} a_{aa_1} dx^a \otimes dx^{a_1} \in C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{0 \\ 2}} T^*M)$ (cas F),

avec :

$$(\nabla a)_{ii_1} = \partial_i a_{i_1} - \gamma_{i.i_1}^k a_k \text{ et } \widetilde{\nabla} a_{aa_1} = \frac{\partial \widetilde{a}_{a_1}}{\partial x^a} - \Gamma_{a.a_1}^c \widetilde{a}_c.$$

On a $\widetilde{\nabla} a_{aa_1} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{\theta}_{i_1}^{a_1} (\nabla a)_{ii_1}$ et $(\nabla a)_{ii_1} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{\nabla} a_{aa_1}$.

Cas D

Si $t \in C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{2 \\ 0}} T^*M)$ alors $\nabla t = (\nabla t)_i^{j_1 j_2} \theta^i \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2}$
 $= \widetilde{\nabla} t_a^{b_1 b_2} dx^a \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_2}} \in C^\infty(U; \bigotimes_{\substack{2 \\ 1}} T^*M)$, avec :

$$(\nabla t)_i^{j_1 j_2} \triangleq \partial_i t^{j_1 j_2} + \gamma_{i.k}^{j_1} t^{k j_2} + \gamma_{i.k}^{j_2} t^{j_1 k} \text{ et } \widetilde{\nabla} t_a^{b_1 b_2} = \frac{\partial \widetilde{t}^{b_1 b_2}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \widetilde{t}^{c b_2} + \Gamma_{a.c}^{b_2} \widetilde{t}^{b_1 c}.$$

On a $\widetilde{\nabla} t_a^{b_1 b_2} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} \widetilde{e}_{j_2}^{b_2} (\nabla t)_i^{j_1 j_2}$ et $(\nabla t)_i^{j_1 j_2} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{\theta}_{b_2}^{j_2} \widetilde{\nabla} t_a^{b_1 b_2}$.

Cas E

$$\begin{aligned}
& \text{Si } t \in C^\infty(U; \underset{1}{\otimes} T^*M) \text{ alors } \nabla t = (\nabla t)_{ii_1}^{j_1} \theta^i \otimes \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \\
& = \widetilde{\nabla} t_{aa_1}^{b_1} dx^a \otimes dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M) \text{ (cas G), avec :} \\
& (\nabla t)_{ii_1}^{j_1} = \partial_i t_{i_1}^{j_1} + \gamma_{i.k}^{j_1} t_{i_1}^k - \gamma_{i.i_1}^k t_k^{j_1} \text{ et } \widetilde{\nabla} t_{aa_1}^{b_1} = \frac{\partial t_{aa_1}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \widetilde{t}_{a_1}^c - \Gamma_{a.a_1}^c \widetilde{t}_c^{b_1}. \\
& \text{On a } \widetilde{\nabla} t_{aa_1}^{b_1} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} (\nabla t)_{ii_1}^{j_1} \text{ et } (\nabla t)_{ii_1}^{j_1} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{\nabla} t_{aa_1}^{b_1}.
\end{aligned}$$

Cas F

$$\begin{aligned}
& \text{Si } t \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M) \text{ alors } \nabla t = (\nabla t)_{ii_1 i_2} \theta^i \otimes \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \\
& = \widetilde{\nabla} t_{aa_1 a_2} dx^a \otimes dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \in C^\infty(U; \underset{3}{\otimes} T^*M), \text{ avec :} \\
& (\nabla t)_{ii_1 i_2} = \partial_i t_{i_1 i_2} - \gamma_{i.i_1}^k t_{k i_2} - \gamma_{i.i_2}^k t_{i_1 k} \text{ et} \\
& \widetilde{\nabla} t_{aa_1 a_2} = \frac{\partial \widetilde{t}_{aa_1 a_2}}{\partial x^a} - \Gamma_{a.a_1}^c \widetilde{t}_{ca_2} - \Gamma_{a.a_2}^c \widetilde{t}_{a_1 c}. \\
& \text{On a } \widetilde{\nabla} t_{aa_1 a_2} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \widetilde{\theta}_{a_2}^{i_2} (\nabla t)_{ii_1 i_2} \text{ et } (\nabla t)_{ii_1 i_2} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{e}_{i_2}^{a_2} \widetilde{\nabla} t_{aa_1 a_2}.
\end{aligned}$$

Cas G (utile pour la torsion)

$$\begin{aligned}
& \text{Si } t \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M) \text{ alors } \nabla t = (\nabla t)_{ii_1 i_2}^{j_1} \theta^i \otimes \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes e_{j_1} \\
& = \widetilde{\nabla} t_{aa_1 a_2}^{b_1} dx^a \otimes dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \in C^\infty(U; \underset{3}{\otimes} T^*M) \text{ (mais ce n'est pas}
\end{aligned}$$

le cas H), avec :

$$(\nabla t)_{ii_1 i_2}^{j_1} = \partial_i t_{i_1 i_2}^{j_1} + \gamma_{i.k}^{j_1} t_{i_1 i_2}^k - \gamma_{i.i_1}^k t_{k i_2}^{j_1} - \gamma_{i.i_2}^k t_{i_1 k}^{j_1}$$

et :

$$\widetilde{\nabla} t_{aa_1 a_2}^{b_1} = \frac{\partial \widetilde{t}_{aa_1 a_2}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \widetilde{t}_{a_1 a_2}^c - \Gamma_{a.a_1}^c \widetilde{t}_{ca_2}^{b_1} - \Gamma_{a.a_2}^c \widetilde{t}_{a_1 c}^{b_1}. \text{ On a :}$$

$$\widetilde{\nabla}_u t_{aa_1 a_2}^{b_1} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \widetilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} (\nabla_u t)_{ii_1 i_2}^{j_1} \text{ et } (\nabla_u t)_{ii_1 i_2}^{j_1} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{e}_{i_2}^{a_2} \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{\nabla}_u t_{aa_1 a_2}^{b_1}$$

Cas H (utile pour la courbure)

$$\begin{aligned}
& \text{Si } t \in C^\infty(U; \bigotimes_3 T^*M) \text{ alors } \nabla t \\
& = (\nabla t)_{ii_1.i_2i_3}^{::j_1} \theta^i \otimes \theta^{i_1} \otimes e_{j_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3} \\
& = \widetilde{\nabla} t_{aa_1.a_2a_3}^{..b_1} dx^a \otimes dx^{a_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \otimes dx^{a_2} \otimes dx^{a_3}, \text{ avec :} \\
& (\nabla t)_{ii_1.i_2i_3}^{::j_1} = \partial_i t_{i_1.i_2i_3}^{j_1} + \gamma_{i.k}^{j_1} t_{i_1.i_2i_3}^{.k} - \gamma_{i.i_1}^k t_{k.i_2i_3}^{j_1} - \gamma_{i.i_2}^k t_{i_1.ki_3}^{j_1} - \gamma_{i.i_3}^k t_{i_1.i_2k}^{j_1} \\
& \text{et} \\
& \widetilde{\nabla} t_{aa_1.a_2a_3}^{..b_1} = \frac{\partial \widetilde{t}_{a_1.a_2a_3}^{b_1}}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^{b_1} \widetilde{t}_{a_1.a_2a_3}^{.c} - \Gamma_{a.a_1}^c \widetilde{t}_{c.a_2a_3}^{b_1} - \Gamma_{a.a_2}^c \widetilde{t}_{a_1.ca_3}^{b_1} - \Gamma_{a.a_3}^c \widetilde{t}_{a_1.a_2c}^{b_1} \\
& \text{On a :} \\
& \widetilde{\nabla}_u t_{aa_1.a_2a_3}^{..b_1} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{\theta}_{a_1}^{i_1} \widetilde{e}_{j_1}^{b_1} \widetilde{\theta}_{a_2}^{i_2} \widetilde{\theta}_{a_3}^{i_3} (\nabla_u t)_{ii_1.i_2i_3}^{::j_1} \text{ et} \\
& (\nabla_u t)_{ii_1.i_2i_3}^{::j_1} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{e}_{i_1}^{a_1} \widetilde{\theta}_{b_1}^{j_1} \widetilde{e}_{i_2}^{a_2} \widetilde{e}_{i_3}^{a_3} \widetilde{\nabla}_u t_{aa_1.a_2a_3}^{..b_1}.
\end{aligned}$$

4.3 Le champ de tenseurs de torsion S

On pourra consulter [8]²⁶, qui note S ce champ et [30]²⁷, qui le note T .

Si $v, w \in C^\infty(U; TM)$ (cas B) la torsion exprime de combien $\nabla_v w - \nabla_w v$ diffère de $[v, w]$ [8]²⁸.

4.3.1 Calcul, en base mobile, de

$$(\nabla_v w - \nabla_w v - [v, w])^j$$

- $(\nabla_v w)^j = v^i (\partial_i w^j + \gamma_{i.k}^j w^k)$.
- $(\nabla_w v)^j = w^k (\partial_k v^j + \gamma_{k.i}^j v^i)$.
- $[v, w]^j = v^i \partial_i w^j - w^k \partial_k v^j + c_{i.k}^j v^i w^k$.

Soustrayons les deuxième et troisième relations ci-devant de la première. Il vient :

$$(\nabla_v w - \nabla_w v - [v, w])^j = S_{i.k}^{..j} v^i w^k, \text{ avec :}$$

26. pp. 237-239 § 5

27. pp. 289-290 Leçon 8 (Géométrie riemannienne) § 2.D.1 Tenseur de torsion

28. p. 239

$S_{ik}^{\cdot\cdot j} \triangleq \gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j$ tel que $S_{ki}^{\cdot\cdot j} = -S_{ik}^{\cdot\cdot j}$ (et donc $S_{ii}^{\cdot\cdot j} = 0$). On remarque donc que $S_{ik}^{\cdot\cdot j} = (\sigma^j)_{ik}$.

4.3.2 Calcul, en base naturelle, de

$$\nabla_v w - \widetilde{\nabla_w v} - [v, w]^b$$

De même on a :

$$\nabla_v w - \widetilde{\nabla_w v} - [v, w]^b = \widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c, \text{ avec :}$$

$\widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} \triangleq \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b$ tel que $\widetilde{S}_{ca}^{\cdot\cdot b} = -\widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b}$ (et donc $\widetilde{S}_{aa}^{\cdot\cdot b} = 0$). On remarque donc que $\widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} = \widetilde{\Sigma}_{ac}^b$.

4.3.3 Passage entre ces 2 calculs

On a :

$$\widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c = \widetilde{e}_j^b S_{ik}^{\cdot\cdot j} v^i w^k \text{ et } S_{ik}^{\cdot\cdot j} v^i w^k = \widetilde{\theta}_b^j \widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c \text{ et, par conséquent :}$$

$$\widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \widetilde{\theta}_c^k S_{ik}^{\cdot\cdot j} \text{ et } S_{ik}^{\cdot\cdot j} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \widetilde{e}_k^c \widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b}.$$

On retrouve bien que $\widetilde{\Sigma}_{ac}^b = \widetilde{\theta}_a^i \widetilde{e}_j^b \widetilde{\theta}_c^k (\sigma_j)_{ik}$ et que $(\sigma_j)_{ik} = \widetilde{e}_i^a \widetilde{\theta}_b^j \widetilde{e}_k^c \widetilde{\Sigma}_{ac}^b$.

4.3.4 Définition du champ de tenseurs de torsion S

Le champ de tenseurs de torsion est, par définition, le $(2, 1)$ champ de tenseurs S :

$$S \in C^\infty(U; \bigotimes_2^1 T^*M) \text{ (cas } G), \text{ tel que :}$$

$$S = S_{ik}^{\cdot\cdot j} \theta^i \otimes \theta^k \otimes e_j = \widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} dx^a \otimes dx^c \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}.$$

Donc :

$$C^\infty(U; TM)_v \times C^\infty(U; TM)_w \times C^\infty(U; T^*M)_a \xrightarrow[S(v, w, a)]{S} \Omega^0(U),$$

$$\text{avec } S(v, w, a) = S_{ik}^{\cdot\cdot j} v^i w^k a_j = \widetilde{S}_{ac}^{\cdot\cdot b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c \widetilde{a}_b.$$

4.3.5 Autre interprétation du champ de tenseur de torsion

Soit $S(v, w) \triangleq \nabla_v w - \nabla_w v - [v, w] \in C^\infty(U; TM)$. On a :

$S(w, v) = -S(v, w)$. Et donc :

$$(S(v, w))^j = (\nabla_v w - \nabla_w v - [v, w])^j = S_{ik}^{..j} v^i w^k \text{ et :}$$

$$\widetilde{S(v, w)}^b = \nabla_v w - \widetilde{\nabla_w v} - [v, w]^b = \widetilde{S}_{ac}^{..b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c. \text{ Et donc :}$$

$$S_{ik}^{..j} = (S(e_i, e_k))^j \text{ et } \widetilde{S}_{ac}^{..b} = S\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^c}\right)^b.$$

$$S(v, w) \in C^\infty(U; \bigotimes_0^1 T^*M) = C^\infty(U; TM); \text{ donc :}$$

$$C^\infty(U; T^*M) \xrightarrow[S(v, w)_a]{S(v, w)} \Omega^0(U), \text{ avec :}$$

$$(S(v, w))_a = (S(v, w))^j a_j \triangleq S_{ik}^{..j} v^i w^k a_j = \widetilde{S(v, w)}^b \widetilde{a}_b \triangleq \widetilde{S}_{ac}^{..b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c \widetilde{a}_b.$$

$$\text{Et donc } (S(v, w))^j = S_{ik}^{..j} v^i w^k \text{ et } \widetilde{S(v, w)}^b = \widetilde{S}_{ac}^{..b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c.$$

$$\text{Finalement } S(v, w, a) = (S(v, w))_a = S_{ik}^{..j} v^i w^k a_j = \widetilde{S}_{ac}^{..b} \widetilde{v}^a \widetilde{w}^c \widetilde{a}_b.$$

4.4 Le champ de tenseurs de courbure

On pourra consulter [8]²⁹ [11]³⁰ [21]³¹ [25]³² et [30]³³. Mais certains de ces auteurs ne traitent que du cas des variétés riemanniennes (cf. chapitre suivant).

Si $u, v, w \in C^\infty(U; TM)$ (cas B) la courbure exprime de combien $\nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u)$ diffère de $\nabla_{[v, w]}u$.

4.4.1 Calcul, en base mobile, de

$$[\nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u) - \nabla_{[v, w]}u]^j$$

$$\begin{aligned} & \bullet [\nabla_v(\nabla_w u)]^j = v^k [\partial_k(\nabla_w u)^j + \gamma_{k.m}^{..j}(\nabla_w u)^m] \\ & = v^k \{ \partial_k[w^l(\partial_l u^j + \gamma_{l.i}^{..j} u^i)] + \gamma_{k.m}^{..j} [w^l(\partial_l u^m + \gamma_{l.i}^{..m} u^i)] \} \\ & = v^k \{ (\partial_k w^l)(\partial_l u^j + \gamma_{l.i}^{..j} u^i) + w^l [\partial_k(\partial_l u^j) + (\partial_k \gamma_{l.i}^{..j}) u^i + \gamma_{l.i}^{..j} \partial_k u^i] \\ & + w^l (\gamma_{k.m}^{..j} \partial_l u^m + \gamma_{k.m}^{..j} \gamma_{l.i}^{..m} u^i) \}. \end{aligned}$$

29. pp. 239-240 § 6

30. pp. 289-301 § 30

31. pp. 120-132 § III

32. pp. 281-298 Leçon 19

33. pp. 298-308 § 4

Donc si on permute v et w et k et l on obtient :

$$\begin{aligned}
& \bullet [\nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u)]^j \\
&= v^k \{ (\partial_k w^l) (\partial_l u^j + \gamma_{l.i}^j u^i) + w^l [\partial_k (\partial_l u^j) + (\partial_k \gamma_{l.i}^j) u^i + \gamma_{l.i}^j \partial_k u^i] \\
&+ w^l (\gamma_{k.m}^j \partial_l u^m + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m u^i) \} \\
&- w^l \{ (\partial_l v^k) (\partial_k u^j + \gamma_{k.i}^j u^i) + v^k [\partial_l (\partial_k u^j) + (\partial_l \gamma_{k.i}^j) u^i + \gamma_{k.i}^j \partial_l u^i] \\
&+ v^k (\gamma_{l.m}^j \partial_k u^m + \gamma_{l.m}^j \gamma_{k.i}^m u^i) \} \\
&= v^k w^l \{ [\partial_k (\partial_l u^j) - \partial_l (\partial_k u^j)] + (\partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{l.m}^j \gamma_{k.i}^m) u^i \\
&+ \langle \gamma_{l.i}^j \partial_k u^i - \gamma_{l.m}^j \partial_k u^m + \gamma_{k.m}^j \partial_l u^m - \gamma_{k.i}^j \partial_l u^i \rangle \\
&+ v^k (\partial_k w^l) (\partial_l u^j + \gamma_{l.i}^j u^i) - w^l (\partial_l v^k) (\partial_k u^j + \gamma_{k.i}^j u^i) \}.
\end{aligned}$$

Du fait que i et m sont muets les 4 termes situés entre \langle et \rangle disparaissent et étant donné que $\partial_k (\partial_l u^j) - \partial_l (\partial_k u^j) = c_{k.l}^m \partial_m u^j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
& \bullet [\nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u)]^j \\
&= v^k w^l [c_{k.l}^m \partial_m u^j + (\partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{l.m}^j \gamma_{k.i}^m) u^i] \\
&+ v^k (\partial_k w^l) (\partial_l u^j + \gamma_{l.i}^j u^i) - w^l (\partial_l v^k) (\partial_k u^j + \gamma_{k.i}^j u^i). \\
& \bullet (\nabla_{[v,w]} u)^j = (\nabla_{[v,w]}^m e_m u)^j = [v, w]^m (\nabla_{e_m} u)^j \\
&= (v^l \partial_l w^m - w^l \partial_l v^m + c_{k.l}^m v^k w^l) (\nabla_{e_m} u)^j \\
&= v^k (\partial_k w^l) (\nabla_{e_l} u)^j - w^l (\partial_l v^k) (\nabla_{e_k} u)^j + c_{k.l}^m v^k w^l (\nabla_{e_m} u)^j \\
&= v^k (\partial_k w^l) (\partial_l u^j + \gamma_{l.i}^j u^i) - w^l (\partial_l v^k) (\partial_k u^j + \gamma_{k.i}^j u^i) + c_{k.l}^m v^k w^l (\partial_m u^j + \gamma_{m.i}^j u^i) \\
&\text{(on a fait un changement d'indices pour les 2 dernières expressions).}
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}
& \bullet [\nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u) - \nabla_{[v,w]} u]^j = R_{i.kl}^j u^i v^k w^l, \text{ avec :} \\
& R_{i.kl}^j \triangleq \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j \text{ [8] }^{34} \text{ tel que} \\
& R_{i.lk}^j = -R_{i.kl}^j \text{ (et donc } R_{i.kk}^j = 0). \text{ On constate que } R_{i.lk}^j = (\omega_i^j)_{kl}.
\end{aligned}$$

4.4.2 Calcul, en base naturelle, de

$$\nabla_v(\nabla_w u) - \widetilde{\nabla_w(\nabla_v u)} - \nabla_{[v,w]}^b u$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
& \bullet \nabla_v(\nabla_w u) - \widetilde{\nabla_w(\nabla_v u)} - \nabla_{[v,w]}^b u = \widetilde{R}_{a.cd}^b \widetilde{u}^a \widetilde{v}^c \widetilde{w}^d, \text{ avec :} \\
& \widetilde{R}_{a.cd}^b \triangleq \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b \text{ [8] }^{35}, \text{ [21] }^{36} \text{ et [25] }^{37} \text{ tel que}
\end{aligned}$$

34. p. 240 éq. (6.8)

35. p. 329 éq. (6.3)

36. p. 126 éq. (81,2)

37. p. 286 éq. (21)

$\tilde{R}_{a.dc}^b = -\tilde{R}_{a.cd}^b$ [11]³⁸ (et donc $\tilde{R}_{a.cc}^b = 0$). On constate que $\tilde{R}_{a.cd}^b = \widetilde{\Omega}_{a.cd}^b$.

4.4.3 Passage entre ces 2 calculs

On a :

$\tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{u}^a \tilde{v}^c \tilde{w}^d = \tilde{e}_j^b R_{i.kl}^j u^i v^k w^l$ et $R_{i.kl}^j u^i v^k w^l = \tilde{\theta}_b^j \tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{u}^a \tilde{v}^c \tilde{w}^d$ et, par conséquent :

$$\tilde{R}_{a.cd}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i.kl}^j \text{ et } R_{i.kl}^j = \tilde{e}_i^a \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_c^k \tilde{e}_l^d \tilde{R}_{a.cd}^b$$

On retrouve bien que $\widetilde{\Omega}_{a.cd}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l (\omega_i^j)_{kl}$ et $(\omega_i^j)_{kl} = \tilde{e}_i^a \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_c^k \tilde{e}_l^d \widetilde{\Omega}_{a.cd}^b$.

4.4.4 Définition du champ de tenseurs de courbure R

Le champ de tenseurs de courbure est, par définition, le (3, 1) champ de tenseurs R :

$$R \in C^\infty(U; \bigotimes_3^1 T^*M) \text{ (cas } H) \text{ tel que :}$$

$$R = R_{i.kl}^j \theta^i \otimes e_j \otimes \theta^k \otimes \theta^l = \tilde{R}_{a.cd}^b dx^a \otimes \frac{\partial}{\partial x^b} \otimes dx^c \otimes dx^d.$$

Donc :

$$C^\infty(U; TM)_u \times C^\infty(U; T^*M)_a \times C^\infty(U; TM)_v \times C^\infty(U; TM)_w \xrightarrow{R} \Omega^0(U) \xrightarrow{R(u,a,v,w)}$$

$$\text{avec } R(u, a, v, w) = R_{i.kl}^j u^i a_j v^k w^l = \tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{u}^a \tilde{a}_b \tilde{v}^c \tilde{w}^d.$$

4.4.5 Autres interprétations du champ de tenseur de courbure

Soit $[\nabla_v, \nabla_w] \triangleq \nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v$ et $R(v, w) \triangleq [\nabla_v, \nabla_w] - \nabla_{[v,w]}$

$\in C^\infty(U; \bigotimes_1^1 T^*M)$ [25]³⁹ et [30]⁴⁰ alors

$R(v, w)u = (\nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v - \nabla_{[v,w]})u = \nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u) - \nabla_{[v,w]}u$
 $\in C^\infty(U; TM)$. On a $R(w, v) = -R(v, w)$. Et donc $R_{i.kl}^j = (R(e_k, e_l) e_i)^j$

$$\text{et } \tilde{R}_{a.cd}^b = R\left(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}\right) \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

38. p. 292 § 3 1.

39. p. 293 éq. (34)

40. p. 299 éq. (8-54)

- Pour $R(v, w) : R(v, w) \in C^\infty(U; \bigotimes_{1}^{1} T^*M)$:

$$C^\infty(U; TM) \times C^\infty(U; T^*M) \xrightarrow{(v, w)} \Omega^0(U) \xrightarrow{(R(v, w))(u, a)} \text{ , avec :}$$

$$(R(v, w))(u, a) = (R(v, w))_i^j u^i a_j \triangleq R_{i.kl}^j u^i a_j v^k w^l = \widetilde{R(v, w)}_a^b \tilde{u}^a \tilde{a}_b \\ \triangleq \tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{u}^a \tilde{a}_b \tilde{v}^c \tilde{w}^d.$$

$$\text{Et donc } (R(v, w))_i^j = R_{i.kl}^j v^k w^l \text{ et } \widetilde{R(v, w)}_a^b = \tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{v}^c \tilde{w}^d.$$

- Pour $R(v, w) u : R(v, w) u \in C^\infty(U; TM)$:

$$C^\infty(U; T^*M) \xrightarrow{(v, w)u} \Omega^0(U) \xrightarrow{(R(v, w)u)a} \text{ , avec :}$$

$$(R(v, w)u)a = (R(v, w)u)^j a_j \triangleq R_{i.kl}^j u^i a_j v^k w^l = \widetilde{R(v, w)u}^b \tilde{a}_b \\ \triangleq \tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{u}^a \tilde{a}_b \tilde{v}^c \tilde{w}^d.$$

$$\text{Et donc } (R(v, w)u)^j = R_{i.kl}^j u^i v^k w^l \text{ et } \widetilde{R(v, w)u}^b = \tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{u}^a \tilde{v}^c \tilde{w}^d.$$

$$\text{Finalement } R(u, a, v, w) = (R(v, w))(u, a) = (R(v, w)u)a \\ = R_{i.kl}^j u^i a_j v^k w^l = \tilde{R}_{a.cd}^b \tilde{u}^a \tilde{a}_b \tilde{v}^c \tilde{w}^d.$$

4.4.6 Calcul de $(\nabla_{e_m} R)_{i.kl}^j$ et propriétés

D'après ce qui précède (cf. cas H) :

$(\nabla_{e_m} R)_{i.kl}^j = \partial_m R_{i.kl}^j + \gamma_{m.n}^j R_{i.kl}^n - \gamma_{m.i}^n R_{n.kl}^j - \gamma_{m.k}^n R_{i.nl}^j - \gamma_{m.l}^n R_{i.kn}^j$ et on remarque que :

$$(\nabla_{e_m} R)_{i.lk}^j = -(\nabla_{e_m} R)_{i.kl}^j \text{ et donc } (\nabla_{e_m} R)_{i.kk}^j = 0.$$

4.4.7 Le champ de tenseurs de Ricci

On pourra consulter [4]⁴¹ [8]⁴² [11]⁴³ et [21]⁴⁴. Mais ce champ n'est défini dans le cas d'une connexion quelconque, comme ici, que par [4]. Les trois autres auteurs ne considèrent que le cas d'une connexion riemannienne (cf. chapitre suivant).

41. pp. 90-91 § X

42. p. 245 éq. (10.6)

43. p. 293 dans le cas particulier $\dim M = 2$, p. 295 dans le cas particulier $\dim M = 3$ et p. 296 évoqué dans le cas particulier $\dim M = 4$

44. pp. 130-131 § 85

Le champ de tenseurs de Ricci est, par définition, le $(1, 1)$ champ de tenseur \bar{R} obtenu par *contraction* du champ de tenseurs R [27]⁴⁵ :

$$\bar{R} \in C^\infty(U; \bigotimes_2 T^*M) \text{ (cas } F), \text{ tel que :}$$

$$\bar{R} = R_{il} \theta^i \otimes \theta^l = \tilde{R}_{ad} dx^a \otimes dx^d, \text{ avec :}$$

$$\bullet R_{il} \triangleq R_{i,jl}^j = \partial_j \gamma_{l,i}^j - \partial_l \gamma_{j,i}^j - c_{j,l}^m \gamma_{m,i}^j + \gamma_{j,m}^j \gamma_{l,i}^m - \gamma_{j,i}^m \gamma_{l,m}^j. \text{ Donc :}$$

changement de bases mobiles :

$$R_{i'l'} = \theta_{i'}^i \theta_{l'}^l R_{il} \text{ et } R_{il} = e_i^{i'} e_{l'}^l R_{i'l'}.$$

$$\bullet \tilde{R}_{ad} \triangleq \tilde{R}_{a,bd}^b = \frac{\partial \Gamma_{d,a}^b}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{b,a}^d}{\partial x^d} + \Gamma_{b,e}^b \Gamma_{d,a}^e - \Gamma_{b,a}^e \Gamma_{d,e}^b \text{ [8] }^{46}. \text{ Donc :}$$

changement de bases naturelles :

$$\tilde{R}_{a'd'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^d}{\partial x^{d'}} \tilde{R}_{ad} \text{ et } \tilde{R}_{ad} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^d}{\partial x^d} \tilde{R}_{a'd'}.$$

Remarque : en général le champ de tenseur de Ricci n'est pas symétrique.

4.5 Liens entre les champs de tenseurs de torsion et de courbure

$$\begin{aligned} & \text{On a } R(v, w)u + R(w, u)v + R(u, v)w \\ &= \nabla_u S(v, w) + \nabla_v S(w, u) + \nabla_w S(u, v) \\ &+ S(u, [v, w]) + S(v, [w, u]) + S(w, [u, v]) \text{ [30] }^{47}. \end{aligned}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & R(v, w)u + R(w, u)v + R(u, v)w \\ &= (\nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v - \nabla_{[v,w]}) u \\ &+ (\nabla_w \nabla_u - \nabla_u \nabla_w - \nabla_{[w,u]}) v \\ &+ (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u,v]}) w \\ &= (\nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v - \nabla_{[v,w]}) u + (\nabla_w \nabla_u - \nabla_u \nabla_w - \nabla_{[w,u]}) v \\ &+ \nabla_u (\nabla_w v + [v, w] + S(v, w)) - \nabla_v (\nabla_w u + [u, w] + S(u, w)) \\ &- (\nabla_w [u, v] + [[u, v], w] + S([u, v], w)) \\ &= \nabla_u [v, w] - \nabla_v [u, w] - \nabla_w [u, v] - [[u, v], w] \\ &- \nabla_w \nabla_v u - \nabla_{[v,w]} u + \nabla_w \nabla_u v - \nabla_{[w,u]} v \\ &+ \nabla_u S(v, w) - \nabla_v S(u, w) - S([u, v], w) \end{aligned}$$

45. pp. 521-522 § 1.7.1

46. p. 245 éq. (10.7)

47. pp. 317-318 Exercice 15 mais uniquement lorsque $S = 0$

$$\begin{aligned}
&= (\nabla_{[v,w]} u + [[u, v], w] - S([v, w], u)) + (-\nabla_{[u,w]} v - [[v, u], w] + S([u, w], v)) \\
&- \nabla_w [u, v] - [[u, v], w] - \nabla_w (\nabla_u v - [u, v] - S(u, v)) - \nabla_{[v,w]} u + \nabla_w \nabla_u v \\
&- \nabla_{[w,u]} v + \nabla_u S(v, w) - \nabla_v S(u, w) - S([u, v], w) \\
&= [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] \\
&+ \nabla_u S(v, w) + \nabla_v S(w, u) + \nabla_w S(u, v) \\
&+ S(u, [v, w]) + S(v, [w, u]) + S(w, [u, v]) \\
&= \nabla_u S(v, w) + \nabla_v S(w, u) + \nabla_w S(u, v) \\
&+ S(u, [v, w]) + S(v, [w, u]) + S(w, [u, v]) \text{ QED.}
\end{aligned}$$

On a aussi $d\Sigma^j = \Omega_k^j \wedge \theta^k - \pi_k^j \wedge \Sigma^k$ et $d\tilde{\Sigma}^b = \tilde{\Omega}_c^b \wedge dx^c - \tilde{\pi}_c^b \wedge \tilde{\Sigma}^c$

Identités de Bianchi [8] ⁴⁸

Soient :

$$\begin{aligned}
&\oint_{klm} (\nabla_{e_k} R)_{i.lm}^j \triangleq (\nabla_{e_k} R)_{i.lm}^j + (\nabla_{e_l} R)_{i.mk}^j + (\nabla_{e_m} R)_{i.kl}^j, \\
&\oint_{klm} S_{ml}^{..n} R_{i.nk}^j \triangleq S_{ml}^{..n} R_{i.nk}^j + S_{km}^{..n} R_{i.nl}^j + S_{lk}^{..n} R_{i.nm}^j \text{ et :} \\
&\oint_{cde} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^c}} \tilde{R})_{a.de}^b \triangleq (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^c}} \tilde{R})_{a.de}^b + (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^d}} \tilde{R})_{a.ec}^b + (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^e}} \tilde{R})_{a.cd}^b, \\
&\oint_{cde} \tilde{S}_{ed}^{..f} \tilde{R}_{a.fc}^b \triangleq \tilde{S}_{ed}^{..f} \tilde{R}_{a.fc}^b + \tilde{S}_{ce}^{..f} \tilde{R}_{a.fd}^b + \tilde{S}_{dc}^{..f} \tilde{R}_{a.fe}^b. \text{ Alors :}
\end{aligned}$$

$$\oint_{klm} (\nabla_{e_k} R)_{i.lm}^j = \oint_{klm} S_{ml}^{..n} R_{i.nk}^j \text{ et } \oint_{cde} \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^c}} R}_{a.de}^b = \oint_{cde} \tilde{S}_{ed}^{..f} \tilde{R}_{a.fc}^b$$

Démonstration

cf. Annexe G.

Autres identités entre les champs de tenseurs de torsion et de courbure

Soient :

$$\begin{aligned}
&\oint_{ikl} R_{i.kl}^j \triangleq R_{i.kl}^j + R_{k.li}^j + R_{l.ik}^j, \\
&\oint_{ikl} [(\nabla_{e_i} S)_{kl}^{..j} - S_{kl}^{..m} S_{im}^{..j}] \\
&\triangleq (\nabla_{e_i} S)_{kl}^{..j} - S_{kl}^{..m} S_{im}^{..j} + (\nabla_{e_k} S)_{li}^{..j} - S_{li}^{..m} S_{km}^{..j} + (\nabla_{e_l} S)_{ik}^{..j} - S_{ik}^{..m} S_{lm}^{..j} \text{ et :} \\
&\oint_{acd} \tilde{R}_{a.cd}^b \triangleq \tilde{R}_{a.cd}^b + \tilde{R}_{c.da}^b + \tilde{R}_{d.ac}^b, \\
&\oint_{acd} [\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} S}_{cd}^{..b} - \tilde{S}_{cd}^{..e} \tilde{S}_{ae}^{..b}] \\
&\triangleq \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} S}_{cd}^{..b} - \tilde{S}_{cd}^{..e} \tilde{S}_{ae}^{..b} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^e}} S}_{da}^{..b} - \tilde{S}_{da}^{..e} \tilde{S}_{ce}^{..b} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^d}} S}_{ac}^{..b} - \tilde{S}_{ac}^{..e} \tilde{S}_{de}^{..b}. \text{ Alors :} \\
&\oint_{ikl} [(\nabla_{e_i} S)_{kl}^{..j} - S_{kl}^{..m} S_{im}^{..j}] = \oint_{ikl} R_{i.kl}^j \text{ et } \oint_{acd} [\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} S}_{cd}^{..b} - \tilde{S}_{cd}^{..e} \tilde{S}_{ae}^{..b}] = \oint_{acd} \tilde{R}_{a.cd}^b.
\end{aligned}$$

48. p. 241

Démonstration

cf. Annexe H.

4.6 Torsion et courbure dans le cas $m = 2$

4.6.1 Torsion

$$\begin{aligned} S_{ik}^{\cdot j} &= \gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j = -S_{ki}^{\cdot j} \\ \tilde{S}_{ac}^{\cdot b} &= \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = -\tilde{S}_{ca}^{\cdot b}. \end{aligned}$$

Il y a a priori 2 termes différents et non nuls à calculer :

$$\begin{aligned} S_{12}^{\cdot 1} &= \gamma_{1.2}^1 - \gamma_{2.1}^1 - c_{1.2}^1 = -S_{21}^{\cdot 1} \\ S_{12}^{\cdot 2} &= \gamma_{1.2}^2 - \gamma_{2.1}^2 - c_{1.2}^2 = -S_{21}^{\cdot 2} \\ \tilde{S}_{12}^{\cdot 1} &= \Gamma_{1.2}^1 - \Gamma_{2.1}^1 = -\tilde{S}_{21}^{\cdot 1} \\ \tilde{S}_{12}^{\cdot 2} &= \Gamma_{1.2}^2 - \Gamma_{2.1}^2 = -\tilde{S}_{21}^{\cdot 2} \end{aligned}$$

4.6.2 Courbure

$$\begin{aligned} R_{i.kl}^j &= \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j = -R_{i.lk}^j \\ \tilde{R}_{a.cd}^b &= \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\tilde{R}_{a.dc}^b \end{aligned}$$

Il y a a priori 4 termes différents et non nuls à calculer :

$$\begin{aligned} R_{1.12}^1 &= \partial_1 \gamma_{2.1}^1 - \partial_2 \gamma_{1.1}^1 - c_{1.2}^1 \gamma_{1.1}^1 - c_{1.2}^2 \gamma_{2.1}^1 + \gamma_{1.2}^1 \gamma_{2.1}^2 - \gamma_{1.1}^2 \gamma_{2.2}^1 = -R_{1.21}^1, \\ R_{1.12}^2 &= \partial_1 \gamma_{2.1}^2 - \partial_2 \gamma_{1.1}^2 - c_{1.2}^1 \gamma_{1.1}^2 - c_{1.2}^2 \gamma_{2.1}^2 + \gamma_{1.1}^2 \gamma_{2.1}^1 + \gamma_{1.2}^2 \gamma_{2.2}^1 \\ - \gamma_{1.1}^1 \gamma_{2.1}^2 - \gamma_{1.1}^2 \gamma_{2.2}^2 &= -R_{1.21}^2, \\ R_{2.12}^1 &= \partial_1 \gamma_{2.2}^1 - \partial_2 \gamma_{1.2}^1 - c_{1.2}^1 \gamma_{1.2}^1 - c_{1.2}^2 \gamma_{2.2}^1 + \gamma_{1.1}^1 \gamma_{2.2}^1 + \gamma_{1.2}^1 \gamma_{2.2}^2 \\ - \gamma_{1.2}^1 \gamma_{2.1}^1 - \gamma_{1.2}^2 \gamma_{2.2}^1 &= -R_{2.21}^1, \\ R_{2.12}^2 &= \partial_1 \gamma_{2.2}^2 - \partial_2 \gamma_{1.2}^2 - c_{1.2}^1 \gamma_{1.2}^2 - c_{1.2}^2 \gamma_{2.2}^2 + \gamma_{1.1}^2 \gamma_{2.2}^1 - \gamma_{1.2}^1 \gamma_{2.2}^2 = -R_{2.21}^2, \\ \tilde{R}_{1.12}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{1.2}^1 \Gamma_{2.1}^2 - \Gamma_{1.1}^2 \Gamma_{2.2}^1 = -\tilde{R}_{1.21}^1 \\ \tilde{R}_{1.12}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{2.1}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{1.1}^2 \Gamma_{2.1}^1 + \Gamma_{1.2}^2 \Gamma_{2.1}^2 - \Gamma_{1.1}^1 \Gamma_{2.1}^2 - \Gamma_{1.1}^2 \Gamma_{2.2}^2 = -\tilde{R}_{1.21}^2 \\ \tilde{R}_{2.12}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{2.2}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{1.1}^1 \Gamma_{2.2}^1 + \Gamma_{1.2}^1 \Gamma_{2.2}^2 - \Gamma_{1.2}^1 \Gamma_{2.1}^1 - \Gamma_{1.2}^2 \Gamma_{2.2}^1 = -\tilde{R}_{2.21}^1 \\ \tilde{R}_{2.12}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{2.2}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.2}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{1.1}^2 \Gamma_{2.2}^1 - \Gamma_{1.2}^1 \Gamma_{2.1}^2 = -\tilde{R}_{2.21}^2 \end{aligned}$$

Champ de tenseurs de Ricci

$$\begin{aligned} R_{11} &= -R_{1.12}^2, \quad R_{12} = R_{1.12}^1, \quad R_{21} = -R_{2.21}^2, \quad R_{22} = R_{2.21}^1. \\ \tilde{R}_{11} &= -\tilde{R}_{1.12}^2, \quad \tilde{R}_{12} = \tilde{R}_{1.12}^1, \quad \tilde{R}_{21} = -\tilde{R}_{2.21}^2, \quad \tilde{R}_{22} = \tilde{R}_{2.21}^1. \end{aligned}$$

4.7 Torsion et courbure dans le cas $m = 3$

4.7.1 Torsion

$$\begin{aligned} S_{ik}^{\cdot j} &= \gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j = -S_{ki}^{\cdot j} \\ \tilde{S}_{ac}^{\cdot b} &= \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = -\tilde{S}_{ca}^{\cdot b}. \end{aligned}$$

Il y a – a priori – 9 termes différents et non nuls à calculer :

$$\begin{aligned} S_{12}^{\cdot 1} &= \gamma_{1.2}^1 - \gamma_{2.1}^1 - c_{1.2}^1 = -S_{21}^{\cdot 1} \\ S_{12}^{\cdot 2} &= \gamma_{1.2}^2 - \gamma_{2.1}^2 - c_{1.2}^2 = -S_{21}^{\cdot 2} \\ S_{12}^{\cdot 3} &= \gamma_{1.2}^3 - \gamma_{2.1}^3 - c_{1.2}^3 = -S_{21}^{\cdot 3} \\ S_{13}^{\cdot 1} &= \gamma_{1.3}^1 - \gamma_{3.1}^1 - c_{1.3}^1 = -S_{31}^{\cdot 1} \\ S_{13}^{\cdot 2} &= \gamma_{1.3}^2 - \gamma_{3.1}^2 - c_{1.3}^2 = -S_{31}^{\cdot 2} \\ S_{13}^{\cdot 3} &= \gamma_{1.3}^3 - \gamma_{3.1}^3 - c_{1.3}^3 = -S_{31}^{\cdot 3} \\ S_{23}^{\cdot 1} &= \gamma_{2.3}^1 - \gamma_{3.2}^1 - c_{2.3}^1 = -S_{32}^{\cdot 1} \\ S_{23}^{\cdot 2} &= \gamma_{2.3}^2 - \gamma_{3.2}^2 - c_{2.3}^2 = -S_{32}^{\cdot 2} \\ S_{23}^{\cdot 3} &= \gamma_{2.3}^3 - \gamma_{3.2}^3 - c_{2.3}^3 = -S_{32}^{\cdot 3} \\ \tilde{S}_{12}^{\cdot 1} &= \Gamma_{1.2}^1 - \Gamma_{2.1}^1 = -\tilde{S}_{21}^{\cdot 1} \\ \tilde{S}_{12}^{\cdot 2} &= \Gamma_{1.2}^2 - \Gamma_{2.1}^2 = -\tilde{S}_{21}^{\cdot 2} \\ \tilde{S}_{12}^{\cdot 3} &= \Gamma_{1.2}^3 - \Gamma_{2.1}^3 = -\tilde{S}_{21}^{\cdot 3} \\ \tilde{S}_{13}^{\cdot 1} &= \Gamma_{1.3}^1 - \Gamma_{3.1}^1 = -\tilde{S}_{31}^{\cdot 1} \\ \tilde{S}_{13}^{\cdot 2} &= \Gamma_{1.3}^2 - \Gamma_{3.1}^2 = -\tilde{S}_{31}^{\cdot 2} \\ \tilde{S}_{13}^{\cdot 3} &= \Gamma_{1.3}^3 - \Gamma_{3.1}^3 = -\tilde{S}_{31}^{\cdot 3} \\ \tilde{S}_{23}^{\cdot 1} &= \Gamma_{2.3}^1 - \Gamma_{3.2}^1 = -\tilde{S}_{32}^{\cdot 1} \\ \tilde{S}_{23}^{\cdot 2} &= \Gamma_{2.3}^2 - \Gamma_{3.2}^2 = -\tilde{S}_{32}^{\cdot 2} \\ \tilde{S}_{23}^{\cdot 3} &= \Gamma_{2.3}^3 - \Gamma_{3.2}^3 = -\tilde{S}_{32}^{\cdot 3} \end{aligned}$$

4.7.2 Courbure

$$\begin{aligned} R_{i.kl}^j &= \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j = -R_{i.lk}^j \\ \tilde{R}_{a.cd}^b &= \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\tilde{R}_{a.dc}^b \end{aligned}$$

Il y a – a priori – 27 termes différents et non nuls à calculer :

$$\begin{aligned} R_{1.12}^1 &= \partial_1 \gamma_{2.1}^1 - \partial_2 \gamma_{1.1}^1 - c_{1.2}^m \gamma_{m.1}^1 + \gamma_{1.m}^1 \gamma_{2.1}^m - \gamma_{1.1}^m \gamma_{2.m}^1 = -R_{1.21}^1, \\ R_{1.12}^2 &= \partial_1 \gamma_{2.1}^2 - \partial_2 \gamma_{1.1}^2 - c_{1.2}^m \gamma_{m.1}^2 + \gamma_{1.m}^2 \gamma_{2.1}^m - \gamma_{1.1}^m \gamma_{2.m}^2 = -R_{1.21}^2, \\ R_{1.12}^3 &= \partial_1 \gamma_{2.1}^3 - \partial_2 \gamma_{1.1}^3 - c_{1.2}^m \gamma_{m.1}^3 + \gamma_{1.m}^3 \gamma_{2.1}^m - \gamma_{1.1}^m \gamma_{2.m}^3 = -R_{1.21}^3, \\ R_{2.12}^1 &= \partial_1 \gamma_{2.2}^1 - \partial_2 \gamma_{1.2}^1 - c_{1.2}^m \gamma_{m.2}^1 + \gamma_{1.m}^1 \gamma_{2.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{2.m}^1 = -R_{2.21}^1, \\ R_{2.12}^2 &= \partial_1 \gamma_{2.2}^2 - \partial_2 \gamma_{1.2}^2 - c_{1.2}^m \gamma_{m.2}^2 + \gamma_{1.m}^2 \gamma_{2.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{2.m}^2 = -R_{2.21}^2, \\ R_{2.12}^3 &= \partial_1 \gamma_{2.2}^3 - \partial_2 \gamma_{1.2}^3 - c_{1.2}^m \gamma_{m.2}^3 + \gamma_{1.m}^3 \gamma_{2.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{2.m}^3 = -R_{2.21}^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{2.13}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{3.2}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^3} + \Gamma_{1.e}^1 \Gamma_{3.2}^e - \Gamma_{1.2}^e \Gamma_{3.e}^1 = -\tilde{R}_{2.31}^1 \\
\tilde{R}_{2.13}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{3.2}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.2}^2}{\partial x^3} + \Gamma_{1.e}^2 \Gamma_{3.2}^e - \Gamma_{1.2}^e \Gamma_{3.e}^2 = -\tilde{R}_{2.31}^2 \\
\tilde{R}_{2.13}^3 &= \frac{\partial \Gamma_{3.2}^3}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.2}^3}{\partial x^3} + \Gamma_{1.e}^3 \Gamma_{3.2}^e - \Gamma_{1.2}^e \Gamma_{3.e}^3 = -\tilde{R}_{2.31}^3 \\
\tilde{R}_{3.13}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{3.3}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.3}^1}{\partial x^3} + \Gamma_{1.e}^1 \Gamma_{3.3}^e - \Gamma_{1.3}^e \Gamma_{3.e}^1 = -\tilde{R}_{3.31}^1 \\
\tilde{R}_{3.13}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{3.3}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.3}^2}{\partial x^3} + \Gamma_{1.e}^2 \Gamma_{3.3}^e - \Gamma_{1.3}^e \Gamma_{3.e}^2 = -\tilde{R}_{3.31}^2 \\
\tilde{R}_{3.13}^3 &= \frac{\partial \Gamma_{3.3}^3}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1.3}^3}{\partial x^3} + \Gamma_{1.e}^3 \Gamma_{3.3}^e - \Gamma_{1.3}^e \Gamma_{3.e}^3 = -\tilde{R}_{3.31}^3 \\
\tilde{R}_{1.23}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{3.1}^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^1 \Gamma_{3.1}^e - \Gamma_{2.1}^e \Gamma_{3.e}^1 = -\tilde{R}_{1.32}^1 \\
\tilde{R}_{1.23}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{3.1}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.1}^2}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^2 \Gamma_{3.1}^e - \Gamma_{2.1}^e \Gamma_{3.e}^2 = -\tilde{R}_{1.32}^2 \\
\tilde{R}_{1.23}^3 &= \frac{\partial \Gamma_{3.1}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.1}^3}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^3 \Gamma_{3.1}^e - \Gamma_{2.1}^e \Gamma_{3.e}^3 = -\tilde{R}_{1.32}^3 \\
\tilde{R}_{2.23}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{3.2}^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.2}^1}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^1 \Gamma_{3.2}^e - \Gamma_{2.2}^e \Gamma_{3.e}^1 = -\tilde{R}_{2.32}^1 \\
\tilde{R}_{2.23}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{3.2}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.2}^2}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^2 \Gamma_{3.2}^e - \Gamma_{2.2}^e \Gamma_{3.e}^2 = -\tilde{R}_{2.32}^2 \\
\tilde{R}_{2.23}^3 &= \frac{\partial \Gamma_{3.2}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.2}^3}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^3 \Gamma_{3.2}^e - \Gamma_{2.2}^e \Gamma_{3.e}^3 = -\tilde{R}_{2.32}^3 \\
\tilde{R}_{3.23}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{3.3}^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.3}^1}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^1 \Gamma_{3.3}^e - \Gamma_{2.3}^e \Gamma_{3.e}^1 = -\tilde{R}_{3.32}^1 \\
\tilde{R}_{3.23}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{3.3}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.3}^2}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^2 \Gamma_{3.3}^e - \Gamma_{2.3}^e \Gamma_{3.e}^2 = -\tilde{R}_{3.32}^2 \\
\tilde{R}_{3.23}^3 &= \frac{\partial \Gamma_{3.3}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{2.3}^3}{\partial x^3} + \Gamma_{2.e}^3 \Gamma_{3.3}^e - \Gamma_{2.3}^e \Gamma_{3.e}^3 = -\tilde{R}_{3.32}^3
\end{aligned}$$

Remarque : si on connaît les $R_{i.kl}^j$ ou les $\tilde{R}_{a.cd}^b$ il est plus rapide de calculer respectivement les $\tilde{R}_{a.cd}^b$ et les $R_{i.kl}^j$ grâce aux formules de changement de bases :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{a.cd}^b &= \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i.kl}^j, \\
R_{i.kl}^j &= \tilde{e}_i^a \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_k^c \tilde{e}_l^d \tilde{R}_{a.cd}^b.
\end{aligned}$$

Champ de tenseurs de Ricci

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -R_{1.12}^2 - R_{1.13}^3, \\
R_{12} &= R_{1.12}^1 - R_{1.23}^3, \\
R_{13} &= R_{1.13}^1 + R_{1.23}^2, \\
R_{21} &= -R_{2.12}^2 - R_{2.13}^3, \\
R_{22} &= R_{2.12}^1 - R_{2.23}^3, \\
R_{23} &= R_{2.13}^1 + R_{2.23}^2, \\
R_{31} &= -R_{3.12}^2 - R_{3.13}^3, \\
R_{32} &= R_{3.12}^1 - R_{3.23}^3, \\
R_{33} &= R_{3.13}^1 + R_{3.23}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{11} &= -\tilde{R}_{1.12}^2 - \tilde{R}_{1.13}^3, \\
\tilde{R}_{12} &= \tilde{R}_{1.12}^1 - \tilde{R}_{1.23}^3, \\
\tilde{R}_{13} &= \tilde{R}_{1.13}^1 + \tilde{R}_{1.23}^2, \\
\tilde{R}_{21} &= -\tilde{R}_{2.12}^2 - \tilde{R}_{2.13}^3, \\
\tilde{R}_{22} &= \tilde{R}_{2.12}^1 - \tilde{R}_{2.23}^3, \\
\tilde{R}_{23} &= \tilde{R}_{2.13}^1 + \tilde{R}_{2.23}^2, \\
\tilde{R}_{31} &= -\tilde{R}_{3.12}^2 - \tilde{R}_{3.13}^3, \\
\tilde{R}_{32} &= \tilde{R}_{3.12}^1 - \tilde{R}_{3.23}^3, \\
\tilde{R}_{33} &= \tilde{R}_{3.13}^1 + \tilde{R}_{3.23}^2.
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Quatrième partie : variété et connexion riemanniennes M

On pourra consulter [8]¹ [11]² [21]³ [27]⁴ et [30]⁵.

5.1 Variété riemannienne

5.1.1 Définition

Définir une variété riemannienne consiste à définir un champ de 2 - formes *symétriques* dit champ de tenseurs métrique :

$$g \in C^\infty(U; \underset{2}{\otimes} T^*M); g = g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b \text{ (cas } F)$$

avec $g_{ji} = g_{ij}$ et $\tilde{g}_{ba} = \tilde{g}_{ab}$.

On a donc $\tilde{g}_{ab} = \tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_b^j g_{ij}$ et $g_{ij} = \tilde{e}_i^a \tilde{e}_j^b \tilde{g}_{ab}$.

Soit :

- (g_{ij}) la matrice carrée, d'ordre m , symétrique, ayant pour éléments g_{ij} (sur la ligne i et la colonne j) et (g^{ij}) la matrice carrée, d'ordre m , symétrique, ayant pour éléments g^{ij} (sur la ligne i et la colonne j).

On a $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ et si $g \triangleq \det(g_{ij})$ on a $\frac{1}{g} = \det(g^{ij})$.

-
1. pp. 89-136 Chapitre III
 2. pp. 31-36 § 3
 3. pp. 101-132 Chapitre V
 4. pp. 545-549 § 2.3
 5. pp. 265-322 Leçon 8

- (\tilde{g}_{ab}) la matrice carrée, d'ordre m , symétrique, ayant pour éléments \tilde{g}_{ab} (sur la ligne a et la colonne b) et (\tilde{g}^{ab}) la matrice carrée, d'ordre m , symétrique, ayant pour éléments \tilde{g}^{ab} (sur la ligne a et la colonne b).
On a $(\tilde{g}^{ab}) = (\tilde{g}_{ab})^{-1}$ et si $\tilde{g} \triangleq \det(\tilde{g}_{ab})$ on a $\frac{1}{\tilde{g}} = \det(\tilde{g}^{ab})$.

- $\tilde{g} = (\det(\tilde{\theta}_a^i))^2 g$ car $\tilde{g}_{ab} = \tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_b^j g_{ij}$. Donc $\text{sgn}(\tilde{g}) = \text{sgn}(g)$.

Cette métrique va permettre de monter ou descendre les indices des champs de tenseurs qui vont intervenir, grâce aux deux isomorphismes musicaux définis dans une section suivante.

5.1.2 Norme riemannienne $\|v\|$ du champ de vecteurs v

$$\|v\| \triangleq g_{ij} v^i v^j \triangleq \tilde{g}_{ab} \tilde{v}^a \tilde{v}^b \in \Omega^0(U) [8]^6.$$

5.1.3 Les deux isomorphismes musicaux (ou canoniques) \flat (*bémol*) et \sharp (*dièse*)

On pourra consulter [45] et [19]⁷. Le terme musical est du à l'utilisation des symboles \flat (*bémol*) et \sharp (*dièse*).

$$C^\infty(U; TM) \begin{array}{c} \xrightarrow{\flat} \\ \xrightarrow{v} \end{array} \Omega^1(U), \text{ avec :}$$

$$v_{bi} = g_{ij} v^j \text{ ou } \tilde{v}_{ba} = \tilde{g}_{ab} \tilde{v}^b. \text{ Et donc } v^i = g^{ij} v_{bj} \text{ ou } \tilde{v}^a = \tilde{g}^{ab} \tilde{v}_{bb}.$$

Cependant très souvent on ne distingue pas les composantes de v_{\flat} et de v et on écrit :

$$v_i = g_{ij} v^j \text{ ou } \tilde{v}_a = \tilde{g}_{ab} \tilde{v}^b. \text{ Et donc } v^i = g^{ij} v_j \text{ ou } \tilde{v}^a = \tilde{g}^{ab} \tilde{v}_b. \text{ Et :}$$

$$\Omega^1(U) \begin{array}{c} \xrightarrow{\sharp} \\ \xrightarrow{a} \end{array} C^\infty(U; TM), \text{ avec :}$$

$$a^{\sharp i} = g^{ij} a_j \text{ ou } \tilde{a}^{\sharp a} = \tilde{g}^{ab} \tilde{a}_b. \text{ Et donc } a_i = g_{ij} a^{\sharp j} \text{ ou } \tilde{a}_a = \tilde{g}_{ab} \tilde{a}^{\sharp b}.$$

Cependant très souvent on ne distingue pas les composantes de a^{\sharp} et de a et on écrit :

$$a^i = g^{ij} a_j \text{ ou } \tilde{a}^a = \tilde{g}^{ab} \tilde{a}_b. \text{ Et donc } a_i = g_{ij} a^j \text{ ou } \tilde{a}_a = \tilde{g}_{ab} \tilde{a}^b.$$

Par conséquent \flat et \sharp sont bien deux isomorphismes avec $\flat^{-1} = \sharp$ et $\sharp^{-1} = \flat$.

6. p. 90

7. qui n'utilise pas le terme musical et note ε ce que nous allons noter \flat

5.1.4 Le gradient grad d'une fonction numérique λ

Le gradient est un opérateur qui s'applique à $\lambda \in \Omega^0(U)$ (cas A).

Remarque préliminaire : cet opérateur n'est pas défini de la même manière par les différents auteurs. On distingue ceux qui considèrent que :

- $\text{grad } \lambda \in \Omega^1(U)$ et alors $\text{grad} = \nabla$ [9]⁸ [27]⁹ [30]¹⁰

et ceux qui considèrent que :

- $\text{grad } \lambda \in C^\infty(U; TM)$ et alors $\text{grad} \neq \nabla$ [9]¹¹ [19]¹² [40]¹³.

Nous avons adopté ce second point de vue ; Ainsi on a :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(U; TM) \\ & \searrow \nabla & \downarrow \uparrow \# \\ & & \Omega^1(U) \end{array} .$$

Donc $\text{grad} = \# \circ \nabla$ et $\nabla = \flat \circ \text{grad}$.

Soit, avec $\lambda \in \Omega^0(U)$: $\text{grad } \lambda = (\nabla \lambda)^\#$ et $\nabla \lambda = (\text{grad } \lambda)_\flat$.

$(\text{grad } \lambda)^i = (\nabla \lambda)^\#i = g^{ij} (\nabla \lambda)_j = g^{ij} \partial_j \lambda$ [soit $\text{grad } \lambda = (g^{ij} \partial_j \lambda) e_i$] ou
 $\widetilde{\text{grad } \lambda}^a = \widetilde{(\nabla \lambda)^\#}^a = \widetilde{g^{ab} \nabla \lambda_b} = \widetilde{g^{ab} \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}}$ [soit $\text{grad } \lambda = (\widetilde{g^{ab} \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}}) \frac{\partial}{\partial x^a}$] et :

$\partial_i \lambda = (\nabla \lambda)_i = (\text{grad } \lambda)_{\flat i} = g_{ij} (\text{grad } \lambda)^j$ ou
 $\frac{\partial \lambda}{\partial x^a} = \widetilde{\nabla \lambda}_a = \widetilde{\text{grad } \lambda_{\flat a}} = \widetilde{g_{ab} \text{grad } \lambda}^b$.

Et comme $\nabla \lambda = d\lambda$: $\text{grad } \lambda = (d\lambda)^\#$ et $d\lambda = (\text{grad } \lambda)_\flat$.

5.1.5 Le beltramien Δ_1 d'une fonction numérique λ

On pourra consulter [8]¹⁴.

Il s'agit de la norme riemannienne du gradient de cette fonction numérique :

8. p. 189
 9. p. 537, p. 587
 10. p. 229, p. 292, p. 313 Exercice 9
 11. p. 343
 12. p. 176
 13. p. 7, p. 8
 14. p. 247

$$\begin{aligned}\Delta_1 \lambda &\triangleq \|\text{grad } \lambda\| = g_{ij} (\text{grad } \lambda)^i (\text{grad } \lambda)^j = \widetilde{g}_{ab} \widetilde{\text{grad}}^a \lambda \widetilde{\text{grad}}^b \lambda . \text{ Donc :} \\ \Delta_1 \lambda &= g_{ij} (g^{ik} \partial_k \lambda) (g^{jl} \partial_l \lambda) = g^{kl} (\partial_k \lambda) (\partial_l \lambda) [8]^{15} \text{ ou :} \\ \Delta_1 \lambda &= \widetilde{g}_{ab} (\widetilde{g}^{ac} \frac{\partial \lambda}{\partial x^c}) (\widetilde{g}^{bd} \frac{\partial \lambda}{\partial x^d}) = \widetilde{g}^{cd} \frac{\partial \lambda}{\partial x^c} \frac{\partial \lambda}{\partial x^d} .\end{aligned}$$

5.1.6 Le tenseur de Levi-Civita ou tenseur dualiseur v

Soit $\varepsilon_{i_1 \dots i_m} = \varepsilon^{i_1 \dots i_m}$ le symbole de Levi-Civita non nul uniquement si tous les indices $i_1 \dots i_m$ sont différents et égal à ± 1 respectivement selon le signe de la permutation de $1 \dots m$ à $i_1 \dots i_m$. ε n'est pas un tenseur.

Soit v le tenseur de Levi-Civita, ou tenseur dualiseur, tel que :

$$v_{i_1 \dots i_m} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{i_1 \dots i_m} \text{ et } \widetilde{v}^{a_1 \dots a_m} = \sqrt{|\widetilde{g}|} \varepsilon_{a_1 \dots a_m}, \text{ qui sont alternés.}$$

On peut vérifier que :

$v = \sqrt{|g|} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m = \sqrt{|\widetilde{g}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \in \Omega^m(U)$ est effectivement un tenseur. Alors :

$$v^{i_1 \dots i_m} = \frac{\text{sgn}(g)}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{i_1 \dots i_m} \text{ et } \widetilde{v}^{a_1 \dots a_m} = \frac{\text{sgn}(\widetilde{g})}{\sqrt{|\widetilde{g}|}} \varepsilon^{a_1 \dots a_m}.$$

Donc $v_{1 \dots m} = \sqrt{|g|}$, $v^{1 \dots m} = \frac{\text{sgn}(g)}{\sqrt{|g|}}$ et $\widetilde{v}_{1 \dots m} = \sqrt{|\widetilde{g}|}$, $\widetilde{v}^{1 \dots m} = \frac{\text{sgn}(\widetilde{g})}{\sqrt{|\widetilde{g}|}}$ et comme $v \in \Omega^m(U)$ on a bien sur $dv = 0$.

5.1.7 Ce qui est valable uniquement pour les champs de formes différentielles extérieures

L'opérateur $*$ de Hodge

On pourra consulter [8]¹⁶ [11]¹⁷ [27]¹⁸ et [30]¹⁹.

Cet opérateur – parfois appelé *étoile de Hodge* [39] ou “star operator” en anglais [14]²⁰ – permet de définir le champ de formes différentielles extérieures $*\omega$ à partir du champ de formes différentielles extérieures ω . Le champ $*\omega$ est le champ *conjugué* pour [27] ou *adjoint* pour [8] et [30] du champ ω .

15. p. 247 éq. (11.4)

16. pp. 92-93

17. p. 172

18. pp. 535-536

19. pp. 280-282

20. pp. 15-17

Définition

Soit $\omega \in \Omega^p(U)$; $0 \leq p \leq m$:

$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p} = \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_p}$, avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ et $\widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_p}$ alternés; alors :

$$\Omega^p(U) \xrightarrow[\omega]{*} \Omega^{m-p}(U), \text{ avec :}$$

$*\omega \triangleq (*\omega)_{i_{p+1} \dots i_m} \theta^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \theta^{i_m} \triangleq *\widetilde{\omega}_{a_{p+1} \dots a_m} dx^{a_{p+1}} \otimes \dots \otimes dx^{a_m}$, avec $(*\omega)_{i_{p+1} \dots i_m}$ et $*\widetilde{\omega}_{a_{p+1} \dots a_m}$ alternés, tels que :

$$(*\omega)_{i_{p+1} \dots i_m} \triangleq \frac{1}{p!} v_{i_1 \dots i_m} \omega^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} v_{i_1 \dots i_m} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \omega_{j_1 \dots j_p} \text{ et}$$

$$*\widetilde{\omega}_{a_{p+1} \dots a_m} \triangleq \frac{1}{p!} \widetilde{v}_{a_1 \dots a_m} \widetilde{\omega}^{a_1 \dots a_p} = \frac{1}{p!} \widetilde{v}_{a_1 \dots a_m} \widetilde{g}^{a_1 b_1} \dots \widetilde{g}^{a_p b_p} \widetilde{\omega}_{b_1 \dots b_p}.$$

Exemples en base naturelle

- $p = 0$; cas A

Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors

$$*\lambda = \lambda \sqrt{|\widetilde{g}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \lambda v \in \Omega^m(U). \text{ Et, en particulier, } *1 = v.$$

- $p = 1$; cas C

Si $a = \widetilde{a}_a dx^a \in \Omega^1(U)$ alors :

$$*a = \sqrt{|\widetilde{g}|} \sum_{a=1}^m (-1)^{a-1} \widetilde{a}^a dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^a} \wedge \dots \wedge dx^m \in \Omega^{m-1}(U)$$

[9]²¹.

- $p = 2$; cas F -bis

Si $\omega = \widetilde{\omega}_{ab} dx^a \otimes dx^b \in \Omega^2(U)$ alors :

$$*\omega = \sqrt{|\widetilde{g}|} \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{b=a+1}^m (-1)^{a+b-1} \widetilde{\omega}^{ab} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^a} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^b} \wedge \dots \wedge dx^m \in \Omega^{m-2}(U).$$

- ...

- $p = m - 1$

Si $\omega = \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_{m-1}} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_{m-1}} \in \Omega^{m-1}(U)$ alors :

$$*\omega = \sqrt{|\widetilde{g}|} \sum_{a=1}^m [(-1)^{m-a} \widetilde{\omega}^{1 \dots \widehat{a} \dots m} dx^a] \in \Omega^1(U).$$

- $p = m$

Si $\omega = \widetilde{\omega}_{a_1 \dots a_m} dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_m} \in \Omega^m(U)$ alors :

$$*\omega = \frac{1}{m!} \widetilde{v}_{a_1 \dots a_m} \widetilde{\omega}^{a_1 \dots a_m} = \frac{1}{m!} \sqrt{|\widetilde{g}|} \varepsilon_{a_1 \dots a_m} \widetilde{\omega}^{a_1 \dots a_m} = \sqrt{|\widetilde{g}|} \widetilde{\omega}^{1 \dots m}.$$

21. p. 466 mais le signe de l'exposant de $|\widetilde{g}|$ est faux

En particulier $*v = \text{sgn}(\tilde{g})$. Et donc en base mobile $*v = \text{sgn}(g)$, ce qui est cohérent car $\text{sgn}(\tilde{g}) = \text{sgn}(g)$.

L'opérateur $* \circ *$

$$\text{On a } \Omega^p(U) \xrightarrow[\omega]{*} \Omega^{m-p}(U) \xrightarrow[*\omega]{*} \Omega^p(U) \quad , \text{ avec :} \\ \xrightarrow{\omega} \xrightarrow[*\omega]{} \xrightarrow[*(*\omega)=(*\circ*)\omega]{} \quad$$

$*(*\omega) = (-1)^{p(m-p)} \text{sgn}(g) \omega$, en base mobile et $*(*\omega) = (-1)^{p(m-p)} \text{sgn}(\tilde{g}) \omega$, en base naturelle (on a vu que c'était cohérent) [8]²² [11]²³ [27]²⁴ et [30]²⁵.

Démonstration (en base mobile)

$$(*\omega)_{i_{p+1} \dots i_m} = \frac{1}{p!} v_{i_1 \dots i_m} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \omega_{j_1 \dots j_p}. \text{ Donc :} \\ (*\omega)^{j_{p+1} \dots j_m} = g^{j_{p+1} i_{p+1} \dots j_m i_m} (*\omega)_{i_{p+1} \dots i_m} \\ = \frac{1}{p!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} g^{j_{p+1} i_{p+1} \dots j_m i_m} v_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_m} \omega_{j_1 \dots j_p} \\ = \frac{1}{p!} v^{j_1 \dots j_p j_{p+1} \dots j_m} \omega_{j_1 \dots j_p}. \text{ Ou :} \\ (*\omega)^{i_{p+1} \dots i_m} = \frac{1}{p!} v^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_m} \omega_{i_1 \dots i_p} [30]^{26}.$$

Soit $\omega' \triangleq *\omega \in \Omega^{p'}(U)$, avec $p' = m - p$. On a :
 $*\omega' = *(*\omega) \in \Omega^{m-p'}(U) = \Omega^p(U)$, avec :

$$(*\omega')_{j_{p'+1} \dots j_m} \triangleq \frac{1}{p'!} v_{j_1 \dots j_m} \omega'^{j_1 \dots j_{p'}}, \text{ soit :} \\ (*(*\omega))_{j_{m-p+1} \dots j_m} = \frac{1}{(m-p)!} v_{j_1 \dots j_m} (*\omega)^{j_1 \dots j_{m-p}}.$$

Faisons le changement d'indices :

$$j_1 \rightarrow i_{p+1}, \dots, j_{m-p} \rightarrow i_m, j_{m-p+1} \rightarrow j_1, j_m \rightarrow j_p. \text{ Il vient :} \\ (*(*\omega))_{j_1 \dots j_p} = \frac{1}{(m-p)!} v_{i_{p+1} \dots i_m j_1 \dots j_p} (*\omega)^{i_{p+1} \dots i_m} \\ = \frac{1}{p!(m-p)!} v_{i_{p+1} \dots i_m j_1 \dots j_p} v^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_m} \omega_{i_1 \dots i_p}.$$

Étant donné que l'on passe de $(i_{p+1} \dots i_m j_1 \dots j_p)$ à $(j_1 \dots j_p i_{p+1} \dots i_m)$ par $p(m-p)$ transpositions on a :

$$(*(*\omega))_{j_1 \dots j_p} = \frac{(-1)^{p(m-p)}}{p!(m-p)!} v_{j_1 \dots j_p i_{p+1} \dots i_m} v^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_m} \omega_{i_1 \dots i_p} \\ = \frac{(-1)^{p(m-p)}}{p!(m-p)!} \text{sgn}(g) \varepsilon_{j_1 \dots j_p i_{p+1} \dots i_m} \varepsilon^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_m} \omega_{i_1 \dots i_p}.$$

22. pp. 92-93 qui utilise g de signe quelconque mais oublie $\text{sgn}(g)$

23. p. 172 éq. (15) qui utilise g de signe quelconque

24. p. 536 qui utilise g de signe positif, mais qui oublie $(-1)^{p(m-p)}$

25. p. 281 éq. (8-82) première équation qui utilise g de signe positif

26. p. 281 éq. (8.21) où v est noté v_g

Mais $\varepsilon_{j_1 \dots j_p i_{p+1} \dots i_m} \varepsilon^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_m} = p! (m-p)! \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_p}^{i_p}$ [44]²⁷. Alors :

$$\begin{aligned} (* (* \omega))_{j_1 \dots j_p} &= (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_p}^{i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \\ &= (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) \omega_{j_1 \dots j_p}. \text{ Soit : } * (* \omega) = (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) \omega \text{ QED.} \end{aligned}$$

Remarques :

• comme $1 \in \Omega^0(U)$ on a $* (* 1) = (-1)^{0(m-0)} \operatorname{sgn}(g) 1 = \operatorname{sgn}(g)$ et comme $* 1 = v$ on retrouve $* v = \operatorname{sgn}(g)$ ou $* v = \operatorname{sgn}(\tilde{g})$.

• comme $v \in \Omega^m(U)$ on a $* (* v) = (-1)^{m(m-m)} \operatorname{sgn}(g) v = \operatorname{sgn}(g) v$ et comme $* v = \operatorname{sgn}(g)$ on retrouve, après simplification par $\operatorname{sgn}(g)$, $* 1 = v$.

L'opérateur $*^{-1}$

$$\text{On a } \Omega^p(U) \xrightarrow[\omega \mapsto * \omega]{*} \Omega^{m-p}(U) \xrightarrow[* \omega \mapsto *^{-1}(* \omega) = \omega]{*^{-1}} \Omega^p(U) \text{ . Donc } \Omega^p(U) \xrightarrow[\omega \mapsto \omega' \triangleq *^{-1} \omega]{*^{-1}} \Omega^{m-p}(U),$$

$$\text{avec } \omega' \triangleq *^{-1} \omega = (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) * \omega$$

Démonstration

Soit $\omega' \triangleq (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) * \omega \in \Omega^{m-p}(U)$; alors :

$$\begin{aligned} * \omega' &= * ((-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) * \omega) = (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) * (* \omega) \\ &= (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) \omega = \omega \text{ et donc } \omega' = *^{-1} \omega \text{ QED.} \end{aligned}$$

La codifférentielle δ de Hodge

On pourra consulter [8]²⁸ [9]²⁹ [17]³⁰ [41]³¹ et [19]³².

Définition

Si $\omega \in \Omega^p(U)$; $1 \leq p \leq m$ alors $\delta \omega \triangleq (-1)^p *^{-1} (d(* \omega))$ (ce qui est mieux que d'écrire $\delta \triangleq (-1)^p *^{-1} \circ d \circ *$ comme [8]³³ et [9]³⁴ dans la mesure où p est l'ordre de ω et donc δ dépend de ω) et si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors $\delta \lambda = 0$.

$$\text{Donc } * (\delta \omega) = (-1)^p d(* \omega); p \geq 0.$$

27. p. 4 éq. (8)

28. pp. 248-249 § 11.d

29. p. 343 et pp. 446-448 Définition IX.3.F

30. pp. 14-15 § 2.7

31. pp. 7-8

32. pp. 176-182 § III.3.D

33. p. 248 éq. (11.8)

34. p. 343 au fond et p. 446 Définition IX.3.F

On a donc, ssi $p \geq 1$:

$$\Omega^p(U) \xrightarrow[\omega \mapsto * \omega]{*} \Omega^{m-p}(U) \xrightarrow[d(*\omega)]{d} \Omega^{m-p+1}(U) \xrightarrow[*^{-1}]{*^{-1}} \Omega^{p-1}(U) \xrightarrow[\delta \omega = (-1)^p *^{-1}(d(*\omega))]{\times (-1)^p} \Omega^{p-1}(U).$$

Propriété

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Démonstration

Si $p = 0$ c'est clair et si $p \geq 1$ soit $\omega \in \Omega^p(U)$ alors $\omega' \triangleq \delta \omega = (-1)^p *^{-1}(d(*\omega))$.

Et $\delta \omega' = (\delta \circ \delta) \omega = (-1)^{p-1} *^{-1}(d(*\omega'))$
 $= (-1)^{p-1} *^{-1}(d(*((-1)^p *^{-1}(d(*\omega)))) = -*^{-1}(d(d\omega)) = 0$, car $d \circ d = 0$
 QED.

Remarque : autre calcul de $\delta \omega$

Il faut remarquer que si $\omega \in \Omega^p(U)$ alors $\delta \omega \triangleq (-1)^p *^{-1}(d(*\omega))$ et donc que $*^{-1}$ s'applique à la forme $d(*\omega)$ de $\Omega^{m-p+1}(U)$. Par conséquent, d'après la définition de $*^{-1}$:

$$\begin{aligned} *^{-1}(d(*\omega)) &= (-1)^{(m-p+1)(m-m+p-1)} \text{sgn}(g) * (d(*\omega)) \\ &= (-1)^{(m-p+1)(p-1)} \text{sgn}(g) * (d(*\omega)) \text{ et :} \\ \delta \omega &= (-1)^{p+(m-p+1)(p-1)} \text{sgn}(g) * (d(*\omega)). \end{aligned}$$

Exemples

Plaçons nous en bases naturelles.

- $p = 0$; cas A

Si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors $\delta \lambda \triangleq 0$.

- $p = 1$; cas C

Si $a \in \Omega^1(U)$ alors :

$\delta a = -\text{sgn}(g) * (d(*a)) \in \Omega^0(U)$. Or :

$$\begin{aligned} *a &= \sqrt{|g|} \sum_{a=1}^m (-1)^{a-1} \tilde{a}^a dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^a} \wedge \dots \wedge dx^m \text{ et donc :} \\ d(*a) &= \sum_{a=1}^m (-1)^{a-1} d(\sqrt{|g|} \tilde{a}^a) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^a} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \sum_{a=1}^m (-1)^{a-1} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|g|} \tilde{a}^a) dx^a \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^a} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|g|} \tilde{a}^a) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|g|} \tilde{a}^a) v. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

$$*(d(*a)) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|g|} \tilde{a}^a) * v = \frac{\text{sgn}(\tilde{g})}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|g|} \tilde{a}^a). \text{ Et, finalement :}$$

$$\begin{aligned} \delta a &= -\text{sgn}(\tilde{g}) * (d(*a)) = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{a}^a) = -\left(\frac{\partial \tilde{a}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{2|\tilde{g}|} \frac{\partial |\tilde{g}|}{\partial x^a} \tilde{a}^a\right) \\ &= -\left(\frac{\partial \tilde{a}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{a}^a\right). \end{aligned}$$

En particulier, comme $v_b \in \Omega^1(U)$ on a :

$$\delta v_b = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{v}^a) = -\left(\frac{\partial \tilde{v}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{v}^a\right).$$

- $p = 2$; cas F -bis

Si $\omega \in \Omega^2(U)$ alors :

$\delta \omega = (-1)^{m+1} \text{sgn}(g) * (d(*\omega)) \in \Omega^1(U)$. Le calcul explicite est fastidieux.

- $p = m - 1$

Si $\omega \in \Omega^{m-1}(U)$ alors :

$\delta \omega = (-1)^{3(m-1)} \text{sgn}(g) * (d(*\omega)) \in \Omega^{m-2}(U)$. Le calcul explicite est fastidieux.

- $p = m$

Si $\omega \in \Omega^m(U)$ alors :

$\delta \omega = -\text{sgn}(g) * (d(*\omega)) \in \Omega^{m-1}(U)$. Le calcul explicite est fastidieux.

On dit que ω est *cofermé* ssi $\delta \omega = 0$ [9]³⁵. Donc ω peut être à la fois *fermé* ssi $d\omega = 0$ et *cofermé* ssi $\delta \omega = 0$.

Comparaison entre la différentielle d et la codifférentielle δ

La codifférentielle δ n'est pas une antidérivation contrairement à la différentielle d [41]³⁶.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(U) \\ * \downarrow & \delta \circ * \searrow \swarrow * \circ d & * \downarrow \\ \Omega^{m-p}(U) & \xrightarrow{\delta} & \Omega^{m-p-1}(U) \end{array} .$$

Si $\omega \in \Omega^p(U)$, alors $d\omega \in \Omega^{p+1}(U)$ et $*\omega \in \Omega^{m-p}(U)$ et on trouve :

$$\delta(*\omega) = (-1)^{p+1} * (d\omega).$$

35. p. 446

36. p. 7

Par conséquent le diagramme précédent est *non-commutatif* si p est pair mais il est *commutatif* si p est impair et en particulier si $p = 1$.

Et considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(U) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^{p+1}(U) \\ * \downarrow & * \circ \delta \swarrow \searrow & d \circ * \downarrow \\ \Omega^{m-p}(U) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^{m-p-1}(U) \end{array} .$$

Si $\omega' \in \Omega^{p+1}(U)$, alors $\delta \omega' \in \Omega^p(U)$ et $*\omega' \in \Omega^{m-p-1}(U)$ et on trouve :
 $*(\delta \omega') = (-1)^{p+1} d(*\omega')$.

Par conséquent le diagramme précédent est *non-commutatif* si p est pair mais il est *commutatif* si p est impair et en particulier si $p = 1$.

Soient $\omega \in \Omega^p(U)$ et $\omega' \in \Omega^{p+1}(U)$ alors $*\omega' \in \Omega^{m-p-1}(U)$ et $\omega \wedge (*\omega') \in \Omega^{m-1}(U)$.

D'après la propriété de d :

$$d(\omega \wedge (*\omega')) = (d\omega) \wedge (*\omega') + (-1)^p \omega \wedge (d(*\omega')) \text{ on a :}$$

$(d\omega) \wedge (*\omega') = (-1)^{p+1} \omega \wedge (d(*\omega')) + d(\omega \wedge (*\omega'))$. Mais on vient de voir que $(-1)^{p+1} d(*\omega') = *(\delta \omega')$ et, par conséquent :

$$(d\omega) \wedge (*\omega') = \omega \wedge (*(\delta \omega')) + d(\omega \wedge (*\omega')).$$

Il s'agit de la relation (H) de [19]³⁷ que l'auteur appelle égalité de transposition et qu'il dit caractériser δ .

Le produit scalaire *global* ou *ponctuel* dans $\Omega^p(U)$

On pourra consulter [8]³⁸ et [9]³⁹.

Soient $\omega, \omega' \in \Omega^p(U)$ alors $*\omega' \in \Omega^{m-p}(U)$ et $\omega \wedge (*\omega') \in \Omega^m(U)$. Donc $\omega \wedge (*\omega')$ est proportionnelle à v et l'on peut poser $\omega \wedge (*\omega') \triangleq (\omega, \omega') v$ [8]⁴⁰ où $(\omega, \omega') \in \Omega^0(U)$ est le coefficient de proportionnalité. Soit alors :

$\langle \omega, \omega' \rangle \triangleq \int_M (\omega, \omega') v$ [8]⁴¹ et [9]⁴², où l'intégrale est supposée exister (par exemple si M est compacte ou si ω est à support borné).

37. p. 177

38. pp. 246-250 § 11

39. pp. 446-448 et pp. 507-516 § IX-10 Formule de Stokes

40. p. 248 éq. (11.14)

41. p. 248 éq. (11.15)

42. p. 447

Il s'agit du produit scalaire *global*, pour [8] ou *ponctuel*, pour [9] dans $\Omega^p(U)$.

Soient maintenant $\omega \in \Omega^{p-1}(U)$ et $\omega' \in \Omega^p(U)$ alors $\langle d\omega, \omega' \rangle = \langle \omega, \delta\omega' \rangle$ et, en ce sens, d et δ sont adjoints.

Démonstration

$d(\omega \wedge (*\omega')) = (d\omega) \wedge (*\omega') + (-1)^{p-1} \omega \wedge (d(*\omega'))$. Soit :

$(d\omega, \omega') v \triangleq (d\omega) \wedge (*\omega') = d(\omega \wedge (*\omega')) + (-1)^p \omega \wedge (d(*\omega'))$ et $d(*\omega') = (-1)^p *(\delta\omega')$. Donc :

$(d\omega, \omega') v = d(\omega \wedge (*\omega')) + \omega \wedge (\delta\omega')$ et alors :

$\langle d\omega, \omega' \rangle \triangleq \int_M (d\omega, \omega') v = \int_M d(\omega \wedge (*\omega')) + \int_M \omega \wedge (\delta\omega')$
 $= \langle \omega, \delta\omega' \rangle$, car l'intégrale $\int_M d(\omega \wedge (*\omega'))$ est nulle d'après la formule de Stokes QED.

Le laplacien Δ de Hodge

C'est l'opposé du laplacien traditionnel Δ_2 (notation de [8]⁴³) [8]⁴⁴ et [9]⁴⁵.

On pourra consulter [8]⁴⁶ [9]⁴⁷ [17]⁴⁸ et [19]⁴⁹.

Définition

$\Delta \triangleq d \circ \delta + \delta \circ d$. Alors : $\Delta\omega = d(\delta\omega) + \delta(d\omega)$ et on a :

$\Omega^p(U) \xrightarrow[\omega]{d} \Omega^{p+1}(U) \xrightarrow[\delta(d\omega)]{\delta} \Omega^p(U)$ et $\Omega^p(U) \xrightarrow[\omega]{\delta} \Omega^{p-1}(U) \xrightarrow[\delta\omega]{d} \Omega^p(U)$ et par conséquent :

$$\Omega^p(U) \xrightarrow[\omega]{\Delta} \Omega^p(U)_{\Delta\omega}$$

Si $\Delta\omega = 0$ alors ω est dite *harmonique* [8]⁵⁰ et [9]⁵¹.

43. p. 247 c

44. p. 249 Remarque 1 au fond de la page

45. p. 448

46. p. 249

47. p. 446

48. pp. 15-16 § 2.8

49. pp. 178-182

50. p. 249

51. p. 446

Propriétés

$$d \circ \Delta = \Delta \circ d = d \circ \delta \circ d \text{ et } \delta \circ \Delta = \Delta \circ \delta = \delta \circ d \circ \delta.$$

Démonstrations

Ces propriétés sont triviales à démontrer car $d \circ d = 0$ et $\delta \circ \delta = 0$.

Si $\omega, \omega' \in \Omega^p(U)$ alors $\langle \Delta \omega, \omega' \rangle = \langle \omega, \Delta \omega' \rangle$ et on peut dire que le laplacien de Hodge est son propre adjoint [8]⁵² et [9]⁵³.

Démonstration

$$\begin{aligned} \langle \Delta \omega, \omega' \rangle &= \langle d(\delta \omega), \omega' \rangle + \langle \delta(d\omega), \omega' \rangle \\ &= \langle \delta \omega, \delta \omega' \rangle + \langle d\omega, d\omega' \rangle = \langle \Delta \omega', \omega \rangle = \langle \omega, \Delta \omega' \rangle \text{ QED.} \end{aligned}$$

Exemple

Plaçons nous en bases naturelles.

- $p = 0$; cas A

si $\lambda \in \Omega^0(U)$ alors : $\Delta \lambda = d(\delta \lambda) + \delta(d\lambda) = \delta(d\lambda)$ car $\delta \lambda = 0$. Donc :

$$\Delta \lambda = \delta(d\lambda) = -\left[\frac{\partial \tilde{d}\lambda^a}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{d}\lambda^a\right].$$

Mais $\tilde{d}\lambda^a = \tilde{g}^{ab} \tilde{d}\lambda_b = \tilde{g}^{ab} \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}$ et donc :

$$\Delta \lambda = -\left[\frac{\partial(\tilde{g}^{ab} \frac{\partial \lambda}{\partial x^b})}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{g}^{ab} \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}\right] = -\left[\tilde{g}^{ab} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^a \partial x^b} + \left(\frac{\partial \tilde{g}^{ab}}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{g}^{ab}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}\right].$$

5.1.8 Cas particulier des variétés riemanniennes à deux dimensions : $m = 2$

Plaçons nous en bases naturelles.

- $p = 0$; cas A

$$\text{grad } \lambda = \left(\tilde{g}^{11} \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \tilde{g}^{12} \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\tilde{g}^{12} \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \tilde{g}^{22} \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

$$* \lambda = \lambda \sqrt{|\tilde{g}|} dx^1 \wedge dx^2 = \lambda v \in \Omega^2(U).$$

$$* (* \lambda) = \text{sgn}(\tilde{g}) \lambda \in \Omega^0(U).$$

$$*^{-1} \lambda = \text{sgn}(\tilde{g}) * \lambda \in \Omega^2(U).$$

$$\delta \lambda = 0.$$

$$\Delta \lambda = -\left[\tilde{g}^{ab} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^a \partial x^b} + \left(\frac{\partial \tilde{g}^{ab}}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{g}^{ab}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}\right]; a, b = 1, 2.$$

52. p. 250 éq. (11.21)

53. p. 447

Dans le cas particulier où :

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } E_1 > 0 \text{ et } E_2 > 0; \text{ soit } \tilde{g} = E_1 E_2 :$$

$$\text{grad } \lambda = \frac{1}{E_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

$$* \lambda = \lambda \sqrt{E_1 E_2} dx^1 \wedge dx^2 = \lambda v \in \Omega^2(U).$$

$$*(* \lambda) = \lambda \in \Omega^0(U).$$

$$*^{-1} \lambda = * \lambda \in \Omega^2(U).$$

$$\delta \lambda = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda = & - \left[\frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{E_1^2} \left(-\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2E_2} \frac{\partial(E_1 E_2)}{\partial x^1} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{E_2^2} \left(-\frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2E_1} \frac{\partial(E_1 E_2)}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right]. \end{aligned}$$

Et dans le cas encore plus particulier où $E_1 = E_2 = 1$ (soit $\tilde{g}_{ab} = \delta_{ab}$) :

$$\Delta \lambda = - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^2)^2} \right) \text{ et, par conséquent :}$$

$\Delta_2 \lambda = -\Delta \lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^2)^2}$ et on reconnait bien l'expression du laplacien traditionnel.

• $p = 1$; cas C

$$* a = -\sqrt{|\tilde{g}|} (\tilde{a}^2 dx^1 - \tilde{a}^1 dx^2) \in \Omega^1(U).$$

$$*(* a) = -\text{sgn}(\tilde{g}) a \in \Omega^1(U).$$

$$*^{-1} a = -\text{sgn}(\tilde{g}) * a \in \Omega^1(U).$$

$$\delta a = - \left[\frac{\partial \tilde{a}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2\tilde{g}} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^1} \tilde{a}^1 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^2} \tilde{a}^2 \right) \right] \in \Omega^0(U).$$

Le calcul explicite de Δa est fastidieux.

Dans le cas particulier où $\tilde{g}_{ab} = \delta_{ab}$:

$$\Delta a = - \left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^2)^2} \right) dx^1 - \left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^2)^2} \right) dx^2 \in \Omega^1(U)$$

• $p = 2$; cas F -bis

$$* \omega = \sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\omega}^{12} \in \Omega^0(U).$$

$$*(* \omega) = \text{sgn}(\tilde{g}) \omega \in \Omega^2(U).$$

$$*^{-1} \omega = \text{sgn}(\tilde{g}) * \omega \in \Omega^0(U).$$

$$\begin{aligned} \delta \omega = & \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \left\{ \left[-\tilde{g}_{12} \frac{\partial(\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\omega}^{12})}{\partial x^1} + \tilde{g}_{11} \frac{\partial(\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\omega}^{12})}{\partial x^2} \right] dx^1 \right. \\ & \left. + \left[-\tilde{g}_{22} \frac{\partial(\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\omega}^{12})}{\partial x^1} + \tilde{g}_{12} \frac{\partial(\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\omega}^{12})}{\partial x^2} \right] dx^2 \right\} \in \Omega^1(U) \\ = & [\tilde{g}^{12} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_{12}}{\partial x^1} - \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^1} \tilde{\omega}_{12} \right) + \tilde{g}^{22} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_{12}}{\partial x^2} - \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^2} \tilde{\omega}_{12} \right)] dx^1 \\ - & [\tilde{g}^{11} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_{12}}{\partial x^1} - \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^1} \tilde{\omega}_{12} \right) + \tilde{g}^{12} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_{12}}{\partial x^2} - \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^2} \tilde{\omega}_{12} \right)] dx^2. \end{aligned}$$

Le calcul explicite de Δa est fastidieux.

5.1.9 Cas particulier des variétés riemanniennes à trois dimensions : $m = 3$

Plaçons nous en bases naturelles.

• $p = 0$; cas A

$$\text{grad } \lambda = (\tilde{g}^{11} \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \tilde{g}^{12} \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} + \tilde{g}^{13} \frac{\partial \lambda}{\partial x^3}) \frac{\partial}{\partial x^1} + (\tilde{g}^{12} \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \tilde{g}^{22} \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} + \tilde{g}^{23} \frac{\partial \lambda}{\partial x^3}) \frac{\partial}{\partial x^2} + (\tilde{g}^{13} \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \tilde{g}^{23} \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} + \tilde{g}^{33} \frac{\partial \lambda}{\partial x^3}) \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

$$* \lambda = \lambda \sqrt{|\tilde{g}|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \lambda v \in \Omega^3(U).$$

$$* (* \lambda) = \text{sgn}(\tilde{g}) \lambda \in \Omega^0(U).$$

$$*^{-1} \lambda = \text{sgn}(\tilde{g}) * \lambda \in \Omega^3(U).$$

$$\delta \lambda = 0.$$

$$\Delta \lambda = -[\tilde{g}^{ab} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^a \partial x^b} + (\frac{\partial \tilde{g}^{ab}}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{g}^{ab}) \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}]; a, b = 1, 2, 3.$$

Dans le cas particulier où :

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{13} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} \\ \tilde{g}_{13} & \tilde{g}_{23} & \tilde{g}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}, \text{ avec } E_1 > 0, E_2 > 0 \text{ et } E_3 > 0;$$

soit $\tilde{g} = E_1 E_2 E_3$:

$$\text{grad } \lambda = \frac{1}{E_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{E_3} \frac{\partial \lambda}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

$$* \lambda = \lambda \sqrt{E_1 E_2 E_3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \lambda v \in \Omega^3(U).$$

$$* (* \lambda) = \lambda \in \Omega^0(U).$$

$$*^{-1} \lambda = * \lambda \in \Omega^3(U).$$

$$\delta \lambda = 0.$$

$$\Delta \lambda = -[\frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{E_1^2} (-\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2E_2 E_3} \frac{\partial (E_1 E_2 E_3)}{\partial x^1}) \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{E_2^2} (-\frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2E_3 E_1} \frac{\partial (E_1 E_2 E_3)}{\partial x^2}) \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} + \frac{1}{E_3} \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^3)^2} + \frac{1}{E_3^2} (-\frac{\partial E_3}{\partial x^3} + \frac{1}{2E_1 E_2} \frac{\partial (E_1 E_2 E_3)}{\partial x^3}) \frac{\partial \lambda}{\partial x^3}].$$

Et dans le cas encore plus particulier où $E_1 = E_2 = E_3 = 1$ (soit $\tilde{g}_{ab} = \delta_{ab}$) :

$$\Delta \lambda = -(\frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^3)^2}) \text{ et, par conséquent :}$$

$\Delta_2 \lambda = -\Delta \lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x^3)^2}$ et on reconnait bien l'expression du laplacien traditionnel.

• $p = 1$; cas C

$$* a = \sqrt{|\tilde{g}|} (\tilde{a}^3 dx^1 \wedge dx^2 - \tilde{a}^2 dx^1 \wedge dx^3 + \tilde{a}^1 dx^2 \wedge dx^3) \in \Omega^2(U).$$

$$\begin{aligned}
* (* a) &= \operatorname{sgn}(\tilde{g}) a \in \Omega^1(U). \\
*^{-1} a &= \operatorname{sgn}(\tilde{g}) * a \in \Omega^2(U). \\
\delta a &= -\left[\frac{\partial \tilde{a}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{a}^3}{\partial x^3} + \frac{1}{2\tilde{g}} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^1} \tilde{a}^1 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^2} \tilde{a}^2 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^3} \tilde{a}^3\right)\right] \in \Omega^0(U).
\end{aligned}$$

Le calcul explicite de Δa est fastidieux.

Dans le cas particulier où $\tilde{g}_{ab} = \delta_{ab}$:

$$\begin{aligned}
\Delta a &= -\left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^3)^2}\right) dx^1 - \left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^3)^2}\right) dx^2 \\
&- \left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^3)^2}\right) dx^3 \in \Omega^1(U).
\end{aligned}$$

• $p = 2$; cas F -bis

$$\begin{aligned}
*\omega &= \sqrt{|\tilde{g}|} (\tilde{\omega}^{23} dx^1 - \tilde{\omega}^{13} dx^2 + \tilde{\omega}^{12} dx^3) \in \Omega^1(U). \\
(\omega) &= \operatorname{sgn}(\tilde{g}) \omega \in \Omega^2(U). \\
*^{-1}\omega &= \operatorname{sgn}(\tilde{g}) *\omega \in \Omega^1(U).
\end{aligned}$$

Les calculs explicites de $\delta\omega$ et de $\Delta\omega$ sont fastidieux.

• $p = 3$

$$\begin{aligned}
*\omega &= \sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\omega}^{123} \in \Omega^0(U). \\
(\omega) &= \operatorname{sgn}(\tilde{g}) \omega \in \Omega^3(U). \\
*^{-1}\omega &= \operatorname{sgn}(\tilde{g}) *\omega \in \Omega^0(U).
\end{aligned}$$

Les calculs explicites de $\delta\omega$ et de $\Delta\omega$ sont fastidieux.

Le rotationnel rot d'un champ de vecteurs

Le rotationnel se note « curl » en anglais. On pourra consulter [3]⁵⁴ [9]⁵⁵ [11]⁵⁶ [19]⁵⁷ [21]⁵⁸ [26]⁵⁹ [27]⁶⁰ [32]⁶¹ et [33].

Soit :

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty(U; TM) & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & C^\infty(U; TM) \\
\downarrow \flat & & \uparrow \sharp \circ *^{-1} \\
\Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U)
\end{array}$$

54. pp. 161-164 § 4.4.5 et pp. 173-174

55. p. 189 et p. 340

56. p. 230 2) et p. 235 § 25.2.2

57. pp. 178-180 Exemples 1 et 2 et p. 183 Théorème 2

58. pp. 97-98

59. p. 395

60. p. 555 § 2.4.6 Exemple 1 et pp. 556-558 § 2.4.7

61. p. 373 Curl

Donc $\text{rot} = \sharp \circ *^{-1} \circ d \circ \flat$ [19]⁶².

Si $v \in C^\infty(U; TM)$ on a :

$$\text{rot } v = (\sharp \circ *^{-1} \circ d \circ \flat)(v) = \text{sgn}(g)(\sharp(*(dv_b))) = \text{sgn}(g)(* (dv_b))^\sharp$$

$$\widetilde{\text{rot } v}^1 = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} (\tilde{g}_{13} \tilde{v}^1 + \tilde{g}_{23} \tilde{v}^2 + \tilde{g}_{33} \tilde{v}^3) - \frac{\partial}{\partial x^3} (\tilde{g}_{12} \tilde{v}^1 + \tilde{g}_{22} \tilde{v}^2 + \tilde{g}_{23} \tilde{v}^3) \right],$$

$$\widetilde{\text{rot } v}^2 = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \left[\frac{\partial}{\partial x^3} (\tilde{g}_{11} \tilde{v}^1 + \tilde{g}_{12} \tilde{v}^2 + \tilde{g}_{13} \tilde{v}^3) - \frac{\partial}{\partial x^1} (\tilde{g}_{13} \tilde{v}^1 + \tilde{g}_{23} \tilde{v}^2 + \tilde{g}_{33} \tilde{v}^3) \right],$$

$$\widetilde{\text{rot } v}^3 = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (\tilde{g}_{12} \tilde{v}^1 + \tilde{g}_{22} \tilde{v}^2 + \tilde{g}_{23} \tilde{v}^3) - \frac{\partial}{\partial x^2} (\tilde{g}_{11} \tilde{v}^1 + \tilde{g}_{12} \tilde{v}^2 + \tilde{g}_{13} \tilde{v}^3) \right],$$

Dans le cas particulier où :

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{13} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} \\ \tilde{g}_{13} & \tilde{g}_{23} & \tilde{g}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}, \text{ avec } E_1 > 0, E_2 > 0 \text{ et } E_3 > 0$$

on a :

$\tilde{g} = E_1 E_2 E_3$ et donc $\text{sgn}(\tilde{g}) = +1$. De plus :

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}^{11} & \tilde{g}^{12} & \tilde{g}^{13} \\ \tilde{g}^{12} & \tilde{g}^{22} & \tilde{g}^{23} \\ \tilde{g}^{13} & \tilde{g}^{23} & \tilde{g}^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix}.$$

On est alors dans la base naturelle

$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}$ et dans sa duale dx^1, dx^2, dx^3 et on trouve :

$$\widetilde{\text{rot } v}^1 = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left[\frac{\partial (E_3 \tilde{v}^3)}{\partial x^2} - \frac{\partial (E_2 \tilde{v}^2)}{\partial x^3} \right],$$

$$\widetilde{\text{rot } v}^2 = \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3 E_1}} \left[\frac{\partial (E_1 \tilde{v}^1)}{\partial x^3} - \frac{\partial (E_3 \tilde{v}^3)}{\partial x^1} \right],$$

$$\widetilde{\text{rot } v}^3 = \frac{1}{\sqrt{E_3 E_1 E_2}} \left[\frac{\partial (E_2 \tilde{v}^2)}{\partial x^1} - \frac{\partial (E_1 \tilde{v}^1)}{\partial x^2} \right]$$

Si on se place dans la base mobile

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial}{\partial x^1}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial}{\partial x^2}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{\partial}{\partial x^3}$ et dans sa duale

$\theta^1 = \sqrt{E_1} dx^1, \theta^2 = \sqrt{E_2} dx^2, \theta^3 = \sqrt{E_3} dx^3$, on trouve :

$$(\text{rot } v)^1 = \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}} \left[\frac{\partial (\sqrt{E_3} v^3)}{\partial x^2} - \frac{\partial (\sqrt{E_2} v^2)}{\partial x^3} \right],$$

$$(\text{rot } v)^2 = \frac{1}{\sqrt{E_3 E_1}} \left[\frac{\partial (\sqrt{E_1} v^1)}{\partial x^3} - \frac{\partial (\sqrt{E_3} v^3)}{\partial x^1} \right],$$

$$(\text{rot } v)^3 = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \left[\frac{\partial (\sqrt{E_2} v^2)}{\partial x^1} - \frac{\partial (\sqrt{E_1} v^1)}{\partial x^2} \right] [3]⁶³ [19]⁶⁴ [27]⁶⁵ [32]⁶⁶ et [33]⁶⁷.$$

62. p. 179

63. p. 173 éq. (4.82) avec $h_i = \sqrt{E_i}; i = 1, 2, 3$

64. p. 180

65. p. 557 avec $l_i = \sqrt{E_i}; i = 1, 2, 3$

66. p. 373 éqs. (2) et (6) avec $h_i = \sqrt{E_i}; i = 1, 2, 3$

67. p. 3 avec $h_i = \sqrt{E_i}; i = 1, 2, 3$

Dans le cas particulier où $\tilde{g}_{ab} = \delta_{ab}$, soit $\tilde{g} = 1$ et donc $\text{sgn}(\tilde{g}) = +1$ (et donc $\tilde{g}^{ab} = \delta^{ab}$) on trouve :

$$\begin{aligned}\widetilde{\text{rot } v}^1 &= \frac{\partial \tilde{v}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial x^3}, \\ \widetilde{\text{rot } v}^2 &= \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{v}^3}{\partial x^1}, \\ \widetilde{\text{rot } v}^3 &= \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial x^2} \quad [3]^{68} [33]^{69} [9]^{70} [11]^{71} [21]^{72} \text{ et } [26]^{73}.\end{aligned}$$

5.1.10 Cas particulier des variétés riemanniennes à quatre dimensions : $m = 4$

Plaçons nous en bases naturelles.

• $p = 0$; cas A

$$* \lambda = \lambda \sqrt{|\tilde{g}|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = \lambda v \in \Omega^4(U).$$

$$* (* \lambda) = \text{sgn}(\tilde{g}) \lambda \in \Omega^0(U).$$

$$*^{-1} \lambda = \text{sgn}(\tilde{g}) * \lambda \in \Omega^4(U).$$

$$\delta \lambda = 0.$$

$$\Delta \lambda = -[\tilde{g}^{ab} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^a \partial x^b} + (\frac{\partial \tilde{g}^{ab}}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{g}^{ab}) \frac{\partial \lambda}{\partial x^b}]; \quad a, b = 1, 2, 3, 4.$$

• $p = 1$; cas C

$$* a = \sqrt{|\tilde{g}|} (-\tilde{a}^4 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \tilde{a}^3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 - \tilde{a}^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \tilde{a}^1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4) \in \Omega^3(U).$$

$$* (* a) = -\text{sgn}(\tilde{g}) a \in \Omega^1(U).$$

$$*^{-1} a = -\text{sgn}(\tilde{g}) * a \in \Omega^3(U).$$

$$\delta a = -[\frac{\partial \tilde{a}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{a}^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \tilde{a}^4}{\partial x^4} + \frac{1}{2\tilde{g}} (\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^1} \tilde{a}^1 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^2} \tilde{a}^2 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^3} \tilde{a}^3 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^4} \tilde{a}^4)] \in \Omega^0(U).$$

Le calcul explicite de Δa est fastidieux.

• $p = 2$; cas F -bis

$$* \omega = \sqrt{|\tilde{g}|} (\tilde{\omega}^{34} dx^1 \wedge dx^2 - \tilde{\omega}^{24} dx^1 \wedge dx^3 + \tilde{\omega}^{23} dx^1 \wedge dx^4 + \tilde{\omega}^{14} dx^2 \wedge dx^3 - \tilde{\omega}^{13} dx^2 \wedge dx^4 + \tilde{\omega}^{12} dx^3 \wedge dx^4) \in \Omega^2(U).$$

$$* (* \omega) = \text{sgn}(\tilde{g}) \omega \in \Omega^2(U).$$

$$*^{-1} \omega = \text{sgn}(\tilde{g}) * \omega \in \Omega^2(U).$$

68. p. 163 éq. (4.59)

69. p. 4

70. p. 340

71. p. 230 mais avec un signe opposé et p. 235 éq. (16) avec le bon signe!

72. p. 98 éq. (68,3)

73. p. 395 éq. (3)

Les calculs explicites de $\delta \omega$ et de $\Delta \omega$ sont fastidieux.

- $p = 3$

$$* \omega = \sqrt{|\tilde{g}|} (-\tilde{\omega}^{234} dx^1 + \tilde{\omega}^{134} dx^2 - \tilde{\omega}^{124} dx^3 + \tilde{\omega}^{123} dx^4) \in \Omega^1(U).$$

$$* (* \omega) = -\text{sgn}(\tilde{g}) \omega \in \Omega^3(U).$$

$$*^{-1} \omega = -\text{sgn}(\tilde{g}) * \omega \in \Omega^1(U).$$

Les calculs explicites de $\delta \omega$ et de $\Delta \omega$ sont fastidieux.

- $p = 4$

$$* \omega = \sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\omega}^{1234} \in \Omega^0(U).$$

$$* (* \omega) = \text{sgn}(\tilde{g}) \omega \in \Omega^4(U).$$

$$*^{-1} \omega = \text{sgn}(\tilde{g}) * \omega \in \Omega^0(U).$$

Les calculs explicites de $\delta \omega$ et de $\Delta \omega$ sont fastidieux.

5.2 Connexion riemannienne

On dit aussi connexion associée à la métrique et on pourra consulter [8]⁷⁴ et [11]⁷⁵. Citons [11]⁷⁶ :

« Il convient de dire dès le début que la notion de connexion et celle de métrique riemannienne ne sont liées en aucune façon entre elles ».

Par contre nous allons associer **une** connexion particulière à la métrique dite connexion riemannienne ou associée à la métrique.

5.2.1 Définition

La connexion riemannienne ou associée à la métrique est la **seule** connexion telle que $\nabla g = 0$ et $S = 0$.

5.2.2 Coefficients de connexion ou symboles de Christoffel de 2^e espèce de la connexion riemannienne

Si l'on pose $[ij, k] \triangleq \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = [ji, k]$ [8]⁷⁷ ou :

74. pp. 242-244 § 8 et pp. 245-246 pour la courbure

75. pp. 280-283 § 3

76. p. 280

77. p. 242 éq. (8.6)

$\Gamma_{ab,c} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} \right) = \Gamma_{ba,c}$ [11]⁷⁸ et [27]⁷⁹, ($\Gamma_{ab,c}$ qualifiés de symboles de Christoffel de 1^e espèce), on a :

$$\gamma_{i,k}^j = g^{jl} [ik, l] - \frac{1}{2} (g_{im} g^{jl} c_{k,l}^m + g_{km} g^{jl} c_{i,l}^m - c_{i,k}^j) [8]⁸⁰ ou :$$

$\Gamma_{a,c}^b = \tilde{g}^{bd} \Gamma_{ac,d} = \Gamma_{c,a}^b$ [8]⁸¹ [11]⁸² et [27]⁸³ ($\Gamma_{a,c}^b$ qualifiés de symboles de Christoffel de 2^e espèce).

Donc, pour la connexion riemannienne, les coefficients de connexion ne sont plus imposés a priori, mais se déduisent des coefficients de structure de base mobile et du champ de tenseurs métrique et les symboles de Christoffel de 2^e espèce se déduisent du champ de tenseurs métrique.

Démonstration

Faisons la démonstration pour les coefficients de connexion, en base mobile ; la démonstration pour les symboles de Christoffel de 1^e espèce, en base naturelle s'en déduit.

• Étant donné que $\nabla g = 0$ (cas F) on a
 $(\nabla g)_{i_1 i_2} = \partial_i g_{i_1 i_2} - \gamma_{i,i_1}^k g_{k i_2} - \gamma_{i,i_2}^k g_{i_1 k} = 0$. Soit :

$\partial_k g_{ij} = \gamma_{k,i}^l g_{jl} + \gamma_{k,j}^l g_{il}$ [8]⁸⁴. Alors par permutation circulaire :

$$\begin{aligned} \partial_k g_{ij} &= \gamma_{k,i}^l g_{jl} + \gamma_{k,j}^l g_{il}, \\ \partial_i g_{jk} &= \gamma_{i,j}^l g_{kl} + \gamma_{i,k}^l g_{jl}, \\ \partial_j g_{ki} &= \gamma_{j,k}^l g_{il} + \gamma_{j,i}^l g_{kl}. \end{aligned}$$

Multiplions la première équation par $-\frac{1}{2}$, les deuxième et troisième par $\frac{1}{2}$ et sommons ; il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\gamma_{j,k}^l - \gamma_{k,j}^l)g_{il} + \frac{1}{2}(\gamma_{i,k}^l - \gamma_{k,i}^l)g_{jl} - \frac{1}{2}(\gamma_{i,j}^l - \gamma_{j,i}^l)g_{kl} + \gamma_{i,j}^l g_{kl} &= [ij, k], \text{ avec :} \\ [ij, k] &\triangleq \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned}$$

• Étant donné que $S = 0$ on a $S_{ik}^j = \gamma_{i,j}^k - \gamma_{j,i}^k - c_{i,j}^k = 0$. Soit :

$$\begin{aligned} \gamma_{j,k}^l - \gamma_{k,j}^l &= c_{j,k}^l, \\ \gamma_{i,k}^l - \gamma_{k,i}^l &= c_{i,k}^l, \\ \gamma_{i,j}^l - \gamma_{j,i}^l &= c_{i,j}^l. \end{aligned}$$

78. p. 282 qui notent $\Gamma_{c,ab}$ ce que nous notons $\Gamma_{ab,c}$

79. pp. 585-586 Exercice 11 qui note Γ_{abc} ce que nous notons $\Gamma_{ab,c}$

80. p. 242 éq. (8.7) mais avec une erreur de signe

81. p. 242 éq. (8.8) qui note $[ac, d]$ ce que nous notons $\Gamma_{ac,d}$

82. p. 281 éq. (13) qui notent Γ_{ac}^b ce que nous notons $\Gamma_{a,c}^b$

83. pp. 585-586 Exercice 11 qui note Γ_{ac}^b ce que nous notons $\Gamma_{a,c}^b$

84. p. 242 éq. (8.4)

On en déduit que $\frac{1}{2} c_{j,k}^l g_{il} + \frac{1}{2} c_{i,k}^l g_{jl} - \frac{1}{2} c_{i,j}^l g_{kl} + \gamma_{i,j}^l g_{kl} = [ij, k]$.

Multiplions les 2 membres de cette équation par g^{km} et utilisons le fait que $g_{kl} g^{km} = g_{lk} g^{km} = \delta_l^m$; il vient :

$$\frac{1}{2} c_{j,k}^l g_{il} g^{km} + \frac{1}{2} c_{i,k}^l g_{jl} g^{km} - \frac{1}{2} c_{i,j}^l g_{kl} g^{km} + \gamma_{i,j}^l g_{kl} g^{km} = [ij, k] g^{km} \text{ ou :}$$

$$\gamma_{i,j}^m = [ij, k] g^{km} - \frac{1}{2} (c_{j,k}^l g_{il} g^{km} + c_{i,k}^l g_{jl} g^{km} - c_{i,j}^l g_{kl} g^{km}) \text{ ou :}$$

$\gamma_{i,k}^j = g^{jl} [ik, l] - \frac{1}{2} (g_{im} g^{jl} c_{k,l}^m + g_{km} g^{jl} c_{i,l}^m - c_{i,k}^j)$ et, par conséquent, en base naturelle :

$$\Gamma_{a,c}^b = \tilde{g}^{bd} \Gamma_{ac,d} = \Gamma_{c,a}^b \text{ avec :}$$

$$\Gamma_{ab,c} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} \right) = \Gamma_{ba,c} \text{ QED.}$$

Remarque : On a :

$$[jk, i] \triangleq \frac{1}{2} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}) \text{ et :}$$

$$[ik, j] \triangleq \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ik}).$$

Donc en sommant et en tenant compte du fait que g est symétrique on a :

$$[jk, i] + [ik, j] = \partial_k g_{ij} \text{ et en base naturelle } \Gamma_{bc,a} + \Gamma_{ac,b} = \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} [11]^{85}.$$

Autres propriétés en base naturelle

- $\Gamma_{ac,d} = \tilde{g}_{db} \Gamma_{a,c}^b$

Démonstration

$$\Gamma_{a,c}^b = \tilde{g}^{bd} \Gamma_{ac,d}. \text{ Multiplions par } \tilde{g}_{eb}; \text{ il vient :}$$

$\tilde{g}_{eb} \Gamma_{a,c}^b = \delta_e^d \Gamma_{ac,d} = \Gamma_{ac,e}$. En remplaçant l'indice e par l'indice d on a bien :

$$\tilde{g}_{db} \Gamma_{a,c}^b = \Gamma_{ac,d} \text{ QED.}$$

- $\frac{\partial \tilde{g}^{bd}}{\partial x^c} = -\tilde{g}^{ab} \Gamma_{a,c}^d - \tilde{g}^{ad} \Gamma_{a,c}^b$

Démonstration

$$\delta_a^d = \tilde{g}^{de} \tilde{g}_{ea}. \text{ Dérivons partiellement par rapport à } x^c :$$

$$0 = \frac{\partial \delta_a^d}{\partial x^c} = \frac{\partial \tilde{g}^{de}}{\partial x^c} \tilde{g}_{ea} + \tilde{g}^{de} \frac{\partial \tilde{g}_{ea}}{\partial x^c}; \text{ soit :}$$

$$\frac{\partial \tilde{g}^{de}}{\partial x^c} \tilde{g}_{ea} = -\tilde{g}^{de} \frac{\partial \tilde{g}_{ea}}{\partial x^c}. \text{ Multiplions par } \tilde{g}^{ab}; \text{ il vient :}$$

$$\frac{\partial \tilde{g}^{de}}{\partial x^c} \delta_e^b = -\tilde{g}^{de} (\Gamma_{ac,e} + \Gamma_{ec,a}) \tilde{g}^{ab} = -\tilde{g}^{ab} \gamma_{a,c}^d - \tilde{g}^{de} \gamma_{e,c}^b. \text{ Soit :}$$

85. p. 283

$\frac{\partial \tilde{g}^{db}}{\partial x^c} = -\tilde{g}^{de} (\Gamma_{ac.e} + \Gamma_{ec.a}) \tilde{g}^{ab} = -\tilde{g}^{ab} \Gamma_{a.c}^d - \tilde{g}^{de} \Gamma_{e.c}^b$. Et on peut remplacer l'indice muet e par l'indice muet a ; soit :

$$\frac{\partial \tilde{g}^{bd}}{\partial x^c} = -\tilde{g}^{ab} \Gamma_{a.c}^d - \tilde{g}^{da} \Gamma_{a.c}^b = -\tilde{g}^{ab} \Gamma_{a.c}^d - \tilde{g}^{ad} \Gamma_{a.c}^b \text{ QED.}$$

$$\bullet \Gamma_{a.b}^b = \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} (\ln \sqrt{|\tilde{g}|})$$

Démonstration

Préliminaire

Remarquons que pour toute matrice (\tilde{g}_{bd}) , dépendant de x^a son déterminant $\tilde{g} \triangleq \det(\tilde{g}_{bd})$ vérifie la relation :

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} = \tilde{g} \tilde{g}^{bd} \frac{\partial \tilde{g}_{bd}}{\partial x^a}.$$

Cette relation est valable pour toute matrice (\tilde{g}_{bd}) , même non symétrique. Dans notre cas où cette matrice est symétrique on a donc :

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} = \tilde{g} \tilde{g}^{bd} \frac{\partial \tilde{g}_{bd}}{\partial x^a}.$$

Démonstration proprement dite

$$\Gamma_{a.c}^b = \tilde{g}^{bd} \Gamma_{ac,d} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{cd}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ad}}{\partial x^c} - \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^d} \right). \text{ Donc lorsque } c = b :$$

$$\Gamma_{a.b}^b = \frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ad}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^d} \right).$$

Mais $\tilde{g}^{bd} \frac{\partial \tilde{g}_{ad}}{\partial x^b} = \tilde{g}^{db} \frac{\partial \tilde{g}_{ad}}{\partial x^d} = \tilde{g}^{bd} \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^d}$ (on a permuté b et d) et par conséquent :

$$\Gamma_{a.b}^b = \frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \frac{\partial \tilde{g}_{bd}}{\partial x^a} \text{ et, d'après le préliminaire :}$$

$$\Gamma_{a.b}^b = \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} (\ln \sqrt{|\tilde{g}|}) \text{ QED.}$$

5.2.3 Particularités des connexions riemanniennes

Divergence d'un champ de vecteurs

La divergence du champ de vecteurs $v \in C^\infty(U; TM)$ s'écrit, en base naturelle :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &\triangleq \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} v}^a \triangleq \frac{\partial \tilde{v}^a}{\partial x^a} + \Gamma_{a.c}^a \tilde{v}^c = \frac{\partial \tilde{v}^a}{\partial x^a} + \Gamma_{b.a}^b \tilde{v}^a = \frac{\partial \tilde{v}^a}{\partial x^a} + \Gamma_{a.b}^b \tilde{v}^a \\ &= \frac{\partial \tilde{v}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{2\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^a} \tilde{v}^a = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{v}^a) \text{ [8]}^{86} \text{ [9]}^{87} \text{ et [27]}^{88}. \end{aligned}$$

86. p. 246 éq. (11.2) pour la 2^e égalité

87. pp. 338-339 pour la 2^e égalité

88. p. 549 pour la 2^e égalité et avec $\tilde{g} > 0$

Et on remarque que $\operatorname{div} v \triangleq \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} v}^a = -\delta v_b$ [9]⁸⁹

Et donc $\delta v_b = -\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} v}^a$ [8]⁹⁰.

Codifférentielle d'une forme différentielle extérieure

En généralisant le résultat précédent on obtient :

$$\begin{aligned} (\delta \omega)_{i_2 \dots i_p} &= -(\nabla_{e_i} \omega)_{i_2 \dots i_p}^i \triangleq -g^{ii_1} (\nabla_{e_i} \omega)_{i_1 \dots i_p} \text{ et} \\ \widetilde{\delta \omega}_{a_2 \dots a_p} &= -\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \omega}_{a_2 \dots a_p}^a \triangleq -\widetilde{g}^{aa_1} \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \omega}_{a_1 \dots a_p} \text{ [8] }^{91}. \end{aligned}$$

Laplacien de Hodge

- $p = 0$; cas A

On a $\Delta \lambda = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \lambda)$.

Démonstration

On a $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \lambda) = \left[\frac{\partial \widetilde{\operatorname{grad} \lambda}}{\partial x^a} + \frac{1}{2\widetilde{g}} \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial x^a} \widetilde{\operatorname{grad} \lambda}^a \right]$ et $\widetilde{\operatorname{grad} \lambda}^a = \widetilde{d\lambda}^a$ et, par conséquent (cf. ce qui précède) :

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \lambda) = -\Delta \lambda$ QED et donc $\Delta_2 \lambda = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \lambda)$.

Un cas particulier du cas particulier des connexions riemanniennes à trois dimensions : $m = 3$

$$\text{Si } \begin{bmatrix} \widetilde{g}_{11} & \widetilde{g}_{12} & \widetilde{g}_{13} \\ \widetilde{g}_{12} & \widetilde{g}_{22} & \widetilde{g}_{23} \\ \widetilde{g}_{13} & \widetilde{g}_{23} & \widetilde{g}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}, \text{ avec } E_1 > 0, E_2 > 0 \text{ et } E_3 > 0;$$

soit $\widetilde{g} = E_1 E_2 E_3$ on va calculer les symboles de Christoffel de 1^e et 2^e espèce.

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce

$$\begin{aligned} \Gamma_{11,1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{11,2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial x^2}, \\ \Gamma_{11,3} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial x^3}, \\ \Gamma_{12,1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial x^2} = \Gamma_{21,1}, \\ \Gamma_{12,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial x^1} = \Gamma_{21,2}, \\ \Gamma_{12,3} &= 0 = \Gamma_{21,3}, \end{aligned}$$

89. p. 344 au début et p. 447 à la fin!

90. p. 248 Exercice 2 éq. (11.13) pour $p = 1$

91. p. 248 éq. (11.13)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13,1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_1}{\partial x^3} = \Gamma_{31,1}, \\
\Gamma_{13,2} &= 0 = \Gamma_{31,2}, \\
\Gamma_{13,3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x^1} = \Gamma_{31,3}, \\
\Gamma_{22,1} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{22,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{22,3} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial x^3}, \\
\Gamma_{23,1} &= 0 = \Gamma_{32,1}, \\
\Gamma_{23,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_2}{\partial x^3} = \Gamma_{32,2}, \\
\Gamma_{23,3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x^2} = \Gamma_{32,3}, \\
\Gamma_{33,1} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{33,2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{33,3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

Calcul des symboles de Christoffel de 2^e espèce

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1.1}^1 &= \frac{1}{E_1} \Gamma_{11,1} = \frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_1}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{1.1}^2 &= \frac{1}{E_2} \Gamma_{11,2} = -\frac{1}{2E_2} \frac{\partial E_1}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{1.1}^3 &= \frac{1}{E_3} \Gamma_{11,3} = -\frac{1}{2E_3} \frac{\partial E_1}{\partial x^3}, \\
\Gamma_{1.2}^1 &= \frac{1}{E_1} \Gamma_{12,1} = \Gamma_{2.1}^1 = \frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_1}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{1.2}^2 &= \frac{1}{E_2} \Gamma_{12,2} = \Gamma_{2.1}^2 = \frac{1}{2E_2} \frac{\partial E_2}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{1.2}^3 &= \frac{1}{E_3} \Gamma_{12,3} = \Gamma_{2.1}^3 = 0, \\
\Gamma_{1.3}^1 &= \frac{1}{E_1} \Gamma_{13,1} = \Gamma_{3.1}^1 = \frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_1}{\partial x^3}, \\
\Gamma_{1.3}^2 &= \frac{1}{E_2} \Gamma_{13,2} = \Gamma_{3.1}^2 = 0, \\
\Gamma_{1.3}^3 &= \frac{1}{E_3} \Gamma_{13,3} = \Gamma_{3.1}^3 = \frac{1}{2E_3} \frac{\partial E_3}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{2.2}^1 &= \frac{1}{E_1} \Gamma_{22,1} = -\frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_2}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{2.2}^2 &= \frac{1}{E_2} \Gamma_{22,2} = \frac{1}{2E_2} \frac{\partial E_2}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{2.2}^3 &= \frac{1}{E_3} \Gamma_{22,3} = -\frac{1}{2E_3} \frac{\partial E_2}{\partial x^3}, \\
\Gamma_{2.3}^1 &= \frac{1}{E_1} \Gamma_{23,1} = \Gamma_{3.2}^1 = 0, \\
\Gamma_{2.3}^2 &= \frac{1}{E_2} \Gamma_{23,2} = \Gamma_{3.2}^2 = \frac{1}{2E_2} \frac{\partial E_2}{\partial x^3}, \\
\Gamma_{2.3}^3 &= \frac{1}{E_3} \Gamma_{23,3} = \Gamma_{3.2}^3 = \frac{1}{2E_3} \frac{\partial E_3}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{3.3}^1 &= \frac{1}{E_1} \Gamma_{33,1} = -\frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_3}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{3.3}^2 &= \frac{1}{E_2} \Gamma_{33,2} = -\frac{1}{2E_2} \frac{\partial E_3}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{3.3}^3 &= \frac{1}{E_3} \Gamma_{33,3} = \frac{1}{2E_3} \frac{\partial E_3}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{E_1 E_2 E_3} \tilde{v}^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{E_1 E_2 E_3} \tilde{v}^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{E_1 E_2 E_3} \tilde{v}^3) \right].$$

• $p = 0$; cas A

Pas de particularité par rapport au cas des variétés riemanniennes à trois dimensions.

• $p = 1$; cas C

$$\Delta a^\# = -\text{grad}(\text{div} a^\#) + \text{rot}(\text{rot} a^\#) \in C^\infty(U; MT) \text{ [19]}^{92}.$$

Démonstration dans le cas où $E_1 = E_2 = E_3 = 1$

$$\text{div} a^\# = \frac{\partial \tilde{a}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{a}^3}{\partial x^3} = \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^3}.$$

$$\widetilde{\text{grad}(\text{div} a^\#)}^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{\partial x^1 \partial x^3},$$

$$\widetilde{\text{grad}(\text{div} a^\#)}^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{\partial x^2 \partial x^3},$$

$$\widetilde{\text{grad}(\text{div} a^\#)}^3 = \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^3)^2}.$$

$$\widetilde{\text{rot} a^\#}^1 = \frac{\partial \tilde{a}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{a}^2}{\partial x^3} = \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^3},$$

$$\widetilde{\text{rot} a^\#}^2 = \frac{\partial \tilde{a}^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}^3}{\partial x^1} = \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^1},$$

$$\widetilde{\text{rot} a^\#}^3 = \frac{\partial \tilde{a}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{a}^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^2}.$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{rot}(\text{rot} a^\#)}^1 &= \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^1} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^3)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{rot}(\text{rot} a^\#)}^2 &= \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^2} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^3)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{rot}(\text{rot} a^\#)}^3 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial x^3} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{\partial x^2 \partial x^3}. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\widetilde{\text{grad}(\text{div} a^\#)}^1 + \widetilde{\text{rot}(\text{rot} a^\#)}^1 &= -\left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_1}{(\partial x^3)^2} \right) \\ &= -\Delta \tilde{a}_1 = -\Delta \tilde{a}_1^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\widetilde{\text{grad}(\text{div} a^\#)}^2 + \widetilde{\text{rot}(\text{rot} a^\#)}^2 &= -\left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_2}{(\partial x^3)^2} \right) \\ &= -\Delta \tilde{a}_1 = -\Delta \tilde{a}_1^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\widetilde{\text{grad}(\text{div} a^\#)}^3 + \widetilde{\text{rot}(\text{rot} a^\#)}^3 &= -\left(\frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \tilde{a}_3}{(\partial x^3)^2} \right) \\ &= -\Delta \tilde{a}_1 = -\Delta \tilde{a}_1^1. \text{ Et donc :} \end{aligned}$$

$$-\text{grad}(\text{div} a^\#) + \text{rot}(\text{rot} a^\#) = \Delta a^\# \text{ QED.}$$

92. p. 179 deux fois dont une fois avec une erreur de signe devant le gradient (+ au lieu de -)

5.2.4 Propriété nécessaire à la suite

Pour $u, v, w \in C^\infty(U; TM)$ on a
 $\nabla_w g(u, v) = g(\nabla_w u, v) + g(u, \nabla_w v) \in \Omega^0(U)$.

Démonstration

Établissons cette propriété tout d'abord pour $u = e_i, v = e_j$ et $w = e_k$.

- $\nabla_{e_k} g(e_i, e_j) = \nabla_{e_k} g_{ij} = \partial_k g_{ij}$.
- $g(\nabla_{e_k} e_i, e_j) = g(\gamma_{k,i}^l e_l, e_j) = \gamma_{k,i}^l g_{lj} = \gamma_{k,i}^l g_{jl}$
- $g(e_i, \nabla_{e_k} e_j) = g(e_i, \gamma_{k,j}^l e_l) = \gamma_{k,j}^l g_{il}$

Et on a bien $\nabla_{e_k} g(e_i, e_j) = g(\nabla_{e_k} e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_{e_k} e_j)$ car
 $\partial_k g_{ij} = \gamma_{k,i}^l g_{jl} + \gamma_{k,j}^l g_{il}$.

$$\begin{aligned} & \bullet \nabla_w g(u, v) = \nabla_{w^k e_k} g(u^i e_i, v^j e_j) = w^k \nabla_{e_k} (u^i v^j g(e_i, e_j)) \\ & = w^k [(\nabla_{e_k} (u^i v^j)) g(e_i, e_j) + u^i v^j \nabla_{e_k} g(e_i, e_j)] \\ & = w^k \{(\nabla_{e_k} u^i) v^j g(e_i, e_j) + u^i (\nabla_{e_k} v^j) g(e_i, e_j) + u^i v^j [g(\nabla_{e_k} e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_{e_k} e_j)]\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet g(\nabla_w u, v) = g(\nabla_{w^k e_k} (u^i e_i), v^j e_j) = g(w^k \nabla_{e_k} (u^i e_i), v^j e_j) \\ & = w^k v^j g((\nabla_{e_k} u^i) e_i + u^i \nabla_{e_k} e_i, e_j) = w^k v^j [(\nabla_{e_k} u^i) g(e_i, e_j) + u^i g(\nabla_{e_k} e_i, e_j)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet g(u, \nabla_w v) = g(u^i e_i, \nabla_{w^k e_k} (v^j e_j)) = g(u^i e_i, w^k \nabla_{e_k} (v^j e_j)) \\ & = u^i w^k g(e_i, \nabla_{e_k} (v^j e_j)) = u^i w^k g(e_i, (\nabla_{e_k} v^j) e_j + v^j \nabla_{e_k} e_j) \\ & = u^i w^k [(\nabla_{e_k} v^j) g(e_i, e_j) + v^j g(e_i, \nabla_{e_k} e_j)]. \end{aligned}$$

On constate que l'on a bien $\nabla_w g(u, v) = g(\nabla_w u, v) + g(u, \nabla_w v)$ QED.

5.2.5 Le champ de tenseurs de torsion

Il est nul par définition de la connexion riemannienne. Donc :

$$S = 0, S_{ik}^{\cdot j} = 0, \tilde{S}_{ac}^{\cdot b} = 0, \Sigma = 0, \sigma^j = 0, \Sigma^b = 0, \text{ et } d\sigma^j = 0, d\Sigma^b = 0.$$

5.2.6 Le champ de tenseurs de courbure

On pourra consulter, en plus des références précédentes valables pour une connexion quelconque, [18]⁹³ valable pour une connexion riemannienne. On a toujours :

$R_{i.kl}^j = (\Omega_i^j)_{kl} = \partial_k \gamma_{l,i}^j - \partial_l \gamma_{k,i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m,i}^j + \gamma_{k,m}^j \gamma_{l,i}^m - \gamma_{k,i}^m \gamma_{l,m}^j = -R_{i.lk}^j$,
 mais avec des coefficients de connexion qui se déduisent des coefficients de structure de la base mobile et du champ de tenseur métrique. Il ne semble

93. pp. 336-382 Chapitre XI les équations du champ gravitationnel

pas y avoir d'expression vraiment simple en fonction des seuls coefficients de structure de la base mobile et du champ de tenseur métrique.

$\widetilde{R}_{a.cd}^b = \widetilde{\Omega}_{a.cd}^b = \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\widetilde{R}_{a.dc}^b$, mais avec des symboles de Christoffel de 2^e espèce qui se déduisent du champ de tenseur métrique. Il ne semble pas y avoir d'expression vraiment simple en fonction du seul champ de tenseur métrique.

5.2.7 Liens entre les champs de tenseurs de torsion et de courbure

Identités de Bianchi

Puisque $S = 0$ on a $\oint_{klm} (\nabla_{e_k} R)_{i.lm}^j = 0$ [8]⁹⁴ et $\oint_{cde} \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^e}} R}_{a.de}^b = 0$ [18]⁹⁵.

Autres identités entre les champs de torsion et de courbure

Puisque $S = 0$ on a $\oint_{ikl} R_{i.kl}^j = 0$ [8]⁹⁶ et $\oint_{acd} \widetilde{R}_{a.cd}^b = 0$ [11]⁹⁷.

5.2.8 Nouvelles définitions, grâce au champ de tenseur métrique

Grâce au champ de tenseur métrique nous allons identifier tous les champs de tenseurs de même ordre en posant :

$$\begin{aligned} \text{(en base mobile)} \quad e_j &= g_{ji} \theta^i \text{ et } \theta^i = g^{ij} e_j, \\ \text{(en base naturelle)} \quad \frac{\partial}{\partial x^b} &= \widetilde{g}_{ba} dx^a \text{ et } dx^a = \widetilde{g}^{ab} \frac{\partial}{\partial x^b}. \end{aligned}$$

Champs de tenseurs d'ordre 4

On va identifier $C^\infty(U; \overset{0}{\otimes} T^*M)$, $C^\infty(U; \overset{1}{\otimes} T^*M)$ (cas H) et $C^\infty(U; \overset{2}{\otimes} T^*M)$ (mais avec les 2 indices contravariants en tête contrairement à ce que nous avons fait pour la présentation générale des champs de tenseurs).

94. p. 245 § 10 3)

95. p. 340 éq. (92,5)

96. p. 245 § 10 2)

97. p. 291 éq. (13) et p. 292 § 3 4.

Pour le champ de tenseurs de courbure considéré comme élément de $C^\infty(U; \otimes_4 T^*M)$ on pourra consulter [4]⁹⁸ [8]⁹⁹ [9]¹⁰⁰ [11]¹⁰¹ [13]¹⁰² [18]¹⁰³ [21]¹⁰⁴ et [30]¹⁰⁵.

Ainsi pour ce champ de tenseurs :

en base mobile :

$$\begin{aligned} R &= R_{imkl} \theta^i \otimes \theta^m \otimes \theta^k \otimes \theta^l, \\ R &= R_{i.kl}^j \theta^i \otimes e_j \otimes \theta^k \otimes \theta^l, \\ R &= R_{.kl}^{nj} e_n \otimes e_j \otimes \theta^k \otimes \theta^l, \end{aligned}$$

en base naturelle :

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{R}_{aecd} dx^a \otimes dx^e \otimes dx^c \otimes dx^d, \\ \tilde{R} &= \tilde{R}_{a.cd}^b dx^a \otimes \frac{\partial}{\partial x^b} \otimes dx^c \otimes dx^d, \\ \tilde{R} &= \tilde{R}_{.cd}^{fb} \frac{\partial}{\partial x^f} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b} \otimes dx^c \otimes dx^d. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

en base mobile :

$$\begin{aligned} R_{imkl} &= g_{mj} R_{i.kl}^j = g_{in} g_{mj} R_{.kl}^{nj}, \\ R_{i.kl}^j &= g^{jm} R_{imkl} = g_{in} R_{.kl}^{nj}, \\ R_{.kl}^{nj} &= g^{ni} g^{jm} R_{imkl} = g^{ni} R_{i.kl}^j, \end{aligned}$$

en base naturelle :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{aecd} &= \tilde{g}_{eb} \tilde{R}_{a.cd}^b = \tilde{g}_{af} \tilde{g}_{eb} \tilde{R}_{.cd}^{fb}, \\ \tilde{R}_{a.cd}^b &= \tilde{g}^{be} \tilde{R}_{aecd} = \tilde{g}_{af} \tilde{R}_{.cd}^{fb}, \\ \tilde{R}_{.cd}^{fb} &= \tilde{g}^{fa} \tilde{g}^{be} \tilde{R}_{aecd} = \tilde{g}^{fa} \tilde{R}_{a.cd}^b. \end{aligned}$$

98. p. 130 éq. (vi.86)

99. pp. 245-246 § 10 utilisé p. 245 éq. (10.1) mais pas vraiment défini

100. p. 495

101. p. 292 § 3. Exemples. Point 2

102. p. 88 éq. (11.9)

103. p. 340 § 92 au début de ce §

104. p. 127 et éqs (82,1) et (82,2)

105. pp. 302-303 et, en particulier, éq. (8-58)

Champs de tenseurs d'ordre 2

On va identifier $C^\infty(U; \begin{smallmatrix} 0 \\ \otimes \\ 2 \end{smallmatrix} T^*M)$, $C^\infty(U; \begin{smallmatrix} 1 \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} T^*M)$ et $C^\infty(U; \begin{smallmatrix} 2 \\ \otimes \\ 0 \end{smallmatrix} T^*M)$ (mais avec l' indice contravariant en tête contrairement à ce que nous avons fait pour le cas E).

Ainsi pour le champ de tenseurs de Ricci \bar{R} :

en base mobile :

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R_{il} \theta^i \otimes \theta^l \text{ avec (rappel) } R_{il} \triangleq R_{i,jl}^j, \\ \bar{R} &= R_{,l}^n e_n \otimes \theta^l, \\ \bar{R} &= R^{nj} e_n \otimes e_j,\end{aligned}$$

en base naturelle :

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{R}} &= \tilde{R}_{ad} dx^a \otimes dx^d \text{ avec (rappel) } \tilde{R}_{ad} \triangleq \tilde{R}_{a,bd}^b, \\ \tilde{\bar{R}} &= \tilde{R}_{,d}^f \frac{\partial}{\partial x^f} \otimes dx^d, \\ \tilde{\bar{R}} &= \tilde{R}^{fb} \frac{\partial}{\partial x^f} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}. \text{ Alors :}\end{aligned}$$

en base mobile :

$$\begin{aligned}R_{il} &= g_{in} R_{,l}^n = g_{in} g_{lj} R^{nj}, \\ R_{,l}^n &= g^{ni} R_{il} = g_{lj} R^{nj}, \\ R^{nj} &= g^{ni} g^{jl} R_{il} = g^{jl} R_{,l}^n,\end{aligned}$$

en base naturelle :

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ad} &= \tilde{g}_{af} \tilde{R}_{,d}^f = \tilde{g}_{af} \tilde{g}_{db} \tilde{R}^{fb}, \\ \tilde{R}_{,d}^f &= \tilde{g}^{fa} \tilde{R}_{ad} = \tilde{g}_{db} \tilde{R}^{fb}, \\ \tilde{R}^{fb} &= \tilde{g}^{fa} \tilde{g}^{bd} \tilde{R}_{ad} = \tilde{g}^{bd} \tilde{R}_{,d}^f.\end{aligned}$$

Champs de tenseurs d'ordre 0

Pour la courbure (riemannienne) scalaire $2K$:

en base mobile :

$$2K = g^{li} R_{il} = R_{,l}^l,$$

en base naturelle :

$$2K = \tilde{g}^{da} \tilde{R}_{ad} = \tilde{R}_{,d}^d,$$

et de même pour la courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K en divisant par 2.

- 0
- **Propriétés de** $R \in C^\infty(U; \otimes_4 T^*M)$

Plaçons nous en bases mobiles.

$$\begin{aligned} R(u, t, v, w) &\triangleq g(t, R(v, w)u) = g_{mj} t^m (R(v, w)u)^j \\ &= g_{mj} t^m (R_{i.kl}^j u^i v^k w^l) = g_{mj} R_{i.kl}^j u^i t^m v^k w^l = R_{imkl} u^i t^m v^k w^l \in \Omega^0(U) \end{aligned}$$

[30]¹⁰⁶. On a :

$$P_1 : R(u, t, w, v) = -R(u, t, v, w),$$

$$P_2 : R(t, u, v, w) = -R(u, t, v, w) \text{ [30]}^{107},$$

$$P_3 : R(v, w, u, t) = R(u, t, v, w) \text{ [30]}^{108}.$$

$$P_4 : R(u, t, v, w) + R(v, t, w, u) + R(w, t, u, v) = 0 \text{ [30]}^{109},$$

Démonstrations [11]¹¹⁰

$$\begin{aligned} \text{De } P_1 : R(u, t, w, v) &\triangleq g(t, R(w, v)u) = g(t, -R(v, w)u) \\ &= -g(t, R(v, w)u) = -R(u, t, v, w) \text{ QED.} \end{aligned}$$

De P_2 : on va utiliser la propriété précédente :

$$\nabla_w g(u, v) = g(\nabla_w u, v) + g(u, \nabla_w v). \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned} R(t, u, v, w) &\triangleq g(u, R(v, w)t) = g(R(v, w)t, u) \\ &= g((\nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v - \nabla_{[v,w]})t, u) \\ &= g(\nabla_v (\nabla_w t), u) - g(\nabla_w (\nabla_v t), u) - g(\nabla_{[v,w]} t, u) \\ &= [\nabla_v g(\nabla_w t, u) - g(\nabla_w t, \nabla_v u)] - [\nabla_w g(\nabla_v t, u) - g(\nabla_v t, \nabla_w u)] \\ &\quad - [\nabla_{[v,w]} g(t, u) - g(t, \nabla_{[v,w]} u)] \\ &= \nabla_v \nabla_w g(t, u) - \nabla_v g(t, \nabla_w u) - \nabla_w g(t, \nabla_v u) + g(t, \nabla_w \nabla_v u) \\ &\quad - \nabla_w \nabla_v g(t, u) + \nabla_w g(t, \nabla_v u) + \nabla_v g(t, \nabla_w u) - g(t, \nabla_v \nabla_w u) \\ &\quad - \nabla_{[v,w]} g(t, u) + g(t, \nabla_{[v,w]} u) \\ &= g(t, (\nabla_w \nabla_v - \nabla_v \nabla_w + \nabla_{[v,w]})u) + (\nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v - \nabla_{[v,w]})g(t, u). \end{aligned}$$

Mais $(\nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v - \nabla_{[v,w]})g(t, u) = 0$ car $g(t, u) \in \Omega^0(U)$ et il y a des simplifications ; Alors :

$$R(t, u, v, w) = g(t, -R(v, w)u) = -R(u, t, v, w) \text{ QED.}$$

106. p. 302 éq. (8-57)

107. p. 317 Exercice 14

108. p. 317 Exercice 16

109. pp. 317-318 Exercice 15

110. pp. 290-292 § 2

De P_4 : étant donné que $S = 0$, d'après ce qui précède on a :

$$R(v, w)u + R(w, u)v + R(u, v)w = 0 \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned} & R(u, t, v, w) + R(v, t, w, u) + R(w, t, u, v) \\ = & g(t, R(v, w)u) + g(t, R(w, u)v) + g(t, R(u, v)w) \\ = & g(t, R(v, w)u + R(w, u)v + R(u, v)w) = 0 \text{ QED.} \end{aligned}$$

De P_3 : on a, d'après P_4 :

$$\begin{aligned} R(u, t, v, w) + R(v, t, w, u) + R(w, t, u, v) &= 0, \\ R(v, u, w, t) + R(w, u, t, v) + R(t, u, v, w) &= 0, \\ R(w, v, t, u) + R(t, v, u, w) + R(u, v, w, t) &= 0, \\ R(t, w, u, v) + R(u, w, v, t) + R(v, w, t, u) &= 0. \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces 4 expressions et en utilisant 4 fois la propriété P_2 il vient :

$$R(v, t, w, u) + R(w, u, t, v) + R(t, v, u, w) + R(u, w, v, t) = 0. \text{ Soit en utilisant les propriétés } P_1 \text{ et } P_2 \text{ et en divisant par } 2 :$$

$$R(v, t, w, u) + R(w, u, t, v) = 0.$$

Donc :

$$R(v, t, w, u) = -R(w, u, t, v) = R(w, u, v, t), \text{ en utilisant la propriété } P_1.$$

Et finalement, en remplaçant t par w , u par t et w par u :

$$R(v, w, u, t) = R(u, t, v, w) \text{ QED.}$$

◇ On a $R_{imkl} \triangleq R(e_i, e_m, e_k, e_l)$. Par conséquent :

$$P_1 : R_{imlk} \triangleq R(e_i, e_m, e_l, e_k) = -R(e_i, e_m, e_k, e_l) = -R_{imkl} \text{ et donc } R_{imkk} = 0.$$

$$P_2 : R_{mikl} \triangleq R(e_m, e_i, e_k, e_l) = -R(e_i, e_m, e_k, e_l) = -R_{imkl} \text{ et donc } R_{iikl} = 0.$$

$$P_3 : R_{klim} \triangleq R(e_k, e_l, e_i, e_m) = R(e_i, e_m, e_k, e_l) = R_{imkl}.$$

$$\begin{aligned} P_4 : R_{imkl} + R_{kml i} + R_{lmik} \\ \triangleq R(e_i, e_m, e_k, e_l) + R(e_k, e_m, e_l, e_i) + R(e_l, e_m, e_i, e_k) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } R_{i.kl}^i = g^{im} R_{imkl} = -g^{mi} R_{mikl} = -R_{i.kl}^i \text{ soit } R_{i.kl}^i = 0.$$

De même en base naturelle

◇ On a $\tilde{R}_{aecd} \triangleq \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d})$. Par conséquent :

$P_1 : \tilde{R}_{aedc} \triangleq \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^c}) = -\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}) = -R_{aedc}$
[18]¹¹¹ et [30]¹¹² et donc $\tilde{R}_{aecc} = 0$.

$P_2 : \tilde{R}_{eacd} \triangleq \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}) = -\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}) = -\tilde{R}_{aedc}$
[11]¹¹³ [18]¹¹⁴ et [30]¹¹⁵. et donc $\tilde{R}_{aecc} = 0$.

$P_3 : \tilde{R}_{cdae} \triangleq \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^e}) = \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}) = \tilde{R}_{aedc}$
[11]¹¹⁶ [18]¹¹⁷ et [30]¹¹⁸.

$P_4 : \tilde{R}_{aecdc} + \tilde{R}_{ceda} + \tilde{R}_{deac}$
 $\triangleq \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}) + \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^a}) + \tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^e}, \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^c}) = 0$
[18]¹¹⁹ et [30]¹²⁰.

Donc $\tilde{R}_{a.cd}^a = \tilde{g}^{ae} \tilde{R}_{aedc} = -\tilde{g}^{ea} \tilde{R}_{eacd} = -\tilde{R}_{a.cd}^a$ soit $\tilde{R}_{a.cd}^a = 0$ [4]¹²¹ et [30]¹²².

En raison de ces diverses symétries on peut montrer que le nombre de R_{imkl} et de \tilde{R}_{aedc} à calculer a priori est de $\frac{1}{12} m^2 (m^2 - 1)$ [4]¹²³ et [9]¹²⁴. Soit :

- 1 pour $m = 2$; il s'agit de R_{2112} et de \tilde{R}_{2112} .
- 6 pour $m = 3$; il s'agit de $R_{2112}, R_{2113}, R_{2123}, R_{3113}, R_{3123}, R_{3223}$ et de $\tilde{R}_{2112}, \tilde{R}_{2113}, \tilde{R}_{2123}, \tilde{R}_{3113}, \tilde{R}_{3123}, \tilde{R}_{3223}$.
- 20 pour $m = 4$; il s'agit de $R_{2112}, R_{2113}, R_{2114}, R_{2123}, R_{2124}, R_{2134}, R_{3113}, R_{3114}, R_{3123}, R_{3124}, R_{3134}, R_{4114}, R_{4124}, R_{4134}, R_{3223}, R_{3224}, R_{3234}, R_{4224}, R_{4234}, R_{4334}$ et de $\tilde{R}_{2112}, \tilde{R}_{2113}, \tilde{R}_{2114}, \tilde{R}_{2123}, \tilde{R}_{2124}, \tilde{R}_{2134}, \tilde{R}_{3113}, \tilde{R}_{3114}, \tilde{R}_{3123}, \tilde{R}_{3124}, \tilde{R}_{3134}, \tilde{R}_{4114}, \tilde{R}_{4124}, \tilde{R}_{4134}, \tilde{R}_{3223}, \tilde{R}_{3224}, \tilde{R}_{3234}, \tilde{R}_{4224}, \tilde{R}_{4234}, \tilde{R}_{4334}$.

En effet il n'y a pas R_{4123} ou \tilde{R}_{4123} car, d'après la propriété P_4 :

$$R_{4123} = -R_{2134} + R_{3124} \text{ ou } \tilde{R}_{4123} = -\tilde{R}_{2134} + \tilde{R}_{3124}.$$

111. p. 340 éq. (92,2)

112. p. 303 éq. (8-59)

113. p. 292 § 3 2.

114. p. 340 éq. (92,2)

115. p. 303 éq. (8-60)

116. p. 292 § 3 3.

117. p. 340 éq. (92,3)

118. p. 303 éq. (8-61)

119. p. 340 éq. (92,4)

120. p. 303 éq. (8-62)

121. p. 133

122. p. 303 au fond

123. p. 131

124. pp. 495-496

Calcul explicite de \tilde{R}_{aecd}

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{aecd} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{de}}{\partial x^a \partial x^c} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ce}}{\partial x^a \partial x^d} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ad}}{\partial x^c \partial x^e} + \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ac}}{\partial x^d \partial x^e} \right) + \tilde{g}^{bf} (\Gamma_{ac,f} \Gamma_{de,b} - \Gamma_{ad,f} \Gamma_{ce,b}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{de}}{\partial x^a \partial x^c} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ce}}{\partial x^a \partial x^d} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ad}}{\partial x^c \partial x^e} + \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ac}}{\partial x^d \partial x^e} \right) + \tilde{g}_{bf} (\Gamma_{a.c}^b \Gamma_{d.e}^f - \Gamma_{a.d}^b \Gamma_{c.e}^f) \quad [4]^{125} \text{ et} \\ &\quad [18]^{126}.\end{aligned}$$

Démonstrations

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{aecd} &= \tilde{g}_{eb} \tilde{R}_{a.cd}^b = \tilde{g}_{eb} \left(\frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.f}^b \Gamma_{d.a}^f - \Gamma_{c.a}^f \Gamma_{d.f}^b \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^c} (\tilde{g}_{eb} \Gamma_{d.a}^b) - \Gamma_{d.a}^b \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^c} - \frac{\partial}{\partial x^d} (\tilde{g}_{eb} \Gamma_{c.a}^b) + \Gamma_{c.a}^b \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^d} + (\tilde{g}_{eb} \Gamma_{c.f}^b) \Gamma_{d.a}^f - (\tilde{g}_{eb} \Gamma_{d.f}^b) \Gamma_{c.a}^f \\ &= \frac{\partial \Gamma_{da,e}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{ca,e}^b}{\partial x^d} + (\Gamma_{c.a}^b \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^d} - \Gamma_{d.a}^b \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^c}) + (\Gamma_{cf,e}^b \Gamma_{d.a}^f - \Gamma_{df,e}^b \Gamma_{c.a}^f).\end{aligned}$$

Remplaçons dans cette dernière parenthèse l'indice muet f par l'indice muet b ; il vient :

$$\tilde{R}_{aecd} = \frac{\partial \Gamma_{da,e}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{ca,e}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{d.a}^b (\Gamma_{cb,e} - \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^c}) - \Gamma_{c.a}^b (\Gamma_{db,e} - \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^d}).$$

$$\begin{aligned}\text{Mais } \Gamma_{cb,e} - \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^c} &= \Gamma_{bc,e} - \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^c} = -\Gamma_{ec,b} = -\Gamma_{ce,b} \text{ et} \\ \Gamma_{db,e} - \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^d} &= \Gamma_{bd,e} - \frac{\partial \tilde{g}_{eb}}{\partial x^d} = -\Gamma_{ed,b} = -\Gamma_{de,b} \text{ et par conséquent :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{aecd} &= \frac{\partial \Gamma_{ad,e}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{ac,e}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{a.c}^b \Gamma_{de,b} - \Gamma_{a.d}^b \Gamma_{ce,b} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{de}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ae}}{\partial x^d} - \frac{\partial \tilde{g}_{ad}}{\partial x^e} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^d} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{ce}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ae}}{\partial x^c} - \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^e} \right) + \Gamma_{a.c}^b \Gamma_{de,b} - \Gamma_{a.d}^b \Gamma_{ce,b} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{de}}{\partial x^a \partial x^c} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ce}}{\partial x^a \partial x^d} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ad}}{\partial x^c \partial x^e} + \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ac}}{\partial x^d \partial x^e} \right) + \Gamma_{a.c}^b \Gamma_{de,b} - \Gamma_{a.d}^b \Gamma_{ce,b}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\tilde{R}_{aecd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{de}}{\partial x^a \partial x^c} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ce}}{\partial x^a \partial x^d} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ad}}{\partial x^c \partial x^e} + \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ac}}{\partial x^d \partial x^e} \right) + \tilde{g}^{bf} (\Gamma_{ac,f} \Gamma_{de,b} - \Gamma_{ad,f} \Gamma_{ce,b})$$

QED pour la première égalité et :

$$\tilde{R}_{aecd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{de}}{\partial x^a \partial x^c} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ce}}{\partial x^a \partial x^d} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ad}}{\partial x^c \partial x^e} + \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ac}}{\partial x^d \partial x^e} \right) + \tilde{g}_{bf} (\Gamma_{a.c}^b \Gamma_{d.e}^f - \Gamma_{a.d}^b \Gamma_{c.e}^f)$$

QED pour la seconde égalité.

- 2
- Propriétés de $R \in C^\infty(U; \otimes_2 T^*M)$

Plaçons nous en bases mobiles.

◇ Concernant $R_{..kl}^{nj}$, on a :

$$P'_1 : R_{..lk}^{nj} \triangleq g^{ni} g^{jm} R_{imlk} = -g^{ni} g^{jm} R_{imkl} \triangleq -R_{..kl}^{nj} \text{ (on a utilisé la propriété } P_1).$$

$$P'_2 : R_{..kl}^{jn} \triangleq g^{ji} g^{nm} R_{imkl} = g^{jm} g^{ni} R_{mikl} = -g^{ni} g^{jm} R_{imkl} \triangleq -R_{..kl}^{nj} \text{ (on a utilisé successivement le fait que les indices } i \text{ et } m \text{ étant muets on peut les}$$

125. p. 131 éq. (vii.88) pour la première égalité

126. p. 340 éq. (92,1) pour la seconde égalité

permuter et la propriété P_2).

Donc $R_{..lk}^{jn} = -R_{..kl}^{jn} = R_{..kl}^{nj}$ (on a utilisé les propriétés P'_1 et P'_2).

De même en base naturelle

◇ Concernant $\tilde{R}_{..cd}^{fb}$, on a :

$P'_1 : \tilde{R}_{..dc}^{fb} \triangleq \tilde{g}^{fa} \tilde{g}^{be} \tilde{R}_{aedc} = -\tilde{g}^{fa} \tilde{g}^{be} \tilde{R}_{aecd} \triangleq -\tilde{R}_{..cd}^{fb}$ (on a utilisé la propriété P_1).

$P'_2 : \tilde{R}_{..cd}^{bf} \triangleq \tilde{g}^{ba} \tilde{g}^{fe} \tilde{R}_{aecd} = \tilde{g}^{be} \tilde{g}^{fa} \tilde{R}_{eacd} = -\tilde{g}^{fa} \tilde{g}^{be} \tilde{R}_{aecd} \triangleq -\tilde{R}_{..cd}^{fb}$ (on a utilisé successivement le fait que les indices i et m étant muets on peut les permuter et la propriété P_2).

Donc $R_{..dc}^{bf} = -R_{..cd}^{bf} = R_{..cd}^{fb}$ (on a utilisé les propriétés P'_1 et P'_2).

5.2.9 Champ de tenseurs de Ricci

$R_{il} \triangleq R_{i.jl}^j = \partial_j \gamma_{li}^j - \partial_l \gamma_{ji}^j - c_{j.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{j.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{j.i}^m \gamma_{l.m}^j$, mais avec des coefficients de la connexion qui se déduisent des coefficients de structure de la base mobile et du champ de tenseur métrique.

$\tilde{R}_{ad} \triangleq \tilde{R}_{a.bd}^b = \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{b.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{b.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{b.a}^e \Gamma_{d.e}^b$, mais avec des symboles de Christoffel de 2^e espèce qui se déduisent du champ de tenseur métrique [8]¹²⁷, [11]¹²⁸ et [21]¹²⁹.

Le champ de tenseurs de Ricci est alors symétrique :
 $R_{li} = R_{il}$ et $\tilde{R}_{da} = \tilde{R}_{ad}$ [30]¹³⁰.

Démonstration

$R_{li} \triangleq R_{l.ji}^j \triangleq g^{jm} R_{lmji} = g^{mj} R_{ljmi} = g^{mj} R_{milj} = g^{mj} R_{imjl} = g^{jm} R_{imjl} \triangleq R_{il}$. On a utilisé successivement le fait que les indices j et m étant muets on peut les permuter, la propriété P_3 , les propriétés P_1 et P_2 et la symétrie du champ de 2 - formes g . De même $\tilde{R}_{da} = \tilde{R}_{ad}$ QED.

Alors on constate que $R^{jn} = R^{nj}$ et de même que $\tilde{R}^{bf} = \tilde{R}^{fb}$.

127. p. 245 éq. (10.6) qui contracte par rapport au dernier indice

128. p. 293

129. pp. 130-131 § 85 éq. (85,2)

130. p. 303

5.2.10 Courbure (riemannienne) scalaire $2K$

$2K \triangleq R^l_l = g^{li} R_{il}$ [8]¹³¹ et [11]¹³² ou $2K \triangleq \tilde{R}^d_d = \tilde{g}^{da} \tilde{R}_{ad}$ [8]¹³³ et [11]¹³⁴.

5.2.11 Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K

$K \triangleq \frac{1}{2} R^l_l = \frac{1}{2} g^{li} R_{il}$ [11] ou $K \triangleq \frac{1}{2} \tilde{R}^d_d = \tilde{g}^{da} \tilde{R}_{ad}$ [11].

5.2.12 Champ de tenseurs d'Einstein et identités de conservation

On pourra consulter [4]¹³⁵ [8]¹³⁶ [9]¹³⁷ [11]¹³⁸ [13]¹³⁹ [21]¹⁴⁰ et [30]¹⁴¹.

Préliminaires

Plaçons nous en bases mobiles

De la même manière que ce que nous avons fait dans le chapitre consacré à ce qui dépend des connexions on démontre que :

◇ si $t = t_{i_1 i_2 i_3 i_4} \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \otimes \theta^{i_3} \otimes \theta^{i_4}$ alors :

$$(\nabla_{e_i} t)_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \partial_i t_{i_1 i_2 i_3 i_4} - \gamma_{i, i_1}^k t_{k i_2 i_3 i_4} - \gamma_{i, i_2}^k t_{i_1 k i_3 i_4} - \gamma_{i, i_3}^k t_{i_1 i_2 k i_4} - \gamma_{i, i_4}^k t_{i_1 i_2 i_3 k}$$

◇ si $t = t_{..i_1 i_2}^{j_1 j_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2}$ alors :

$$(\nabla_{e_i} t)_{..i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \partial_i t_{..i_1 i_2}^{j_1 j_2} + \gamma_{i, k}^{j_1} t_{..i_1 i_2}^{k j_2} + \gamma_{i, k}^{j_2} t_{..i_1 i_2}^{j_1 k} - \gamma_{i, i_1}^k t_{..k i_2}^{j_1 j_2} - \gamma_{i, i_2}^k t_{..i_1 k}^{j_1 j_2}$$

◇ si $t = t_{.i_1}^{j_1} e_{j_1} \otimes \theta^{i_1}$ alors :

$$(\nabla_{e_i} t)_{.i_1}^{j_1} = \partial_i t_{.i_1}^{j_1} + \gamma_{i, k}^{j_1} t_{.i_1}^k - \gamma_{i, i_1}^k t_{.k}^{j_1}$$

• Donc pour le tenseur de courbure R :

131. p. 246

132. p. 293

133. p. 246

134. p. 293

135. pp. 133-134 § XIII Les identités de Bianchi

136. p. 246 éq. (10.10)

137. p. 497 Définition IX.8.B

138. p. 296 § 30.3.III (pour = 4) Tenseur de courbure. Espace à quatre dimensions

139. pp. 148-151 Chapitre VI § 2 L'équation d'Einstein

140. pp. 131-132 § 86 éqs. (86,3); (86,4) et (86,5). Les principes de conservation sont évoqués p. 132 dernière ligne et pp. 207-210 textsection 129 Les équations d'Einstein

141. pp. 306-308 Leçon 8 § 4.D Les équations d'Einstein

◇ $(\nabla_{e_o} R)_{imkl} = \partial_o R_{imkl} - \gamma_{o,i}^n R_{nmkl} - \gamma_{o,m}^n R_{inkl} - \gamma_{o,k}^n R_{imnl} - \gamma_{o,l}^n R_{imkn}$.
Alors $(\nabla_{e_o} R)_{mikl} = -(\nabla_{e_o} R)_{imkl}$ et $(\nabla_{e_o} R)_{imlk} = -(\nabla_{e_o} R)_{imkl}$.

◇ On a vu que
 $(\nabla_{e_o} R)_{i.kl}^j = \partial_o R_{i.kl}^j + \gamma_{o,n}^j R_{i.kl}^n - \gamma_{o,i}^n R_{n.kl}^j - \gamma_{o,k}^n R_{i.nl}^j - \gamma_{o,l}^n R_{i.kn}^j$
(cas H) et que $(\nabla_{e_o} R)_{i.lk}^j = -(\nabla_{e_o} R)_{i.kl}^j$. Et si on contracte j et k (on conserve j) :

$(\nabla_{e_o} R)_{i.jl}^j = \partial_o R_{i.jl}^j + \gamma_{o,n}^j R_{i.jl}^n - \gamma_{o,i}^n R_{n.jl}^j - \gamma_{o,j}^n R_{i.nl}^j - \gamma_{o,l}^n R_{i.jn}^j$
 $= \partial_o R_{il} - \gamma_{o,i}^n R_{nl} - \gamma_{o,l}^n R_{in}$ (car $\gamma_{o,n}^j R_{i.jl}^n = \gamma_{o,j}^n R_{i.nl}^j$ comme on le voit en permutant les indices muets j et n).

◇ $(\nabla_{e_o} R)_{..kl}^{nj} = \partial_o R_{..kl}^{nj} + \gamma_{o,p}^n R_{..kl}^{pj} + \gamma_{o,p}^j R_{..kl}^{np} - \gamma_{o,k}^p R_{..pl}^{nj} - \gamma_{o,l}^p R_{..kp}^{nj}$.

On constate alors que d'après les propriétés P'_1 et P'_2 on a :

$(\nabla_{e_o} R)_{..lk}^{jn} = -(\nabla_{e_o} R)_{..kl}^{jn} = (\nabla_{e_o} R)_{..kl}^{nj}$.

Et si on contracte j et k (on conserve j) dans $(\nabla_{e_o} R)_{..kl}^{nj}$:

$(\nabla_{e_o} R)_{..jl}^{nj} = \partial_o R_{..jl}^{nj} + \gamma_{o,p}^n R_{..jl}^{pj} + \gamma_{o,p}^j R_{..jl}^{np} - \gamma_{o,j}^p R_{..pl}^{nj} - \gamma_{o,l}^p R_{..jp}^{nj}$
 $= \partial_o R_{..l}^n + \gamma_{o,p}^n R_{..l}^p - \gamma_{o,l}^p R_{..p}^n$ (car $\gamma_{o,p}^j R_{..jl}^{np} = \gamma_{o,j}^p R_{..pl}^{nj}$ comme on le voit en permutant les indices muets j et p). On a les passages suivants :

$(\nabla_{e_o} R)_{imkl} = g_{mj} (\nabla_{e_o} R)_{i.kl}^j = g_{in} g_{mj} (\nabla_{e_o} R)_{..kl}^{nj}$,
 $(\nabla_{e_o} R)_{i.kl}^j = g^{jm} (\nabla_{e_o} R)_{imkl} = g_{in} (\nabla_{e_o} R)_{..kl}^{nj}$,
 $(\nabla_{e_o} R)_{..kl}^{nj} = g^{ni} g^{jm} (\nabla_{e_o} R)_{imkl} = g^{ni} (\nabla_{e_o} R)_{i.kl}^j$,

• Pour le tenseur de Ricci \bar{R} :

◇ $(\nabla_{e_o} \bar{R})_{il} = \partial_o R_{il} - \gamma_{o,i}^n R_{nl} - \gamma_{o,l}^n R_{in}$ (cas F) ; alors $(\nabla_{e_o} \bar{R})_{li} = (\nabla_{e_o} \bar{R})_{il}$

◇ $(\nabla_{e_o} \bar{R})_{..l}^n = \partial_o R_{..l}^n + \gamma_{o,p}^n R_{..l}^p - \gamma_{o,l}^p R_{..p}^n$

◇ $(\nabla_{e_o} \bar{R})^{nj} = \partial_o R^{nj} + \gamma_{o,p}^n R^{pj} + \gamma_{o,p}^j R^{np}$ (cas D) ; alors

$(\nabla_{e_o} \bar{R})^{jn} = (\nabla_{e_o} \bar{R})^{nj}$.

• Comparaison entre les tenseurs de courbure R et de Ricci \bar{R}

On constate que $(\nabla_{e_o} R)_{i.jl}^j = (\nabla_{e_o} \bar{R})_{il}$ et que $(\nabla_{e_o} R)_{..jl}^{nj} = (\nabla_{e_o} \bar{R})_{..l}^n$ et par conséquent $(\nabla_{e_o} R)_{..lj}^{nj} = (\nabla_{e_o} R)_{..jl}^{jn} = -(\nabla_{e_o} \bar{R})_{..l}^n$.

Utilisation des identités de Bianchi :

$\oint_{klm} (\nabla_{e_k} R)_{i.lm}^j = (\nabla_{e_k} R)_{i.lm}^j + (\nabla_{e_l} R)_{i.mk}^j + (\nabla_{e_m} R)_{i.kl}^j = 0$. Donc :

$g^{ni} (\nabla_{e_k} R)_{i.lm}^j + g^{ni} (\nabla_{e_l} R)_{i.mk}^j + g^{ni} (\nabla_{e_m} R)_{i.kl}^j = 0$; soit :

$(\nabla_{e_k} R)_{..lm}^{nj} + (\nabla_{e_l} R)_{..mk}^{nj} + (\nabla_{e_m} R)_{..kl}^{nj} = 0$ [4]¹⁴².

142. p. 133 éq. (vii.98)

Si on contracte les indices m et j (on conserve l'indice j) :

$$(\nabla_{e_k} R)_{..lj}^{nj} + (\nabla_{e_l} R)_{..jk}^{nj} + (\nabla_{e_j} R)_{..kl}^{nj} = 0. \text{ Soit, d'après les préliminaires :}$$

$$-(\nabla_{e_k} \bar{R})_{..l}^n + (\nabla_{e_l} \bar{R})_{..k}^n + (\nabla_{e_j} R)_{..kl}^{nj} = 0 \text{ [4]}^{143}.$$

Si on contracte les indices n et k (on conserve l'indice n) :

$$-(\nabla_{e_n} \bar{R})_{..l}^n + (\nabla_{e_l} \bar{R})_{..n}^n + (\nabla_{e_j} R)_{..nl}^{nj} = 0. \text{ Soit, d'après les préliminaires :}$$

$-(\nabla_{e_n} \bar{R})_{..l}^n + (\nabla_{e_l} \bar{R})_{..n}^n - (\nabla_{e_j} \bar{R})_{..l}^j = 0.$ Et donc, en remarquant que le premier et le dernier terme du premier membre sont égaux et en multipliant par $-\frac{1}{2}$:

$$(\nabla_{e_n} \bar{R})_{..l}^n - \frac{1}{2} (\nabla_{e_l} \bar{R})_{..n}^n = 0.$$

Mais $(\nabla_{e_l} \bar{R})_{..n}^n \triangleq \partial_l R_{..n}^n + \gamma_{l,p}^n R_{..n}^p - \gamma_{l,n}^p R_{..p}^n = \partial_l R_{..n}^n$ (car les 2 derniers termes du second membre disparaissent puisque les indices p et n étant muets peuvent être permutés) alors que $\nabla_{e_l} R_{..n}^n = \partial_l R_{..n}^n$. Soit

$$(\nabla_{e_l} \bar{R})_{..n}^n = \nabla_{e_l} R_{..n}^n = \nabla_{e_l} (2K) = 2 \nabla_{e_l} K. \text{ Et, par conséquent :}$$

$$(\nabla_{e_n} \bar{R})_{..l}^n - \nabla_{e_l} K = 0.$$

$$\text{Soit } G \triangleq \bar{R} - K g \in C^\infty(U; \begin{matrix} 0 & 1 \\ \otimes & \\ 2 & 1 \end{matrix} T^*M) \text{ ou } C^\infty(U; \begin{matrix} 1 \\ \otimes \\ 1 \end{matrix} T^*M)$$

ou $C^\infty(U; \begin{matrix} 2 \\ \otimes \\ 0 \end{matrix} T^*M)$, appelé champ de tenseurs (symétriques d'ordre 2)

d'Einstein [9]¹⁴⁴. Le terme G est utilisé car dans le cas où $m = 4$ il représente la gravitation. On a donc :

$$\diamond G_{il} = R_{il} - K g_{il} \text{ [13]}^{145} \text{ et [21]}^{146} \text{ ou :}$$

$$\diamond G_{..l}^n = R_{..l}^n - K g_{..l}^n = R_{..l}^n - \delta_{..l}^n K \text{ [8]}^{147} \text{ [13]}^{148} \text{ et [21]}^{149} \text{ ou :}$$

$$\diamond G^{nj} = R^{nj} - K g^{nj} \text{ [30]}^{150}.$$

143. p. 133 éq. (vii.99)

144. p. 497 Définition IX.8.B

145. p. 149

146. p. 132 éq. (86,4)

147. p. 246

148. p. 149

149. p. 132 grâce aux éqs. (86,3) et (86,4) étant donné que $g_{..l}^n = \delta_{..l}^n$

150. p. 307

Alors $\nabla_{e_n} G = \nabla_{e_n} \bar{R} - \nabla_{e_n} (K g) \in C^\infty(U; \overset{0}{\otimes} T^*M)$

ou $C^\infty(U; \overset{1}{\otimes} T^*M)$ ou $C^\infty(U; \overset{2}{\otimes} T^*M)$. On a :

$$\nabla_{e_n} G = \nabla_{e_n} \bar{R} - (\nabla_{e_n} K) g - K \nabla_{e_n} g.$$

Mais $\nabla_{e_n} g = 0$ par définition de la connexion riemannienne et donc :

$$\nabla_{e_n} G = \nabla_{e_n} \bar{R} - (\nabla_{e_n} K) g; \text{ soit :}$$

$$\diamond (\nabla_{e_n} G)_{.l}^n = (\nabla_{e_n} \bar{R})_{.l}^n - \delta_{.l}^n (\nabla_{e_n} K) = (\nabla_{e_n} \bar{R})_{.l}^n - \nabla_{e_l} K = 0,$$

$$\diamond (\nabla_{e_n} G)^{nj} = g^{jl} (\nabla_{e_n} G)_{.l}^n = 0.$$

D'où les *équations de conservation* :

- $(\nabla_{e_n} G)_{.l}^n = 0$ [4]¹⁵¹ [8]¹⁵² [13]¹⁵³ et [21]¹⁵⁴.
- ou $(\nabla_{e_n} G)^{nj} = 0$ [30]¹⁵⁵.

Plaçons nous maintenant en bases naturelles

On trouve de même que :

$$\diamond \tilde{G}_{ad} = \tilde{R}_{ad} - K \tilde{g}_{ad} \text{ ou :}$$

$$\diamond \tilde{G}_{.d}^f = \tilde{R}_{.d}^f - K \tilde{g}_{.d}^f = \tilde{R}_{.d}^f - \delta_{.d}^f K \text{ ou :}$$

$$\diamond \tilde{G}^{fb} = \tilde{R}^{fb} - K \tilde{g}^{fb}.$$

D'où les *équations de conservation* :

$$\bullet \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^f}} G}_{.d}^f = 0 \text{ ou :}$$

$$\bullet \text{ ou } \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^f}} G}^{fb} = 0.$$

151. p. 134 éq. (vii.101)

152. p. 246 éq. (10.10)

153. p. 149

154. p. 132 éq. (86,5)

155. p. 307 éq. (8-69)

5.3 Cas particulier des connexions riemanniennes à deux dimensions : $m = 2$

On pourra consulter [11]¹⁵⁶.

5.3.1 En base mobile

Calcul des symboles $[ij, k]$

$$\begin{aligned} [11, 1] &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{11}, \\ [11, 2] &= \partial_1 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_2 g_{11}, \\ [12, 1] &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{11} = [21, 1], \\ [12, 2] &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{22} = [21, 2], \\ [22, 1] &= \partial_2 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_1 g_{22}, \\ [22, 2] &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{22}. \end{aligned}$$

Calcul des coefficients de structure de la base mobile

$$\begin{aligned} \gamma_{1,1}^1 &= g^{11} [11, 1] + g^{12} ([11, 2] - g_{11} c_{1,2}^1 - g_{12} c_{1,2}^2), \\ \gamma_{1,1}^2 &= g^{12} [11, 1] + g^{22} ([11, 2] - g_{11} c_{1,2}^1 - g_{12} c_{1,2}^2), \\ \gamma_{1,2}^1 &= g^{11} ([12, 1] + \frac{1}{2} g_{11} c_{1,2}^1 + \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^2) + g^{12} ([12, 2] - \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^1 - \frac{1}{2} g_{22} c_{1,2}^2) - \frac{1}{2} c_{1,2}^1, \\ \gamma_{1,2}^2 &= g^{12} ([12, 1] + \frac{1}{2} g_{11} c_{1,2}^1 + \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^2) + g^{22} ([12, 2] - \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^1 - \frac{1}{2} g_{22} c_{1,2}^2) - \frac{1}{2} c_{1,2}^2, \\ \gamma_{2,1}^1 &= g^{11} ([12, 1] + \frac{1}{2} g_{11} c_{1,2}^1 + \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^2) + g^{12} ([12, 2] - \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^1 - \frac{1}{2} g_{22} c_{1,2}^2) + \frac{1}{2} c_{1,2}^1, \\ \gamma_{2,1}^2 &= g^{12} ([12, 1] + \frac{1}{2} g_{11} c_{1,2}^1 + \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^2) + g^{22} ([12, 2] - \frac{1}{2} g_{12} c_{1,2}^1 - \frac{1}{2} g_{22} c_{1,2}^2) + \frac{1}{2} c_{1,2}^2, \\ \gamma_{2,2}^1 &= g^{11} ([22, 1] + g_{12} c_{1,2}^1 + g_{22} c_{1,2}^2) + g^{12} [22, 2], \\ \gamma_{2,2}^2 &= g^{12} ([22, 1] + g_{12} c_{1,2}^1 + g_{22} c_{1,2}^2) + g^{22} [22, 2]. \end{aligned}$$

On vérifie bien que $\gamma_{i,k}^j - \gamma_{k,i}^j = c_{i,k}^j$.

Il suffit de calculer le seul nombre R_{2112} :

$$\begin{aligned} &R_{2112} \\ &= g_{11} (\partial_1 \gamma_{2,2}^1 - \partial_2 \gamma_{1,2}^1 - c_{1,2}^1 \gamma_{1,2}^1 - c_{1,2}^2 \gamma_{2,2}^1) \\ &+ \gamma_{1,1}^1 \gamma_{2,2}^1 + \gamma_{1,2}^1 \gamma_{2,2}^2 - \gamma_{1,2}^1 \gamma_{2,1}^1 - \gamma_{1,2}^2 \gamma_{2,2}^1) \\ &+ g_{12} (\partial_1 \gamma_{2,2}^2 - \partial_2 \gamma_{1,2}^2 - c_{1,2}^1 \gamma_{1,2}^2 - c_{1,2}^2 \gamma_{2,2}^2 + \gamma_{1,1}^2 \gamma_{2,2}^1 - \gamma_{1,2}^1 \gamma_{2,1}^2). \end{aligned}$$

Puis les 3 nombres $R_{1,12}^1, R_{1,12}^2, R_{2,12}^1$:

$$\begin{aligned} R_{1,12}^1 &= -g^{12} R_{2112}, \\ R_{1,12}^2 &= -g^{22} R_{2112}, \\ R_{2,12}^1 &= g^{11} R_{2112}. \end{aligned}$$

Puis le nombre $R_{2,12}^2 = -R_{1,12}^1 (= g^{12} R_{2112})$.

Champ de tenseurs de Ricci

156. pp. 293-295 §I

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -R_{1,12}^2 = g^{22} R_{2112}, \\
R_{12} &= R_{1,12}^1 = -g^{12} R_{2112} = R_{21}, \\
R_{22} &= R_{2,12}^1 = g^{11} R_{2112}.
\end{aligned}$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$:

$$\begin{aligned}
2K &\triangleq g^{il} R_{il} = g^{11} R_{11} + 2g^{12} R_{12} + g^{22} R_{22} \\
&= 2[g^{11} g^{22} - (g^{12})^2] R_{2112} = 2 \frac{R_{2112}}{g}.
\end{aligned}$$

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K : $K = \frac{R_{2112}}{g}$.

5.3.2 En base naturelle

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11,1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{11,2} &= \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{12,1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^2} = \Gamma_{21,1}, \\
\Gamma_{12,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^1} = \Gamma_{21,2}, \\
\Gamma_{22,1} &= \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{22,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

Calcul des symboles de Christoffel de 2^e espèce

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,1}^1 &= \tilde{g}^{11} \Gamma_{11,1} + \tilde{g}^{12} \Gamma_{11,2}, \\
\Gamma_{1,1}^2 &= \tilde{g}^{12} \Gamma_{11,1} + \tilde{g}^{22} \Gamma_{11,2}, \\
\Gamma_{1,2}^1 &= \tilde{g}^{11} \Gamma_{12,1} + \tilde{g}^{12} \Gamma_{12,2} = \Gamma_{2,1}^1, \\
\Gamma_{1,2}^2 &= \tilde{g}^{12} \Gamma_{12,1} + \tilde{g}^{22} \Gamma_{12,2} = \Gamma_{2,1}^2, \\
\Gamma_{2,2}^1 &= \tilde{g}^{11} \Gamma_{22,1} + \tilde{g}^{12} \Gamma_{22,2}, \\
\Gamma_{2,2}^2 &= \tilde{g}^{12} \Gamma_{22,1} + \tilde{g}^{22} \Gamma_{22,2}.
\end{aligned}$$

$$\text{On a } \Gamma_{1,1}^1 + \Gamma_{1,2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{|\tilde{g}|}) \text{ et } \Gamma_{2,1}^1 + \Gamma_{2,2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{|\tilde{g}|}).$$

Il suffit de calculer le seul nombre \tilde{R}_{2112} :

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}_{2112} \\
&= \tilde{g}_{11} \left[\frac{\partial \Gamma_{2,2}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1,2}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{2,2}^1 (\Gamma_{1,1}^1 - \Gamma_{1,2}^2) + \Gamma_{1,2}^1 (\Gamma_{2,2}^2 - \Gamma_{1,2}^1) \right] \\
&+ \tilde{g}_{12} \left[\frac{\partial \Gamma_{2,2}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1,2}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{2,2}^1 (\Gamma_{1,1}^2 - \Gamma_{1,2}^1) + \Gamma_{1,2}^1 (\Gamma_{2,2}^1 - \Gamma_{1,2}^2) \right] \\
&= \tilde{g}_{11} \left[\frac{\partial \Gamma_{2,2}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1,2}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{2,2}^1 (\Gamma_{1,1}^1 - \Gamma_{1,2}^2) + \Gamma_{1,2}^1 (\Gamma_{2,2}^2 - \Gamma_{1,2}^1) \right] \\
&+ \tilde{g}_{12} \left[\frac{\partial \Gamma_{2,2}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{1,2}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{2,2}^1 \Gamma_{1,1}^2 - \Gamma_{1,2}^1 \Gamma_{1,2}^2 \right].
\end{aligned}$$

Puis les 3 nombres $\tilde{R}_{1,12}^1$, $\tilde{R}_{1,12}^2$, $\tilde{R}_{2,12}^1$:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{1.12}^1 &= -\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2112} \\ \tilde{R}_{1.12}^2 &= -\tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2112} \\ \tilde{R}_{2.12}^1 &= \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2112}\end{aligned}$$

Puis le nombre $\tilde{R}_{2.12}^2 = -\tilde{R}_{1.12}^1 (= \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2112})$.

Champ de tenseurs de Ricci

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{11} &= -\tilde{R}_{1.12}^2 = \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2112}, \\ \tilde{R}_{12} &= \tilde{R}_{1.12}^1 = -\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2112} = \tilde{R}_{21}, \\ \tilde{R}_{22} &= \tilde{R}_{2.12}^1 = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2112}.\end{aligned}$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$:

$$\begin{aligned}2K &\triangleq \tilde{g}^{il} \tilde{R}_{il} = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{11} + 2\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{12} + \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{22} \\ &= 2[\tilde{g}^{11} \tilde{g}^{22} - (\tilde{g}^{12})^2] \tilde{R}_{2112} = 2 \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}}\end{aligned}$$

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K : $K = \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}}$.

5.3.3 Passage entre les bases mobile et naturelle

Si on connaît les $R_{i.kl}^j$ ou les $\tilde{R}_{a.cd}^b$ le plus rapide est de calculer respectivement les $\tilde{R}_{a.cd}^b$ et les $R_{i.kl}^j$ grâce aux formules de changement de bases :

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{a.cd}^b &= \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i.kl}^j, \\ R_{i.kl}^j &= \tilde{e}_i^a \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_k^c \tilde{e}_l^d \tilde{R}_{a.cd}^b.\end{aligned}$$

5.3.4 Remarque dans ce cas particulier $m = 2$

On constate que $\bar{R} = K g$ et donc $G = 0$.

5.4 Cas particulier des connexions riemanniennes à trois dimensions : $m = 3$

On pourra consulter [11]¹⁵⁷

5.4.1 En base mobile

Calcul des symboles $[ij, k]$

157. p. 295 § II

$$\begin{aligned}
[11, 1] &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{11}, \\
[11, 2] &= \partial_1 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_2 g_{11}, \\
[11, 3] &= \partial_1 g_{13} - \frac{1}{2} \partial_3 g_{11}, \\
[12, 1] &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{11} = [21, 1], \\
[12, 2] &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{22} = [21, 2], \\
[12, 3] &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) = [21, 3], \\
[13, 1] &= \frac{1}{2} \partial_3 g_{11} = [31, 1], \\
[13, 2] &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{23} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{13}) = [31, 2], \\
[13, 3] &= \frac{1}{2} \partial_1 g_{33} = [31, 3], \\
[22, 1] &= \partial_2 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_1 g_{22}, \\
[22, 2] &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{22}, \\
[22, 3] &= \partial_2 g_{23} - \frac{1}{2} \partial_3 g_{22}, \\
[23, 1] &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{13} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = [32, 1], \\
[23, 2] &= \frac{1}{2} \partial_3 g_{22} = [32, 2], \\
[23, 3] &= \frac{1}{2} \partial_2 g_{33} = [32, 3], \\
[33, 1] &= \partial_3 g_{13} - \frac{1}{2} \partial_1 g_{33}, \\
[33, 2] &= \partial_3 g_{23} - \frac{1}{2} \partial_2 g_{33}, \\
[33, 3] &= \frac{1}{2} \partial_3 g_{33}.
\end{aligned}$$

Calcul des coefficients de structure de la base mobile

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,1}^1 &= g^{1l} [11, l] - g_{1m} g^{1l} c_{1,l}^m, \\
\gamma_{1,1}^2 &= g^{2l} [11, l] - g_{1m} g^{2l} c_{1,l}^m, \\
\gamma_{1,1}^3 &= g^{3l} [11, l] - g_{1m} g^{3l} c_{1,l}^m, \\
\gamma_{1,2}^1 &= g^{1l} [12, l] - \frac{1}{2} (g_{1m} g^{1l} c_{2,l}^m + g_{2m} g^{1l} c_{1,l}^m - c_{1,2}^1), \\
\gamma_{1,2}^2 &= g^{2l} [12, l] - \frac{1}{2} (g_{1m} g^{2l} c_{2,l}^m + g_{2m} g^{2l} c_{1,l}^m - c_{1,2}^2), \\
\gamma_{1,2}^3 &= g^{3l} [12, l] - \frac{1}{2} (g_{1m} g^{3l} c_{2,l}^m + g_{2m} g^{3l} c_{1,l}^m - c_{1,2}^3), \\
\gamma_{1,3}^1 &= g^{1l} [13, l] - \frac{1}{2} (g_{1m} g^{1l} c_{3,l}^m + g_{3m} g^{1l} c_{1,l}^m - c_{1,3}^1), \\
\gamma_{1,3}^2 &= g^{2l} [13, l] - \frac{1}{2} (g_{1m} g^{2l} c_{3,l}^m + g_{3m} g^{2l} c_{1,l}^m - c_{1,3}^2), \\
\gamma_{1,3}^3 &= g^{3l} [13, l] - \frac{1}{2} (g_{1m} g^{3l} c_{3,l}^m + g_{3m} g^{3l} c_{1,l}^m - c_{1,3}^3), \\
\gamma_{2,1}^1 &= g^{1l} [12, l] - \frac{1}{2} (g_{2m} g^{1l} c_{1,l}^m + g_{1m} g^{1l} c_{2,l}^m + c_{1,2}^1), \\
\gamma_{2,1}^2 &= g^{2l} [12, l] - \frac{1}{2} (g_{2m} g^{2l} c_{1,l}^m + g_{1m} g^{2l} c_{2,l}^m + c_{1,2}^2), \\
\gamma_{2,1}^3 &= g^{3l} [12, l] - \frac{1}{2} (g_{2m} g^{3l} c_{1,l}^m + g_{1m} g^{3l} c_{2,l}^m + c_{1,2}^3), \\
\gamma_{2,2}^1 &= g^{1l} [22, l] - g_{2m} g^{1l} c_{2,l}^m, \\
\gamma_{2,2}^2 &= g^{2l} [22, l] - g_{2m} g^{2l} c_{2,l}^m, \\
\gamma_{2,2}^3 &= g^{3l} [22, l] - g_{2m} g^{3l} c_{2,l}^m, \\
\gamma_{2,3}^1 &= g^{1l} [23, l] - \frac{1}{2} (g_{2m} g^{1l} c_{3,l}^m + g_{3m} g^{1l} c_{2,l}^m - c_{2,3}^1), \\
\gamma_{2,3}^2 &= g^{2l} [23, l] - \frac{1}{2} (g_{2m} g^{2l} c_{3,l}^m + g_{3m} g^{2l} c_{2,l}^m - c_{2,3}^2), \\
\gamma_{2,3}^3 &= g^{3l} [23, l] - \frac{1}{2} (g_{2m} g^{3l} c_{3,l}^m + g_{3m} g^{3l} c_{2,l}^m - c_{2,3}^3), \\
\gamma_{3,1}^1 &= g^{1l} [13, l] - \frac{1}{2} (g_{3m} g^{1l} c_{1,l}^m + g_{1m} g^{1l} c_{3,l}^m + c_{1,3}^1), \\
\gamma_{3,1}^2 &= g^{2l} [13, l] - \frac{1}{2} (g_{3m} g^{2l} c_{1,l}^m + g_{1m} g^{2l} c_{3,l}^m + c_{1,3}^2), \\
\gamma_{3,1}^3 &= g^{3l} [13, l] - \frac{1}{2} (g_{3m} g^{3l} c_{1,l}^m + g_{1m} g^{3l} c_{3,l}^m + c_{1,3}^3), \\
\gamma_{3,2}^1 &= g^{1l} [23, l] - \frac{1}{2} (g_{3m} g^{1l} c_{2,l}^m + g_{2m} g^{1l} c_{3,l}^m + c_{2,3}^1), \\
\gamma_{3,2}^2 &= g^{2l} [23, l] - \frac{1}{2} (g_{3m} g^{2l} c_{2,l}^m + g_{2m} g^{2l} c_{3,l}^m + c_{2,3}^2), \\
\gamma_{3,2}^3 &= g^{3l} [23, l] - \frac{1}{2} (g_{3m} g^{3l} c_{2,l}^m + g_{2m} g^{3l} c_{3,l}^m + c_{2,3}^3), \\
\gamma_{3,3}^1 &= g^{1l} [33, l] - g_{3m} g^{1l} c_{3,l}^m, \\
\gamma_{3,3}^2 &= g^{2l} [33, l] - g_{3m} g^{2l} c_{3,l}^m, \\
\gamma_{3,3}^3 &= g^{3l} [33, l] - g_{3m} g^{3l} c_{3,l}^m.
\end{aligned}$$

Il suffit de calculer les 6 nombres R_{2112} , R_{2113} , R_{2123} , R_{3113} , R_{3123} , R_{3223} :

$$\begin{aligned}
& R_{2112} \\
&= g_{11}[\partial_1 \gamma_{2.2}^1 - \partial_2 \gamma_{1.2}^1 - c_{1.2}^m \gamma_{m.2}^1 + \gamma_{1.m}^1 \gamma_{2.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{2.m}^1] \\
&+ g_{12}[\partial_1 \gamma_{2.2}^2 - \partial_2 \gamma_{1.2}^2 - c_{1.2}^m \gamma_{m.2}^2 + \gamma_{1.m}^2 \gamma_{2.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{2.m}^2] \\
&+ g_{13}[\partial_1 \gamma_{2.2}^3 - \partial_2 \gamma_{1.2}^3 - c_{1.2}^m \gamma_{m.2}^3 + \gamma_{1.m}^3 \gamma_{2.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{2.m}^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{2113} \\
&= g_{11}[\partial_1 \gamma_{3.2}^1 - \partial_3 \gamma_{1.2}^1 - c_{1.3}^m \gamma_{m.2}^1 + \gamma_{1.m}^1 \gamma_{3.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{3.m}^1] \\
&+ g_{12}[\partial_1 \gamma_{3.2}^2 - \partial_3 \gamma_{1.2}^2 - c_{1.3}^m \gamma_{m.2}^2 + \gamma_{1.m}^2 \gamma_{3.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{3.m}^2] \\
&+ g_{13}[\partial_1 \gamma_{3.2}^3 - \partial_3 \gamma_{1.2}^3 - c_{1.3}^m \gamma_{m.2}^3 + \gamma_{1.m}^3 \gamma_{3.2}^m - \gamma_{1.2}^m \gamma_{3.m}^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{2123} \\
&= g_{11}[\partial_2 \gamma_{3.2}^1 - \partial_3 \gamma_{2.2}^1 - c_{2.3}^m \gamma_{m.2}^1 + \gamma_{2.m}^1 \gamma_{3.2}^m - \gamma_{2.2}^m \gamma_{3.m}^1] \\
&+ g_{12}[\partial_2 \gamma_{3.2}^2 - \partial_3 \gamma_{2.2}^2 - c_{2.3}^m \gamma_{m.2}^2 + \gamma_{2.m}^2 \gamma_{3.2}^m - \gamma_{2.2}^m \gamma_{3.m}^2] \\
&+ g_{13}[\partial_2 \gamma_{3.2}^3 - \partial_3 \gamma_{2.2}^3 - c_{2.3}^m \gamma_{m.2}^3 + \gamma_{2.m}^3 \gamma_{3.2}^m - \gamma_{2.2}^m \gamma_{3.m}^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{3113} \\
&= g_{11}[\partial_1 \gamma_{3.3}^1 - \partial_3 \gamma_{1.3}^1 - c_{1.3}^m \gamma_{m.3}^1 + \gamma_{1.m}^1 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{1.3}^m \gamma_{3.m}^1] \\
&+ g_{12}[\partial_1 \gamma_{3.3}^2 - \partial_3 \gamma_{1.3}^2 - c_{1.3}^m \gamma_{m.3}^2 + \gamma_{1.m}^2 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{1.3}^m \gamma_{3.m}^2] \\
&+ g_{13}[\partial_1 \gamma_{3.3}^3 - \partial_3 \gamma_{1.3}^3 - c_{1.3}^m \gamma_{m.3}^3 + \gamma_{1.m}^3 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{1.3}^m \gamma_{3.m}^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{3123} \\
&= g_{11}[\partial_2 \gamma_{3.3}^1 - \partial_3 \gamma_{2.3}^1 - c_{2.3}^m \gamma_{m.3}^1 + \gamma_{2.m}^1 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{2.3}^m \gamma_{3.m}^1] \\
&+ g_{12}[\partial_2 \gamma_{3.3}^2 - \partial_3 \gamma_{2.3}^2 - c_{2.3}^m \gamma_{m.3}^2 + \gamma_{2.m}^2 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{2.3}^m \gamma_{3.m}^2] \\
&+ g_{13}[\partial_2 \gamma_{3.3}^3 - \partial_3 \gamma_{2.3}^3 - c_{2.3}^m \gamma_{m.3}^3 + \gamma_{2.m}^3 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{2.3}^m \gamma_{3.m}^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{3223} \\
&= g_{12}[\partial_2 \gamma_{3.3}^1 - \partial_3 \gamma_{2.3}^1 - c_{2.3}^m \gamma_{m.3}^1 + \gamma_{2.m}^1 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{2.3}^m \gamma_{3.m}^1] \\
&+ g_{22}[\partial_2 \gamma_{3.3}^2 - \partial_3 \gamma_{2.3}^2 - c_{2.3}^m \gamma_{m.3}^2 + \gamma_{2.m}^2 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{2.3}^m \gamma_{3.m}^2] \\
&+ g_{23}[\partial_2 \gamma_{3.3}^3 - \partial_3 \gamma_{2.3}^3 - c_{2.3}^m \gamma_{m.3}^3 + \gamma_{2.m}^3 \gamma_{3.3}^m - \gamma_{2.3}^m \gamma_{3.m}^3]
\end{aligned}$$

Puis les 21 nombres :

$$R_{1.12}^1 = g^{1m} R_{1m12} = -g^{12} R_{2112} - g^{13} R_{2113}$$

$$R_{1.12}^2 = g^{2m} R_{1m12} = -g^{22} R_{2112} - g^{23} R_{2113}$$

$$R_{1.12}^3 = g^{3m} R_{1m12} = -g^{23} R_{2112} - g^{33} R_{2113}$$

$$R_{2.12}^1 = g^{1m} R_{2m12} = g^{11} R_{2112} - g^{13} R_{2123}$$

$$R_{2.12}^2 = g^{2m} R_{2m12} = g^{12} R_{2112} - g^{23} R_{2123}$$

$$R_{2.12}^3 = g^{3m} R_{2m12} = g^{13} R_{2112} - g^{33} R_{2123}$$

$$R_{3.12}^1 = g^{1m} R_{3m12} = g^{11} R_{2113} + g^{12} R_{2123}$$

$$R_{3.12}^2 = g^{2m} R_{3m12} = g^{12} R_{2113} + g^{22} R_{2123}$$

$$R_{1.13}^1 = g^{1m} R_{1m13} = -g^{12} R_{2113} - g^{13} R_{3113}$$

$$R_{1.13}^2 = g^{2m} R_{1m13} = -g^{22} R_{2113} - g^{23} R_{3113}$$

$$R_{1.13}^3 = g^{3m} R_{1m13} = -g^{23} R_{2113} - g^{33} R_{3113}$$

$$\begin{aligned} R_{2,13}^1 &= g^{1m} R_{2m13} = g^{11} R_{2113} - g^{13} R_{3123} \\ R_{2,13}^2 &= g^{2m} R_{2m13} = g^{12} R_{2113} - g^{23} R_{3123} \\ R_{2,13}^3 &= g^{3m} R_{2m13} = g^{13} R_{2113} - g^{33} R_{3123} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{3,13}^1 &= g^{1m} R_{3m13} = g^{11} R_{3113} + g^{12} R_{3123} \\ R_{3,13}^2 &= g^{2m} R_{3m13} = g^{12} R_{3113} + g^{22} R_{3123} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2,23}^1 &= g^{1m} R_{2m23} = g^{11} R_{2123} - g^{13} R_{3223} \\ R_{2,23}^2 &= g^{2m} R_{2m23} = g^{12} R_{2123} - g^{23} R_{3223} \\ R_{2,23}^3 &= g^{3m} R_{2m23} = g^{13} R_{2123} - g^{33} R_{3223} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{3,23}^1 &= g^{1m} R_{3m23} = g^{11} R_{3123} + g^{12} R_{3223} \\ R_{3,23}^2 &= g^{2m} R_{3m23} = g^{12} R_{3123} + g^{22} R_{3223} \end{aligned}$$

Puis les 3 nombres :

$$\begin{aligned} R_{1,23}^1 &= R_{2,13}^1 - R_{3,12}^1 (= g^{1m} R_{1m23} = -g^{12} R_{2123} - g^{13} R_{3123}) \\ R_{1,23}^2 &= R_{2,13}^2 - R_{3,12}^2 (= g^{2m} R_{1m23} = -g^{22} R_{2123} - g^{23} R_{3123}) \\ R_{1,23}^3 &= R_{2,13}^3 - R_{3,12}^3 (= g^{3m} R_{1m23} = -g^{23} R_{2123} - g^{33} R_{3123}) \end{aligned}$$

Puis les 3 nombres :

$$\begin{aligned} R_{3,12}^3 &= -R_{1,12}^1 - R_{2,12}^2 (= g^{3m} R_{3m12} = g^{13} R_{2113} + g^{23} R_{2123}) \\ R_{3,13}^3 &= -R_{1,13}^1 - R_{2,13}^2 (= g^{3m} R_{3m13} = g^{13} R_{3113} + g^{23} R_{3123}) \\ R_{3,23}^3 &= -R_{1,23}^1 - R_{2,23}^2 (= g^{3m} R_{3m23} = g^{13} R_{3123} + g^{23} R_{3223}) \end{aligned}$$

Champ de tenseurs de Ricci

$$\begin{aligned} R_{11} &= -R_{1,12}^2 - R_{1,13}^3 = g^{22} R_{2112} + 2g^{23} R_{2113} + g^{33} R_{3113}, \\ R_{12} &= R_{1,12}^1 - R_{1,23}^3 = -g^{12} R_{2112} - g^{13} R_{2113} + g^{23} R_{2123} + g^{33} R_{3123} = R_{21}, \\ R_{13} &= R_{1,13}^1 + R_{1,23}^2 = -g^{12} R_{2113} - g^{22} R_{2123} - g^{13} R_{3113} - g^{23} R_{3123} = R_{31}, \\ R_{22} &= R_{2,12}^1 - R_{2,23}^3 = g^{11} R_{2112} - 2g^{13} R_{2123} + g^{33} R_{3223}, \\ R_{23} &= R_{2,13}^1 + R_{2,23}^2 = g^{11} R_{2113} + g^{12} R_{2123} - g^{13} R_{3123} - g^{23} R_{3223} = R_{32}, \\ R_{33} &= R_{3,13}^1 + R_{3,23}^2 = g^{11} R_{3113} + 2g^{12} R_{3123} + g^{22} R_{3223}. \end{aligned}$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$

$$\begin{aligned} 2K &\triangleq g^{il} R_{il} \\ &= g^{11} R_{11} + 2g^{12} R_{12} + 2g^{13} R_{13} + g^{22} R_{22} + 2g^{23} R_{23} + g^{33} R_{33} \\ &= g^{11} (g^{22} R_{2112} + 2g^{23} R_{2113} + g^{33} R_{3113}) \\ &\quad + 2g^{12} (-g^{12} R_{2112} - g^{13} R_{2113} + g^{23} R_{2123} + g^{33} R_{3123}) \\ &\quad + 2g^{13} (-g^{12} R_{2113} - g^{13} R_{3113} - g^{22} R_{2123} - g^{23} R_{3123}) \\ &\quad + g^{22} (g^{11} R_{2112} - 2g^{13} R_{2123} + g^{33} R_{3223}) \\ &\quad + 2g^{23} (g^{11} R_{2113} - g^{13} R_{3123} + g^{12} R_{2123} - g^{23} R_{3223}) \\ &\quad + g^{33} (g^{11} R_{3113} + 2g^{12} R_{3123} + g^{22} R_{3223}) \end{aligned}$$

$$= 2 [g^{11} g^{22} - (g^{12})^2] R_{2112} + 4 [g^{11} g^{23} - g^{12} g^{13}] R_{2113} + 2 [g^{11} g^{33} - (g^{13})^2] R_{3113} \\ + 4 [g^{12} g^{23} - g^{13} g^{22}] R_{2123} + 4 [g^{12} g^{33} - g^{13} g^{23}] R_{3123} + 2 [g^{22} g^{33} - (g^{23})^2] R_{3223}$$

Mais $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ et par conséquent :

$$g^{22} g^{33} - (g^{23})^2 = \frac{g_{11}}{g}, \\ g^{12} g^{33} - g^{13} g^{23} = -\frac{g_{12}}{g}, \\ g^{12} g^{23} - g^{13} g^{22} = \frac{g_{13}}{g}, \\ g^{11} g^{33} - (g^{13})^2 = \frac{g_{22}}{g}, \\ g^{11} g^{23} - g^{12} g^{13} = -\frac{g_{23}}{g}, \\ g^{11} g^{22} - (g^{12})^2 = \frac{g_{33}}{g}. \text{ Et, par conséquent :}$$

$$2K = \frac{2}{g} (g_{33} R_{2112} - 2g_{23} R_{2113} + 2g_{13} R_{2123} + g_{22} R_{3113} - 2g_{12} R_{3123} + g_{11} R_{3223}).$$

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K

$$K = \frac{1}{g} (g_{33} R_{2112} - 2g_{23} R_{2113} + 2g_{13} R_{2123} + g_{22} R_{3113} - 2g_{12} R_{3123} + g_{11} R_{3223}).$$

Remarque : le champ de tenseurs de Ricci suffit à déterminer le champ de tenseurs de courbure [11]¹⁵⁸. En effet :

$$R_{imkl} = g_{il} R_{mk} - g_{ik} R_{ml} + g_{mk} R_{il} - g_{ml} R_{ik} + K (g_{ml} g_{ik} - g_{mk} g_{il}) \text{ i.e. :} \\ R_{2112} = g_{22} R_{11} - 2g_{12} R_{12} + g_{11} R_{22} + K [(g_{12})^2 - g_{11} g_{22}], \\ R_{2113} = g_{23} R_{11} - g_{12} R_{13} + g_{11} R_{23} - g_{13} R_{12} + K (g_{13} g_{12} - g_{11} g_{23}), \\ R_{2123} = g_{23} R_{12} - g_{22} R_{13} + g_{12} R_{23} - g_{13} R_{22} + K (g_{13} g_{22} - g_{12} g_{23}), \\ R_{3113} = g_{33} R_{11} - 2g_{13} R_{13} + g_{11} R_{33} + K [(g_{13})^2 - g_{11} g_{33}], \\ R_{3123} = g_{33} R_{12} - g_{23} R_{13} + g_{12} R_{33} - g_{13} R_{23} + K (g_{13} g_{23} - g_{12} g_{33}), \\ R_{3223} = g_{33} R_{22} - 2g_{23} R_{23} + g_{22} R_{33} + K [(g_{23})^2 - g_{22} g_{33}].$$

5.4.2 En base naturelle

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce

$$\Gamma_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{11,2} = \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^2}, \\ \Gamma_{11,3} = \frac{\partial \tilde{g}_{13}}{\partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^3}, \\ \Gamma_{12,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^2} = \Gamma_{21,1}, \\ \Gamma_{12,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^1} = \Gamma_{21,2}, \\ \Gamma_{12,3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{g}_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial x^3} \right) = \Gamma_{21,3}, \\ \Gamma_{13,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial x^3} = \Gamma_{31,1},$$

158. p. 295 éq. (18)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13,2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{g}_{13}}{\partial x^2} \right) = \Gamma_{31,2}, \\
\Gamma_{13,3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{33}}{\partial x^1} = \Gamma_{31,3}, \\
\Gamma_{22,1} &= \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{22,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{22,3} &= \frac{\partial \tilde{g}_{23}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^3}, \\
\Gamma_{23,1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{g}_{23}}{\partial x^1} \right) = \Gamma_{32,1}, \\
\Gamma_{23,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^3} = \Gamma_{32,2}, \\
\Gamma_{23,3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{33}}{\partial x^2} = \Gamma_{32,3}, \\
\Gamma_{33,1} &= \frac{\partial \tilde{g}_{13}}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{33}}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{33,2} &= \frac{\partial \tilde{g}_{23}}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{33}}{\partial x^2}, \\
\Gamma_{33,3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{33}}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

Calcul des symboles de Christoffel de 2^e espèce

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,1}^1 &= \tilde{g}^{1l} \Gamma_{11,l}, \\
\Gamma_{1,1}^2 &= \tilde{g}^{2l} \Gamma_{11,l}, \\
\Gamma_{1,1}^3 &= \tilde{g}^{3l} \Gamma_{11,l}, \\
\Gamma_{1,2}^1 &= \tilde{g}^{1l} \Gamma_{12,l} = \Gamma_{2,1}^1, \\
\Gamma_{1,2}^2 &= \tilde{g}^{2l} \Gamma_{12,l} = \Gamma_{2,1}^2, \\
\Gamma_{1,2}^3 &= \tilde{g}^{3l} \Gamma_{12,l} = \Gamma_{2,1}^3, \\
\Gamma_{1,3}^1 &= \tilde{g}^{1l} \Gamma_{13,l} = \Gamma_{3,1}^1, \\
\Gamma_{1,3}^2 &= \tilde{g}^{2l} \Gamma_{13,l} = \Gamma_{3,1}^2, \\
\Gamma_{1,3}^3 &= \tilde{g}^{3l} \Gamma_{13,l} = \Gamma_{3,1}^3, \\
\Gamma_{2,2}^1 &= \tilde{g}^{1l} \Gamma_{22,l}, \\
\Gamma_{2,2}^2 &= \tilde{g}^{2l} \Gamma_{22,l}, \\
\Gamma_{2,2}^3 &= \tilde{g}^{3l} \Gamma_{22,l}, \\
\Gamma_{2,3}^1 &= \tilde{g}^{1l} \Gamma_{23,l} = \Gamma_{3,2}^1, \\
\Gamma_{2,3}^2 &= \tilde{g}^{2l} \Gamma_{23,l} = \Gamma_{3,2}^2, \\
\Gamma_{2,3}^3 &= \tilde{g}^{3l} \Gamma_{23,l} = \Gamma_{3,2}^3, \\
\Gamma_{3,3}^1 &= \tilde{g}^{1l} \Gamma_{33,l}, \\
\Gamma_{3,3}^2 &= \tilde{g}^{2l} \Gamma_{33,l}, \\
\Gamma_{3,3}^3 &= \tilde{g}^{3l} \Gamma_{33,l}.
\end{aligned}$$

On a $\Gamma_{1,1}^1 + \Gamma_{1,2}^2 + \Gamma_{1,3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{|\tilde{g}|})$, $\Gamma_{2,1}^1 + \Gamma_{2,2}^2 + \Gamma_{2,3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{|\tilde{g}|})$
et $\Gamma_{3,1}^1 + \Gamma_{3,2}^2 + \Gamma_{3,3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^3} (\ln \sqrt{|\tilde{g}|})$.

Il suffit de calculer les 6 nombres \tilde{R}_{2112} , \tilde{R}_{2113} , \tilde{R}_{2123} , \tilde{R}_{3113} , \tilde{R}_{3123} , \tilde{R}_{3223} :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{3.12}^1 &= \tilde{g}^{1e} \tilde{R}_{3e12} = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2123} \\
\tilde{R}_{3.12}^2 &= \tilde{g}^{2e} \tilde{R}_{3e12} = \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2123} \\
\tilde{R}_{1.13}^1 &= \tilde{g}^{1e} \tilde{R}_{1e13} = -\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3113} \\
\tilde{R}_{1.13}^2 &= \tilde{g}^{2e} \tilde{R}_{1e13} = -\tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3113} \\
\tilde{R}_{1.13}^3 &= \tilde{g}^{3e} \tilde{R}_{1e13} = -\tilde{g}^{23} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3113} \\
\tilde{R}_{2.13}^1 &= \tilde{g}^{1e} \tilde{R}_{2e13} = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3123} \\
\tilde{R}_{2.13}^2 &= \tilde{g}^{2e} \tilde{R}_{2e13} = \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3123} \\
\tilde{R}_{2.13}^3 &= \tilde{g}^{3e} \tilde{R}_{2e13} = \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3123} \\
\tilde{R}_{3.13}^1 &= \tilde{g}^{1e} \tilde{R}_{3e13} = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{3113} + \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{3123} \\
\tilde{R}_{3.13}^2 &= \tilde{g}^{2e} \tilde{R}_{3e13} = \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{3113} + \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{3123} \\
\tilde{R}_{2.23}^1 &= \tilde{g}^{1e} \tilde{R}_{3e23} = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3223} \\
\tilde{R}_{2.23}^2 &= \tilde{g}^{2e} \tilde{R}_{2e23} = \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3223} \\
\tilde{R}_{2.23}^3 &= \tilde{g}^{3e} \tilde{R}_{2e23} = \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3223} \\
\tilde{R}_{3.23}^1 &= \tilde{g}^{1e} \tilde{R}_{3e23} = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{3223} \\
\tilde{R}_{3.23}^2 &= \tilde{g}^{2e} \tilde{R}_{3e23} = \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{3223}
\end{aligned}$$

Puis les 3 nombres :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1.23}^1 &= \tilde{R}_{2.13}^1 - \tilde{R}_{3.12}^1 (= \tilde{g}^{1e} \tilde{R}_{1e23} = -\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3123}) \\
\tilde{R}_{1.23}^2 &= \tilde{R}_{2.13}^2 - \tilde{R}_{3.12}^2 (= \tilde{g}^{2e} \tilde{R}_{1e23} = -\tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3123}) \\
\tilde{R}_{1.23}^3 &= \tilde{R}_{2.13}^3 - \tilde{R}_{3.12}^3 (= \tilde{g}^{3e} \tilde{R}_{1e23} = -\tilde{g}^{23} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3123})
\end{aligned}$$

Puis les 3 nombres :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{3.12}^3 &= -\tilde{R}_{1.12}^1 - \tilde{R}_{2.12}^2 (= \tilde{g}^{3e} \tilde{R}_{3e12} = \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{2123}) \\
\tilde{R}_{3.13}^3 &= -\tilde{R}_{1.13}^1 - \tilde{R}_{2.13}^2 (= \tilde{g}^{3e} \tilde{R}_{3e13} = \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3113} + \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3123}) \\
\tilde{R}_{3.23}^3 &= -\tilde{R}_{1.23}^1 - \tilde{R}_{2.23}^2 (= \tilde{g}^{3e} \tilde{R}_{3e23} = \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3223})
\end{aligned}$$

Champ de tenseurs de Ricci

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{11} &= -\tilde{R}_{1.12}^2 - \tilde{R}_{1.13}^3 = \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2112} + 2\tilde{g}^{23} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3113}, \\
\tilde{R}_{12} &= \tilde{R}_{1.12}^1 - \tilde{R}_{1.23}^3 = -\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2112} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3123} = \tilde{R}_{21}, \\
\tilde{R}_{13} &= \tilde{R}_{1.13}^1 + \tilde{R}_{1.23}^2 = -\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3113} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3123} = \tilde{R}_{31}, \\
\tilde{R}_{22} &= \tilde{R}_{2.12}^1 - \tilde{R}_{2.23}^3 = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2112} - 2\tilde{g}^{13} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3223}, \\
\tilde{R}_{23} &= \tilde{R}_{2.13}^1 + \tilde{R}_{2.23}^2 = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3123} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3223} = \tilde{R}_{32}, \\
\tilde{R}_{33} &= \tilde{R}_{3.13}^1 + \tilde{R}_{3.23}^2 = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{3113} + 2\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{3223}.
\end{aligned}$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$

$$\begin{aligned}
2K &\triangleq \tilde{g}^{il} \tilde{R}_{il} = \tilde{g}^{11} \tilde{R}_{11} + 2\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{12} + 2\tilde{g}^{13} \tilde{R}_{13} + \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{22} + 2\tilde{g}^{23} \tilde{R}_{23} + \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{33} \\
&= \tilde{g}^{11} (\tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2112} + 2\tilde{g}^{23} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3113}) \\
&+ 2\tilde{g}^{12} (-\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2112} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{2113} + \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3123}) \\
&+ 2\tilde{g}^{13} (-\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3113} - \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3123}) \\
&+ \tilde{g}^{22} (\tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2112} - 2\tilde{g}^{13} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}^{33} \tilde{R}_{3223}) \\
&+ 2\tilde{g}^{23} (\tilde{g}^{11} \tilde{R}_{2113} - \tilde{g}^{13} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}^{12} \tilde{R}_{2123} - \tilde{g}^{23} \tilde{R}_{3223}) \\
&+ \tilde{g}^{33} (\tilde{g}^{11} \tilde{R}_{3113} + 2\tilde{g}^{12} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}^{22} \tilde{R}_{3223}) \\
&= 2[\tilde{g}^{11} \tilde{g}^{22} - (\tilde{g}^{12})^2] \tilde{R}_{2112} + 4[\tilde{g}^{11} \tilde{g}^{23} - \tilde{g}^{12} \tilde{g}^{23}] \tilde{R}_{2113} + 2[\tilde{g}^{11} \tilde{g}^{33} - (\tilde{g}^{13})^2] \tilde{R}_{3113} \\
&+ 4[\tilde{g}^{12} \tilde{g}^{23} - \tilde{g}^{13} \tilde{g}^{22}] \tilde{R}_{2123} + 4[\tilde{g}^{12} \tilde{g}^{33} - \tilde{g}^{13} \tilde{g}^{23}] \tilde{R}_{3123} + 2[\tilde{g}^{22} \tilde{g}^{33} - (\tilde{g}^{23})^2] \tilde{R}_{3223}
\end{aligned}$$

Mais $(\tilde{g}^{ij}) = (\tilde{g}_{ij})^{-1}$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{22} \tilde{g}^{33} - (\tilde{g}^{23})^2 &= \frac{\tilde{g}_{11}}{\tilde{g}}, \quad \tilde{g}^{12} \tilde{g}^{33} - \tilde{g}^{13} \tilde{g}^{23} = -\frac{\tilde{g}_{12}}{\tilde{g}}, \quad \tilde{g}^{12} \tilde{g}^{23} - \tilde{g}^{13} \tilde{g}^{22} = \frac{\tilde{g}_{13}}{\tilde{g}}, \\
\tilde{g}^{11} \tilde{g}^{33} - (\tilde{g}^{13})^2 &= \frac{\tilde{g}_{22}}{\tilde{g}}, \quad \tilde{g}^{11} \tilde{g}^{23} - \tilde{g}^{12} \tilde{g}^{13} = -\frac{\tilde{g}_{23}}{\tilde{g}}, \quad \tilde{g}^{11} \tilde{g}^{22} - (\tilde{g}^{12})^2 = \frac{\tilde{g}_{33}}{\tilde{g}}.
\end{aligned}$$

Et, par conséquent :

$$2K = \frac{2}{\tilde{g}} (\tilde{g}_{33} \tilde{R}_{2112} - 2\tilde{g}_{23} \tilde{R}_{2113} + 2\tilde{g}_{13} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}_{22} \tilde{R}_{3113} - 2\tilde{g}_{12} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}_{11} \tilde{R}_{3223}).$$

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K

$$K = \frac{1}{\tilde{g}} (\tilde{g}_{33} \tilde{R}_{2112} - 2\tilde{g}_{23} \tilde{R}_{2113} + 2\tilde{g}_{13} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}_{22} \tilde{R}_{3113} - 2\tilde{g}_{12} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}_{11} \tilde{R}_{3223}).$$

On a également :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{mi,kl} &= \tilde{g}_{il} \tilde{R}_{mk} - \tilde{g}_{ik} \tilde{R}_{ml} + \tilde{g}_{mk} \tilde{R}_{il} - \tilde{g}_{ml} \tilde{R}_{ik} + K (\tilde{g}_{ml} \tilde{g}_{ik} - \tilde{g}_{mk} \tilde{g}_{il}) \text{ i.e. :} \\
\tilde{R}_{2112} &= \tilde{g}_{22} \tilde{R}_{11} - 2\tilde{g}_{12} \tilde{R}_{12} + \tilde{g}_{11} \tilde{R}_{22} + K [(\tilde{g}_{12})^2 - \tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22}], \\
\tilde{R}_{2113} &= \tilde{g}_{23} \tilde{R}_{11} - \tilde{g}_{12} \tilde{R}_{13} + \tilde{g}_{11} \tilde{R}_{23} - \tilde{g}_{13} \tilde{R}_{12} + K (\tilde{g}_{13} \tilde{g}_{12} - \tilde{g}_{11} \tilde{g}_{23}), \\
\tilde{R}_{2123} &= \tilde{g}_{23} \tilde{R}_{12} - \tilde{g}_{22} \tilde{R}_{13} + \tilde{g}_{12} \tilde{R}_{23} - \tilde{g}_{13} \tilde{R}_{22} + K (\tilde{g}_{13} \tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12} \tilde{g}_{23}), \\
\tilde{R}_{3113} &= \tilde{g}_{33} \tilde{R}_{11} - 2\tilde{g}_{13} \tilde{R}_{13} + \tilde{g}_{11} \tilde{R}_{33} + K [(\tilde{g}_{13})^2 - \tilde{g}_{11} \tilde{g}_{33}], \\
\tilde{R}_{3123} &= \tilde{g}_{33} \tilde{R}_{12} - \tilde{g}_{23} \tilde{R}_{13} + \tilde{g}_{12} \tilde{R}_{33} - \tilde{g}_{13} \tilde{R}_{23} + K (\tilde{g}_{13} \tilde{g}_{23} - \tilde{g}_{12} \tilde{g}_{33}), \\
\tilde{R}_{3223} &= \tilde{g}_{33} \tilde{R}_{22} - 2\tilde{g}_{23} \tilde{R}_{23} + \tilde{g}_{22} \tilde{R}_{33} + K [(\tilde{g}_{23})^2 - \tilde{g}_{22} \tilde{g}_{33}].
\end{aligned}$$

5.4.3 Passage entre les bases mobile et naturelle

Si on connaît les $R_{i,kl}^j$ ou les $\tilde{R}_{a.cd}^b$ le plus rapide est de calculer respectivement les $\tilde{R}_{a.cd}^b$ et les $R_{i,kl}^j$ grâce aux formules de changement de bases :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{a.cd}^b &= \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i,kl}^j, \\
R_{i,kl}^j &= \tilde{e}_i^a \tilde{\theta}_b^j \tilde{e}_k^c \tilde{e}_l^d \tilde{R}_{a.cd}^b.
\end{aligned}$$

Chapitre 6

Courbure d'une surface M de $N = \mathbb{R}^3$

On pourra consulter [11]¹.

Soit une surface M , variété de dimension $m = 2$, plongée dans la variété $N = \mathbb{R}^3$ de dimension $n = 3$. Et soit :

$$M \xrightarrow{f} N = \mathbb{R}^3, \text{ où :}$$
$$x \mapsto y=f(x)$$

$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$ sont des coordonnées curvilignes et $x' = \begin{bmatrix} x^{1'} = y^1 \\ x^{2'} = y^2 \end{bmatrix}$ des coordonnées cartésiennes de M .

On ne va considérer que les bases naturelles :

- *anciennes* : $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2})$ et sa duale (dx^1, dx^2) ,
- *nouvelles* : $(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}, \frac{\partial}{\partial x^{2'}})$ et sa duale $(dx^{1'}, dx^{2'})$.

6.1 Préliminaires

6.1.1 Notations

Soit :

- $f \triangleq \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix}$, avec :

1. pp. 73-146 Chapitre 2 : Théorie des surfaces

$$\begin{aligned}
y^1 &= f^1(x^1, x^2), \\
y^2 &= f^2(x^1, x^2), \\
y^3 &= \bar{f}^3(y^1, y^2) = \bar{f}^3(f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2)) = f^3(x^1, x^2).
\end{aligned}$$

Soient :

- $f_{x^1}^i \triangleq \frac{\partial y^i}{\partial x^1} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} = \frac{\partial f^i}{\partial x^1}$, $f_{x^2}^i \triangleq \frac{\partial y^i}{\partial x^2} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^2} = \frac{\partial f^i}{\partial x^2}$; $i = 1, 2, 3$ et

$$\bar{f}_{y^1}^3 \triangleq \frac{\partial \bar{f}^3}{\partial y^1}, \bar{f}_{y^2}^3 \triangleq \frac{\partial \bar{f}^3}{\partial y^2},$$

- $f_{x^1} \triangleq \begin{bmatrix} f_{x^1}^1 \\ f_{x^1}^2 \\ f_{x^1}^3 \end{bmatrix}$, $f_{x^2} \triangleq \begin{bmatrix} f_{x^2}^1 \\ f_{x^2}^2 \\ f_{x^2}^3 \end{bmatrix}$

$$\|f_{x^1}\| \triangleq \sqrt{(f_{x^1}^1)^2 + (f_{x^1}^2)^2 + (f_{x^1}^3)^2} \text{ (norme)},$$

$$\|f_{x^2}\| \triangleq \sqrt{(f_{x^2}^1)^2 + (f_{x^2}^2)^2 + (f_{x^2}^3)^2} \text{ (norme)},$$

$$\langle f_{x^1}, f_{x^2} \rangle = f_{x^1}^1 f_{x^2}^1 + f_{x^1}^2 f_{x^2}^2 + f_{x^1}^3 f_{x^2}^3 \text{ (produit scalaire)},$$

$$[f_{x^1}, f_{x^2}] \triangleq \begin{bmatrix} f_{x^1}^2 f_{x^2}^3 - f_{x^2}^2 f_{x^1}^3 \\ f_{x^1}^1 f_{x^2}^3 - f_{x^2}^1 f_{x^1}^3 \\ f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 - f_{x^2}^1 f_{x^1}^2 \end{bmatrix} \text{ (produit vectoriel)},$$

- $f_{x^1 x^1}^i \triangleq \frac{\partial^2 y^i}{\partial (x^1)^2} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial (x^1)^2} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial (x^1)^2}$, $f_{x^1 x^2}^i \triangleq \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^1 \partial x^2}$,

$$f_{x^2 x^2}^i \triangleq \frac{\partial^2 y^i}{\partial (x^2)^2} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial (x^2)^2} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial (x^2)^2}; i = 1, 2, 3 \text{ et}$$

$$\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \triangleq \frac{\partial^2 \bar{f}^3}{\partial (y^1)^2}, \bar{f}_{y^1 y^2}^3 \triangleq \frac{\partial^2 \bar{f}^3}{\partial y^1 \partial y^2}, \bar{f}_{y^2 y^2}^3 \triangleq \frac{\partial^2 \bar{f}^3}{\partial (y^2)^2},$$

$$f_{x^1 x^1} \triangleq \begin{bmatrix} f_{x^1 x^1}^1 \\ f_{x^1 x^1}^2 \\ f_{x^1 x^1}^3 \end{bmatrix}, f_{x^1 x^2} \triangleq \begin{bmatrix} f_{x^1 x^2}^1 \\ f_{x^1 x^2}^2 \\ f_{x^1 x^2}^3 \end{bmatrix}, f_{x^2 x^2} \triangleq \begin{bmatrix} f_{x^2 x^2}^1 \\ f_{x^2 x^2}^2 \\ f_{x^2 x^2}^3 \end{bmatrix}.$$

- $\bar{f}_{y^1 y^1 y^1}^3 \triangleq \frac{\partial^3 \bar{f}^3}{\partial (y^1)^3}$, $\bar{f}_{y^1 y^1 y^2}^3 \triangleq \frac{\partial^3 \bar{f}^3}{\partial (y^1)^2 \partial y^2}$, $\bar{f}_{y^1 y^2 y^2}^3 \triangleq \frac{\partial^3 \bar{f}^3}{\partial y^1 \partial (y^2)^2}$, $\bar{f}_{y^2 y^2 y^2}^3 \triangleq \frac{\partial^3 \bar{f}^3}{\partial (y^2)^3}$.

Relations

Le calcul des dérivées partielles premières composées donne :

$$\begin{bmatrix} f_{x^1}^3 \\ f_{x^2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x^1}^1 & f_{x^1}^2 \\ f_{x^2}^1 & f_{x^2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_{y^1}^3 \\ \bar{f}_{y^2}^3 \end{bmatrix}. \text{ Soit, avec } d \triangleq f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 - f_{x^2}^1 f_{x^1}^2 :$$

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{y^1}^3 \\ \bar{f}_{y^2}^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} f_{x^2}^2 & -f_{x^1}^2 \\ -f_{x^2}^1 & f_{x^1}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x^1}^3 \\ f_{x^2}^3 \end{bmatrix} \text{ et on constate que :}$$

$$[f_{x^1}, f_{x^2}] \triangleq \begin{bmatrix} -d \bar{f}_{y^1}^3 \\ -d \bar{f}_{y^2}^3 \\ d \end{bmatrix} \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned} d^2 [1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2] &= \|[f_{x^1}, f_{x^2}]\|^2 = \langle [f_{x^1}, f_{x^2}], [f_{x^1}, f_{x^2}] \rangle \\ &= \langle f_{x^1}, f_{x^2}, [f_{x^1}, f_{x^2}] \rangle = \langle f_{x^1}, [f_{x^2}, [f_{x^1}, f_{x^2}]] \rangle \\ &= \langle f_{x^1}, (\|f_{x^2}\|^2 f_{x^1} - \langle f_{x^1}, f_{x^2} \rangle f_{x^2}) \rangle \\ &= \|f_{x^1}\|^2 \|f_{x^2}\|^2 - \langle f_{x^1}, f_{x^2} \rangle^2 \text{ (on a utilisé le produit mixte, noté } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ et} \\ &\text{ la formule du double produit vectoriel).} \end{aligned}$$

Soit \tilde{g} la valeur commune à toutes les expressions précédentes et $\tilde{g}' \triangleq 1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2$; alors $\tilde{g} = d^2 \tilde{g}'$ et :

$$\frac{\partial \tilde{g}'}{\partial y^1} = 2(\bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3) \text{ et } \frac{\partial \tilde{g}'}{\partial y^2} = 2(\bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3).$$

Le calcul des dérivées partielles deuxièmes composées donne :

$$\begin{aligned} f_{x^1 x^1}^3 &= (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1 y^2}^3 f_{x^1}^2) f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^1}^1 + (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1 y^2}^3 f_{x^1}^2) f_{x^1}^2 + \bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^1}^2, \\ f_{x^1 x^2}^3 &= (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1 y^2}^3 f_{x^1}^2) f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^2}^1 + (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1 y^2}^3 f_{x^1}^2) f_{x^1}^2 + \bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^2}^2, \\ f_{x^2 x^2}^3 &= (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1 y^2}^3 f_{x^1}^2) f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1}^3 f_{x^2 x^2}^1 + (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 f_{x^1}^1 + \bar{f}_{y^1 y^2}^3 f_{x^1}^2) f_{x^1}^2 + \bar{f}_{y^1}^3 f_{x^2 x^2}^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} -\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^1}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^1 x^1}^2 + f_{x^1 x^1}^3 \\ -\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^2}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^1 x^2}^2 + f_{x^1 x^2}^3 \\ -\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^2 x^2}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^2 x^2}^2 + f_{x^2 x^2}^3 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \bar{f}_{y^1 y^1}^3 \\ \bar{f}_{y^1 y^2}^3 \\ \bar{f}_{y^2 y^2}^3 \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$M = \begin{bmatrix} (f_{x^1}^1)^2 & 2 f_{x^1}^1 f_{x^1}^2 & (f_{x^1}^2)^2 \\ f_{x^1}^1 f_{x^2}^1 & f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 + f_{x^1}^2 f_{x^2}^1 & f_{x^1}^2 f_{x^2}^2 \\ (f_{x^2}^1)^2 & 2 f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 & (f_{x^2}^2)^2 \end{bmatrix}.$$

Tous calculs faits on trouve $\det(M) = d^3$ et :

$$M^{-1} = \frac{1}{d^2} \begin{bmatrix} (f_{x^2}^2)^2 & -2 f_{x^1}^2 f_{x^2}^2 & (f_{x^1}^2)^2 \\ -f_{x^2}^1 f_{x^2}^2 & f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 + f_{x^1}^2 f_{x^2}^1 & -f_{x^1}^1 f_{x^2}^1 \\ (f_{x^2}^1)^2 & -2 f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 & (f_{x^1}^1)^2 \end{bmatrix}. \text{ Alors :}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{y^1 y^1}^3 \\ \bar{f}_{y^1 y^2}^3 \\ \bar{f}_{y^2 y^2}^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{d^3} \begin{bmatrix} (f_{x^2}^2)^2 & -2 f_{x^1}^2 f_{x^2}^2 & (f_{x^1}^2)^2 \\ -f_{x^2}^1 f_{x^2}^2 & f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 + f_{x^1}^2 f_{x^2}^1 & -f_{x^1}^1 f_{x^2}^1 \\ (f_{x^2}^1)^2 & -2 f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 & (f_{x^1}^1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^1}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^1 x^1}^2 + f_{x^1 x^1}^3 \\ -\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^2}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^1 x^2}^2 + f_{x^1 x^2}^3 \\ -\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^2 x^2}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^2 x^2}^2 + f_{x^2 x^2}^3 \end{bmatrix}.$$

On pose, en utilisant le produit mixte :

$$\begin{aligned} b_{11} &= L \triangleq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^1 x^1}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \langle [f_{x^1}, f_{x^2}], f_{x^1 x^1} \rangle \\ &= \frac{d}{\sqrt{\tilde{g}}} (-\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1 x^1}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^1 x^1}^2 + f_{x^1 x^1}^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{12} &= M \triangleq \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^1x^2}) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \langle [f_{x^1}, f_{x^2}], f_{x^1x^2} \rangle \\
&= \frac{d}{\sqrt{\bar{g}}} (-\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^1x^2}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^1x^2}^2 + f_{x^1x^2}^3), \\
b_{22} &= N \triangleq \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^2x^2}) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \langle [f_{x^1}, f_{x^2}], f_{x^2x^2} \rangle \\
&= \frac{d}{\sqrt{\bar{g}}} (-\bar{f}_{y^1}^3 f_{x^2x^2}^1 - \bar{f}_{y^2}^3 f_{x^2x^2}^2 + f_{x^2x^2}^3). \text{ Et :}
\end{aligned}$$

$$\Delta \triangleq b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 = LM - N^2.$$

On trouve, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{y^1y^1}^3 &= \frac{\sqrt{\bar{g}}}{d^3} [(f_{x^2}^2)^2 b_{11} - 2 f_{x^1}^2 f_{x^2}^2 b_{12} + (f_{x^1}^2)^2 b_{22}], \\
\bar{f}_{y^1y^2}^3 &= \frac{\sqrt{\bar{g}}}{d^3} [-f_{x^2}^1 f_{x^2}^2 b_{11} + (f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 + f_{x^1}^2 f_{x^2}^1) b_{12} - f_{x^1}^1 f_{x^1}^2 b_{22}], \\
\bar{f}_{y^2y^2}^3 &= \frac{\sqrt{\bar{g}}}{d^3} [(f_{x^2}^1)^2 b_{11} - 2 f_{x^1}^1 f_{x^2}^1 b_{12} + (f_{x^1}^1)^2 b_{22}] \text{ et, tous calculs faits :} \\
\bar{f}_{y^1y^1}^3 \bar{f}_{y^2y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1y^2}^3)^2 &= \frac{\bar{g}\Delta}{d^4}.
\end{aligned}$$

Remarque :

Si on pose $m = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} [f_{x^1}, f_{x^2}]$ on a $\|m\|^2 = \frac{1}{\bar{g}} \|[f_{x^1}, f_{x^2}]\|^2 = 1$ alors m est un vecteur unité et :

$$\begin{aligned}
b_{11} &= L = \langle m, f_{x^1x^1} \rangle, \\
b_{12} &= M = \langle m, f_{x^1x^2} \rangle, \\
b_{22} &= N = \langle m, f_{x^2x^2} \rangle.
\end{aligned}$$

6.2 Cas particulier où on utilise les coordonnées cartésiennes de la surface M

Soient $x^{1'} = y^1, x^{2'} = y^2$ les coordonnées cartésiennes de la surface M et $y^3 = \bar{f}^3(y^1, y^2)$ l'équation de cette surface. Posons :

$$\begin{aligned}
y^1 &= \bar{f}^1(y^1, y^2), \\
y^2 &= \bar{f}^2(y^1, y^2), \\
y^3 &= \bar{f}^3(y^1, y^2).
\end{aligned}$$

Soient :

$$\bullet \bar{f} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \bar{f}^3 \end{bmatrix}, \bar{f}_{y^1} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{f}_{y^1}^3 \end{bmatrix}, \bar{f}_{y^2} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{f}_{y^2}^3 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{f}_{y^1}\| \triangleq \sqrt{1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2} \text{ (norme),}$$

$$\|\bar{f}_{y^2}\| \triangleq \sqrt{1 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2} \text{ (norme),}$$

$$\langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3 \text{ (produit scalaire),}$$

$$[\bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2}] \triangleq \begin{bmatrix} -\bar{f}_{y^1}^3 \\ -\bar{f}_{y^2}^3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (produit vectoriel),}$$

$$\bullet \bar{f}_{y^1 y^1} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{f}_{y^1 y^1}^3 \end{bmatrix}, \bar{f}_{y^1 y^2} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{f}_{y^1 y^2}^3 \end{bmatrix}, \bar{f}_{y^2 y^2} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{f}_{y^2 y^2}^3 \end{bmatrix}.$$

Soit le champ de tenseurs métrique :

$g = \tilde{g}_{a'b'} dx^{a'} \otimes dx^{b'}$; $a', b' = 1, 2$ tel que, dl étant un élément de ligne de $N = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (dl)^2 &\triangleq (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 \\ &= (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (\bar{f}_{y^1}^3 dy^1 + \bar{f}_{y^2}^3 dy^2)^2 \\ &= \|\bar{f}_{y^1}\|^2 (dy^1)^2 + 2 \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle dy^1 dy^2 + \|\bar{f}_{y^2}\|^2 (dy^2)^2 \\ &= \|\bar{f}_{x^{1'}}\|^2 (dx^{1'})^2 + 2 \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle dx^{1'} dx^{2'} + \|\bar{f}_{x^{2'}}\|^2 (dx^{2'})^2. \end{aligned}$$

$(dl)^2$ est la première forme fondamentale de la surface M [11]², écrite avec les coordonnées cartésiennes.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{1'1'} &= E' = \|\bar{f}_{x^{1'}}\|^2 = \|\bar{f}_{y^1}\|^2 = 1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2, \\ \tilde{g}_{1'2'} &= F' = \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle = \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3, \\ \tilde{g}_{2'2'} &= G' = \|\bar{f}_{x^{2'}}\|^2 = \|\bar{f}_{y^2}\|^2 = 1 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}_{1'1'}}{\partial x^{1'}} &= 2 \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3, \\ \frac{\partial \tilde{g}_{1'1'}}{\partial x^{2'}} &= 2 \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3, \\ \frac{\partial \tilde{g}_{1'2'}}{\partial x^{1'}} &= \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3, \\ \frac{\partial \tilde{g}_{1'2'}}{\partial x^{2'}} &= \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3, \\ \frac{\partial \tilde{g}_{2'2'}}{\partial x^{1'}} &= 2 \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3, \\ \frac{\partial \tilde{g}_{2'2'}}{\partial x^{2'}} &= 2 \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3. \text{ Soit :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}' &\triangleq \det(\tilde{g}_{a'b'}) = \tilde{g}_{1'1'} \tilde{g}_{2'2'} - (\tilde{g}_{1'2'})^2 = E' G' - F'^2 \\ &= [1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2] [1 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2] - (\bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3)^2 = 1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2. \end{aligned}$$

On constate qu'il s'agit bien de l'expression de \tilde{g} précédente. Et soit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}^{1'1'} & \tilde{g}^{1'2'} \\ \tilde{g}^{1'2'} & \tilde{g}^{2'2'} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1'1'} & \tilde{g}_{1'2'} \\ \tilde{g}_{1'2'} & \tilde{g}_{2'2'} \end{bmatrix}^{-1}. \text{ Alors :}$$

$$\tilde{g}^{1'1'} = \frac{1}{\tilde{g}'} \tilde{g}_{2'2'}, \tilde{g}^{1'2'} = -\frac{1}{\tilde{g}'} \tilde{g}_{1'2'}, \tilde{g}^{2'2'} = \frac{1}{\tilde{g}'} \tilde{g}_{1'1'}.$$

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce

$$\begin{aligned} \Gamma_{1'1',1'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{1'1'}}{\partial x^{1'}} = \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}} \rangle = \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^1y^1} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1y^1}^3, \\ \Gamma_{1'1',2'} &= \frac{\partial \tilde{g}_{1'2'}}{\partial x^{1'}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{1'1'}}{\partial x^{2'}} = \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}} \rangle = \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^1y^1} \rangle = \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1y^1}^3, \\ \Gamma_{1'2',1'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{1'1'}}{\partial x^{2'}} = \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}} \rangle = \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^1y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1y^2}^3 = \Gamma_{2'1',1'}, \\ \Gamma_{1'2',2'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{2'2'}}{\partial x^{1'}} = \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}} \rangle = \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^1y^2} \rangle = \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1y^2}^3 = \Gamma_{2'1',2'}, \\ \Gamma_{2'2',1'} &= \frac{\partial \tilde{g}_{1'2'}}{\partial x^{2'}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{2'2'}}{\partial x^{1'}} = \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}} \rangle = \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2y^2}^3, \\ \Gamma_{2'2',2'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{2'2'}}{\partial x^{2'}} = \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}} \rangle = \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^2y^2} \rangle = \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^2y^2}^3. \end{aligned}$$

Calcul des symboles de Christoffel de 2^e espèce [11]³

$$\begin{aligned} \Gamma_{1',1'}^{1'} &= \tilde{g}^{1'1'} \Gamma_{1'1',1'} + \tilde{g}^{1'2'} \Gamma_{1'1',2'}, \\ \Gamma_{1',1'}^{2'} &= \tilde{g}^{1'2'} \Gamma_{1'1',1'} + \tilde{g}^{2'2'} \Gamma_{1'1',2'}, \\ \Gamma_{1',2'}^{1'} &= \tilde{g}^{1'1'} \Gamma_{1'2',1'} + \tilde{g}^{1'2'} \Gamma_{1'2',2'} = \Gamma_{2',1'}^{1'}, \\ \Gamma_{1',2'}^{2'} &= \tilde{g}^{1'2'} \Gamma_{1'2',1'} + \tilde{g}^{2'2'} \Gamma_{1'2',2'} = \Gamma_{2',1'}^{2'}, \\ \Gamma_{2',2'}^{1'} &= \tilde{g}^{1'1'} \Gamma_{2'2',1'} + \tilde{g}^{1'2'} \Gamma_{2'2',2'}, \\ \Gamma_{2',2'}^{2'} &= \tilde{g}^{1'2'} \Gamma_{2'2',1'} + \tilde{g}^{2'2'} \Gamma_{2'2',2'}. \text{ Soit :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}' \Gamma_{1',1'}^{1'} &= \|\bar{f}_{x^{2'}}\|^2 \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}} \rangle - \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}} \rangle \\ &= \|\bar{f}_{y^2}\|^2 \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^1y^1} \rangle - \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^1y^1} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1y^1}^3, \\ \tilde{g}' \Gamma_{1',1'}^{2'} &= \|\bar{f}_{x^{1'}}\|^2 \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}} \rangle - \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}} \rangle \\ &= \|\bar{f}_{y^1}\|^2 \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^1y^1} \rangle - \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^1y^1} \rangle = \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1y^1}^3, \\ \tilde{g}' \Gamma_{1',2'}^{1'} &= \|\bar{f}_{x^{2'}}\|^2 \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}} \rangle - \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}} \rangle \\ &= \|\bar{f}_{y^2}\|^2 \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^1y^2} \rangle - \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^1y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1y^2}^3, \\ \tilde{g}' \Gamma_{1',2'}^{2'} &= \|\bar{f}_{x^{1'}}\|^2 \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}} \rangle - \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}} \rangle \\ &= \|\bar{f}_{y^1}\|^2 \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^1y^2} \rangle - \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^1y^2} \rangle = \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1y^2}^3, \\ \tilde{g}' \Gamma_{2',2'}^{1'} &= \|\bar{f}_{x^{2'}}\|^2 \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}} \rangle - \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}} \rangle \\ &= \|\bar{f}_{y^2}\|^2 \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2y^2} \rangle - \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^2y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2y^2}^3, \\ \tilde{g}' \Gamma_{2',2'}^{2'} &= \|\bar{f}_{x^{1'}}\|^2 \langle \bar{f}_{x^{2'}}, \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}} \rangle - \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}} \rangle \langle \bar{f}_{x^{1'}}, \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}} \rangle \\ &= \|\bar{f}_{y^1}\|^2 \langle \bar{f}_{y^2}, \bar{f}_{y^2y^2} \rangle - \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2y^2} \rangle = \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^2y^2}^3. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

Remarque : on a $\Gamma_{1',1'}^{1'} + \Gamma_{1',2'}^{2'} = \frac{\partial}{\partial x^{1'}} (\ln \sqrt{\tilde{g}'})$ et $\Gamma_{2',1'}^{1'} + \Gamma_{2',2'}^{2'} = \frac{\partial}{\partial x^{2'}} (\ln \sqrt{\tilde{g}'})$.

Calcul des dérivées partielles des symboles de Christoffel de 2^e espèce

3. p. 298 éq. (26)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{x1'}^{1'}}{\partial x1'} &= \frac{\partial \Gamma_{y1'}^{1'}}{\partial y1'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3) \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} ((\bar{f}_{y^1 y^1}^3)^2 + \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^1 y^1}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x2'}^{1'}}{\partial x2'} &= \frac{\partial \Gamma_{y2'}^{1'}}{\partial y2'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^1 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x1'}^{2'}}{\partial x1'} &= \frac{\partial \Gamma_{y1'}^{2'}}{\partial y1'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^1 y^1}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x2'}^{2'}}{\partial x2'} &= \frac{\partial \Gamma_{y2'}^{2'}}{\partial y2'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^1 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x1'}^{1'}}{\partial x1'} &= \frac{\partial \Gamma_{y1'}^{1'}}{\partial y1'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^1 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x2'}^{1'}}{\partial x2'} &= \frac{\partial \Gamma_{y2'}^{1'}}{\partial y2'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} ((\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2 + \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x1'}^{2'}}{\partial x1'} &= \frac{\partial \Gamma_{y1'}^{2'}}{\partial y1'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} ((\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^1 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x2'}^{2'}}{\partial x2'} &= \frac{\partial \Gamma_{y2'}^{2'}}{\partial y2'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x1'}^{1'}}{\partial x1'} &= \frac{\partial \Gamma_{y1'}^{1'}}{\partial y1'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^1 y^2 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x2'}^{1'}}{\partial x2'} &= \frac{\partial \Gamma_{y2'}^{1'}}{\partial y2'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x1'}^{2'}}{\partial x1'} &= \frac{\partial \Gamma_{y1'}^{2'}}{\partial y1'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^1}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2 y^2}^3), \\
\frac{\partial \Gamma_{x2'}^{2'}}{\partial x2'} &= \frac{\partial \Gamma_{y2'}^{2'}}{\partial y2'} = -\frac{2}{(\bar{g}')^2} (\bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^1 y^2}^3 + \bar{f}_y^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3) \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \frac{1}{\bar{g}'} (\bar{f}_{y^1 y^2}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 + \bar{f}_{y^2}^3 \bar{f}_{y^1 y^2 y^2}^3).
\end{aligned}$$

On constate que les dérivées partielles troisièmes apparaissent mais elles vont se simplifier par la suite.

Calcul des $\tilde{R}_{a'.c'd'}$

On a :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1'.1'2'}^{1'} &= \frac{\partial \Gamma_{1'.2'}^{1'}}{\partial x1'} - \frac{\partial \Gamma_{1'.1'}^{1'}}{\partial x2'} + \Gamma_{1'.2'}^{1'} \Gamma_{1'.2'}^{2'} - \Gamma_{1'.1'}^{2'} \Gamma_{2'.2'}^{1'} \\
&= -\tilde{R}_{1'.2'1'}^{1'} \\
\tilde{R}_{1'.1'2'}^{2'} &= \frac{\partial \Gamma_{1'.2'}^{2'}}{\partial x1'} - \frac{\partial \Gamma_{1'.1'}^{2'}}{\partial x2'} + \Gamma_{1'.1'}^{2'} \Gamma_{1'.2'}^{1'} + \Gamma_{1'.2'}^{2'} \Gamma_{1'.2'}^{2'} - \Gamma_{1'.1'}^{1'} \Gamma_{1'.2'}^{2'} - \Gamma_{1'.1'}^{2'} \Gamma_{2'.2'}^{2'} \\
&= -\tilde{R}_{1'.2'1'}^{2'} \\
\tilde{R}_{2'.1'2'}^{1'} &= \frac{\partial \Gamma_{2'.2'}^{1'}}{\partial x1'} - \frac{\partial \Gamma_{2'.1'}^{1'}}{\partial x2'} + \Gamma_{1'.1'}^{1'} \Gamma_{2'.2'}^{1'} + \Gamma_{1'.2'}^{1'} \Gamma_{2'.2'}^{2'} - \Gamma_{1'.2'}^{1'} \Gamma_{1'.2'}^{1'} - \Gamma_{1'.2'}^{2'} \Gamma_{2'.2'}^{1'} \\
&= -\tilde{R}_{2'.2'1'}^{1'} \\
\tilde{R}_{2'.1'2'}^{2'} &= \frac{\partial \Gamma_{2'.2'}^{2'}}{\partial x1'} - \frac{\partial \Gamma_{2'.1'}^{2'}}{\partial x2'} + \Gamma_{1'.1'}^{2'} \Gamma_{2'.2'}^{1'} - \Gamma_{1'.2'}^{1'} \Gamma_{1'.2'}^{2'} \\
&= -\tilde{R}_{2'.2'1'}^{2'}.
\end{aligned}$$

Et on trouve :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1'.1'2'}^{1'} &= \frac{1}{(\bar{g}')^2} \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3 [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2], \\
\tilde{R}_{1'.1'2'}^{2'} &= -\frac{1}{(\bar{g}')^2} [1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2] [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2], \\
\tilde{R}_{2'.1'2'}^{1'} &= \frac{1}{(\bar{g}')^2} [1 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2] [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2], \\
\tilde{R}_{2'.1'2'}^{2'} &= -\frac{1}{(\bar{g}')^2} \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3 [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2].
\end{aligned}$$

$$\text{Et } \tilde{R}_{2'.1'1'2'}^{1'} = \frac{1}{\bar{g}'} [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2].$$

la courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K est telle que :

$$K = \frac{\tilde{R}_{2'1'1'2'}}{\tilde{g}'} = \frac{1}{(\tilde{g}')^2} [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2] = \frac{\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2}{[1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2]^2}. \quad [11]^4$$

Soit :

$$m' \triangleq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}'}} [\bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2}] = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}'}} \begin{bmatrix} -\bar{f}_{y^1}^3 \\ -\bar{f}_{y^2}^3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On a $\|m'\|^2 = \frac{1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2}{\tilde{g}'} = 1$ et donc $\|m'\| = 1$ i.e. m' est un vecteur unité et soit :

$$\begin{aligned} b_{1'1'} &= L' \triangleq \langle m', \bar{f}_{y^1 y^1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}'}} \bar{f}_{y^1 y^1}^3, \\ b_{1'2'} &= M' \triangleq \langle m', \bar{f}_{y^1 y^2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}'}} \bar{f}_{y^1 y^2}^3, \\ b_{2'2'} &= N' \triangleq \langle m', \bar{f}_{y^2 y^2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}'}} \bar{f}_{y^2 y^2}^3. \end{aligned}$$

On a $\bar{f}_{x^{a'} x^{c'}} = b_{a'c'} m' + \Gamma_{a'c'}^{b'} \bar{f}_{x^{b'}}$; $a', b', c' = 1, 2$ [11]⁵.

6.2.1 Relations de Peterson-Codazzi

On a $\frac{\partial b_{a'b'}}{\partial x^{c'}} - \frac{\partial b_{a'c'}}{\partial x^{b'}} = \Gamma_{a'c'}^{d'} b_{b'd'} - \Gamma_{a'b'}^{d'} b_{c'd'}$; $a', b', c', d' = 1, 2$; ce sont les relations de Peterson-Codazzi [11]⁶.

Démonstration

En fait, en raison des symétries, il n'y a que 2 relations à vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{1'1'}}{\partial x^{2'}} - \frac{\partial b_{1'2'}}{\partial x^{1'}} &= \Gamma_{1'.2'}^{1'} b_{1'1'} + \Gamma_{1'.2'}^{2'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.1'}^{1'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.1'}^{2'} b_{2'2'} \text{ et} \\ \frac{\partial b_{1'2'}}{\partial x^{2'}} - \frac{\partial b_{2'2'}}{\partial x^{1'}} &= \Gamma_{2'.2'}^{1'} b_{1'1'} + \Gamma_{2'.2'}^{2'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.2'}^{1'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.2'}^{2'} b_{2'2'}. \end{aligned}$$

Or ces 2 relations sont vérifiées car on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{1'1'}}{\partial x^{2'}} - \frac{\partial b_{1'2'}}{\partial x^{1'}} &= \Gamma_{1'.2'}^{1'} b_{1'1'} + \Gamma_{1'.2'}^{2'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.1'}^{1'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.1'}^{2'} b_{2'2'} \\ &= -\tilde{g}'^{-\frac{3}{2}} \bar{f}_{x^2}^3 [f_{x^1 x^1}^3 \bar{f}_{x^2 x^2}^3 - (f_{x^1 x^2}^3)^2] \text{ et :} \\ \frac{\partial b_{1'2'}}{\partial x^{2'}} - \frac{\partial b_{2'2'}}{\partial x^{1'}} &= \Gamma_{2'.2'}^{1'} b_{1'1'} + \Gamma_{2'.2'}^{2'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.2'}^{1'} b_{1'2'} - \Gamma_{1'.2'}^{2'} b_{2'2'} \\ &= \tilde{g}'^{-\frac{3}{2}} \bar{f}_{x^1}^3 [f_{x^1 x^1}^3 \bar{f}_{x^2 x^2}^3 - (f_{x^1 x^2}^3)^2]. \end{aligned}$$

-
4. p. 93 première et dernière équations
5. p. 298 éq. (27) première équation
6. p. 299 éq. (28)

6.2.2 Relations de Gauss

Soit $b_{a'}^{b'} = \tilde{g}^{b'c'} b_{a'c'}$; alors :

$$\begin{aligned}
b_{1'}^{1'} &= \tilde{g}^{1'c'} b_{1'c'} = \tilde{g}^{1'1'} b_{1'1'} + \tilde{g}^{1'2'} b_{1'2'} = \frac{1}{\tilde{g}'} (\tilde{g}_{2'2'} b_{1'1'} - \tilde{g}_{1'2'} b_{1'2'}) \\
&= \tilde{g}'^{-\frac{3}{2}} \{ [1 + (\bar{f}_{x^{2'}}^3)^2] \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}}^3 - \bar{f}_{x^{1'}}^3 \bar{f}_{x^{2'}}^3 \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}}^3 \}, \\
b_{2'}^{1'} &= \tilde{g}^{1'c'} b_{2'c'} = \tilde{g}^{1'1'} b_{2'1'} + \tilde{g}^{1'2'} b_{2'2'} = \frac{1}{\tilde{g}'} (\tilde{g}_{2'2'} b_{2'1'} - \tilde{g}_{1'2'} b_{2'2'}) \\
&= \tilde{g}'^{-\frac{3}{2}} \{ [1 + (\bar{f}_{x^{2'}}^3)^2] \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}}^3 - \bar{f}_{x^{1'}}^3 \bar{f}_{x^{2'}}^3 \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}}^3 \}, \\
b_{1'}^{2'} &= \tilde{g}^{2'c'} b_{1'c'} = \tilde{g}^{2'1'} b_{1'1'} + \tilde{g}^{2'2'} b_{1'2'} = \frac{1}{\tilde{g}'} (-\tilde{g}_{1'2'} b_{1'1'} + \tilde{g}_{1'1'} b_{1'2'}) \\
&= \tilde{g}'^{-\frac{3}{2}} \{ -\bar{f}_{x^{1'}}^3 \bar{f}_{x^{2'}}^3 \bar{f}_{x^{1'}x^{1'}}^3 + [1 + (\bar{f}_{x^{1'}}^3)^2] \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}}^3 \}, \\
b_{2'}^{2'} &= \tilde{g}^{2'c'} b_{2'c'} = \tilde{g}^{2'1'} b_{2'1'} + \tilde{g}^{2'2'} b_{2'2'} = \frac{1}{\tilde{g}'} (-\tilde{g}_{1'2'} b_{2'1'} + \tilde{g}_{1'1'} b_{2'2'}) \\
&= \tilde{g}'^{-\frac{3}{2}} \{ -\bar{f}_{x^{1'}}^3 \bar{f}_{x^{2'}}^3 \bar{f}_{x^{1'}x^{2'}}^3 + [1 + (\bar{f}_{x^{1'}}^3)^2] \bar{f}_{x^{2'}x^{2'}}^3 \}.
\end{aligned}$$

Alors on a :

$\tilde{R}_{a'd'}^{b'c'} = b_{a'd'} b_{c'}^{b'} - b_{a'c'} b_{d'}^{b'}$; $a', b', c', d' = 1, 2$; ce sont les relations de Gauss [11]⁷.

Démonstration

En fait, en raison des symétries, il n'y a que 2 relations à vérifier :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1'1'2'}^{1'1'} &= b_{1'2'} b_{1'}^{1'} - b_{1'1'} b_{2'}^{1'} \text{ et} \\
\tilde{R}_{1'1'2'}^{2'1'} &= b_{1'2'} b_{1'}^{2'} - b_{1'1'} b_{2'}^{2'}
\end{aligned}$$

Or ces 2 relations sont vérifiées car on trouve :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1'1'2'}^{1'1'} &= b_{1'2'} b_{1'}^{1'} - b_{1'1'} b_{2'}^{1'} = \frac{1}{(\tilde{g}')^2} \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3 [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2] \text{ et} \\
\tilde{R}_{1'1'2'}^{2'1'} &= b_{1'2'} b_{1'}^{2'} - b_{1'1'} b_{2'}^{2'} = -\frac{1}{(\tilde{g}')^2} [1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2] [\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2]
\end{aligned}$$

6.3 Cas général de coordonnées curvilignes

Soient x^1, x^2 des coordonnées curvilignes de la surface M et :

$$\begin{aligned}
y^1 &= f^1(x^1, x^2), \\
y^2 &= f^2(x^1, x^2), \\
y^3 &= \bar{f}^3(y^1, y^2) = \bar{f}^3(f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2)) = f^3(x^1, x^2),
\end{aligned}$$

les coordonnées cartésiennes de $N = \mathbb{R}^3$.

Soit le champ de tenseurs métrique :

7. p. 299 éq. (29)

$g = \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b$; $a, b = 1, 2$ tel que, dl étant un élément de ligne de $N = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (dl)^2 &\triangleq (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 \\ &= (f_{x^1}^1 dx^1 + f_{x^2}^1 dx^2)^2 + (f_{x^1}^2 dx^1 + f_{x^2}^2 dx^2)^2 + (f_{x^1}^3 dx^1 + f_{x^2}^3 dx^2)^2 \\ &= \|f_{x^1}\|^2 (dx^1)^2 + 2 \langle f_{x^1}, f_{x^2} \rangle dx^1 dx^2 + \|f_{x^2}\|^2 (dx^2)^2. \end{aligned}$$

$(dl)^2$ est la première forme fondamentale de la surface M [11]⁸, écrite avec des coordonnées curvilignes.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= E = \|f_{x^1}\|^2, \\ \tilde{g}_{12} &= F = \langle f_{x^1}, f_{x^2} \rangle, \\ \tilde{g}_{22} &= G = \|f_{x^2}\|^2. \text{ Soit :} \end{aligned}$$

$\tilde{g} \triangleq \det(\tilde{g}_{ab}) = \tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2 = EG - F^2$. On constate qu'il s'agit bien de l'expression de \tilde{g} précédente. Alors :

$b_{11} (dx^1)^2 + 2b_{12} dx^1 dx^2 + b_{22} (dx^2)^2$ étant la deuxième forme fondamentale de la surface M [11]⁹ on obtient successivement, d'après les résultats des préliminaires

$$K = \frac{\tilde{f}_{y^1 y^1}^3 \tilde{f}_{y^2 y^2}^3 - (\tilde{f}_{y^1 y^2}^3)^2}{[1 + (\tilde{f}_{y^1}^3)^2 + (\tilde{f}_{y^2}^3)^2]^2} = \frac{\tilde{g} \Delta}{d^4 (\tilde{g}')^2} = \frac{\Delta}{\tilde{g}} = \frac{b_{11} b_{22} - (b_{12})^2}{\tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2}. \quad [11]^{10}.$$

6.4 Exemples

L'exemple de la sphère de rayon a est donné Annexe E et celui du tore de paramètres l et a en Annexe F.

8. p. 79

9. pp. 86-95 § 8

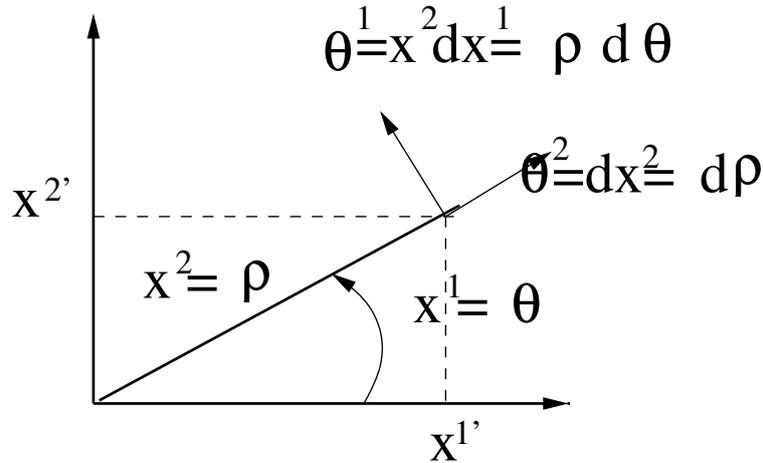
10. p. 92 éq. (26)

Annexe A : coordonnées polaires dans le plan \mathbb{R}^2 ; $m = 2$

$x^1 = \theta$, $x^2 = \rho$ anciennes coordonnées locales (curvilignes) (cf. figure).
 $\theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$; $\forall \alpha$; $\rho \geq 0$.

$x^{1'}$, $x^{2'}$ nouvelles coordonnées cartésiennes ou euclidiennes (cf. figure)
telles que :

$$x^{1'} = x^2 \cos x^1 = \rho \cos \theta, \quad x^{2'} = x^2 \sin x^1 = \rho \sin \theta.$$



$(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2})$ ancienne base naturelle.

(dx^1, dx^2) ancienne base naturelle duale.

(e_1, e_2) base mobile telle que $e_1 \triangleq \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^1}$, $e_2 \triangleq \frac{\partial}{\partial x^2}$.

(θ^1, θ^2) base mobile duale, donc telle que $\theta^1 = x^2 dx^1$, $\theta^2 = dx^2$.

$(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}, \frac{\partial}{\partial x^{2'}})$ nouvelle base naturelle.

$(dx^{1'}, dx^{2'})$ nouvelle base naturelle duale.

On a :

$$x^1 = \arctan2(x^{2'}, x^{1'}), \quad x^2 = [(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

$$dx^{1'} = -x^2 \sin x^1 dx^1 + \cos x^1 dx^2, \quad dx^{2'} = x^2 \cos x^1 dx^1 + \sin x^1 dx^2.$$

$$dx^1 = \frac{-\sin x^1 dx^{1'} + \cos x^1 dx^{2'}}{x^2}, \quad dx^2 = \cos x^1 dx^{1'} + \sin x^1 dx^{2'}. \text{ Donc :}$$

$$\theta^1 = x^2 dx^1 = -\sin x^1 dx^{1'} + \cos x^1 dx^{2'},$$

$$\theta^2 = dx^2 = \cos x^1 dx^{1'} + \sin x^1 dx^{2'}.$$

$$(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 = (dx^{1'})^2 + (dx^{2'})^2.$$

Passages entre bases et bases duales :

$$(\tilde{e}_j^c) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^c & \tilde{e}_2^c \\ \tilde{e}_1^c & \tilde{e}_2^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (\tilde{\theta}_d^i) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1^i & \tilde{\theta}_1^i \\ \tilde{\theta}_2^i & \tilde{\theta}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

matrices inverses l'une de l'autre. $\det(\tilde{e}_j^c) = \frac{1}{x^2}$ et $\det(\tilde{\theta}_d^i) = x^2$.

$$(\tilde{e}_j^{e'}) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^{e'} & \tilde{e}_2^{e'} \\ \tilde{e}_1^{e'} & \tilde{e}_2^{e'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x^1 & \cos x^1 \\ \cos x^1 & \sin x^1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$(\tilde{\theta}_{f'}^i) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1^i & \tilde{\theta}_1^i \\ \tilde{\theta}_2^i & \tilde{\theta}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x^1 & \cos x^1 \\ \cos x^1 & \sin x^1 \end{bmatrix},$$

matrices inverses l'une de l'autre. $\det(\tilde{e}_j^{e'}) = -1$ et $\det(\tilde{\theta}_{f'}^i) = -1$.

Seules dérivées classiques des \tilde{e}_j^c et $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial \tilde{e}_1^c}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2)^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_1^i}{\partial x^2} = 1.$$

Seules dérivées pfaffiennes des \tilde{e}_j^c et $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\partial_2 \tilde{e}_1^c = -\frac{1}{(x^2)^2}, \quad \partial_2 \tilde{\theta}_1^i = 1.$$

Calcul des coefficients de structure de la base mobile :

$$c_{i.k}^j = \tilde{e}_i^c \partial_k \tilde{\theta}_e^j - \tilde{e}_k^c \partial_i \tilde{\theta}_e^j.$$

Tous les coefficients de structure sont nuls sauf :

$$c_{1.2}^1 = \frac{1}{x^2} = -c_{2.1}^1. \text{ On a bien } c_{k.i}^j = -c_{i.k}^j.$$

Seules dérivées classiques des $c_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial c_{1.2}^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2)^2} = -\frac{\partial c_{2.1}^1}{\partial x^2}.$$

Seules dérivées pfaffiennes des $c_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\partial_2 c_{1.2}^1 = -\frac{1}{(x^2)^2} = -\partial_2 c_{2.1}^1.$$

Connexion imposée a priori

Soit la connexion imposée a priori ayant les 2 seuls coefficients de connexion non nuls, parmi les 8 :

$$\gamma_{1.1}^2 = -\frac{1}{x^2}, \quad \gamma_{1.2}^1 = \frac{1}{x^2}.$$

Seules dérivées classiques des $\gamma_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial \gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} = \frac{1}{(x^2)^2}, \quad \frac{\partial \gamma_{1.2}^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2)^2}.$$

Seules dérivées pfaffiennes des $\gamma_{i,k}^j$ non nulles; il y en a 2 :

$$\partial_2 \gamma_{1,1}^2 = \frac{1}{(x^2)^2}, \quad \partial_2 \gamma_{1,2}^1 = -\frac{1}{(x^2)^2}.$$

On en déduit les symboles de Christoffel de 2^e espèce :

$$\Gamma_{a,c}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i,k}^j + \tilde{e}_j^b \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}.$$

Seuls symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a,c}^b$ non nuls; il y en a 3 :

$$\Gamma_{1,1}^2 = -x^2, \quad \Gamma_{1,2}^1 = \frac{1}{x^2} = \Gamma_{2,1}^1.$$

On constate que $\Gamma_{a,c}^b = \Gamma_{c,a}^b$ alors que $\gamma_{i,k}^j \neq \gamma_{k,i}^j$.

Seules dérivées classiques des $\Gamma_{a,c}^b$ non nulles; il y en a 3 :

$$\frac{\partial \Gamma_{1,1}^2}{\partial x^2} = -1, \quad \frac{\partial \Gamma_{1,2}^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2)^2} = \frac{\partial \Gamma_{2,1}^1}{\partial x^2}.$$

Torsion

$$S_{ik}^{\cdot j} = \gamma_{i,k}^j - \gamma_{k,i}^j - c_{i,k}^j = -S_{ki}^{\cdot j} \text{ et } \tilde{S}_{ac}^{\cdot b} = \Gamma_{a,c}^b - \Gamma_{c,a}^b = -\tilde{S}_{ca}^{\cdot b}.$$

Le calcul montre que $S_{ik}^{\cdot j} = 0$; $i, j, k = 1, 2$. Cette connexion est sans torsion (on verra pourquoi ci-après).

Plus simplement $\tilde{S}_{ac}^{\cdot b} = \Gamma_{a,c}^b - \Gamma_{c,a}^b = 0$ on retrouve que cette connexion est sans torsion.

Courbure

$$R_{i,kl}^j = \partial_k \gamma_{l,i}^j - \partial_l \gamma_{k,i}^j - c_{k,l}^m \gamma_{m,i}^j + \gamma_{k,m}^j \gamma_{l,i}^m - \gamma_{k,i}^m \gamma_{l,m}^j = -R_{i,lk}^j.$$

Le calcul montre que $R_{i,kl}^j = 0$; $i, j, k, l = 1, 2$. Cette connexion est sans courbure.

$$\tilde{R}_{a,cd}^b = \frac{\partial \Gamma_{d,a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c,a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c,e}^b \Gamma_{d,a}^e - \Gamma_{c,a}^e \Gamma_{d,e}^b = -\tilde{R}_{a,dc}^b \text{ ou}$$

$$\tilde{R}_{a,cd}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i,kl}^j = -\tilde{R}_{a,dc}^b.$$

La seconde relation conduit au résultat beaucoup plus rapidement que la première et on obtient :

$\tilde{R}_{a,cd}^b = 0$; $a, b, c, d = 1, 2$. On retrouve que cette connexion est sans courbure.

Champ de tenseurs de Ricci

$R_{il} = R_{i,jl}^j = 0$ et $\tilde{R}_{ad} = \tilde{R}_{a,bd}^b = 0$; le champ de tenseurs de Ricci est nul.

Champ de tenseur métrique (symétrique)

$$g \triangleq g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b = \tilde{g}_{a'b'} dx^{a'} \otimes dx^{b'}.$$

La connexion riemannienne associée est la seule qui vérifie :

$$[ij, k] \triangleq \frac{1}{2} [\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}],$$

$$\gamma_{i.k}^j = g^{jl} [ik, l] - \frac{1}{2} (c_{k.l}^m g_{im} g^{jl} + c_{i.l}^m g_{km} g^{jl} - c_{i.k}^j).$$

Exemple de tenseur métrique

$$g_{ij} = \delta_{ij}; \text{ alors } \tilde{g}_{ab} = \tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_b^j \delta_{ij} \text{ et } \tilde{g}_{a'b'} = \tilde{\theta}_{a'}^i \tilde{\theta}_{b'}^j \delta_{ij}; \text{ soit :}$$

$$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; g \triangleq \det(g_{ij}) = 1 \text{ et :}$$

$$(\tilde{g}_{ab}) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \tilde{g} \triangleq \det(\tilde{g}_{ab}) = (x^2)^2 \text{ et :}$$

$$(\tilde{g}_{a'b'}) = (\delta_{a'b'}) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1'1'} & \tilde{g}_{1'2'} \\ \tilde{g}_{2'1'} & \tilde{g}_{2'2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \tilde{g}' \triangleq \det(\tilde{g}_{a'b'}) = 1.$$

Calcul des coefficients de connexion $\gamma_{i.k}^j$ et des symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a.c}^b$:

On trouve qu'il s'agit des coefficients de connexion et des symboles de Christoffel de 2^e espèce précédents.

$$\text{On vérifie que } \Gamma_{1.1}^1 + \Gamma_{1.2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = 0 \text{ et } \Gamma_{2.1}^1 + \Gamma_{2.2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = \frac{1}{x^2}.$$

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$:

$$\Gamma_{ab,c} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} \right) = \Gamma_{ba,c}$$

Seuls symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$ non nuls; il y en a 3 :

$$\Gamma_{11,2} = -x^2, \Gamma_{12,1} = x^2 = \Gamma_{21,1}.$$

Calcul du champ de tenseurs de torsion :

Il est nul car la connexion est riemannienne. C'est bien ce que nous avons trouvé précédemment.

Calcul du champ de tenseurs de courbure :

Nous avons trouvé précédemment que le champ de tenseurs de courbure est nul et maintenant on a $R_{2112} = 0 (= R_{2.12}^1)$, $\tilde{R}_{2112} = 0 (= (x^3)^2 \tilde{R}_{2.12}^1)$.

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$: $2K = 0$.

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K : $K = 0$.

Annexe B : coordonnées sphériques dans l'espace \mathbb{R}^3 ; $m = 3$

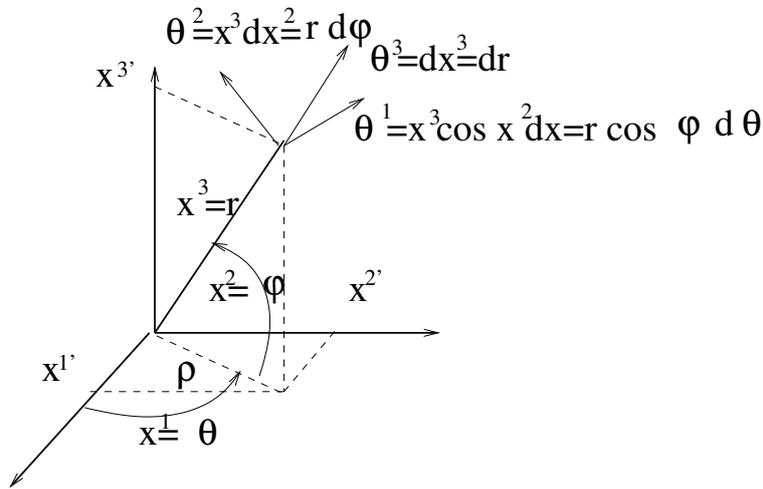
On pourra consulter [11]¹¹.

$x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = r$ anciennes coordonnées locales (curvilignes)
(cf. figure). $\theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$; $\forall \alpha$; $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $r \geq 0$.
On peut poser $\rho = x^3 \cos x^2 = r \cos \varphi$.

$x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ nouvelles coordonnées cartésiennes ou euclidiennes (cf. figure)
telles que :

$$x^{1'} = x^3 \cos x^2 \cos x^1, \quad x^{2'} = x^3 \cos x^2 \sin x^1, \quad x^{3'} = x^3 \sin x^2.$$

$$\text{Donc } x^{1'} = \rho \cos \theta, \quad x^{2'} = \rho \sin \theta, \quad x^{3'} = r \sin \varphi.$$



$(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$ ancienne base naturelle

(dx^1, dx^2, dx^3) ancienne base naturelle duale

(e_1, e_2, e_3) base mobile telle que $e_1 \triangleq \frac{1}{x^3 \cos x^2} \frac{\partial}{\partial x^1}$, $e_2 \triangleq \frac{1}{x^3} \frac{\partial}{\partial x^2}$, $e_3 \triangleq \frac{\partial}{\partial x^3}$.

$(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ base mobile duale, donc telle que :

$$\theta^1 = x^3 \cos x^2 dx^1, \quad \theta^2 = x^3 dx^2, \quad \theta^3 = dx^3.$$

$(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}, \frac{\partial}{\partial x^{2'}}, \frac{\partial}{\partial x^{3'}})$ nouvelle base naturelle

$(dx^{1'}, dx^{2'}, dx^{3'})$ nouvelle base naturelle duale

On a :

$$x^1 = \arctan2(x^{2'}, x^{1'}), \quad x^2 = \arctan2(x^{3'}, [(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2]^{\frac{1}{2}}), \\ x^3 = [(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

11. pp. 21-22 § 1.1.3 mais avec des notations différentes

$$\begin{aligned} dx^{1'} &= -x^3 \cos x^2 \sin x^1 dx^1 - x^3 \sin x^2 \cos x^1 dx^2 + \cos x^2 \cos x^1 dx^3, \\ dx^{2'} &= x^3 \cos x^2 \cos x^1 dx^1 - x^3 \sin x^2 \sin x^1 dx^2 + \cos x^2 \sin x^1 dx^3, \\ dx^{3'} &= x^3 \cos x^2 dx^2 + \sin x^2 dx^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx^1 &= \frac{-\sin x^1 dx^{1'} + \cos x^1 dx^{2'}}{x^3 \cos x^2}, \\ dx^2 &= \frac{-\sin x^2 \cos x^1 dx^{1'} - \sin x^2 \sin x^1 dx^{2'} + \cos x^2 dx^{3'}}{x^3}, \\ dx^3 &= \cos x^2 \cos x^1 dx^{1'} + \cos x^2 \sin x^1 dx^{2'} + \sin x^2 dx^{3'}. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \theta^1 &= x^3 \cos x^2 dx^1 = -\sin x^1 dx^{1'} + \cos x^1 dx^{2'}, \\ \theta^2 &= x^3 dx^2 = -\sin x^2 \cos x^1 dx^{1'} - \sin x^2 \sin x^1 dx^{2'} + \cos x^2 dx^{3'}, \\ \theta^3 &= dx^3 = \cos x^2 \cos x^1 dx^{1'} + \cos x^2 \sin x^1 dx^{2'} + \sin x^2 dx^{3'}. \end{aligned}$$

$$(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2 = (dx^{1'})^2 + (dx^{2'})^2 + (dx^{3'})^2.$$

Passages entre bases et bases duales

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_j^c) &= \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 & \tilde{e}_1^2 & \tilde{e}_1^3 \\ \tilde{e}_2^1 & \tilde{e}_2^2 & \tilde{e}_2^3 \\ \tilde{e}_3^1 & \tilde{e}_3^2 & \tilde{e}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^3 \cos x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et} \\ (\tilde{\theta}_d^i) &= \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1^1 & \tilde{\theta}_1^2 & \tilde{\theta}_1^3 \\ \tilde{\theta}_2^1 & \tilde{\theta}_2^2 & \tilde{\theta}_2^3 \\ \tilde{\theta}_3^1 & \tilde{\theta}_3^2 & \tilde{\theta}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 \cos x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

matrices inverses l'une de l'autre. $\det(\tilde{e}_j^c) = \frac{1}{(x^3)^2 \cos x^2}$ et $\det(\tilde{\theta}_d^i) = (x^3)^2 \cos x^2$.

$$(\tilde{e}_j^{c'}) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^{1'} & \tilde{e}_1^{2'} & \tilde{e}_1^{3'} \\ \tilde{e}_2^{1'} & \tilde{e}_2^{2'} & \tilde{e}_2^{3'} \\ \tilde{e}_3^{1'} & \tilde{e}_3^{2'} & \tilde{e}_3^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ -\sin x^2 \cos x^1 & -\sin x^2 \sin x^1 & \cos x^2 \\ \cos x^2 \cos x^1 & \cos x^2 \sin x^1 & \sin x^2 \end{bmatrix}$$

et

$$(\tilde{\theta}_{f'}^i) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{1'}^1 & \tilde{\theta}_{1'}^2 & \tilde{\theta}_{1'}^3 \\ \tilde{\theta}_{2'}^1 & \tilde{\theta}_{2'}^2 & \tilde{\theta}_{2'}^3 \\ \tilde{\theta}_{3'}^1 & \tilde{\theta}_{3'}^2 & \tilde{\theta}_{3'}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x^1 & -\sin x^2 \cos x^1 & \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^1 & -\sin x^2 \sin x^1 & \cos x^2 \sin x^1 \\ 0 & \cos x^2 & \sin x^2 \end{bmatrix},$$

matrices inverses l'une de l'autre. $\det(\tilde{e}_j^{c'}) = 1$ et $\det(\tilde{\theta}_{f'}^i) = 1$.

Seules dérivées classiques des \tilde{e}_j^c et $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles ; il y en a 6 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{e}_1^1}{\partial x^2} &= \frac{\sin x^2}{x^3 \cos^2 x^2}, \quad \frac{\partial \tilde{e}_1^1}{\partial x^3} = -\frac{1}{(x^3)^2 \cos x^2}, \quad \frac{\partial \tilde{e}_2^2}{\partial x^3} = -\frac{1}{(x^3)^2}, \\ \frac{\partial \tilde{\theta}_1^1}{\partial x^2} &= -x^3 \sin x^2, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_1^1}{\partial x^3} = \cos x^2, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_2^2}{\partial x^3} = 1. \end{aligned}$$

Seules dérivées pfaffiennes des \tilde{e}_j^c et $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles ; il y en a 6 :

$$\partial_2 \tilde{e}_1^1 = \frac{\sin x^2}{(x^3)^2 \cos^2 x^2}, \quad \partial_3 \tilde{e}_1^1 = -\frac{1}{(x^3)^2 \cos x^2}, \quad \partial_3 \tilde{e}_2^2 = -\frac{1}{(x^3)^2},$$

$$\partial_2 \tilde{\theta}_1^1 = -\sin x^2, \partial_3 \tilde{\theta}_1^1 = \cos x^2, \partial_3 \tilde{\theta}_2^2 = 1.$$

Calcul des coefficients de structure de la base mobile :

$$c_{i.k}^j = \tilde{e}_i^e \partial_k \tilde{\theta}_e^j - \tilde{e}_k^e \partial_i \tilde{\theta}_e^j.$$

Tous les coefficients de structure sont nuls sauf :

$$c_{1.2}^1 = -\frac{\sin x^2}{x^3 \cos x^2} = -c_{2.1}^1, c_{1.3}^1 = \frac{1}{x^3} = -c_{3.1}^1, c_{2.3}^2 = \frac{1}{x^3} = -c_{3.2}^2.$$

$$\text{On a bien } c_{k.i}^j = -c_{i.k}^j.$$

Seules dérivées classiques des $c_{i.j}^k$ non nulles ; il y en a 8 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{1.2}^1}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^3 \cos^2 x^2} = -\frac{\partial c_{2.1}^1}{\partial x^2}, \frac{\partial c_{1.2}^1}{\partial x^3} = \frac{\sin x^2}{(x^3)^2 \cos x^2} = -\frac{\partial c_{2.1}^1}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial c_{1.3}^1}{\partial x^3} &= -\frac{1}{(x^3)^2} = -\frac{\partial c_{3.1}^1}{\partial x^3}, \frac{\partial c_{2.3}^2}{\partial x^3} = -\frac{1}{(x^3)^2} = -\frac{\partial c_{3.2}^2}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Seules dérivées pfaffiennes des $c_{i.j}^k$ non nulles ; il y en a 8 :

$$\begin{aligned} \partial_2 c_{1.2}^1 &= -\frac{1}{(x^3)^2 \cos^2 x^2} = -\partial_2 c_{2.1}^1, \partial_3 c_{1.2}^1 = \frac{\sin x^2}{(x^3)^2 \cos x^2} = -\partial_3 c_{2.1}^1, \\ \partial_3 c_{1.3}^1 &= -\frac{1}{(x^3)^2} = -\partial_3 c_{3.1}^1, \partial_3 c_{2.3}^2 = -\frac{1}{(x^3)^2} = -\partial_3 c_{3.2}^2. \end{aligned}$$

Connexion imposée a priori

Soit la connexion imposée a priori ayant les 6 seuls coefficients de connexion non nuls, parmi les 27 :

$$\begin{aligned} \gamma_{1.1}^2 &= \frac{\sin x^2}{x^3 \cos x^2}, \gamma_{1.1}^3 = -\frac{1}{x^3}, \gamma_{1.2}^1 = -\frac{\sin x^2}{x^3 \cos x^2}, \\ \gamma_{1.3}^1 &= \frac{1}{x^3}, \gamma_{2.2}^3 = -\frac{1}{x^3}, \gamma_{2.3}^2 = \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

Seules dérivées classiques des $\gamma_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 8 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{x^3 \cos^2 x^2}, \frac{\partial \gamma_{1.1}^2}{\partial x^3} = -\frac{\sin x^2}{(x^3)^2 \cos x^2}, \frac{\partial \gamma_{1.1}^3}{\partial x^3} = \frac{1}{(x^3)^2}, \frac{\partial \gamma_{1.2}^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^3 \cos^2 x^2}, \\ \frac{\partial \gamma_{1.2}^1}{\partial x^3} &= \frac{\sin x^2}{(x^3)^2 \cos x^2}, \frac{\partial \gamma_{1.3}^1}{\partial x^3} = -\frac{1}{(x^3)^2}, \frac{\partial \gamma_{2.3}^2}{\partial x^3} = \frac{1}{(x^3)^2}, \frac{\partial \gamma_{2.3}^2}{\partial x^3} = -\frac{1}{(x^3)^2}. \end{aligned}$$

Seules dérivées pfaffiennes des $\gamma_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 8 :

$$\begin{aligned} \partial_2 \gamma_{1.1}^2 &= \frac{1}{(x^3)^2 \cos^2 x^2}, \partial_3 \gamma_{1.1}^2 = -\frac{\sin x^2}{(x^3)^2 \cos x^2}, \\ \partial_3 \gamma_{1.1}^3 &= \frac{1}{(x^3)^2}, \partial_2 \gamma_{1.2}^1 = -\frac{1}{(x^3)^2 \cos^2 x^2}, \\ \partial_3 \gamma_{1.2}^1 &= \frac{\sin x^2}{(x^3)^2 \cos x^2}, \partial_3 \gamma_{1.3}^1 = -\frac{1}{(x^3)^2}, \\ \partial_3 \gamma_{2.3}^2 &= \frac{1}{(x^3)^2}, \partial_3 \gamma_{2.3}^2 = -\frac{1}{(x^3)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit les symboles de Christoffel de 2^e espèce :

$$\Gamma_{a.c}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j + \tilde{e}_j^b \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}.$$

Seuls symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a.c}^b$ non nuls ; il y en a 9 :

$$\Gamma_{1.1}^2 = \cos x^2 \sin x^2, \Gamma_{1.1}^3 = -x^3 \cos^2 x^2, \Gamma_{1.2}^1 = -\frac{\sin x^2}{\cos x^2} = \Gamma_{2.1}^1, \\ \Gamma_{1.3}^1 = \frac{1}{x^3} = \Gamma_{3.1}^1, \Gamma_{2.2}^3 = -x^3, \Gamma_{2.3}^2 = \frac{1}{x^3} = \Gamma_{3.2}^2.$$

On constate que $\Gamma_{a.c}^b = \Gamma_{c.a}^b$ alors que $\gamma_{i.k}^j \neq \gamma_{k.i}^j$

Seules dérivées classiques des $\Gamma_{a.c}^b$ non nulles ; il y en a 10 :

$$\frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} = \cos^2 x^2 - \sin^2 x^2, \frac{\partial \Gamma_{1.1}^3}{\partial x^2} = 2x^3 \cos x^2 \sin x^2, \frac{\partial \Gamma_{1.1}^3}{\partial x^3} = -\cos^2 x^2, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{\cos^2 x^2} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^2}, \frac{\partial \Gamma_{1.3}^1}{\partial x^3} = -\frac{1}{(x^3)^2} = \frac{\partial \Gamma_{3.1}^1}{\partial x^3}, \frac{\partial \Gamma_{2.2}^3}{\partial x^3} = -1, \\ \frac{\partial \Gamma_{2.3}^2}{\partial x^3} = -\frac{1}{(x^3)^2} = \frac{\partial \Gamma_{3.2}^2}{\partial x^3}.$$

Torsion

$$S_{ik}^j = \gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j = -S_{ki}^j \text{ et } \tilde{S}_{ac}^b = \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = -\tilde{S}_{ca}^b.$$

Le calcul montre que $S_{ik}^j = 0$; $i, j, k = 1, 2, 3$. Cette connexion est sans torsion (on verra pourquoi ci-après).

Plus simplement $\tilde{S}_{ac}^b = \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = 0$ on retrouve que cette connexion est sans torsion.

Courbure

$$R_{i.kl}^j = \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j = -R_{i.lk}^j.$$

Le calcul montre que $R_{i.kl}^j = 0$; $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Cette connexion est sans courbure.

$$\tilde{R}_{a.cd}^b = \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\tilde{R}_{a.dc}^b \text{ ou}$$

$$\tilde{R}_{a.cd}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i.kl}^j = -\tilde{R}_{a.dc}^b.$$

La seconde relation conduit au résultat beaucoup plus rapidement que la première et on obtient :

$\tilde{R}_{a.cd}^b = 0$; $a, b, c, d = 1, 2, 3$. On retrouve que cette connexion est sans courbure.

Champ de tenseurs de Ricci

$$R_{il} = R_{i.jl}^j = 0 \text{ et } \tilde{R}_{ad} = \tilde{R}_{a.bd}^b = 0 ; \text{ le champ de tenseurs de Ricci est nul.}$$

Champ de tenseur métrique (symétrique)

$$g \triangleq g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b = \tilde{g}_{a'b'} dx^{a'} \otimes dx^{b'}$$

La connexion riemannienne associée est la seule qui vérifie :

$$[ij, k] \triangleq \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

$$\gamma_{i.k}^j = g^{jl} [ik, l] - \frac{1}{2} (c_{k.l}^m g_{im} g^{jl} + c_{i.l}^m g_{km} g^{jl} - c_{i.k}^j)$$

Exemple de tenseur métrique

$g_{ij} = \delta_{ij}$; alors $\tilde{g}_{ab} = \tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_b^j \delta_{ij}$ et $\tilde{g}_{a'b'} = \tilde{\theta}_{a'}^i \tilde{\theta}_{b'}^j \delta_{ij}$; soit :

$$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; g \triangleq \det(g_{ij}) = 1 \text{ et :}$$

$$(\tilde{g}_{ab}) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{13} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} \\ \tilde{g}_{31} & \tilde{g}_{32} & \tilde{g}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^3)^2 \cos^2 x^3 & 0 & 0 \\ 0 & (x^3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\tilde{g} \triangleq \det(\tilde{g}_{ab}) = (x^3)^4 \cos^2 x^2$ et :

$$(\tilde{g}_{a'b'}) = (\delta_{a'b'}) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1'1'} & \tilde{g}_{1'2'} & \tilde{g}_{1'3'} \\ \tilde{g}_{2'1'} & \tilde{g}_{2'2'} & \tilde{g}_{2'3'} \\ \tilde{g}_{3'1'} & \tilde{g}_{3'2'} & \tilde{g}_{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\tilde{g}' \triangleq \det(\tilde{g}_{a'b'}) = 1$.

Calcul des coefficients de connexion $\gamma_{i.k}^j$ et des symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a.c}^b$:

On trouve qu'il s'agit des coefficients de connexion et des symboles de Christoffel de 2^e espèce précédents.

On vérifie que :

- $\Gamma_{1.1}^1 + \Gamma_{1.2}^2 + \Gamma_{1.3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = 0$,
- $\Gamma_{2.1}^1 + \Gamma_{2.2}^2 + \Gamma_{2.3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = -\frac{\sin x^2}{\cos x^2}$
- $\Gamma_{3.1}^1 + \Gamma_{3.2}^2 + \Gamma_{3.3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^3} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = \frac{2}{x^3}$.

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$:

$$\Gamma_{ab,c} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} \right) = \Gamma_{ba,c}.$$

Seuls symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$ non nuls; il y en a 9 :

$$\Gamma_{11,2} = (x^3)^2 \cos x^2 \sin x^2, \Gamma_{11,3} = -x^3 \cos^2 x^2,$$

$$\Gamma_{12,1} = -(x^3)^2 \cos x^2 \sin x^2 = \Gamma_{21,1}, \Gamma_{13,1} = x^3 \cos^2 x^2 = \Gamma_{31,1},$$

$$\Gamma_{22,3} = -x^3, \Gamma_{23,2} = x^3 = \Gamma_{32,2}.$$

Calcul du champ de tenseurs de torsion :

Il est nul car la connexion est riemannienne. C'est bien ce que nous avons trouvé précédemment.

Calcul du champ de tenseurs de courbure :

Nous avons trouvé précédemment que le champ de tenseurs de courbure est nul et maintenant on a :

$$\begin{aligned} R_{2112} &= 0 (= R_{2,12}^1), R_{2113} = 0 (= R_{2,13}^1), \\ R_{2123} &= 0 (= R_{2,23}^1), R_{3113} = 0 (= R_{3,13}^1), \\ R_{3123} &= 0 (= R_{3,23}^1), R_{3223} = 0 (= R_{3,23}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{2112} &= 0 (= (x^3)^2 \cos^2 x^2 \tilde{R}_{2,12}^1), \tilde{R}_{2113} = 0 (= (x^3)^2 \cos^2 x^2 \tilde{R}_{2,13}^1), \\ \tilde{R}_{2123} &= 0 (= (x^3)^2 \cos^2 x^2 \tilde{R}_{2,23}^1), \tilde{R}_{3113} = 0 (= (x^3)^2 \cos^2 x^2 \tilde{R}_{3,13}^1), \\ \tilde{R}_{3123} &= 0 (= (x^3)^2 \cos^2 x^2 \tilde{R}_{3,23}^1), \tilde{R}_{3223} = 0 (= (x^3)^2 \tilde{R}_{3,23}^2). \end{aligned}$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$: $2K = 0$.

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K : $K = 0$.

Annexe C : coordonnées hyper-sphériques dans l'hyper-espace \mathbb{R}^m ; $m \geq 2$ quelconque (généralisation de l'Annexe A, qui correspond à $m = 2$ et de l'Annexe B, qui correspond à $m = 3$)

x^1, \dots, x^m coordonnées locales curvilignes,
 $x^{1'}, \dots, x^{m'}$ coordonnées cartésiennes, telles que :

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 \cos x^2 \cos x^1, \\ x^{2'} &= x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 \cos x^2 \sin x^1, \\ x^{3'} &= x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 \sin x^2, \\ x^{4'} &= x^m \cos x^{m-1} \dots \sin x^3, \\ &\vdots \\ x^{(m-1)'} &= x^m \cos x^{m-1} \sin x^{m-2}, \\ x^{m'} &= x^m \sin x^{m-1}, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} x^1 &\in (\alpha^1, \alpha^1 + 2\pi) ; \forall \alpha^1, \dots, \\ x^{m-2} &\in (\alpha^{m-2}, \alpha^{m-2} + 2\pi) ; \forall \alpha^{m-2}, \\ x^{m-1} &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ x^m &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Alors } (x^{1'})^2 + \dots + (x^{m'})^2 = (x^m)^2.$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ base naturelle,
 dx^1, \dots, dx^m base naturelle duale,
 e_1, \dots, e_m base mobile telle que :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 \cos x^2} \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ e_2 &= \frac{1}{x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3} \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ &\dots, \\ e_{m-2} &= \frac{1}{x^m \cos x^{m-1}} \frac{\partial}{\partial x^{m-2}}, \\ e_{m-1} &= \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}, \\ e_m &= \frac{\partial}{\partial x^m} \end{aligned}$$

$\theta^1, \dots, \theta^m$ base mobile duale, donc telle que :

$$\begin{aligned} \theta^1 &= x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 \cos x^2 dx^1, \\ \theta^2 &= x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 dx^2 \\ &\vdots, \\ \theta^{m-2} &= x^m \cos x^{m-1} dx^{m-2}, \\ \theta^{m-1} &= x^m dx^{m-1}, \\ \theta^m &= dx^m. \end{aligned}$$

Passages entre base et base duale

$$(\tilde{e}_j^c) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 \cos x^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{x^m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et :

$$(\tilde{\theta}_d^i) = \begin{bmatrix} x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 \cos x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^m \cos x^{m-1} \dots \cos x^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x^m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

matrices inverses l'une de l'autre.

$$\det(\tilde{e}_j^c) = \frac{1}{(x^m)^{m-1} \cos^{m-2} x^{m-1} \dots \cos^2 x^3 \cos x^2} \text{ et}$$

$$\det(\tilde{\theta}_d^i) = (x^m)^{m-1} \cos^{m-2} x^{m-1} \dots \cos^2 x^3 \cos x^2.$$

Exemple : m = 4

$$x^{1'} = x^4 \cos x^3 \cos x^2 \cos x^1,$$

$$x^{2'} = x^4 \cos x^3 \cos x^2 \sin x^1,$$

$$x^{3'} = x^4 \cos x^3 \sin x^2,$$

$$x^{4'} = x^4 \sin x^3.$$

$$e_1 = \frac{1}{x^4 \cos x^3 \cos x^2} \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$e_2 = \frac{1}{x^4 \cos x^3} \frac{\partial}{\partial x^2},$$

$$e_3 = \frac{1}{x^4} \frac{\partial}{\partial x^3},$$

$$e_4 = \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

$$\theta^1 = x^4 \cos x^3 \cos x^2 dx^1,$$

$$\theta^2 = x^4 \cos x^3 dx^2$$

$$\theta^3 = x^4 dx^3,$$

$$\theta^4 = dx^4.$$

$$dx^{1'} = -x^4 \cos x^3 \cos x^2 \sin x^1 dx^1 - x^4 \cos x^3 \sin x^2 \cos x^1 dx^2$$

$$- x^4 \sin x^3 \cos x^2 \cos x^1 dx^3 + \cos x^3 \cos x^2 \cos x^1 dx^4,$$

$$dx^{2'} = x^4 \cos x^3 \cos x^2 \cos x^1 dx^1 - x^4 \cos x^3 \sin x^2 \sin x^1 dx^2$$

$$- x^4 \sin x^3 \cos x^2 \sin x^1 dx^3 + \cos x^3 \cos x^2 \sin x^1 dx^4,$$

$$dx^{3'} = x^4 \cos x^3 \cos x^2 dx^2 - x^4 \sin x^3 \sin x^2 dx^3 + \cos x^3 \sin x^2 dx^4,$$

$$dx^{4'} = x^4 \cos x^3 dx^3 + \sin x^3 dx^4,$$

Annexe D : plan de Lobachevsky doté de coordonnées cartésiennes ; m = 2

x^1, x^2 coordonnées cartésiennes.

Le plan de Lobachevsky est le demi-plan $x^2 > 0$ muni de la base naturelle $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2})$ et de la base naturelle duale (dx^1, dx^2) et doté du champ de tenseur métrique défini ci-après.

Connexion imposée a priori

Soit la connexion imposée ayant pour symboles de Christoffel de 2^e espèce :

$$\Gamma_{1.1}^1 = 0, \Gamma_{1.2}^1 = -(x^2)^{-1}, \Gamma_{2.1}^1 = -(x^2)^{-1}, \Gamma_{2.2}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{1.1}^2 = (x^2)^{-1}, \Gamma_{1.2}^2 = 0, \Gamma_{2.1}^2 = 0, \Gamma_{2.2}^2 = -(x^2)^{-1}.$$

On constate que $\Gamma_{a.c}^b = \Gamma_{c.a}^b$; cette connexion est symétrique.

Calcul des dérivées classiques des $\Gamma_{a.c}^b$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^1} &= 0, \frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^1} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^1}, \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^2} = (x^2)^{-2} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{2.2}^1}{\partial x^1} &= 0, \frac{\partial \Gamma_{2.2}^1}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^1} &= 0, \frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} = -(x^2)^{-2} \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^2}{\partial x^1} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^2}{\partial x^1}, \frac{\partial \Gamma_{1.2}^2}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{2.2}^2}{\partial x^1} &= 0, \frac{\partial \Gamma_{2.2}^2}{\partial x^2} = (x^2)^{-2} \end{aligned}$$

Torsion

$$\tilde{S}_{ac}^b = \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = 0 ; \text{ cette connexion est sans torsion.}$$

Courbure

$$\tilde{R}_{a.cd}^b = \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\tilde{R}_{a.dc}^b \text{ et on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{1.12}^1 &= 0 = -\tilde{R}_{1.21}^1 \\ \tilde{R}_{1.12}^2 &= (x^2)^{-2} = -\tilde{R}_{1.21}^2 \\ \tilde{R}_{2.12}^1 &= -(x^2)^{-2} = -\tilde{R}_{2.21}^1 \\ \tilde{R}_{2.12}^2 &= 0 = -\tilde{R}_{2.21}^2. \end{aligned}$$

Champ de tenseurs de Ricci

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{11} &= -\tilde{R}_{1.12}^2 = -(x^2)^{-2}, \\ \tilde{R}_{12} &= \tilde{R}_{1.12}^1 = 0, \\ \tilde{R}_{21} &= -\tilde{R}_{2.12}^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{R}_{22} = \tilde{R}_{2,12}^1 = -(x^2)^{-2}.$$

Champ de tenseur métrique (symétrique)

$g \triangleq \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b$, avec :

$$(\tilde{g}_{ab}) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2)^{-2} & 0 \\ 0 & (x^2)^{-2} \end{bmatrix}. \text{ Donc } \tilde{g} = (x^2)^{-4}.$$

La connexion riemannienne associée est la seule qui vérifie :

$$\Gamma_{a,c}^b = \tilde{g}^{bd} \Gamma_{ac,d} = \Gamma_{c,a}^b \text{ (symboles de Christoffel de 2^e espèce) avec :}$$

$$\Gamma_{ab,c} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} \right) = \Gamma_{ba,c} \text{ (symboles de Christoffel de 1^e espèce).}$$

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11,1} &= 0 \\ \Gamma_{11,2} &= (x^2)^{-3} \\ \Gamma_{12,1} &= -(x^2)^{-3} = \Gamma_{21,1} \\ \Gamma_{12,2} &= 0 = \Gamma_{21,2} \\ \Gamma_{22,1} &= 0 \\ \Gamma_{22,2} &= -(x^2)^{-3}. \end{aligned}$$

Calcul des symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a,c}^b$:

On trouve qu'il s'agit des symboles de Christoffel de 2^e espèce précédents.

On vérifie que $\Gamma_{1,1}^1 + \Gamma_{1,2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = 0$ et

$$\Gamma_{2,1}^1 + \Gamma_{2,2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = -\frac{2}{x^2}.$$

Calcul du champ de tenseurs de torsion :

Il est nul car la connexion est riemannienne. C'est bien ce que nous avons trouvé précédemment.

Calcul du champ de tenseurs de courbure :

On trouve $\tilde{R}_{2112} = -(x^2)^{-4}$ et on retrouve bien les coefficients $\tilde{R}_{1,12}^1$, $\tilde{R}_{1,12}^2$, $\tilde{R}_{2,12}^1$, $\tilde{R}_{2,12}^2$.

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$:

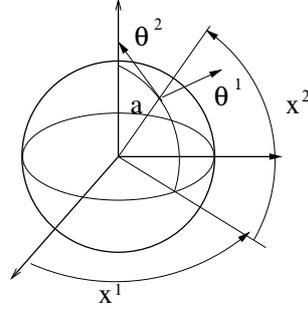
$$2K = 2 \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}} = -2.$$

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K :

$K = \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}} = -1$. On trouve bien que le plan de Lobachevsky est d'courbure négative.

Annexe E : La sphère S^2 (de rayon a) : $m = 2$

x^1, x^2 coordonnées locales (curvilignes) (cf. figure).



$(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2})$ base naturelle.

(dx^1, dx^2) base naturelle duale.

(e_1, e_2) base mobile telle que $e_1 \triangleq \frac{1}{a \cos x^2} \frac{\partial}{\partial x^1}$ et $e_2 \triangleq \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^2}$.

(θ^1, θ^2) base mobile duale, donc telle que $\theta^1 = a \cos x^2 dx^1$ et $\theta^2 = a dx^2$.

Passages entre bases et bases duales

$$(\tilde{e}_j^c) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 & \tilde{e}_1^2 \\ \tilde{e}_2^1 & \tilde{e}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a \cos x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \text{ et :}$$

$$(\tilde{\theta}_d^i) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1^1 & \tilde{\theta}_1^2 \\ \tilde{\theta}_2^1 & \tilde{\theta}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos x^2 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \text{ matrices inverses l'une de l'autre.}$$

$$\det(\tilde{e}_j^c) = \frac{1}{a^2 \cos x^2} \text{ et } \det(\tilde{\theta}_d^i) = a^2 \cos x^2.$$

Seules dérivées classiques des \tilde{e}_j^c et des $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial \tilde{e}_1^1}{\partial x^2} = \frac{\sin x^2}{a \cos^2 x^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_1^1}{\partial x^2} = -a \sin x^2.$$

Seules dérivées pfaffiennes des \tilde{e}_j^c et des $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\partial_2 \tilde{e}_1^1 = \frac{\sin x^2}{a^2 \cos^2 x^2}, \quad \partial_2 \tilde{\theta}_1^1 = -\sin x^2.$$

Calcul des coefficients de structure de la base mobile :

$$c_{i.k}^j = \tilde{e}_i^c \partial_k \tilde{\theta}_e^j - \tilde{e}_k^c \partial_i \tilde{\theta}_e^j.$$

Tous les coefficients de structure sont nuls sauf :

$$c_{1.2}^1 = -\frac{\sin x^2}{a \cos x^2} = -c_{2.1}^1.$$

On a bien $c_{k.i}^j = -c_{i.k}^j$.

Seules dérivées classiques des $c_{i,j}^k$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial c_{1,2}^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{a \cos^2 x^2} = -\frac{\partial c_{2,1}^1}{\partial x^2}.$$

Seules dérivées pfafiennes des $c_{i,j}^k$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\partial_2 c_{1,2}^1 = -\frac{1}{a^2 \cos^2 x^2} = -\partial_2 c_{2,1}^2.$$

Connexion imposée a priori

Soit la connexion imposée a priori ayant les 2 seuls coefficients de connexion non nuls, parmi les 8 :

$$\gamma_{1,1}^2 = \frac{\sin x^2}{a \cos x^2}, \quad \gamma_{1,2}^1 = -\frac{\sin x^2}{a \cos x^2}.$$

Seules dérivées classiques des $\gamma_{i,k}^j$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial \gamma_{1,2}^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{a \cos^2 x^2}, \quad \frac{\partial \gamma_{1,1}^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a \cos^2 x^2}.$$

Seules dérivées pfafiennes des $\gamma_{i,k}^j$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\partial_2 \gamma_{1,2}^1 = -\frac{1}{a^2 \cos^2 x^2}, \quad \partial_2 \gamma_{1,1}^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 x^2}.$$

On en déduit les symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a,c}^b$:

$$\Gamma_{a,c}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i,k}^j + \tilde{e}_j^b \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}.$$

Seuls symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a,c}^b$ non nuls ; il y en a 3 :

$$\Gamma_{1,1}^2 = \cos x^2 \sin x^2, \quad \Gamma_{1,2}^1 = -\frac{\sin x^2}{\cos x^2} = \Gamma_{2,1}^1.$$

On constate que $\Gamma_{a,c}^b = \Gamma_{c,a}^b$ alors que $\gamma_{i,k}^j \neq \gamma_{k,i}^j$.

Seules dérivées classiques des $\Gamma_{a,c}^b$ non nulles ; il y en a 3 :

$$\frac{\partial \Gamma_{1,1}^2}{\partial x^2} = \cos^2 x^2 - \sin^2 x^2, \quad \frac{\partial \Gamma_{1,2}^1}{\partial x^1} = -\frac{1}{\cos^2 x^2} = \frac{\partial \Gamma_{2,1}^1}{\partial x^1}.$$

Torsion

$$S_{ik}^{\cdot j} = \gamma_{i,k}^j - \gamma_{k,i}^j - c_{i,k}^j = -S_{ki}^{\cdot j} \text{ et } \tilde{S}_{ac}^{\cdot b} = \Gamma_{a,c}^b - \Gamma_{c,a}^b = -\tilde{S}_{ca}^{\cdot b}.$$

Le calcul montre que $S_{ik}^{\cdot j} = 0$; $i, j, k = 1, 2$. Cette connexion est sans torsion (on verra pourquoi ci-après).

Plus simplement $\tilde{S}_{ac}^{\cdot b} = \Gamma_{a,c}^b - \Gamma_{c,a}^b = 0$ on retrouve que cette connexion est sans torsion.

Courbure

$$R_{i,kl}^j = \partial_k \gamma_{l,i}^j - \partial_l \gamma_{k,i}^j - c_{k,l}^m \gamma_{m,i}^j + \gamma_{k,m}^j \gamma_{l,i}^m - \gamma_{k,i}^m \gamma_{l,m}^j = -R_{i,lk}^j \text{ et on obtient :}$$

$$\begin{aligned}
R_{1.12}^1 &= 0 = -R_{1.21}^1, & R_{1.12}^2 &= -\frac{1}{a^2} = -R_{1.21}^2, \\
R_{2.12}^1 &= \frac{1}{a^2} = -R_{2.21}^1, & R_{2.12}^2 &= 0 = -R_{2.21}^2. \\
\tilde{R}_{a.cd}^b &= \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\tilde{R}_{a.dc}^b \text{ ou} \\
\tilde{R}_{a.cd}^b &= \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i.kl}^j = -\tilde{R}_{a.dc}^b.
\end{aligned}$$

La seconde relation conduit au résultat beaucoup plus rapidement que la première et on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1.12}^1 &= 0 = -\tilde{R}_{1.21}^1, & \tilde{R}_{1.12}^2 &= -\cos^2 x^2 = -\tilde{R}_{1.21}^2, \\
\tilde{R}_{2.12}^1 &= 1 = -\tilde{R}_{2.21}^1, & \tilde{R}_{2.12}^2 &= 0 = -\tilde{R}_{2.21}^2.
\end{aligned}$$

Champ de tenseurs de Ricci

$R_{il} = R_{i.jl}^j$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -R_{1.12}^2 = \frac{1}{a^2}, & R_{12} &= R_{1.12}^1 = 0, \\
R_{21} &= -R_{2.12}^2 = 0, & R_{22} &= R_{2.12}^1 = \frac{1}{a^2}.
\end{aligned}$$

$\tilde{R}_{il} = \tilde{R}_{i.jl}^j$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{11} &= -\tilde{R}_{1.12}^2 = \cos^2 x^2, & R_{12} &= \tilde{R}_{1.12}^1 = 0, \\
R_{21} &= -\tilde{R}_{2.21}^2 = 0, & R_{22} &= \tilde{R}_{2.12}^1 = 1.
\end{aligned}$$

Champ de tenseur métrique (symétrique)

$$g \triangleq g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b.$$

La connexion riemannienne associée est la seule qui vérifie :

$$\begin{aligned}
[ij, k] &\triangleq \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \\
\gamma_{i.k}^j &= g^{jl} [ik, l] - \frac{1}{2} (c_{k.l}^m g_{im} g^{jl} + c_{i.l}^m g_{km} g^{jl} - c_{i.k}^j).
\end{aligned}$$

Exemple de tenseur métrique

$g_{ij} = \delta_{ij}$; alors $\tilde{g}_{ab} = \tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_b^j \delta_{ij}$; soit :

$$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; g \triangleq \det(g_{ij}) = 1 \text{ et :}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{g}_{ab}) &= \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \cos^2 x^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} ; \\
\tilde{g} \triangleq \det(\tilde{g}_{ab}) &= a^4 \cos^2 x^2.
\end{aligned}$$

Calcul des coefficients de connexion $\gamma_{i,k}^j$ et des symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a,c}^b$:

On trouve qu'il s'agit des coefficients de connexion et des symboles de Christoffel de 2^e espèce précédents.

$$\text{On vérifie que } \Gamma_{1.1}^1 + \Gamma_{1.2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = 0 \text{ et}$$

$$\Gamma_{2.1}^1 + \Gamma_{2.2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = -\frac{\sin x^2}{\cos x^2}.$$

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$:

$$\Gamma_{ab,c} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} \right) = \Gamma_{ba,c}.$$

Seuls symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$ non nuls ; il y en a 3 :

$$\Gamma_{11,2} = a^2 \cos x^2 \sin x^2, \Gamma_{12,1} = -a^2 \cos x^2 \sin x^2 = \Gamma_{21,1}.$$

Calcul du champ de tenseurs de torsion :

Il est nul car la connexion est riemannienne. C'est bien ce que nous avons trouvé précédemment.

Calcul du champ de tenseurs de courbure :

C'est le champ de tenseurs de courbure que nous avons trouvé précédemment et maintenant on a :

$$R_{2112} = \frac{1}{a^2} (= R_{2.12}^1) \text{ et } \tilde{R}_{2112} = a^2 \cos^2 x^2 (= a^2 \cos^2 x^2 \tilde{R}_{2.12}^1).$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$:

$$2K = 2 \frac{R_{2112}}{g} = 2 \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}} = \frac{2}{a^2}.$$

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K :

$$K = \frac{R_{2112}}{g} = \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}} = \frac{1}{a^2}.$$

Calcul de la courbure en tant que surface $M = S^2$ de $N = \mathbb{R}^3$, avec les coordonnées curvilignes x^1, x^2

Soit :

$$\begin{aligned} x^{1'} &= y^1 = f^1(x^1, x^2) = a \cos x^2 \cos x^1, \\ x^{2'} &= y^2 = f^2(x^1, x^2) = a \cos x^2 \sin x^1, \\ y^3 &= f^3(x^1, x^2) = a \sin x^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\bullet f = a \begin{bmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^2 \sin x^1 \\ \sin x^2 \end{bmatrix}, f_{x^1} = a \cos x^2 \begin{bmatrix} -\sin x^1 \\ \cos x^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_{x^2} \triangleq a \begin{bmatrix} -\sin x^2 \cos x^1 \\ -\sin x^2 \sin x^1 \\ \cos x^2 \end{bmatrix}$$

$$[f_{x^1}, f_{x^2}] = a^2 \cos x^2 \begin{bmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^2 \sin x^1 \\ \sin x^2 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^2 \sin x^1 \\ \sin x^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}_{11} = E = \|f_{x^1}\|^2 = a^2 \cos^2 x^2,$$

$$\tilde{g}_{12} = F = \langle f_{x^1}, f_{x^2} \rangle = 0,$$

$$\tilde{g}_{22} = G = \|f_{x^2}\|^2 = a^2.$$

$$\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ab}) = \tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2 = a^4 \cos^2 x^2$$

$$f_{x^1 x^1} = -a \cos x^2 \begin{bmatrix} \cos x^1 \\ \sin x^1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_{x^1 x^2} = a \sin x^2 \begin{bmatrix} \sin x^1 \\ -\cos x^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_{x^2 x^2} = -a \begin{bmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^2 \sin x^1 \\ \sin x^2 \end{bmatrix}.$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^1 x^1}) = -a \cos^2 x^2,$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^1 x^2}) = 0,$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^2 x^2}) = -a.$$

$$\Delta = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 = a^2 \cos^2 x^2.$$

$$K = \frac{\Delta}{\tilde{g}} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{\tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2} = \frac{1}{a^2}.$$

On retrouve, bien entendu, le résultat précédent.

Calcul de la courbure en tant que surface $M = S^2$ de $N = \mathbb{R}^3$, avec les coordonnées cartésiennes $x^{1'} = y^1, x^{2'} = y^2$

$y^3 = \bar{f}^3(y^1, y^2) = \sqrt{a^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2}$ (du moins pour l'hémisphère tel que $y^3 \geq 0$).

$$\bar{f}_{y^1}^3 = -\frac{y^1}{y^3}, \bar{f}_{y^2}^3 = -\frac{y^2}{y^3}.$$

$$\tilde{g}_{1'1'} = E' = \|\bar{f}_{y^1}\|^2 = 1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 = \frac{(y^1)^2 + (y^3)^2}{(y^3)^2} = \frac{a^2 - (y^2)^2}{(y^3)^2},$$

$$\tilde{g}_{1'2'} = F' = \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3 = \frac{y^1 y^2}{(y^3)^2},$$

$$\tilde{g}_{2'2'} = G' = \|\bar{f}_{y^2}\|^2 = 1 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2 = \frac{(y^2)^2 + (y^3)^2}{(y^3)^2} = \frac{a^2 - (y^1)^2}{(y^3)^2}.$$

$$\tilde{g}' = 1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2 = \det(\tilde{g}_{a'b'}) = \tilde{g}_{1'1'} \tilde{g}_{2'2'} - (\tilde{g}_{1'2'})^2 = \frac{a^2}{(y^3)^2}.$$

Remarque : Comme $d = f_{x_1}^1 f_{x_2}^2 - f_{x_1}^2 f_{x_2}^1 = a^2 \cos x^2 \sin x^2$ on a bien $\tilde{g} = d^2 \tilde{g}' = a^4 \cos^2 x^2$.

$$\bar{f}_{y^1 y^1}^3 = -\frac{(y^1)^2 + (y^3)^2}{(y^3)^3} = -\frac{a^2 - (y^2)^2}{(y^3)^3},$$

$$\bar{f}_{y^1 y^2}^3 = -\frac{y^1 y^2}{(y^3)^3},$$

$$\bar{f}_{y^2 y^2}^3 = -\frac{(y^2)^2 + (y^3)^2}{(y^3)^3} = -\frac{a^2 - (y^1)^2}{(y^3)^3}.$$

$$\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2 = \frac{a^2}{(y^3)^4}$$

$K = \frac{\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2}{[1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2]^2} = \frac{1}{a^2}$, on retrouve, une fois de plus le résultat précédent.

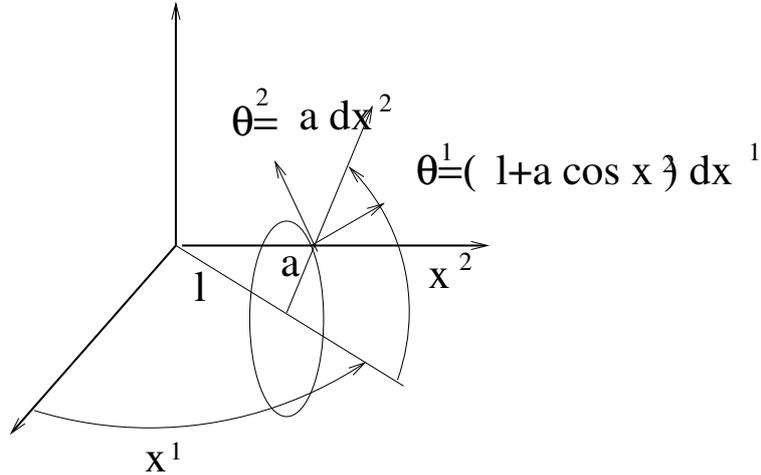
Équation cartésienne de la sphère :

$$F(y^1, y^2, y^3) = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 - a^2 = 0.$$

Il s'agit donc d'une surface de degré 2.

Annexe F : le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ (de paramètres l et a); $m = 2$

x^1, x^2 coordonnées locales (curvilignes) (cf. figure).



On suppose $l \geq a > 0$ (ou $l = 0$ qui correspondant à la sphère S^2 de rayon a et permet de comparer avec l'Annexe E).

$(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2})$ base naturelle.

(dx^1, dx^2) base naturelle duale.

(e_1, e_2) base mobile telle que $e_1 \triangleq \frac{1}{l+a \cos x^2} \frac{\partial}{\partial x^1}$ et $e_2 \triangleq \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^2}$.

(θ^1, θ^2) base mobile duale, donc telle que $\theta^1 = (l + a \cos x^2) dx^1$ et $\theta^2 = a dx^2$.

Passages entre bases et bases duales

$$(\tilde{e}_j^c) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 & \tilde{e}_1^2 \\ \tilde{e}_2^1 & \tilde{e}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l+a \cos x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \text{ et :}$$

$$(\tilde{\theta}_d^i) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1^1 & \tilde{\theta}_1^2 \\ \tilde{\theta}_2^1 & \tilde{\theta}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l + a \cos x^2 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \text{ matrices inverses l'une de l'autre.}$$

$$\det(\tilde{e}_j^c) = \frac{1}{a(l+a \cos x^2)} \text{ et } \det(\tilde{\theta}_d^i) = a(l+a \cos x^2).$$

Seules dérivées classiques des \tilde{e}_j^c et des $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles; il y en a 2 :

$$\frac{\partial \tilde{e}_1^1}{\partial x^2} = \frac{a \sin x^2}{(l+a \cos x^2)^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_1^1}{\partial x^2} = -a \sin x^2.$$

Seules dérivées pfaffiennes des \tilde{e}_j^c et des $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles; il y en a 2 :

$$\partial_2 \tilde{e}_1^1 = \frac{\sin x^2}{(l+a \cos x^2)^2}, \quad \partial_2 \tilde{\theta}_1^1 = -\sin x^2.$$

Calcul des coefficients de structure de la base mobile :

$$c_{i.k}^j = \tilde{e}_i^e \partial_k \tilde{\theta}_e^j - \tilde{e}_k^e \partial_i \tilde{\theta}_e^j.$$

Tous les coefficients de structure sont nuls sauf :

$$c_{1.2}^1 = -\frac{\sin x^2}{l+a \cos x^2} = -c_{2.1}^1.$$

On a bien $c_{k.i}^j = -c_{i.k}^j$.

Seules dérivées classiques des $c_{i.j}^k$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial c_{1.2}^1}{\partial x^2} = -\frac{a+l \cos x^2}{(l+a \cos x^2)^2} = -\frac{\partial c_{2.1}^1}{\partial x^2}.$$

Seules dérivées pfaffiennes des $c_{i.j}^k$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\partial_2 c_{1.2}^1 = -\frac{a+l \cos x^2}{a(l+a \cos x^2)^2} = -\partial_2 c_{2.1}^1.$$

Connexion imposée a priori

Soit la connexion imposée a priori ayant les 2 seuls coefficients de connexion non nuls, parmi les 8 :

$$\gamma_{1.1}^2 = \frac{\sin x^2}{l+a \cos x^2}, \quad \gamma_{1.2}^1 = -\frac{\sin x^2}{l+a \cos x^2}.$$

Seules dérivées classiques des $\gamma_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\frac{\partial \gamma_{1.2}^1}{\partial x^2} = -\frac{a+l \cos x^2}{(l+a \cos x^2)^2}, \quad \frac{\partial \gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} = \frac{a+l \cos x^2}{(l+a \cos x^2)^2}.$$

Seules dérivées pfaffiennes des $\gamma_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 2 :

$$\partial_2 \gamma_{1.2}^1 = -\frac{a+l \cos x^2}{a(l+a \cos x^2)^2}, \quad \partial_2 \gamma_{1.1}^2 = \frac{a+l \cos x^2}{a(l+a \cos x^2)^2}.$$

On en déduit les symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a.c}^b$:

$$\Gamma_{a.c}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \gamma_{i.k}^j + \tilde{e}_j^b \frac{\partial \tilde{\theta}_c^j}{\partial x^a}.$$

Seuls symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a.c}^b$ non nuls ; il y en a 3 :

$$\Gamma_{1.1}^2 = \frac{(l+a \cos x^2) \sin x^2}{a}, \quad \Gamma_{1.2}^1 = -\frac{a \sin x^2}{l+a \cos x^2} = \Gamma_{2.1}^1.$$

On constate que $\Gamma_{a.c}^b = \Gamma_{c.a}^b$ alors que $\gamma_{i.k}^j \neq \gamma_{k.i}^j$.

Seules dérivées classiques des $\Gamma_{a.c}^b$ non nulles ; il y en a 3 :

$$\frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} = \frac{l \cos x^2 + a(\cos^2 x^2 - \sin^2 x^2)}{a}, \quad \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^1} = -\frac{a(a+l \cos x^2)}{(l+a \cos x^2)^2} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^1}.$$

Torsion

$$S_{ik}^{\cdot j} = \gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j = -S_{ki}^{\cdot j} \text{ et } \tilde{S}_{ac}^{\cdot b} = \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = -\tilde{S}_{ca}^{\cdot b}.$$

Le calcul montre que $S_{ik}^j = 0$; $i, j, k = 1, 2$. Cette connexion est sans torsion (on verra pourquoi ci-après).

Plus simplement $\tilde{S}_{ac}^b = \Gamma_{a.c}^b - \Gamma_{c.a}^b = 0$ on retrouve que cette connexion est sans torsion.

Courbure

$R_{i.kl}^j = \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j = -R_{i.lk}^j$ et on obtient :

$$R_{1.12}^1 = 0 = -R_{1.21}^1, R_{1.12}^2 = -\frac{\cos x^2}{a(l+a \cos x^2)} = -R_{1.21}^2,$$

$$R_{2.12}^1 = \frac{\cos x^2}{a(l+a \cos x^2)} = -R_{2.21}^1, R_{2.12}^2 = 0 = -R_{2.21}^2.$$

$$\tilde{R}_{a.cd}^b = \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\tilde{R}_{a.dc}^b \text{ ou}$$

$$\tilde{R}_{a.cd}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i.kl}^j = -\tilde{R}_{a.dc}^b.$$

La seconde relation conduit au résultat beaucoup plus rapidement que la première et on obtient :

$$\tilde{R}_{1.12}^1 = 0 = -\tilde{R}_{1.21}^1, \tilde{R}_{1.12}^2 = -\frac{(l+a \cos x^2) \cos x^2}{a} = -\tilde{R}_{1.21}^2,$$

$$\tilde{R}_{2.12}^1 = \frac{a \cos x^2}{l+a \cos x^2} = -\tilde{R}_{2.21}^1, \tilde{R}_{2.12}^2 = 0 = -\tilde{R}_{2.21}^2.$$

Champ de tenseurs de Ricci

$R_{il} = R_{i.jl}^j$ et on obtient :

$$R_{11} = -R_{1.12}^2 = \frac{\cos x^2}{a(l+a \cos x^2)}, R_{12} = R_{1.12}^1 = 0,$$

$$R_{21} = -R_{2.12}^2 = 0, R_{22} = R_{2.12}^1 = \frac{\cos x^2}{a(l+a \cos x^2)}.$$

$\tilde{R}_{il} = \tilde{R}_{i.jl}^j$ et on obtient :

$$\tilde{R}_{11} = -\tilde{R}_{1.12}^2 = \frac{(l+a \cos x^2) \cos x^2}{a}, R_{12} = \tilde{R}_{1.12}^1 = 0,$$

$$R_{21} = -\tilde{R}_{2.21}^2 = 0, R_{22} = \tilde{R}_{2.12}^1 = \frac{a \cos x^2}{l+a \cos x^2}.$$

Champ de tenseur métrique (symétrique)

$$g \triangleq g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b.$$

La connexion riemannienne associée est la seule qui vérifie :

$$[ij, k] \triangleq \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}),$$

$$\gamma_{i.k}^j = g^{jl} [ik, l] - \frac{1}{2} (c_{k.l}^m g_{im} g^{jl} + c_{i.l}^m g_{km} g^{jl} - c_{i.k}^j).$$

Exemple de tenseur métrique

$$g_{ij} = \delta_{ij}; \text{ alors } \tilde{g}_{ab} = \tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_b^j \delta_{ij}; \text{ soit :}$$

$$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; g \triangleq \det(g_{ij}) = 1 \text{ et :}$$

$$(\tilde{g}_{ab}) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l + a \cos x^2)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix};$$

$$\tilde{g} \triangleq \det(\tilde{g}_{ab}) = a^2 (l + a \cos x^2)^2.$$

Calcul des coefficients de connexion $\gamma_{i,k}^j$ et des symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a,c}^b$:

On trouve qu'il s'agit des coefficients de connexion et des symboles de Christoffel de 2^e espèce précédents.

$$\text{On vérifie que } \Gamma_{1,1}^1 + \Gamma_{1,2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = 0 \text{ et}$$

$$\Gamma_{2,1}^1 + \Gamma_{2,2}^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = -\frac{a \sin x^2}{l + a \cos x^2}.$$

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$:

$$\Gamma_{ab,c} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial \tilde{g}_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^c} \right) = \Gamma_{ba,c}.$$

Seuls symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$ non nuls; il y en a 3 :

$$\Gamma_{11,2} = a \sin x^2 (l + a \cos x^2), \Gamma_{12,1} = -a \sin x^2 (l + a \cos x^2) = \Gamma_{21,1}.$$

Calcul du champ de tenseurs de torsion :

Il est nul car la connexion est riemannienne. C'est bien ce que nous avons trouvé précédemment.

Calcul du champ de tenseurs de courbure :

C'est le champ de tenseurs de courbure que nous avons trouvé précédemment et maintenant on a :

$$R_{2112} = \frac{\cos x^2}{a(l + a \cos x^2)} (= R_{2,12}^1) \text{ et :}$$

$$\tilde{R}_{2112} = a (l + a \cos x^2) \cos x^2 [= (l + a \cos x^2)^2 \tilde{R}_{2,12}^1].$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$:

$$2K = 2 \frac{R_{2112}}{g} = 2 \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}} = \frac{2 \cos x^2}{a(l + a \cos x^2)}.$$

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K :

$$K = \frac{R_{2112}}{g} = \frac{\tilde{R}_{2112}}{\tilde{g}} = \frac{\cos x^2}{a(l + a \cos x^2)}.$$

Calcul de la courbure en tant que surface $M = T^2$ de $N = \mathbb{R}^3$

Soit :

$$\begin{aligned} x^{1'} &= y^1 = f^1(x^1, x^2) = (l + a \cos x^2) \cos x^1, \\ x^{2'} &= y^2 = f^2(x^1, x^2) = (l + a \cos x^2) \sin x^1, \\ y^3 &= f^3(x^1, x^2) = a \sin x^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\bullet f = \begin{bmatrix} (l + a \cos x^2) \cos x^1 \\ (l + a \cos x^2) \sin x^1 \\ a \sin x^2 \end{bmatrix}, f_{x^1} = (l + a \cos x^2) \begin{bmatrix} -\sin x^1 \\ \cos x^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_{x^2} \triangleq \begin{bmatrix} -a \sin x^2 \cos x^1 \\ -a \sin x^2 \sin x^1 \\ a \cos x^2 \end{bmatrix}$$

$$[f_{x^1}, f_{x^2}] = a(l + a \cos x^2) \begin{bmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^2 \sin x^1 \\ \sin x^2 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^2 \sin x^1 \\ \sin x^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= E = \|f_{x^1}\|^2 = (l + a \cos x^2)^2, \\ \tilde{g}_{12} &= F = \langle f_{x^1}, f_{x^2} \rangle = 0, \\ \tilde{g}_{22} &= G = \|f_{x^2}\|^2 = a^2. \end{aligned}$$

$$\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ab}) = \tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2 = a^2 (l + a \cos x^2)^2$$

$$f_{x^1 x^1} = -(l + a \cos x^2) \begin{bmatrix} \cos x^1 \\ \sin x^1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_{x^1 x^2} = a \sin x^2 \begin{bmatrix} \sin x^1 \\ -\cos x^1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_{x^2 x^2} = -a \begin{bmatrix} \cos x^2 \cos x^1 \\ \cos x^2 \sin x^1 \\ \sin x^2 \end{bmatrix}.$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^1 x^1}) = -(l + a \cos x^2) \cos x^2,$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^1 x^2}) = 0,$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} (f_{x^1}, f_{x^2}, f_{x^2 x^2}) = -a.$$

$$\Delta = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 = a(l + a \cos x^2) \cos x^2.$$

$$K = \frac{\Delta}{\tilde{g}} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{\tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2} = \frac{\cos x^2}{a(l + a \cos x^2)}.$$

On retrouve, bien entendu, le résultat précédent.

Calcul de la courbure en tant que surface $M = T^2$ de $N = \mathbb{R}^3$, avec les coordonnées cartésiennes $x^{1'} = y^1$, $x^{2'} = y^2$

On a $(y^3)^2 = 2l \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} - [(y^1)^2 + (y^2)^2 + l^2 - a^2]$ et, pour la demi-partie du tore telle que $y^3 \geq 0$:

$$y^3 = \bar{f}^3(y^1, y^2) = \sqrt{2l \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} - [(y^1)^2 + (y^2)^2 + l^2 - a^2]}.$$

$$\bar{f}_{y^1}^3 = \frac{y^1 (l - \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2})}{y^3 \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}, \quad \bar{f}_{y^2}^3 = \frac{y^2 (l - \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2})}{y^3 \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}; \text{ avec } y^3 \text{ ci-devant.}$$

$$\tilde{g}_{1'1'} = E' = \|\bar{f}_{y^1}\|^2 = 1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 = \frac{a^2 (y^1)^2 + (y^2)^2 (y^3)^2}{(y^3)^2 [(y^1)^2 + (y^2)^2]},$$

$$\tilde{g}_{1'2'} = F' = \langle \bar{f}_{y^1}, \bar{f}_{y^2} \rangle = \bar{f}_{y^1}^3 \bar{f}_{y^2}^3 = \frac{y^1 y^2 [a^2 - (y^3)^2]}{(y^3)^2 [(y^1)^2 + (y^2)^2]},$$

$$\tilde{g}_{2'2'} = G' = \|\bar{f}_{y^2}\|^2 = 1 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2 = \frac{a^2 (y^2)^2 + (y^1)^2 (y^3)^2}{(y^3)^2 [(y^1)^2 + (y^2)^2]}; \text{ avec } y^3 \text{ ci-devant.}$$

$$\tilde{g}' = 1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2 = \det(\tilde{g}_{a'b'}) = \tilde{g}_{1'1'} \tilde{g}_{2'2'} - (\tilde{g}_{1'2'})^2 = \frac{a^2}{(y^3)^2}.$$

Remarque : Comme $d = f_{x^1}^1 f_{x^2}^2 - f_{x^1}^2 f_{x^2}^1 = a(l + a \cos x^2) \sin x^2$ on a bien $\tilde{g} = d^2 \tilde{g}' = a^2 (l + a \cos x^2)^2$.

Le calcul des dérivées partielles deuxièmes en fonction de y^1 , y^2 est complexe, nous allons l'effectuer en fonction de x^1 , x^2 . On trouve :

$$\bar{f}_{y^1 y^1}^3 = -\frac{a \cos x^2 \sin^2 x^2 \sin^2 x^1 + (l + a \cos x^2) \cos^2 x^1}{a (l + a \cos x^2) \sin^3 x^2},$$

$$\bar{f}_{y^1 y^2}^3 = -\frac{(l + a \cos^3 x^2) \cos x^1 \sin x^1}{a (l + a \cos x^2) \sin^3 x^2},$$

$$\bar{f}_{y^2 y^2}^3 = -\frac{a \cos x^2 \sin^2 x^2 \cos^2 x^1 + (l + a \cos x^2) \sin^2 x^1}{a (l + a \cos x^2) \sin^3 x^2},$$

$$\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2 = \frac{\cos x^2}{a (l + a \cos x^2) \sin^4 x^2}$$

$K = \frac{\bar{f}_{y^1 y^1}^3 \bar{f}_{y^2 y^2}^3 - (\bar{f}_{y^1 y^2}^3)^2}{[1 + (\bar{f}_{y^1}^3)^2 + (\bar{f}_{y^2}^3)^2]^2} = \frac{\cos x^2}{a (l + a \cos x^2)}$, on retrouve, une fois de plus le résultat précédent.

Introduction de coordonnées cartésiennes

Équation cartésienne du tore :

$$F(y^1, y^2, y^3) = [(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 - l^2 - a^2]^2 + 4l^2 (y^3)^2 - 4l^2 a^2 = 0.$$

Il s'agit donc d'une surface de degré 4.

Annexe G : démonstration des identités de Bianchi

Préliminaires

- On a vu la propriété des constantes de structure de la base mobile :

$$\partial_k c_{l,m}^o + \partial_l c_{m,k}^o + \partial_m c_{k,l}^o = -c_{l,m}^n c_{k,n}^o - c_{m,k}^n c_{l,n}^o - c_{k,l}^n c_{m,n}^o.$$

- Et on a vu que :

$$\begin{aligned} (\partial_l \partial_m - \partial_m \partial_l)(\gamma_{k,i}^j) &= \partial_l (\partial_m \gamma_{k,i}^j) - \partial_m (\partial_l \gamma_{k,i}^j) = c_{l,m}^n \partial_n \gamma_{k,i}^j, \\ (\partial_m \partial_k - \partial_k \partial_m)(\gamma_{l,i}^j) &= \partial_m (\partial_k \gamma_{l,i}^j) - \partial_k (\partial_m \gamma_{l,i}^j) = c_{m,k}^n \partial_n \gamma_{l,i}^j, \\ (\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k)(\gamma_{m,i}^j) &= \partial_k (\partial_l \gamma_{m,i}^j) - \partial_l (\partial_k \gamma_{m,i}^j) = c_{k,l}^n \partial_n \gamma_{m,i}^j. \end{aligned}$$

Démonstration des identités de Bianchi

$$\begin{aligned} \oint_{klm} (\nabla_{e_k} R)_{i,lm}^j &= (\nabla_{e_k} R)_{i,lm}^j + (\nabla_{e_l} R)_{i,mk}^j + (\nabla_{e_m} R)_{i,kl}^j \\ &= \partial_k R_{i,lm}^j + \gamma_{k,n}^j R_{i,lm}^n - \gamma_{k,i}^n R_{n,lm}^j - \gamma_{k,l}^n R_{i,nm}^j - \gamma_{k,m}^n R_{i,ln}^j \\ &+ \partial_l R_{i,mk}^j + \gamma_{l,n}^j R_{i,mk}^n - \gamma_{l,i}^n R_{n,mk}^j - \gamma_{l,m}^n R_{i,nk}^j - \gamma_{l,k}^n R_{i,mn}^j \\ &+ \partial_m R_{i,kl}^j + \gamma_{m,n}^j R_{i,kl}^n - \gamma_{m,i}^n R_{n,kl}^j - \gamma_{m,k}^n R_{i,nl}^j - \gamma_{m,l}^n R_{i,kn}^j \\ &= A + (\gamma_{m,l}^n - \gamma_{l,m}^n) R_{i,nk}^j + (\gamma_{k,m}^n - \gamma_{m,k}^n) R_{i,nl}^j + (\gamma_{l,k}^n - \gamma_{k,l}^n) R_{i,nm}^j, \text{ étant donné} \\ \text{que } R_{i,ml}^j &= -R_{i,lm}^j, R_{i,km}^j = -R_{i,mk}^j \text{ et } R_{i,lk}^j = -R_{i,kl}^j \text{ et avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \partial_k (\partial_l \gamma_{m,i}^j - \partial_m \gamma_{l,i}^j - c_{l,m}^n \gamma_{n,i}^j + \gamma_{l,n}^j \gamma_{m,i}^n - \gamma_{l,i}^n \gamma_{m,n}^j) \\ &+ \partial_l (\partial_m \gamma_{k,i}^j - \partial_k \gamma_{m,i}^j - c_{m,k}^n \gamma_{n,i}^j + \gamma_{m,n}^j \gamma_{k,i}^n - \gamma_{m,i}^n \gamma_{k,n}^j) \\ &+ \partial_m (\partial_k \gamma_{l,i}^j - \partial_l \gamma_{k,i}^j - c_{k,l}^n \gamma_{n,i}^j + \gamma_{k,n}^j \gamma_{l,i}^n - \gamma_{k,i}^n \gamma_{l,n}^j) \\ &+ \gamma_{k,n}^j (\partial_l \gamma_{m,i}^n - \partial_m \gamma_{l,i}^n - c_{l,m}^o \gamma_{o,i}^n + \gamma_{l,o}^n \gamma_{m,i}^o - \gamma_{l,i}^o \gamma_{m,o}^n) \\ &+ \gamma_{l,n}^j (\partial_m \gamma_{k,i}^n - \partial_k \gamma_{m,i}^n - c_{m,k}^o \gamma_{o,i}^n + \gamma_{m,o}^n \gamma_{k,i}^o - \gamma_{m,i}^o \gamma_{k,o}^n) \\ &+ \gamma_{m,n}^j (\partial_k \gamma_{l,i}^n - \partial_l \gamma_{k,i}^n - c_{k,l}^o \gamma_{o,i}^n + \gamma_{k,o}^n \gamma_{l,i}^o - \gamma_{k,i}^o \gamma_{l,o}^n) \\ &- \gamma_{k,i}^n (\partial_l \gamma_{m,n}^j - \partial_m \gamma_{l,n}^j - c_{l,m}^o \gamma_{o,n}^j + \gamma_{l,o}^j \gamma_{m,n}^o - \gamma_{l,n}^o \gamma_{m,o}^j) \\ &- \gamma_{l,i}^n (\partial_m \gamma_{k,n}^j - \partial_k \gamma_{m,n}^j - c_{m,k}^o \gamma_{o,n}^j + \gamma_{m,o}^j \gamma_{k,n}^o - \gamma_{m,n}^o \gamma_{k,o}^j) \\ &- \gamma_{m,i}^n (\partial_k \gamma_{l,n}^j - \partial_l \gamma_{k,n}^j - c_{k,l}^o \gamma_{o,n}^j + \gamma_{k,o}^j \gamma_{l,n}^o - \gamma_{k,n}^o \gamma_{l,o}^j) \end{aligned}$$

En permutant les indices muets n et o on constate la disparition de 12 termes et en calculant les dérivées pfaffiennes $\partial_k, \partial_l, \partial_m$ des 3 premiers termes on obtient :

$$\begin{aligned}
A &= (\partial_l \partial_m - \partial_m \partial_l) \gamma_{k,i}^j + (\partial_m \partial_k - \partial_k \partial_m) \gamma_{l,i}^j + (\partial_k \partial_l - \partial_l \partial_k) \gamma_{m,i}^j \\
&- \gamma_{n,i}^j \partial_k c_{l,m}^n - c_{l,m}^n \partial_k \gamma_{n,i}^j + \gamma_{m,i}^n \partial_k \gamma_{l,n}^j + \gamma_{l,n}^j \partial_k \gamma_{m,i}^n - \gamma_{m,n}^j \partial_k \gamma_{l,i}^n - \gamma_{l,i}^n \partial_k \gamma_{m,n}^j \\
&- \gamma_{n,i}^j \partial_l c_{m,k}^n - c_{m,k}^n \partial_l \gamma_{n,i}^j + \gamma_{k,i}^n \partial_l \gamma_{m,n}^j + \gamma_{m,n}^j \partial_l \gamma_{k,i}^n - \gamma_{k,n}^j \partial_l \gamma_{m,i}^n - \gamma_{m,i}^n \partial_l \gamma_{k,n}^j \\
&- \gamma_{n,i}^j \partial_m c_{k,l}^n - c_{k,l}^n \partial_m \gamma_{n,i}^j + \gamma_{l,i}^n \partial_m \gamma_{k,n}^j + \gamma_{k,n}^j \partial_m \gamma_{l,i}^n - \gamma_{l,n}^j \partial_m \gamma_{k,i}^n - \gamma_{k,i}^n \partial_m \gamma_{l,n}^j \\
&+ \gamma_{k,n}^j (\partial_l \gamma_{m,i}^n - \partial_m \gamma_{l,i}^n - c_{l,m}^o \gamma_{o,i}^n) \\
&+ \gamma_{l,n}^j (\partial_m \gamma_{k,i}^n - \partial_k \gamma_{m,i}^n - c_{m,k}^o \gamma_{o,i}^n) \\
&+ \gamma_{m,n}^j (\partial_k \gamma_{l,i}^n - \partial_l \gamma_{k,i}^n - c_{k,l}^o \gamma_{o,i}^n) \\
&- \gamma_{k,i}^n (\partial_l \gamma_{m,n}^j - \partial_m \gamma_{l,n}^j - c_{l,m}^o \gamma_{o,n}^j) \\
&- \gamma_{l,i}^n (\partial_m \gamma_{k,n}^j - \partial_k \gamma_{m,n}^j - c_{m,k}^o \gamma_{o,n}^j) \\
&- \gamma_{m,i}^n (\partial_k \gamma_{l,n}^j - \partial_l \gamma_{k,n}^j - c_{k,l}^o \gamma_{o,n}^j).
\end{aligned}$$

On constate la disparition de 24 termes et en utilisant le second point des préliminaires on obtient :

$$\begin{aligned}
A &= c_{l,m}^n \partial_n \gamma_{k,i}^j + c_{m,k}^n \partial_n \gamma_{l,i}^j + c_{k,l}^n \partial_n \gamma_{m,i}^j - \gamma_{o,i}^j (\partial_k c_{l,m}^o + \partial_l c_{m,k}^o + \partial_m c_{k,l}^o) \\
&+ c_{l,m}^n (-\partial_k \gamma_{n,i}^j + \gamma_{n,o}^j \gamma_{k,i}^o - \gamma_{n,i}^o \gamma_{k,o}^j) \\
&+ c_{m,k}^n (-\partial_l \gamma_{n,i}^j + \gamma_{n,o}^j \gamma_{l,i}^o - \gamma_{n,i}^o \gamma_{l,o}^j) \\
&+ c_{k,l}^n (-\partial_m \gamma_{n,i}^j + \gamma_{n,o}^j \gamma_{m,i}^o - \gamma_{n,i}^o \gamma_{m,o}^j).
\end{aligned}$$

Et en utilisant le premier point des préliminaires on obtient :

$$\begin{aligned}
A &= -c_{m,l}^n (\partial_n \gamma_{k,i}^j - \partial_k \gamma_{n,i}^j - c_{n,k}^o \gamma_{o,i}^j + \gamma_{n,o}^j \gamma_{k,i}^o - \gamma_{n,i}^o \gamma_{k,o}^j) \\
&- c_{k,m}^n (\partial_n \gamma_{l,i}^j - \partial_l \gamma_{n,i}^j - c_{n,l}^o \gamma_{o,i}^j + \gamma_{n,o}^j \gamma_{l,i}^o - \gamma_{n,i}^o \gamma_{l,o}^j) \\
&- c_{l,k}^n (\partial_n \gamma_{m,i}^j - \partial_m \gamma_{n,i}^j - c_{n,m}^o \gamma_{o,i}^j + \gamma_{n,o}^j \gamma_{m,i}^o - \gamma_{n,i}^o \gamma_{m,o}^j) \\
&= -c_{m,l}^n R_{i,nk}^j - c_{k,m}^n R_{i,nl}^j - c_{l,k}^n R_{i,nm}^j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Alors } \oint_{klm} (\nabla_{e_k} R)_{i,lm}^j \\
&= (\gamma_{m,l}^n - \gamma_{l,m}^n - c_{m,l}^n) R_{i,nk}^j + (\gamma_{k,m}^n - \gamma_{m,k}^n - c_{k,m}^n) R_{i,nl}^j + (\gamma_{l,k}^n - \gamma_{k,l}^n - c_{l,k}^n) R_{i,nm}^j \\
&= S_{ml}^n R_{i,nk}^j + S_{km}^n R_{i,nl}^j + S_{lk}^n R_{i,nm}^j = \oint_{klm} S_{ml}^n R_{i,nk}^j \quad \text{QED.}
\end{aligned}$$

Annexe H : démonstration des autres identités entre les champs de torsion et de courbure

$$S \in C^\infty(U; \bigotimes_2^1 T^*M) \text{ (cas } G) \text{ et } \nabla_{e_i} S \in C^\infty(U; \bigotimes_2^1 T^*M) \text{ (cas } G);$$

avec

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i} S)_{kl}^{\cdot j} &\triangleq \partial_i S_{kl}^{\cdot j} + \gamma_{i.m}^j S_{kl}^{\cdot m} - \gamma_{i.k}^m S_{ml}^{\cdot j} - \gamma_{i.l}^m S_{km}^{\cdot j}. \text{ Donc :} \\ \oint_{ikl} [(\nabla_{e_i} S)_{kl}^{\cdot j} - S_{kl}^{\cdot m} S_{im}^{\cdot j}] \\ &\triangleq (\nabla_{e_i} S)_{kl}^{\cdot j} - S_{kl}^{\cdot m} S_{im}^{\cdot j} + (\nabla_{e_k} S)_{li}^{\cdot j} - S_{li}^{\cdot m} S_{km}^{\cdot j} + (\nabla_{e_l} S)_{ik}^{\cdot j} - S_{ik}^{\cdot m} S_{lm}^{\cdot j} \\ &= \partial_i S_{kl}^{\cdot j} + \gamma_{i.m}^j S_{kl}^{\cdot m} - \gamma_{i.k}^m S_{ml}^{\cdot j} - \gamma_{i.l}^m S_{km}^{\cdot j} - S_{kl}^{\cdot m} S_{im}^{\cdot j} \\ &+ \partial_k S_{li}^{\cdot j} + \gamma_{k.m}^j S_{li}^{\cdot m} - \gamma_{k.l}^m S_{mi}^{\cdot j} - \gamma_{k.i}^m S_{lm}^{\cdot j} - S_{li}^{\cdot m} S_{km}^{\cdot j} \\ &+ \partial_l S_{ik}^{\cdot j} + \gamma_{l.m}^j S_{ik}^{\cdot m} - \gamma_{l.i}^m S_{mk}^{\cdot j} - \gamma_{l.k}^m S_{im}^{\cdot j} - S_{ik}^{\cdot m} S_{lm}^{\cdot j} \\ &= \partial_i(\gamma_{k.l}^j - \gamma_{l.k}^j - c_{k.l}^j) + \gamma_{i.m}^j(\gamma_{k.l}^m - \gamma_{l.k}^m - c_{k.l}^m) - \gamma_{i.k}^m(\gamma_{m.l}^j - \gamma_{l.m}^j - c_{m.l}^j) \\ &- \gamma_{i.l}^m(\gamma_{k.m}^j - \gamma_{m.k}^j - c_{k.m}^j) - (\gamma_{i.k}^m - \gamma_{l.k}^m - c_{k.l}^m)(\gamma_{i.m}^j - \gamma_{m.i}^j - c_{i.m}^j) \\ &+ \partial_k(\gamma_{l.i}^j - \gamma_{i.l}^j - c_{l.i}^j) + \gamma_{k.m}^j(\gamma_{l.i}^m - \gamma_{i.l}^m - c_{l.i}^m) - \gamma_{k.l}^m(\gamma_{m.i}^j - \gamma_{i.m}^j - c_{m.i}^j) \\ &- \gamma_{k.i}^m(\gamma_{l.m}^j - \gamma_{m.l}^j - c_{l.m}^j) - (\gamma_{l.i}^m - \gamma_{i.l}^m - c_{l.i}^m)(\gamma_{k.m}^j - \gamma_{m.k}^j - c_{k.m}^j) \\ &+ \partial_l(\gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j) + \gamma_{l.m}^j(\gamma_{i.k}^m - \gamma_{k.i}^m - c_{i.k}^m) - \gamma_{l.i}^m(\gamma_{m.k}^j - \gamma_{k.m}^j - c_{m.k}^j) \\ &- \gamma_{l.k}^m(\gamma_{i.m}^j - \gamma_{m.i}^j - c_{i.m}^j) - (\gamma_{i.k}^m - \gamma_{k.i}^m - c_{i.k}^m)(\gamma_{l.m}^j - \gamma_{m.l}^j - c_{l.m}^j). \end{aligned}$$

Il y a 63 termes dans le membre de droite de l'équation précédente. 46 termes se simplifient 2 à 2 et les 6 termes de la somme suivante :

$-[(c_{k.l}^m c_{i.m}^j + \partial_i c_{k.l}^j) + (c_{l.i}^m c_{k.m}^j + \partial_k c_{l.i}^j) + (c_{i.k}^m c_{l.m}^j + \partial_l c_{i.k}^j)]$ disparaissent en raison de la propriété annoncée des constantes de structure de la base mobile.

Il reste donc 15 termes dans le membre de droite de l'équation précédente et :

$$\begin{aligned} \oint_{ikl} [(\nabla_{e_i} S)_{kl}^{\cdot j} - S_{kl}^{\cdot m} S_{im}^{\cdot j}] \\ &= \partial_k \gamma_{l,i}^j - \partial_l \gamma_{k,i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m,i}^j + \gamma_{k,m}^j \gamma_{l,i}^m - \gamma_{k,i}^m \gamma_{l,m}^j \\ &+ \partial_l \gamma_{i,k}^j - \partial_i \gamma_{l,k}^j - c_{l,i}^m \gamma_{m,k}^j + \gamma_{l,m}^j \gamma_{i,k}^m - \gamma_{l,k}^m \gamma_{i,m}^j \\ &+ \partial_i \gamma_{k,l}^j - \partial_k \gamma_{i,l}^j - c_{i.k}^m \gamma_{m,l}^j + \gamma_{i,m}^j \gamma_{k,l}^m - \gamma_{i,l}^m \gamma_{k,m}^j \\ &= R_{i.kl}^j + R_{k.li}^j + R_{l.ik}^j = \oint_{ikl} R_{i.kl}^j \text{ QED.} \end{aligned}$$

Annexe I : Exemple tiré de [8]¹² ; il correspond à $m = 3$

x^1, x^2, x^3 coordonnées,

$(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$ base naturelle,

(dx^1, dx^2, dx^3) base naturelle duale,

(e_1, e_2, e_3) base mobile telle que :

$e_1 = D e^{x^3} \frac{\partial}{\partial x^1}$, $e_2 = P \frac{\partial}{\partial x^1} + D \frac{\partial}{\partial x^2}$ et $e_3 = -x^2 P \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 D \frac{\partial}{\partial x^2} + D \frac{\partial}{\partial x^3}$,
avec $D \triangleq 2 + (x^2)^2$ et $P = 2x^1 x^2$.

$(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ base mobile duale, donc telle que :

$$\theta^1 = D^{-1} e^{-x^3} dx^1 - P D^{-2} e^{-x^3} dx^2,$$

$$\theta^2 = D^{-1} dx^2 + x^2 D^{-1} dx^3 \text{ et}$$

$$\theta^3 = D^{-1} dx^3.$$

Soient $\Delta \triangleq 2 - (x^2)^2$ [et donc $\Delta D = 4 - (x^2)^4$]; alors $\frac{\partial D}{\partial x^2} = 2x^2$ et $\frac{\partial \Delta}{\partial x^2} = -2x^2$.

De plus $\frac{\partial D^{-1}}{\partial x^2} = -2x^2 D^{-2}$.

Passages entre bases et bases duales :

$$(\tilde{e}_j^c) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^1 & \tilde{e}_1^2 & \tilde{e}_1^3 \\ \tilde{e}_2^1 & \tilde{e}_2^2 & \tilde{e}_2^3 \\ \tilde{e}_3^1 & \tilde{e}_3^2 & \tilde{e}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D e^{x^3} & 0 & 0 \\ P & D & 0 \\ -x^2 P & -x^2 D & D \end{bmatrix} \text{ et :}$$

$$(\tilde{\theta}_d^i) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1^1 & \tilde{\theta}_1^2 & \tilde{\theta}_1^3 \\ \tilde{\theta}_2^1 & \tilde{\theta}_2^2 & \tilde{\theta}_2^3 \\ \tilde{\theta}_3^1 & \tilde{\theta}_3^2 & \tilde{\theta}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1} e^{-x^3} & 0 & 0 \\ -P D^{-2} e^{-x^3} & D^{-1} & 0 \\ 0 & x^2 D^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix},$$

matrices inverses l'une de l'autre. $\det(\tilde{e}_j^c) = D^3 e^{x^3}$ et $\det(\tilde{\theta}_d^i) = D^{-3} e^{-x^3}$.

Seules dérivées classiques des \tilde{e}_j^c et $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{e}_1^1}{\partial x^2} &= 2x^2 e^{x^3}, & \frac{\partial \tilde{e}_1^1}{\partial x^3} &= D e^{x^3}, \\ \frac{\partial \tilde{e}_2^1}{\partial x^1} &= 2x^2, & \frac{\partial \tilde{e}_2^1}{\partial x^2} &= 2x^1, \\ \frac{\partial \tilde{e}_2^2}{\partial x^2} &= 2x^2, \\ \frac{\partial \tilde{e}_3^1}{\partial x^1} &= -2(x^2)^2, & \frac{\partial \tilde{e}_3^1}{\partial x^2} &= -4x^1 x^2, \\ \frac{\partial \tilde{e}_3^2}{\partial x^2} &= -[2 + 3(x^2)^2], \\ \frac{\partial \tilde{e}_3^3}{\partial x^2} &= 2x^2. \end{aligned}$$

12. pp. 45-46 Problème 6

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\theta}_1^1}{\partial x^2} &= -2x^2 D^{-2} e^{-x^3}, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_1^1}{\partial x^3} = -D^{-1} e^{-x^3}, \\
\frac{\partial \tilde{\theta}_2^1}{\partial x^1} &= -2x^2 D^{-2} e^{-x^3}, \\
\frac{\partial \tilde{\theta}_2^1}{\partial x^2} &= -2x^1 [2 - 3(x^2)^2] D^{-3} e^{-x^3}, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_2^1}{\partial x^3} = 2x^1 x^2 D^{-2} e^{-x^3}, \\
\frac{\partial \tilde{\theta}_2^2}{\partial x^2} &= -2x^2 D^{-2}, \\
\frac{\partial \tilde{\theta}_3^2}{\partial x^2} &= \Delta D^{-2}, \\
\frac{\partial \tilde{\theta}_3^3}{\partial x^2} &= -2x^2 D^{-2}.
\end{aligned}$$

Seules dérivées pfaffiennes des \tilde{e}_j^c et $\tilde{\theta}_d^i$ non nulles :

$$\begin{aligned}
\partial_2 \tilde{e}_1^1 &= 2x^2 D e^{x^3}, \quad \partial_3 \tilde{e}_1^1 = \Delta D e^{x^3}, \\
\partial_1 \tilde{e}_2^1 &= 2x^2 D e^{x^3}, \quad \partial_2 \tilde{e}_2^1 = 2x^1 [2 + 3(x^2)^2], \quad \partial_3 \tilde{e}_2^1 = -2x^1 x^2 [2 + 3(x^2)^2], \\
\partial_2 \tilde{e}_2^2 &= 2x^2 D, \quad \partial_3 \tilde{e}_2^2 = -2(x^2)^2 D, \\
\partial_1 \tilde{e}_3^1 &= -2(x^2)^2 D e^{x^3}, \quad \partial_2 \tilde{e}_3^1 = -8x^1 x^2 [1 + (x^2)^2], \\
\partial_3 \tilde{e}_3^1 &= 8x^1 (x^2)^2 [1 + (x^2)^2], \\
\partial_2 \tilde{e}_3^2 &= -[2 + 3(x^2)^2] D, \quad \partial_3 \tilde{e}_3^2 = x^2 [2 + 3(x^2)^2] D, \\
\partial_2 \tilde{e}_3^3 &= 2x^2 D, \quad \partial_3 \tilde{e}_3^3 = -2(x^2)^2 D. \\
\partial_2 \tilde{\theta}_1^1 &= -2x^2 D^{-1} e^{-x^3}, \quad \partial_3 \tilde{\theta}_1^1 = -\Delta D^{-1} e^{-x^3}, \\
\partial_1 \tilde{\theta}_2^1 &= -2x^2 D^{-1}, \quad \partial_2 \tilde{\theta}_2^1 = -2x^1 \Delta D^{-2} e^{-x^3}, \quad \partial_3 \tilde{\theta}_2^1 = 8x^1 x^2 D^{-2} e^{-x^3}, \\
\partial_2 \tilde{\theta}_2^2 &= -2x^2 D^{-1}, \quad \partial_3 \tilde{\theta}_2^2 = 2(x^2)^2 D^{-1}, \\
\partial_2 \tilde{\theta}_3^2 &= \Delta D^{-1}, \quad \partial_3 \tilde{\theta}_3^2 = -x^2 \Delta D^{-1}, \\
\partial_2 \tilde{\theta}_3^3 &= -2x^2 D^{-1}, \quad \partial_3 \tilde{\theta}_3^3 = 2(x^2)^2 D^{-1}.
\end{aligned}$$

Calcul des coefficients de structure de la base mobile :

$$c_{i.k}^j = \tilde{e}_i^e \partial_k \tilde{\theta}_e^j - \tilde{e}_k^e \partial_i \tilde{\theta}_e^j.$$

Tous les coefficients de structure sont nuls sauf :

$$c_{1.3}^1 = -D = -c_{3.1}^1, \quad c_{2.3}^2 = -\Delta = -c_{3.2}^2, \quad c_{2.3}^3 = 2x^2 = -c_{3.2}^3.$$

On a bien $c_{k.i}^j = -c_{i.k}^j$.

Seules dérivées classiques des $c_{i.k}^j$ non nulles :

$$\frac{\partial c_{1.3}^1}{\partial x^2} = -2x^2 = -\frac{\partial c_{3.1}^1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial c_{2.3}^2}{\partial x^2} = 2x^2 = -\frac{\partial c_{3.2}^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial c_{2.3}^3}{\partial x^2} = 2 = -\frac{\partial c_{3.2}^3}{\partial x^2}.$$

Seules dérivées pfaffiennes des $c_{i.k}^j$ non nulles :

$$\begin{aligned}
\partial_2 c_{1.3}^1 &= -2x^2 D = -\partial_2 c_{3.1}^1, \quad \partial_3 c_{1.3}^1 = 2(x^2)^2 D = -\partial_3 c_{3.1}^1, \\
\partial_2 c_{2.3}^2 &= 2x^2 D = -\partial_2 c_{3.2}^2, \quad \partial_3 c_{2.3}^2 = -2(x^2)^2 D = -\partial_3 c_{3.2}^2, \\
\partial_2 c_{2.3}^3 &= 2D = -\partial_2 c_{3.2}^3, \quad \partial_3 c_{2.3}^3 = -2x^2 D = -\partial_3 c_{3.2}^3.
\end{aligned}$$

Connexion imposée a priori

Soit la connexion imposée a priori ayant les 6 seuls coefficients de connexion non nuls, parmi les 27 :

$$\gamma_{1.1}^3 = D, \gamma_{1.3}^1 = -D, \gamma_{2.2}^3 = \Delta, \gamma_{2.3}^2 = -\Delta, \gamma_{3.2}^3 = -2x^2, \gamma_{3.3}^2 = 2x^2.$$

On en déduit les symboles de Christoffel de 2^e espèce :

$$\Gamma_{a.c}^b = \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \Gamma_{i.k}^j + \tilde{e}_j^b \frac{\partial \tilde{\theta}_a^j}{\partial x^a}.$$

Le calcul donne (il y en a 18 de caractéristiques) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{1.1}^1 &= -2x^1 (x^2)^2 D^{-1} e^{-2x^3}, \\ \Gamma_{1.2}^1 &= 4(x^1)^2 (x^2)^3 D^{-2} e^{-2x^3} - 2x^2 D^{-1} = \Gamma_{2.1}^1, \\ \Gamma_{1.3}^1 &= -1 = \Gamma_{3.1}^1, \\ \Gamma_{1.1}^2 &= -x^2 e^{-2x^3}, \\ \Gamma_{1.2}^2 &= 2x^1 (x^2)^2 D^{-1} e^{-2x^3} = \Gamma_{2.1}^2, \\ \Gamma_{1.3}^2 &= 0 = \Gamma_{3.1}^2, \\ \Gamma_{1.1}^3 &= e^{-2x^3}, \\ \Gamma_{1.2}^3 &= -2x^1 x^2 D^{-1} e^{-2x^3} = \Gamma_{2.1}^3, \\ \Gamma_{1.3}^3 &= 0 = \Gamma_{3.1}^3, \\ \Gamma_{2.2}^1 &= -8(x^1)^3 (x^2)^4 D^{-3} e^{-2x^3} - 2x^1 [1 + (x^2)^2] \Delta D^{-2}, \\ \Gamma_{2.3}^1 &= 2x^1 x^2 [2 + (x^2)^2 + (x^2)^4] D^{-2} = \Gamma_{3.2}^1, \\ \Gamma_{2.2}^2 &= -4(x^1)^2 (x^2)^3 D^{-2} e^{-2x^3} - x^2 [4 - (x^2)^2] D^{-1}, \\ \Gamma_{2.3}^2 &= (x^2)^4 D^{-1} = \Gamma_{3.2}^2, \\ \Gamma_{2.2}^3 &= 4(x^1)^2 (x^2)^2 D^{-2} e^{-2x^3} + \Delta D^{-1}, \\ \Gamma_{2.3}^3 &= -(x^2)^3 D^{-1} = \Gamma_{3.2}^3, \\ \Gamma_{3.3}^1 &= 2x^1 (x^2)^4 [1 + (x^2)^2] D^{-2}, \\ \Gamma_{3.3}^2 &= (x^2)^3 [1 + (x^2)^2] D^{-1}, \\ \Gamma_{3.3}^3 &= -(x^2)^4 D^{-1}. \end{aligned}$$

On constate que $\Gamma_{a.c}^b = \Gamma_{c.a}^b$ alors que $\gamma_{i.k}^j \neq \gamma_{k.i}^j$ et on remarque que :

$$\Gamma_{1.1}^1 = -\Gamma_{1.2}^2 = -\Gamma_{2.1}^2 \text{ et } \Gamma_{2.3}^2 = \Gamma_{3.2}^2 = -\Gamma_{3.3}^3.$$

Torsion

$$S_{ik}^{\cdot j} = \gamma_{i.k}^j - \gamma_{k.i}^j - c_{i.k}^j = -S_{ki}^{\cdot j}.$$

Le calcul montre que $S_{ik}^{\cdot j} = 0$; $i, j, k = 1, 2, 3$. Cette connexion est sans torsion (on verra pourquoi ci-après).

Plus simplement $\tilde{S}_{ac}^{\cdot b} = \Gamma_{a.c}^{\cdot b} - \Gamma_{c.a}^{\cdot b} = 0$, on retrouve que cette connexion est sans torsion.

Seules dérivées classiques des $\gamma_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 6 :

$$\frac{\partial \gamma_{1.1}^3}{\partial x^2} = 2x^2, \quad \frac{\partial \gamma_{1.3}^1}{\partial x^2} = -2x^2, \quad \frac{\partial \gamma_{2.2}^3}{\partial x^2} = -2x^2, \quad \frac{\partial \gamma_{2.3}^2}{\partial x^2} = 2x^2, \quad \frac{\partial \gamma_{3.2}^3}{\partial x^2} = -2, \\ \frac{\partial \gamma_{3.3}^2}{\partial x^2} = 2.$$

Seules dérivées pfaffiennes des $\gamma_{i.k}^j$ non nulles ; il y en a 12 :

$$\begin{aligned} \partial_2 \gamma_{1.1}^3 &= 2x^2 D, \quad \partial_3 \gamma_{1.1}^3 = -2(x^2)^2 D, \\ \partial_2 \gamma_{1.3}^1 &= -2x^2 D, \quad \partial_3 \gamma_{1.3}^1 = 2(x^2)^2 D, \\ \partial_2 \gamma_{2.2}^3 &= -2x^2 D, \quad \partial_3 \gamma_{2.2}^3 = 2(x^2)^2 D, \\ \partial_2 \gamma_{2.3}^2 &= 2x^2 D, \quad \partial_3 \gamma_{2.3}^2 = -2(x^2)^2 D, \\ \partial_2 \gamma_{3.2}^3 &= -2D, \quad \partial_3 \gamma_{3.2}^3 = 2x^2 D, \\ \partial_2 \gamma_{3.3}^2 &= 2D, \quad \partial_3 \gamma_{3.3}^2 = -2x^2 D. \end{aligned}$$

Calcul des dérivées classiques des $\Gamma_{a.c}^{\cdot b}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^1} &= -2(x^2)^2 D^{-1} e^{-2x^3} \text{ (n'intervient pas par la suite)}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^2} &= -8x^1 x^2 D^{-2} e^{-2x^3}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^3} &= 4x^1 (x^2)^2 D^{-1} e^{-2x^3}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^1} &= 8x^1 (x^2)^3 D^{-2} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^2} &= 4(x^1)^2 (x^2)^6 [6 - (x^2)^2] D^{-3} e^{-2x^3} - 2\Delta D^{-2} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^1}{\partial x^3} &= -8(x^1)^2 (x^2)^3 D^{-2} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^1}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.3}^1}{\partial x^1} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3.1}^1}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.3}^1}{\partial x^2} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3.1}^1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.3}^1}{\partial x^3} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3.1}^1}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^1} &= 0 \text{ (n'intervient pas par la suite)}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^2} &= -e^{-2x^3}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.1}^2}{\partial x^3} &= 2x^2 e^{-2x^3}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^2}{\partial x^1} &= 2(x^2)^2 D^{-1} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^2}{\partial x^1} = -\frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^2}{\partial x^2} &= 8x^1 x^2 D^{-2} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^2}{\partial x^2} = -\frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.2}^2}{\partial x^3} &= -4x^1 (x^2)^2 D^{-1} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2.1}^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial \Gamma_{1.1}^1}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.3}^2}{\partial x^1} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3.1}^2}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.3}^2}{\partial x^2} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3.1}^2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \Gamma_{1.3}^2}{\partial x^3} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3.1}^2}{\partial x^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{1,1}^3}{\partial x^1} &= 0 \text{ (n'intervient pas par la suite),} \\
\frac{\partial \Gamma_{1,1}^3}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial \Gamma_{1,1}^3}{\partial x^3} &= -2 e^{-2x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{1,2}^3}{\partial x^1} &= -2 x^2 D^{-1} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2,1}^3}{\partial x^1}, \\
\frac{\partial \Gamma_{1,2}^3}{\partial x^2} &= -2 x^1 \Delta D^{-2} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2,1}^3}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{1,2}^3}{\partial x^3} &= 4 x^1 x^2 D^{-1} e^{-2x^3} = \frac{\partial \Gamma_{2,1}^3}{\partial x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{1,3}^3}{\partial x^1} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,1}^3}{\partial x^1}, \\
\frac{\partial \Gamma_{1,3}^3}{\partial x^2} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,1}^3}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{1,3}^3}{\partial x^3} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,1}^3}{\partial x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^1}{\partial x^1} &= -24 (x^1)^2 (x^2)^4 D^{-3} e^{-2x^3} - 2 [1 + (x^2)^2] \Delta D^{-2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^1}{\partial x^2} &= -16 (x^1)^3 (x^2)^3 [4 - (x^2)^2] D^{-4} e^{-2x^3} + 4 x^1 x^2 [2 + 5 (x^2)^2] D^{-3} \\
&\text{(n'intervient pas par la suite),} \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^1}{\partial x^3} &= 16 (x^1)^3 (x^2)^4 D^{-3} e^{-2x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^1}{\partial x^1} &= 2 x^2 [2 + (x^2)^2 + (x^2)^4] D^{-2} = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^1}{\partial x^1}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^1}{\partial x^2} &= 2 x^1 [4 + 9 (x^2)^4 + (x^2)^6] D^{-3} = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^1}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^1}{\partial x^3} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^1}{\partial x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^2}{\partial x^1} &= -8 x^1 (x^2)^3 D^{-2} e^{-2x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^2}{\partial x^2} &= -4 (x^1)^2 (x^2)^2 [6 - (x^2)^2] D^{-3} e^{-2x^3} + [-8 + 10 (x^2)^2 + (x^2)^4] D^{-2} \\
&\text{(n'intervient pas par la suite),} \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^2}{\partial x^3} &= 8 (x^1)^2 (x^2)^3 D^{-2} e^{-2x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^2}{\partial x^1} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^2}{\partial x^1}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^2}{\partial x^2} &= 2 (x^2)^3 [4 + (x^2)^2] D^{-2} = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^2}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^2}{\partial x^3} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^2}{\partial x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^3}{\partial x^1} &= 8 x^1 (x^2)^2 D^{-2} e^{-2x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^3}{\partial x^2} &= 8 (x^1)^2 x^2 \Delta D^{-3} e^{-2x^3} - 8 x^2 D^{-2} \text{ (n'intervient pas par la suite),} \\
\frac{\partial \Gamma_{2,2}^3}{\partial x^3} &= -8 (x^1)^2 (x^2)^2 D^{-2} e^{-2x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^3}{\partial x^1} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^3}{\partial x^1}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^3}{\partial x^2} &= -(x^2)^2 [6 + (x^2)^2] D^{-2} = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^3}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{2,3}^3}{\partial x^3} &= 0 = \frac{\partial \Gamma_{3,2}^3}{\partial x^3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{3,3}^1}{\partial x^1} &= 2 (x^2)^4 [1 + (x^2)^2] D^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^1}{\partial x^2} &= 4x^1 (x^2)^3 [4 + 6(x^2)^2 + (x^2)^4] D^{-3}, \\
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^1}{\partial x^3} &= 0 \text{ (n'intervient pas par la suite)}, \\
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^2}{\partial x^1} &= 0, \\
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^2}{\partial x^2} &= (x^2)^2 [3 + (x^2)^2] [2 + 3(x^2)^2] D^{-2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^2}{\partial x^3} &= 0 \text{ (n'intervient pas par la suite)}, \\
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^3}{\partial x^1} &= 0, \\
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^3}{\partial x^2} &= -2(x^2)^3 [4 + (x^2)^2] D^{-2} = -\frac{\partial \Gamma_{2.3}^2}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{3.3}^3}{\partial x^3} &= 0 \text{ (n'intervient pas par la suite)}.
\end{aligned}$$

Courbure

En base mobile :

$$R_{i.kl}^j = \partial_k \gamma_{l.i}^j - \partial_l \gamma_{k.i}^j - c_{k.l}^m \gamma_{m.i}^j + \gamma_{k.m}^j \gamma_{l.i}^m - \gamma_{k.i}^m \gamma_{l.m}^j = -R_{i.lk}^j.$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
R_{1.12}^1 &= 0 = -R_{1.21}^1, \\
R_{1.12}^2 &= \Delta D = -R_{1.21}^2, \\
R_{1.12}^3 &= -2x^2 D = -R_{1.21}^3, \\
R_{2.12}^1 &= -\Delta D = -R_{2.21}^1, \\
R_{2.12}^2 &= 0 = -R_{2.21}^2, \\
R_{2.12}^3 &= 0 = -R_{2.21}^3, \\
R_{3.12}^1 &= 2x^2 D = -R_{3.21}^1, \\
R_{3.12}^2 &= 0 = -R_{3.21}^2, \\
R_{3.12}^3 &= 0 = -R_{3.21}^3, \\
R_{1.13}^1 &= 0 = -R_{1.31}^1, \\
R_{1.13}^2 &= -2x^2 D = -R_{1.31}^2, \\
R_{1.13}^3 &= [2 + 3(x^2)^2] D = -R_{1.31}^3, \\
R_{2.13}^1 &= 2x^2 D = -R_{2.31}^1, \\
R_{2.13}^2 &= 0 = -R_{2.31}^2, \\
R_{2.13}^3 &= 0 = -R_{2.31}^3, \\
R_{3.13}^1 &= -[2 + 3(x^2)^2] D = -R_{3.31}^1, \\
R_{3.13}^2 &= 0 = -R_{3.31}^2, \\
R_{3.13}^3 &= 0 = -R_{3.31}^3, \\
R_{1.23}^1 &= 0 = -R_{1.32}^1, \\
R_{1.23}^2 &= 0 = -R_{1.32}^2, \\
R_{1.23}^3 &= 0 = -R_{1.32}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{2.23}^1 &= 0 = -R_{2.32}^1, \\
R_{2.23}^2 &= 0 = -R_{2.32}^2, \\
R_{2.23}^3 &= -(x^2)^2 [6 + (x^2)^2] = -R_{2.32}^3, \\
R_{3.23}^1 &= 0 = -R_{3.32}^1, \\
R_{3.23}^2 &= (x^2)^2 [6 + (x^2)^2] = -R_{3.32}^2, \\
R_{3.23}^3 &= 0 = -R_{3.32}^3.
\end{aligned}$$

On constate que :

$$\begin{aligned}
R_{1.12}^1 + R_{2.12}^2 + R_{3.12}^3 &= 0, \\
R_{1.13}^1 + R_{2.13}^2 + R_{3.13}^3 &= 0, \\
R_{1.23}^1 + R_{2.23}^2 + R_{3.23}^3 &= 0.
\end{aligned}$$

C'est normal parce que l'on verra qu'en fait la connexion est riemannienne.

Comme $S = 0$ on a $\oint_{ijkl} R_{i.kl}^j = 0$, ce qui ne donne de relations intéressantes que pour i, k, l tous différents ; à savoir :

$$\begin{aligned}
R_{2.13}^1 &= R_{1.23}^1 + R_{3.12}^1 = 0 + R_{3.12}^1 = 2x^2 D, \\
R_{2.13}^2 &= R_{1.23}^2 + R_{3.12}^2 = 0 + 0 = 0, \\
R_{2.13}^3 &= R_{1.23}^3 + R_{3.12}^3 = 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

En base naturelle :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{a.cd}^b &= \frac{\partial \Gamma_{d.a}^b}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{c.a}^b}{\partial x^d} + \Gamma_{c.e}^b \Gamma_{d.a}^e - \Gamma_{c.a}^e \Gamma_{d.e}^b = -\tilde{R}_{a.dc}^b \text{ ou :} \\
\tilde{R}_{a.cd}^b &= \tilde{\theta}_a^i \tilde{e}_j^b \tilde{\theta}_c^k \tilde{\theta}_d^l R_{i.kl}^j = -\tilde{R}_{a.dc}^b.
\end{aligned}$$

La seconde relation conduit au résultat beaucoup plus rapidement que la première et on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1.12}^1 &= 2x^1 x^2 D^{-1} e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{1.21}^1, \\
\tilde{R}_{1.12}^2 &= e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{1.21}^2, \\
\tilde{R}_{1.12}^3 &= -2x^2 D^{-1} e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{1.21}^3, \\
\tilde{R}_{2.12}^1 &= -[4 - (x^2)^4 + 4(x^1)^2 (x^2)^2] e^{-2x^3} D^{-2} = -\tilde{R}_{2.21}^1, \\
\tilde{R}_{2.12}^2 &= -2x^1 x^2 D^{-1} e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{2.21}^2, \\
\tilde{R}_{2.12}^3 &= 4x^1 (x^2)^2 D^{-2} e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{2.21}^3, \\
\tilde{R}_{3.12}^1 &= (x^2)^3 D^{-1} = -\tilde{R}_{3.21}^1, \\
\tilde{R}_{3.12}^2 &= 0 = -\tilde{R}_{3.21}^2, \\
\tilde{R}_{3.12}^3 &= 0 = -\tilde{R}_{3.21}^3, \\
\tilde{R}_{1.13}^1 &= -4x^1 (x^2)^2 [1 + (x^2)^2] D^{-2} e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{1.31}^1, \\
\tilde{R}_{1.13}^2 &= -2x^2 [1 + (x^2)^2] D^{-1} e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{1.31}^2, \\
\tilde{R}_{1.13}^3 &= e^{-2x^3} = -\tilde{R}_{1.31}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{2.13}^1 &= 8(x^1)^2(x^2)^3[1+(x^2)^2]D^{-3}e^{-2x^3}+(x^2)^3D^{-1}=-\tilde{R}_{2.31}^1, \\
\tilde{R}_{2.13}^2 &= 4x^1(x^2)^2[1+(x^2)^2]D^{-2}e^{-2x^3}=-\tilde{R}_{2.31}^2, \\
\tilde{R}_{2.13}^3 &= -2x^1x^2D^{-1}e^{-2x^3}=-\tilde{R}_{2.31}^3, \\
\tilde{R}_{3.13}^1 &= -[1+(x^2)^2]\Delta D^{-1}=-\tilde{R}_{3.31}^1, \\
\tilde{R}_{3.13}^2 &= 0=-\tilde{R}_{3.31}^2, \\
\tilde{R}_{3.13}^3 &= 0=-\tilde{R}_{3.31}^3, \\
\tilde{R}_{1.23}^1 &= 8(x^1)^2(x^2)^3[1+(x^2)^2]D^{-3}e^{-2x^3}=-\tilde{R}_{1.32}^1, \\
\tilde{R}_{1.23}^2 &= 4x^1(x^2)^2[1+(x^2)^2]D^{-2}e^{-2x^3}=-\tilde{R}_{1.32}^2, \\
\tilde{R}_{1.23}^3 &= -2x^1x^2D^{-1}e^{-2x^3}=-\tilde{R}_{1.32}^3, \\
\tilde{R}_{2.23}^1 &= -16(x^1)^3(x^2)^4[1+(x^2)^2]D^{-4}e^{-2x^3}+8x^1(x^2)^4D^{-3}=-\tilde{R}_{2.32}^1, \\
\tilde{R}_{2.23}^2 &= -8(x^1)^2(x^2)^3[1+(x^2)^2]D^{-3}e^{-2x^3}+(x^2)^3[6+(x^2)^2]D^{-2}=-\tilde{R}_{2.32}^2, \\
\tilde{R}_{2.23}^3 &= -(x^2)^2[6+(x^2)^2-4(x^1)^2e^{-2x^3}]D^{-2}=-\tilde{R}_{2.32}^3, \\
\tilde{R}_{3.23}^1 &= 4x^1x^2[2+3(x^2)^2][1+(x^2)^2]D^{-3}=-\tilde{R}_{3.32}^1, \\
\tilde{R}_{3.23}^2 &= (x^2)^2[6+(x^2)^2][1+(x^2)^2]D^{-2}=-\tilde{R}_{3.32}^2, \\
\tilde{R}_{3.23}^3 &= -(x^2)^3[6+(x^2)^2]D^{-2}=-\tilde{R}_{3.32}^3.
\end{aligned}$$

On constate que :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{1.12}^1 + \tilde{R}_{2.12}^2 + \tilde{R}_{3.12}^3 &= 0, \\
\tilde{R}_{1.13}^1 + \tilde{R}_{2.13}^2 + \tilde{R}_{3.13}^3 &= 0, \\
\tilde{R}_{1.23}^1 + \tilde{R}_{2.23}^2 + \tilde{R}_{3.23}^3 &= 0.
\end{aligned}$$

C'est normal parce que l'on verra qu'en fait la connexion est riemannienne.

On constate que $\tilde{R}_{2.13}^1 = \tilde{R}_{1.23}^1 + \tilde{R}_{3.12}^1$, que $\tilde{R}_{2.13}^2 = \tilde{R}_{1.23}^2 = -\tilde{R}_{1.13}^1$ et que $\tilde{R}_{2.13}^3 = \tilde{R}_{1.23}^3 = \tilde{R}_{2.12}^2 = -\tilde{R}_{1.12}^1$. Ceci s'explique en partie du fait que $S = 0$ et donc que l'on a $\oint_{acd} \tilde{R}_{a.cd}^b = 0$, ce qui ne donne de relations intéressantes que pour a, c, d tous différents ; à savoir :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{2.13}^1 &= \tilde{R}_{1.23}^1 + \tilde{R}_{3.12}^1, \\
\tilde{R}_{2.13}^2 &= \tilde{R}_{1.23}^2 + \tilde{R}_{3.12}^2 = \tilde{R}_{1.23}^2 + 0 = \tilde{R}_{1.23}^2, \\
\tilde{R}_{2.13}^3 &= \tilde{R}_{1.23}^3 + \tilde{R}_{3.12}^3 = \tilde{R}_{1.23}^3 + 0 = \tilde{R}_{1.23}^3.
\end{aligned}$$

Champ de tenseurs de Ricci

$$R_{il} = R_{i.jl}^j.$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -R_{1.12}^2 - R_{1.13}^3 = -2 D^2, \\
R_{12} &= R_{1.12}^1 - R_{1.23}^3 = 0, \\
R_{13} &= R_{1.13}^1 + R_{1.23}^2 = 0, \\
R_{21} &= -R_{2.12}^2 - R_{2.13}^3 = 0, \\
R_{22} &= R_{2.12}^1 - R_{2.23}^3 = 2 [-2 + 3 (x^2)^2 + (x^2)^4], \\
R_{23} &= R_{2.13}^1 + R_{2.23}^2 = 2 x^2 D, \\
R_{31} &= -R_{3.12}^2 - R_{3.13}^3 = 0, \\
R_{32} &= R_{3.12}^1 - R_{3.23}^3 = 2 x^2 D, \\
R_{33} &= R_{3.13}^1 + R_{3.23}^2 = -2 [2 + (x^2)^2 + (x^2)^4].
\end{aligned}$$

On constate que $R_{li} = R_{il}$; le champ de tenseurs de Ricci est symétrique. C'est parce que l'on verra qu'en fait la connexion est riemannienne.

$$\tilde{R}_{ad} = \tilde{R}_{a.bd}^b \text{ ou } \tilde{R}_{ad} = \tilde{\theta}_a^i \tilde{\theta}_d^j R_{ij}.$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{11} &= -\tilde{R}_{1.12}^2 - \tilde{R}_{1.13}^3 = -2 e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{12} &= \tilde{R}_{1.12}^1 - \tilde{R}_{1.23}^3 = 4 x^1 x^2 D^{-1} e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{13} &= \tilde{R}_{1.13}^1 + \tilde{R}_{1.23}^2 = 0, \\
\tilde{R}_{21} &= -\tilde{R}_{2.12}^2 - \tilde{R}_{2.13}^3 = 4 x^1 x^2 D^{-1} e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{22} &= \tilde{R}_{2.12}^1 - \tilde{R}_{2.23}^3 = -8 (x^1)^2 (x^2)^2 D^{-2} e^{-2x^3} + 2 [(x^2)^4 + 3 (x^2)^2 - 2] D^{-2}, \\
\tilde{R}_{23} &= \tilde{R}_{2.13}^1 + \tilde{R}_{2.23}^2 = 2 (x^2)^3 [4 + (x^2)^2] D^{-2}, \\
\tilde{R}_{31} &= -\tilde{R}_{3.12}^2 - \tilde{R}_{3.13}^3 = 0, \\
\tilde{R}_{32} &= \tilde{R}_{3.12}^1 - \tilde{R}_{3.23}^3 = 2 (x^2)^3 [4 + (x^2)^2] D^{-2}, \\
\tilde{R}_{33} &= \tilde{R}_{3.13}^1 + \tilde{R}_{3.23}^2 = -2 [2 - 3 (x^2)^2 - (x^2)^4] [1 + (x^2)^2] D^{-2}.
\end{aligned}$$

On constate que $\tilde{R}_{li} = \tilde{R}_{il}$; on retrouve que le champ de tenseurs de Ricci est symétrique.

Champ de tenseur métrique (symétrique)

$$g \triangleq g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = \tilde{g}_{ab} dx^a \otimes dx^b.$$

La connexion riemannienne associée est la seule qui vérifie :

$$\begin{aligned}
[ij, k] &\triangleq \frac{1}{2} [\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}], \\
\gamma_{i.k}^j &= g^{jl} [ik, l] - \frac{1}{2} (c_{k.l}^m g_{im} g^{jl} + c_{i.l}^m g_{km} g^{jl} - c_{i.k}^j).
\end{aligned}$$

Exemple de tenseur métrique :

$$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ alors :}$$

$$(\tilde{g}_{ab}) = \begin{bmatrix} D^{-2} e^{-2x^3} & -2x^1 x^2 D^{-3} e^{-2x^3} & 0 \\ -2x^1 x^2 D^{-3} e^{-2x^3} & 4(x^1)^2 (x^2)^2 D^{-4} e^{-2x^3} + D^{-2} & x^2 D^{-2} \\ 0 & x^2 D^{-2} & [1 + (x^2)^2] D^{-2} \end{bmatrix} \text{ et :}$$

$$(\tilde{g}^{ab}) = \begin{bmatrix} 4(x^1)^2 (x^2)^2 [1 + (x^2)^2] + D^2 e^{2x^3} & 2x^1 x^2 [1 + (x^2)^2] D & -2x^1 (x^2)^2 D \\ 2x^1 x^2 [1 + (x^2)^2] D & [1 + (x^2)^2] D^2 & -x^2 D^2 \\ -2x^1 (x^2)^2 D & -x^2 D^2 & D^2 \end{bmatrix}.$$

$$g = 1 \text{ et } \tilde{g} = D^{-6} e^{-2x^3}.$$

Calcul des coefficients de connexion $\gamma_{i,k}^j$ et des symboles de Christoffel de 2^e espèce $\Gamma_{a,c}^b$:

On trouve qu'il s'agit des coefficients de connexion et des symboles de Christoffel de 2^e espèce précédents.

On vérifie que :

- $\Gamma_{1,1}^1 + \Gamma_{1,2}^2 + \Gamma_{1,3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = 0,$
- $\Gamma_{2,1}^1 + \Gamma_{2,2}^2 + \Gamma_{2,3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = -6x^2 D^{-1},$
- $\Gamma_{3,1}^1 + \Gamma_{3,2}^2 + \Gamma_{3,3}^3 = \frac{\partial}{\partial x^3} (\ln \sqrt{\tilde{g}}) = -1.$

Calcul des symboles de Christoffel de 1^e espèce $\Gamma_{ab,c}$:

$$\Gamma_{11,1} = 0,$$

$$\Gamma_{11,2} = 0,$$

$$\Gamma_{11,3} = D^{-2} e^{-2x^3},$$

$$\Gamma_{12,1} = -2x^2 D^{-3} e^{-2x^3} = \Gamma_{21,1},$$

$$\Gamma_{12,2} = 4x^1 (x^2)^2 D^{-4} e^{-2x^3} = \Gamma_{21,2},$$

$$\Gamma_{12,3} = -2x^1 x^2 D^{-3} e^{-2x^3} = \Gamma_{21,3},$$

$$\Gamma_{13,1} = -D^{-2} e^{-2x^3} = \Gamma_{31,1} = -\Gamma_{11,3},$$

$$\Gamma_{13,2} = 2x^1 x^2 D^{-3} e^{-2x^3} = \Gamma_{31,2} = -\Gamma_{12,3},$$

$$\Gamma_{13,3} = 0 = \Gamma_{31,3},$$

$$\Gamma_{22,1} = -2x^1 [2 - 3(x^2)^2] D^{-4} e^{-2x^3},$$

$$\Gamma_{22,2} = 4(x^1)^2 x^2 [2 - 3(x^2)^2] D^{-5} e^{-2x^3} - 2x^2 D^{-3},$$

$$\Gamma_{22,3} = 4(x^1)^2 (x^2)^2 D^{-4} e^{-2x^3} + [2 - 3(x^2)^2] D^{-3},$$

$$\Gamma_{23,1} = 2x^1 x^2 D^{-3} e^{-2x^3} = \Gamma_{32,1} = -\Gamma_{12,3} = \Gamma_{13,2},$$

$$\Gamma_{23,2} = -4(x^1)^2 (x^2)^2 D^{-4} e^{-2x^3} = \Gamma_{32,2},$$

$$\Gamma_{23,3} = -(x^2)^3 D^{-3} = \Gamma_{32,3},$$

$$\Gamma_{33,1} = 0,$$

$$\Gamma_{33,2} = (x^2)^3 D^{-3} = -\Gamma_{23,3},$$

$$\Gamma_{33,3} = 0.$$

Calcul du champ de tenseurs de torsion :

il est nul car la connexion est riemannienne. C'est bien ce que avons trouvé précédemment.

Calcul du champ de tenseurs de courbure :

il a été calculé précédemment et maintenant on a :

$$\begin{aligned}
R_{2112} &= -\Delta D (= R_{2,12}^1), \\
R_{2113} &= 2x^2 D (= R_{2,13}^1), \\
R_{2123} &= 0 (= R_{2,23}^1), \\
R_{3113} &= -[2 + 3(x^2)^2]D (= R_{3,13}^1), \\
R_{3123} &= 0 (= R_{3,23}^1), \\
R_{3223} &= (x^2)^2[6 + (x^2)^2] (= R_{3,23}^2). \\
\tilde{R}_{2112} &= -\Delta D^{-3} e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{2113} &= (x^2)^3 D^{-3} e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{2123} &= -2x^1 (x^2)^4 D^{-4} e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{3113} &= -[1 + (x^2)^2] \Delta D^{-3} e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{3123} &= 2x^1 x^2 [1 + (x^2)^2] \Delta D^{-4} e^{-2x^3}, \\
\tilde{R}_{3223} &= -4(x^1)^2 (x^2)^2 [1 + (x^2)^2] \Delta D^{-5} e^{-2x^3} + (x^2)^2 [6 + (x^2)^2] D^{-4}.
\end{aligned}$$

Courbure (riemannienne) scalaire $2K$:

$$2K = 2(R_{2112} + R_{3113} + R_{3223}) = -2[8 + 2(x^2)^2 + (x^2)^4].$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
2K &= \frac{2}{g} (\tilde{g}_{33} \tilde{R}_{2112} - 2\tilde{g}_{23} \tilde{R}_{2113} + 2\tilde{g}_{13} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}_{22} \tilde{R}_{3113} - 2\tilde{g}_{12} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}_{11} \tilde{R}_{3223}) \\
&= -2[8 + 2(x^2)^2 + (x^2)^4].
\end{aligned}$$

On retrouve, bien entendu, le résultat précédent.

Courbure totale ou courbure de Gauss ou courbure de Riemann K :

$$K = R_{2112} + R_{3113} + R_{3223} = -[8 + 2(x^2)^2 + (x^2)^4].$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{g} (\tilde{g}_{33} \tilde{R}_{2112} - 2\tilde{g}_{23} \tilde{R}_{2113} + 2\tilde{g}_{13} \tilde{R}_{2123} + \tilde{g}_{22} \tilde{R}_{3113} - 2\tilde{g}_{12} \tilde{R}_{3123} + \tilde{g}_{11} \tilde{R}_{3223}) \\
&= -[8 + 2(x^2)^2 + (x^2)^4].
\end{aligned}$$

On retrouve, bien entendu, le résultat précédent.

Tenseur d'Einstein

On trouve, en base mobile :

$$(G_{ij}) = \begin{bmatrix} -6(x^2)^2 - (x^2)^4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 8(x^2)^2 + 3(x^2)^4 & 4x^2 + 2(x^2)^3 \\ 0 & 4x^2 + 2(x^2)^3 & 4 - (x^2)^4 \end{bmatrix},$$

$$(G^i_j) = \begin{bmatrix} -6(x^2)^2 - (x^2)^4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 8(x^2)^2 + 3(x^2)^4 & 4x^2 + 2(x^2)^3 \\ 0 & 4x^2 + 2(x^2)^3 & 4 - (x^2)^4 \end{bmatrix},$$

$$(G^{ij}) = \begin{bmatrix} -6(x^2)^2 - (x^2)^4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 8(x^2)^2 + 3(x^2)^4 & 4x^2 + 2(x^2)^3 \\ 0 & 4x^2 + 2(x^2)^3 & 4 - (x^2)^4 \end{bmatrix},$$

et, en base naturelle :

$$(\tilde{G}_{ij}) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{13} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} & \tilde{G}_{23} \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \tilde{G}_{33} \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\tilde{G}_{11} = -(x^2)^2 [6 + (x^2)^2] D^{-2} e^{-2x^3},$$

$$\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{21} = 2x^1 (x^2)^3 [6 + (x^2)^2] D^{-3} e^{-2x^3},$$

$$\tilde{G}_{13} = \tilde{G}_{31} = 0,$$

$$\tilde{G}_{22} = -4(x^1)^2 (x^2)^4 [6 + (x^2)^2] D^{-4} e^{-2x^3} + [2 + 3(x^2)^2] D^{-1},$$

$$\tilde{G}_{23} = \tilde{G}_{32} = x^2 [4 + 3(x^2)^2] D^{-1},$$

$$\tilde{G}_{33} = [1 + (x^2)^2] [2 + 3(x^2)^2] D^{-1},$$

$$(\tilde{G}^i_j) = \begin{bmatrix} \tilde{G}^1_{.1} & \tilde{G}^1_{.3} & \tilde{G}^1_{.3} \\ \tilde{G}^1_{.1} & \tilde{G}^1_{.3} & \tilde{G}^1_{.3} \\ \tilde{G}^1_{.1} & \tilde{G}^1_{.3} & \tilde{G}^1_{.3} \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\tilde{G}^1_{.1} = -(x^2)^2 [6 + (x^2)^2],$$

$$\tilde{G}^1_{.2} = 4x^1 x^2 [2 + 5(x^2)^2 + (x^2)^4] D^{-1},$$

$$\tilde{G}^1_{.3} = 4x^1 (x^2)^2 [1 + (x^2)^2],$$

$$\tilde{G}^2_{.1} = 0,$$

$$\tilde{G}^2_{.2} = D^2,$$

$$\tilde{G}^2_{.3} = 2x^1 [1 + (x^2)^2] D,$$

$$\tilde{G}^3_{.1} = 0,$$

$$\tilde{G}^3_{.2} = 2x^2 D,$$

$$\tilde{G}^3_{.3} = D^2,$$

$$(\tilde{G}^{ij}) = \begin{bmatrix} \tilde{G}^{11} & \tilde{G}^{12} & \tilde{G}^{13} \\ \tilde{G}^{21} & \tilde{G}^{22} & \tilde{G}^{23} \\ \tilde{G}^{31} & \tilde{G}^{32} & \tilde{G}^{33} \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{11} &= -(x^2)^2 [6 + (x^2)^2] D^2 e^{2x^3} + 4(x^1)^2 (x^2)^2 [1 + (x^2)^2] [2 - (x^2)^2] D, \\ \tilde{G}^{12} &= \tilde{G}^{21} = 2x^1 x^2 [1 + (x^2)^2] [2 - (x^2)^2] D^2, \\ \tilde{G}^{13} &= \tilde{G}^{31} = 2x^1 (x^2)^4 D^2, \\ \tilde{G}^{22} &= [1 + (x^2)^2] [2 - (x^2)^2] D^3, \\ \tilde{G}^{23} &= \tilde{G}^{32} = (x^2)^3 D^3, \\ \tilde{G}^{33} &= [2 - (x^2)^2] D^3. \end{aligned}$$

Identités de conservation

On calcule que :

en base mobile :

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_1} G)_{.1}^1 &= 0, (\nabla_{e_2} G)_{.1}^2 = 0, (\nabla_{e_3} G)_{.1}^3 = 0 \text{ et donc on a bien :} \\ (\nabla_{e_1} G)_{.1}^1 + (\nabla_{e_2} G)_{.1}^2 + (\nabla_{e_3} G)_{.1}^3 &= 0, \\ (\nabla_{e_1} G)_{.2}^1 &= -D G_{.2}^3, (\nabla_{e_2} G)_{.2}^2 = \partial_2 G_{.2}^2 - \Delta G_{.2}^3 - \Delta G_{.3}^2, \\ (\nabla_{e_3} G)_{.2}^3 &= \partial_3 G_{.2}^3 - 2x^2 G_{.2}^2 + 2x^2 G_{.3}^3 \text{ et donc on a bien :} \\ (\nabla_{e_1} G)_{.2}^1 + (\nabla_{e_2} G)_{.2}^2 + (\nabla_{e_3} G)_{.2}^3 &= 0, \\ (\nabla_{e_1} G)_{.3}^1 &= -D G_{.3}^3 + D G_{.1}^1, (\nabla_{e_2} G)_{.3}^2 = \partial_2 G_{.3}^2 - \Delta G_{.3}^3 + \Delta G_{.2}^2, \\ (\nabla_{e_3} G)_{.3}^3 &= \partial_3 G_{.3}^3 - 2x^2 G_{.3}^2 - 2x^2 G_{.2}^3 \text{ et donc on a bien :} \\ (\nabla_{e_1} G)_{.3}^1 + (\nabla_{e_2} G)_{.3}^2 + (\nabla_{e_3} G)_{.3}^3 &= 0, \\ (\nabla_{e_1} G)^{11} &= 0, (\nabla_{e_2} G)^{12} = 0, (\nabla_{e_3} G)^{13} = 0 \text{ et donc on a bien :} \\ (\nabla_{e_1} G)^{11} + (\nabla_{e_2} G)^{12} + (\nabla_{e_3} G)^{13} &= 0, \\ (\nabla_{e_1} G)^{12} &= -D G^{23}, (\nabla_{e_2} G)^{22} = \partial_2 G^{22} - 2\Delta G^{23}, \\ (\nabla_{e_3} G)^{23} &= \partial_3 G^{23} + 2x^2 G^{33} - 2x^2 G^{22} \text{ et donc on a bien :} \\ (\nabla_{e_1} G)^{12} + (\nabla_{e_2} G)^{22} + (\nabla_{e_3} G)^{23} &= 0, \\ (\nabla_{e_1} G)^{13} &= -D G^{33} + D G^{11}, (\nabla_{e_2} G)^{23} = \partial_2 G^{23} - \Delta G^{33} + \Delta G^{22}, \\ (\nabla_{e_3} G)^{33} &= \partial_3 G^{33} - 4x^2 G^{23} \text{ et donc on a bien :} \\ (\nabla_{e_1} G)^{13} + (\nabla_{e_2} G)^{23} + (\nabla_{e_3} G)^{33} &= 0, \end{aligned}$$

et, en base naturelle :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^1}_{.1} &= 8x^1(x^2)^4 D^{-1} e^{-2x^3}, \quad \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^2}_{.1} = -8x^1(x^2)^4 D^{-1} e^{-2x^3}, \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^3}_{.1} &= 0 \text{ et donc on a bien :} \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^1}_{.1} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^2}_{.1} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^3}_{.1} &= 0, \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^1}_{.2} &= -4x^2 - 2(x^2)^3 - 16(x^1)^2(x^2)^5 D^{-2} e^{-2x^3}, \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^2}_{.2} &= 4x^2 + 2(x^2)^3 + 4(x^2)^5 + 16(x^1)^2(x^2)^5 D^{-2} e^{-2x^3}, \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^3}_{.2} &= -4(x^2)^5 \text{ et donc on a bien :} \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^1}_{.2} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^2}_{.2} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^3}_{.2} &= 0, \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^1}_{.3} &= -2(2 + 5(x^2)^2 + (x^2)^4), \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^2}_{.3} &= 2(2 + 5(x^2)^2 + 3(x^2)^4 + 2(x^2)^6), \quad \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^3}_{.3} = -4((x^2)^4 + (x^2)^6) \\
\text{et donc on a bien :} \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^1}_{.3} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^2}_{.3} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^3}_{.3} &= 0 \text{ et on trouve (les détails du calcul} \\
\text{sont fastidieux) que l'on a bien :} \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^{11}} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^{12}} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^{13}} \\
&= \frac{\partial \tilde{G}^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{G}^{12}}{\partial x^2} + (2\Gamma_{1.1}^1 + \Gamma_{1.2}^2) \tilde{G}^{11} + (3\Gamma_{1.2}^1 + \Gamma_{2.2}^2 + \Gamma_{2.3}^3) \tilde{G}^{12} \\
&+ (3\Gamma_{1.3}^1 + \Gamma_{2.3}^2 + \Gamma_{3.3}^3) \tilde{G}^{13} + \Gamma_{2.2}^1 \tilde{G}^{22} + 2\Gamma_{2.3}^1 \tilde{G}^{23} + \Gamma_{3.3}^1 \tilde{G}^{33} = 0, \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^{12}} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^{22}} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^{23}} \\
&= \frac{\partial \tilde{G}^{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{G}^{22}}{\partial x^2} + \Gamma_{1.1}^2 \tilde{G}^{11} + (\Gamma_{1.1}^1 + 3\Gamma_{1.2}^2) \tilde{G}^{12} + (\Gamma_{1.2}^1 + 2\Gamma_{2.2}^2 + \Gamma_{2.3}^3) \tilde{G}^{22} \\
&+ (\Gamma_{1.3}^1 + 3\Gamma_{2.3}^2 + \Gamma_{3.3}^3) \tilde{G}^{23} + \Gamma_{3.3}^2 \tilde{G}^{33} = 0, \\
\widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} G^{13}} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} G^{23}} + \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^3}} G^{33}} \\
&= \frac{\partial \tilde{G}^{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{G}^{23}}{\partial x^2} + \Gamma_{1.1}^3 \tilde{G}^{11} + 2\Gamma_{1.2}^3 \tilde{G}^{12} + (\Gamma_{1.1}^1 + \Gamma_{1.2}^2) \tilde{G}^{13} + \Gamma_{2.2}^3 \tilde{G}^{22} \\
&+ (\Gamma_{1.2}^1 + \Gamma_{2.2}^2 + 3\Gamma_{2.3}^3) \tilde{G}^{23} + (\Gamma_{1.3}^1 + \Gamma_{2.3}^2 + 2\Gamma_{3.3}^3) \tilde{G}^{33} = 0.
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer Verlag. New York. Heidelberg. Berlin. 1978.
- [2] M. Berger et B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. PUF. Paris. 1987.
- [3] A.I. Borisenko et I.E. Tarapov. *Vector and tensor analysis with applications*. Dover Publications, Inc. New York. 1979.
- [4] L. Brillouin. *Les tenseurs en mécanique et en électricité*. Masson et Cie. Paris. 1960.
- [5] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann. Paris. 1967.
- [6] E. Cartan. *Exposés de géométrie*. Hermann. Paris. 1971.
- [7] E. Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Hermann. Paris. 1971.
- [8] Y. Choquet-Bruhat. *Géométrie différentielle et systèmes linéaires*. Dunod. Paris. 1968.
- [9] R. Deheuvels. *Tenseurs et spineurs*. PUF. Paris. 1993.
- [10] A. Delachet. *La géométrie différentielle*. Que sais-Je ? PUF. Paris. 1970.
- [11] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Première partie. Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs*. Éditions MIR. Moscou. 1982.
- [12] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Deuxième partie. Géométrie et topologie des variétés*. Éditions MIR. Moscou. 1982.
- [13] E. Elbaz. *Relativité générale et gravitation*. Ellipses. Éditions marketing. 1986.
- [14] H. Flanders. *Differential forms with applications to the physical sciences*. Dover Publications, Inc. New York. 1989.
- [15] R. V. Gamkrelidze. *Geometry I. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 28* Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 1991.

- [16] V. G. Ivancevic et T. T. Ivancevic. *Applied differential geometry. A modern introduction*. World Scientific. New Jersey ... 2007.
- [17] V.G. Ivancevic et T.T. Ivancevic . *Undergraduate lecture in De Rham-Hodge theory*. arXiv :0807.4991 Vt [math.DG].
- [18] L. Landau et E. Lifchitz. *Physique théorique. Tome 2. Théorie des champs*. Éditions MIR. Quatrième édition revue et complétée. 1989.
- [19] D. Leborgne. *Calcul différentiel et géométrie*. PUF. Paris. 1982.
- [20] T. Levi-Civita. *The absolute differential calculus*. Dover Publications, Inc..New-York. 1977.
- [21] A. Lichnerowicz. *Éléments de calcul tensoriel*. Armand Colin. Paris 1946. Et Éditions Jacques Gabay. Sceaux. 1987.
- [22] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Hermann. Paris. 1972.
- [23] Pham Mau Quan. *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*. Dunod. Paris. 1969.
- [24] F. Pham. *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*. InterÉditions. Paris. 1992.
- [25] M. Postnikov. *Leçons de géométrie. Géométrie différentielle*. Éditions MIR. Moscou. 1990.
- [26] M. Postnikov. *Leçons de géométrie. Variétés différentiables*. Éditions MIR. Moscou. 1990.
- [27] Ph. Robba. *Cours de mathématiques*. École Supérieure d'Électricité no. 1020. Paris. 1968-1969.
- [28] L. Schwartz. *Les tenseurs*. Hermann. Paris. 1981.
- [29] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish, Inc.. Houston, Texas. 1970.
- [30] Y. Talpaert. *Leçons et applications de géométrie différentielle et de mécanique analytique*. Cépaduès Éditions. Toulouse. 1993.
- [31] D. Tevian. *The Hodge dual operator*. Department of Mathematics, Oregon State University, Corvallis, OR 97331, EUE. 29 janvier 1999.
- [32] E.W. Weisstein. *CRC Concise encyclopedia of mathematics*. CRC Press. Boca Raton, Londres, Washington D.C.. 1999.
- [33] Wikipedia. *Curl (mathematics)*.
[https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)).
- [34] Wikipedia. *D'alembertien*.
<https://fr.wikipedia.org/wiki/D'alembertien>.

- [35] Wikipedia. *Del*.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Del>.
- [36] Wikipedia. *Divergence*.
<https://en.Wikipedia.org/wiki/Divergence>.
- [37] Wikipedia. *Divergence (analyse vectorielle)*.
[https://fr.Wikipedia.org/wiki/Divergence_\(analyse vectorielle\)](https://fr.Wikipedia.org/wiki/Divergence_(analyse_vectorielle)).
- [38] Wikipedia. *Divergence d'un tenseur*.
https://fr.Wikipedia.org/wiki/Divergence_d'un_tenseur.
- [39] Wikipedia. *Dualité de Hodge*.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Dualité_de_Hodge.
- [40] Wikipedia. *Gradient*. <https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>.
- [41] Wikipedia. *Hodge dual*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Hodge_dual.
- [42] Wikipedia. *Laplace operator*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_operator.
- [43] Wikipedia. *Laplace-Beltrami operator*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace-Beltrami_operator.
- [44] Wikipedia. *Levi-Civita symbol*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_symbol.
- [45] Wikipedia. *Musical isomorphism*.
https://en.Wikipedia.org/wiki/Musical_isomorphism.
- [46] Wikipedia. *Tenseur de Levi-Civita*.
https://fr.Wikipedia.org/wiki/Tenseur_de_Levi-Civita.