



Présentation tensorielle des équations macroscopiques de Maxwell

Marc Renaud

► To cite this version:

Marc Renaud. Présentation tensorielle des équations macroscopiques de Maxwell. Rapport LAAS n° 18002. 2018, 71p. hal-01691517

HAL Id: hal-01691517

<https://laas.hal.science/hal-01691517>

Submitted on 24 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Présentation tensorielle des équations macroscopiques de Maxwell

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

Chapitre 1

Introduction

Nous établissons les équations macroscopiques de Maxwell pour les substances diélectriques et magnétiques idéales respectivement caractérisées par une permittivité ε et une perméabilité μ .

Malheureusement les dénominations des scalaires, des vecteurs et des tenseurs qui interviennent dans ces équations varient selon les auteurs.

Ces équations font intervenir quatre vecteurs que nous appelons : champ électrique $\vec{E}$, induction électrique $\vec{D}$, champ magnétique $\vec{H}$ et induction magnétique $\vec{B}$ de natures d'ailleurs différentes ; vecteurs polaires pour les deux premiers et vecteurs axiaux pour les deux derniers ; ce qui est expliqué par la différence des notations. Cependant d'autres noms existent pour ces vecteurs ; par exemple “déplacement” à la place “d'induction” ou “excitation” à la place de “champ” et certains auteurs parlent de champ magnétique pour $\vec{B}$ [14]¹ [17]².

Nous avons choisi de ne pas utiliser la notion de “masse magnétique” qui n'est pas vraiment nécessaire pour écrire les équations macroscopiques de Maxwell et aurait compliqué l'exposé.

Les appellations “tenseur électromagnétique”, “tenseur de Faraday”, “tenseur de Maxwell” dépendent également des différents auteurs.

Nous avons choisi d'utiliser le système international (SI) d'unités, appelé système Giorgi rationalisé comme [1] [3]³ [10] [11]⁴ [14]⁵ [17] [22],

1. p. 36 éq. (10)

2. p. 82

3. mais l'auteur utilise également d'autres systèmes

4. mais l'auteur utilise également d'autres systèmes

5. en partie

mais d'autres auteurs cités utilisent le système gaussien [1]⁶ [2] [5] [7] [9] [12] [13] [16] ou le système de Heaviside-Lorentz [4]⁷ [8]⁸ [18]⁹ et il existe d'autres systèmes d'unités tels le système électrostatique (esu) ou le système électromécanique (emu).

6. en partie p. 253

7. avec des particularités

8. avec des particularités

9. avec des particularités

Chapitre 2

Notations, relations et équations de Maxwell

2.1 Généralités sur les scalaires de $\mathbb{R}$, les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, les opérations utilisées et quelques relations qui les unissent

2.1.1 Scalaire

Soit $S \in \mathbb{R}$, fonction de x, y, z .

2.1.2 Vecteurs

Soient $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}, \vec{Z} \in \mathbb{R}^3$ des vecteurs polaires ou $\check{U}, \check{V}, \check{W}, \check{Z} \in \mathbb{R}^3$ des vecteurs axiaux [10] (cf ci-après), fonctions de x, y, z . On a :

$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ ou $\check{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ et idem pour les autres vecteurs polaires ou axiaux ci-devant.

2.1.3 Opérations utiles pour la suite

- Laplacien d'un scalaire [32]

$$\Delta S \triangleq \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \in \mathbb{R}$$

- Produit scalaire entre 2 vecteurs :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} \triangleq U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z \in \mathbb{R} \text{ ou } \check{U} \cdot \check{V} \triangleq U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z \in \mathbb{R}.$$

- Gradient d'un scalaire [30] :

$$\vec{\text{grad}} S \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ ou } \check{\text{grad}} S \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- Divergence d'un vecteur [27] :

$\text{div } \vec{U} \triangleq \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \in \mathbb{R}$ ou $\text{div } \check{U} \triangleq \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \in \mathbb{R}$ et idem pour les autres vecteurs polaires ou axiaux ci-devant.

- Produit extérieur entre un scalaire et un vecteur :

$S \vec{U} \triangleq \begin{pmatrix} S U_x \\ S U_y \\ S U_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ou $S \check{U} \triangleq \begin{pmatrix} S U_x \\ S U_y \\ S U_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et idem pour les autres vecteurs polaires ou axiaux ci-devant.

- Produit vectoriel entre 2 vecteurs : $\vec{U} \times \vec{V}$ (vecteur axial) et $\vec{U} \times \check{V}$ (vecteur polaire) tels que :

$$\vec{U} \times \vec{V} \triangleq \begin{pmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ U_z V_x - U_x V_z \\ U_x V_y - U_y V_x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \vec{U} \times \check{V} \triangleq \begin{pmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ U_z V_x - U_x V_z \\ U_x V_y - U_y V_x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- Rotationnel d'un vecteur : $\vec{\text{rot}} \check{U}$ (vecteur polaire) et $\check{\text{rot}} \vec{U}$ (vecteur axial)

$$\vec{\text{rot}} \check{U} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \check{\text{rot}} \vec{U} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Remarque : rot est noté curl en anglais [25].

- Laplacien d'un vecteur : $\Delta \vec{U}$ (vecteur polaire) et $\Delta \check{U}$ (vecteur axial) tels que :

$$\Delta \vec{U} \triangleq \begin{pmatrix} \Delta U_x \\ \Delta U_y \\ \Delta U_z \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ et}$$

$$\Delta \check{U} \triangleq \begin{pmatrix} \Delta U_x \\ \Delta U_y \\ \Delta U_z \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

2.1.4 Relations générales

Toutes ces relations sont très faciles à démontrer.

- $\Delta S = \text{div}(\vec{\text{grad}} S)$.
- $\text{div}(S \vec{U}) = S \text{div} \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} S$ ou :
 $\text{div}(S \check{U}) = S \text{div} \check{U} + \check{U} \cdot \text{grad} S$.
- $\vec{\text{rot}}(\check{\text{rot}} \vec{U}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{U}) - \Delta \vec{U}$ ou :
 $\check{\text{rot}}(\check{\text{rot}} \check{U}) = \text{grad}(\text{div} \check{U}) - \Delta \check{U}$.
- $\text{div}(\vec{U} \times \check{V}) = \check{V} \cdot \check{\text{rot}} \vec{U} - \vec{U} \cdot \vec{\text{rot}} \check{V}$.
- $\check{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} S) = \vec{0}$ ou $\vec{\text{rot}}(\text{grad} S) = \vec{0}$.
- $\text{div}(\vec{\text{rot}} \check{U}) = 0$ ou $\text{div}(\check{\text{rot}} \vec{U}) = 0$.

2.2 Scalaires et vecteurs intervenant en électromagnétisme

2.2.1 Scalaires

l : longueur

m : masse

t : temps

I : intensité (ou courant) électrique

s : aire, surface

v : volume [3]¹

c : vitesse de la lumière

ε_0 : permittivité (électrique ou diélectrique) absolue ou constante diélectrique du vide

ε : permittivité (électrique ou diélectrique) absolue ou constante diélectrique d'une substance diélectrique idéale [2]² [3]³ [9]⁴ [11]⁵ [22]⁶ ou perméabilité diélectrique [13]⁷

1. p. 11 : noté τ

2. p. 228

3. p. 128 éq. (23) et p. 658

4. p. 47 : notée κ

5. p. 14

6. p. 21

7. pp. 55-58 Chapitre 1 § 7

ε_r : permittivité (électrique ou diélectrique) relative d'une substance diélectrique idéale [14]⁸

μ_0 : perméabilité (magnétique) absolue du vide

μ : perméabilité (magnétique) absolue d'une substance magnétique idéale [2]⁹ [3]¹⁰ [9]¹¹ [11]¹² [13]¹³ [22]¹⁴

μ_r : perméabilité (magnétique) relative d'une substance magnétique idéale [14]¹⁵

ρ : densité (volumique) de charge électrique [1]¹⁶ [2]¹⁷ [3]¹⁸ [9]¹⁹ [10]²⁰ [16]²¹ [17]²²

χ : susceptibilité électrique ou diélectrique ou coefficient de polarisation de la substance [3]²³ [10]²⁴ [11]²⁵ [13]²⁶ [14]²⁷ [22]²⁸

$\varkappa$: susceptibilité magnétique ou coefficient d'aimantation [3]²⁹ [10]³⁰ [14]³¹ [22]³²

V : tension électrique, potentiel électrique, différence de potentiel électrique, potentiel scalaire électrique [2]³³ [3]³⁴ [5]³⁵ [11]³⁶ [17]³⁷

8. p. 301

9. p. 228

10. p. 372 et p. 659

11. p. 47

12. p. 193

13. p. 156

14. p. 21

15. p. 321

16. p. 130

17. p. 226

18. p. 657

19. p. 44

20. p. 21

21. p. 195 : notée μ

22. p. 81 : notée T

23. p. 127

24. p. 155 : notée χ_e

25. p. 154 : notée χ_e

26. p. 56 : notée $\varkappa$

27. p. 301 : notée $\varkappa$

28. p. 76 : notée η

29. p. 371

30. p. 288 : notée χ_m

31. p. 321 : notée χ

32. p. 89 : notée κ

33. p. 228 : notée φ

34. p. 657

35. p. 375 : notée Q

36. p. 30 : notée $\Phi(\mathbf{x})$

37. p. 87

q : charge électrique, quantité d'électricité [3]³⁸ [5]³⁹ [10]⁴⁰ [14]⁴¹ [17]⁴²
 R : résistance électrique
 G : conductance électrique
 r : résistivité électrique [3]⁴³
 γ : conductivité électrique ou conductibilité électrique [2]⁴⁴ [3]⁴⁵ [10]⁴⁶
[13]⁴⁷ [22]⁴⁸
 C : capacitance (ou capacité) électrique
 $\mathcal{R}$: réluctance
 $\mathcal{G}$: perméance
 Φ_e : flux de d'induction (ou de déplacement) électrique
 Φ_m : flux d'induction magnétique
 L : inductance électrique
 M : coefficient d'induction magnétique et d'auto-induction
 ρ_P : densité (volumique) de charge électrique fictive [10]⁴⁹
 $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}_0$ (cf. ci-après)
 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_0$ (cf. ci-après)
 $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}_0$ (cf. ci-après)
 w : énergie du champ électromagnétique
 W_e : densité d'énergie électrique [22]⁵⁰
 W_m : densité d'énergie magnétique [22]⁵¹
 W_J : densité d'énergie due à l'effet Joule
 W : densité (volumique) d'énergie du champ électromagnétique [5]⁵²
[12]⁵³ [13]⁵⁴ [17]⁵⁵

38. p. 36 et p. 664 : notée q charge ponctuelle et p. 295 : notée q charge mobile

39. p. 375

40. p. 376 : notée Q

41. p. 34

42. p. XX : notée Q et p. XXI : notée q

43. p. 229

44. p. 228 : notée σ

45. p. 229

46. pp. 23-24 mais ne semble pas définie

47. p. 129 : notée σ

48. p. 20 : notée σ

49. p. 156

50. p. 27

51. p. 27

52. p. 373

53. p. 104 éq. (31,5)

54. p. 374 : notée dU (différentielle de l'énergie interne du diélectrique à densité et entropie données) et p. 392 éq. (80,3) [énergie électromécanique dans un milieu diélectrique (ε) en l'absence de dispersion lorsque ε et μ sont des grandeurs constantes réelles]

55. p. 92 éq. (322.1) : notée U (distribution énergie électromagnétique spatiale)

$k_1^B, k_2^B, k_3^B, k_4^B, k_5^B$ coefficients utilisés par [3] (cf. ci-après)
 $k_1^J, k_2^J, k_3^J, \lambda, \lambda'$ coefficients utilisés par [11] (cf. ci-après)

Relations

$$\rho = \frac{dq}{dv} \text{ [10]}^{56}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi \text{ [3]}^{57} \text{ [10]}^{58} \text{ [11]}^{59} \text{ [14]}^{60} \text{ [22]}^{61}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \varkappa \text{ [3]}^{62} \text{ [10]}^{63} \text{ [14]}^{64} \text{ [22]}^{65}$$

$$\gamma = \frac{1}{r} \text{ et } r = \frac{1}{\gamma}$$

$R = \frac{1}{G} = r \frac{l}{s}$ et $G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{s}{l}$ résistance et conductance d'un conducteur de longueur l d'aire s de résistivité r et de conductivité γ

$\mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{G}} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{s}$ et $\mathcal{G} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \mu \frac{s}{l}$ réluctance et perméance d'un matériau magnétique de longueur l d'aire s de perméabilité μ

$$\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}_0 = \rho \mathbf{c}$$

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_0 = \frac{V}{c}$$

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}_0 = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} \text{ (cf. } \vec{E}, \vec{J} \text{ ci-après)}$$

$C = \frac{\varepsilon s}{l}$ capacitance d'un diélectrique de permittivité ε entre deux surfaces parallèles d'aires s situées à une distance l

$$\Phi_m = L I$$

$$\Delta V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 : \text{équation de Poisson}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \text{ (cf. } \vec{E}, \vec{D} \text{ ci-après)} \text{ [22]}^{66}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \text{ (cf. } \vec{H}, \vec{B} \text{ ci-après)} \text{ [22]}^{67}$$

$$W_J = \vec{E} \cdot \vec{J} \text{ (cf. } \vec{E}, \vec{J} \text{ ci-après)} \text{ [22]}^{68}$$

56. p. 21 : $\rho = \frac{dQ}{dv}$

57. p. 128 éq. (23)

58. p. 159

59. p. 154 éq. (4.38) : $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$

60. p. 301 : $\varepsilon_r - 1 = \varkappa$

61. p. 75 éq. (11)

62. p. 372 éqs. (4) et (5)

63. p. 295 éq. (41) : $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ et p. 295 éq. (42) : $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$

64. p. 321 : $\chi = \mu_r - 1$

65. p. 89 éq. (9)

66. p. 27 éq. (6)

67. p. 27 éq. (6)

68. p. 27 éq. (5)

$$W = \frac{dw}{dv} = W_e + W_m = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \text{ (cf. } \vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B} \text{ ci-après) [5]}^{69}$$

$$\rho_P = -\text{div } \vec{P} \text{ (cf. } \vec{P} \text{ ci-après) [5]}^{74} [10]^{75}$$

2.2.2 Vecteurs

Vecteurs polaires

$$\vec{x} : \text{position}; \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} [10]^{76}$$

$$\vec{v} : \text{vitesse}; \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} [1]^{77}$$

$$\vec{a} : \text{accélération}; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} : \text{suraccélération}^{78}; \vec{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} : \text{courant électrique}; \vec{I} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} : \text{champ électrique}; \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} [2]^{79} [3]^{80} [5]^{81} [10]^{82} [9]^{83} [17]^{84}$$

69. p. 389 : notée $W = \frac{1}{8\pi} (B \cdot H + E \cdot D)$; en unités gaussiennes

70. p. 104 éq. (31,5) : $W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$; en unités gaussiennes

71. p. 374 : $dU = \frac{1}{4\pi} (E \cdot d\vec{D} + H \cdot d\vec{B})$; en unités gaussiennes et p. 392 éq. (80,3) $dU = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$; en unités gaussiennes

72. p. 92 éq. (322.1) : $U = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$

73. p. 29 éq. (9) pour la deuxième égalité

74. p. 373 : notée $\rho_p = -\text{div } \vec{p}$

75. p. 156 éq. (12)

76. p. 21 : notée $\vec{r}$

77. p. 130 : notée $\vec{V}$

78. “jerk” en anglais

79. p. 226 : noté $\mathbf{E}$

80. p. 657

81. p. 372

82. p. 21

83. p. 44 : noté $\mathbf{E}$

84. p. 82

$\vec{D}$: induction (ou déplacement) électrique ; $\vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$ [1]⁸⁵ [2]⁸⁶ [3]⁸⁷
 [5]⁸⁸ [9]⁸⁹ [10]⁹⁰ [17]⁹¹
 $\vec{A}$: potentiel vecteur du vecteur d'induction magnétique (cf. ci-après) ;
 $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ [1]⁹² [2]⁹³ [3]⁹⁴ [5]⁹⁵ [9]⁹⁶ [17]⁹⁷
 $\vec{J}$: densité (surfactive) de courant électrique ; $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$ [2]⁹⁸ [3]⁹⁹
 [9]¹⁰⁰ [10]¹⁰¹ [17]¹⁰²
 $\vec{S}$: vecteur de Poynting ou vecteur du flux d'énergie ; $\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$ [2]¹⁰³
 [9]¹⁰⁴ [10]¹⁰⁵ [12]¹⁰⁶ [13]¹⁰⁷ [17]¹⁰⁸ [22]¹⁰⁹ [34]¹¹⁰

85. p. 129

86. p. 228 : noté **D**

87. p. 657

88. p. 374

89. p. 44 : noté **D**

90. p. 21

91. p. 82

92. p. 132

93. p. 228 : noté **A**

94. p. 659

95. p. 375 : noté *A*

96. p. 45 : noté **A**

97. p. 87

98. p. 226 : notée **j**

99. p. 660 : notée **i**

100. p. 44 : noté **J**

101. p. 21

102. p. 81 : appelée "distribution courant"

103. pp. 231-232 : noté **P** de même que le vecteur de polarisation (cf. ci-après) d'où risque de confusion

104. p. 47 : noté **S**

105. p. 338 éq. 35 : noté $\vec{S}_P$

106. p. 103 éq. (31,2) : noté **S**

107. p. 163 éq. (30,20) et p. 373 éq. (75,14) : noté **S**

108. p. 93 : noté $\vec{S}$

109. p. 26 : noté **P**

110. p. 2/4 : noté **S** (densité d'impulsion électromagnétique)

$\vec{f}$: force de Lorentz ; $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ [3]¹¹¹ [10]¹¹² [17]¹¹³

$\vec{F}$: densité (volumique) de force de Lorentz ; $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ [10]¹¹⁴ [16]¹¹⁵

$\vec{p}$: moment dipolaire ; $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

$\vec{P}$: polarisation (électrique ou diélectrique) ; $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$ [1]¹¹⁶ [2]¹¹⁷

[3]¹¹⁸ [5]¹¹⁹ [10]¹²⁰ [11]¹²¹ [13]¹²² [17]¹²³ [22]¹²⁴

$\vec{\text{grad}} V$: gradient du potentiel ; $\vec{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$.

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: courant de déplacement (dénomination de Maxwell) [1]¹²⁵ [11]¹²⁶

Relations

$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$; soit :
 $v_x = \frac{dx}{dt}$
 $v_y = \frac{dy}{dt}$
 $v_z = \frac{dz}{dt}$

111. p. 408 : notée $\vec{F}$

112. p. 49 : notée $\vec{F}$

113. p. 91

114. p. 78 : notée $\vec{f}$

115. p. 201 : notée $\vec{K}$

116. p. 129

117. p. 228 : notée $\mathbf{P}$ de même que le vecteur de Poynting d'où risque de confusion !

118. p. 657 : notée $\vec{p}$

119. p. 373 : notée $\vec{p}$

120. p. 155

121. p. 14 : notée $\mathbf{P}$

122. p. 54 : notée $\mathbf{P}$

123. p. 86

124. p. 74

125. p. 131

126. p. 238 : noté $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

$\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{ds} = \rho \vec{v} = \gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm pour la dernière égalité) [1]¹²⁷ [2]¹²⁸
[3]¹²⁹ [5]¹³⁰ [10]¹³¹ [22]¹³² [13]¹³³ ; soit :

$$J_x = \frac{dI_x}{ds} = \rho v_x = \gamma E_x$$

$$J_y = \frac{dI_y}{ds} = \rho v_y = \gamma E_y$$

$$J_z = \frac{dI_z}{ds} = \rho v_z = \gamma E_z$$

$\text{div } \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$ (équation de continuité ou conservation de la charge ou relation entre courant et charge) [3]¹³⁴ [5]¹³⁵ [17]¹³⁶ ; soit

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ [2]¹³⁷ [5]¹³⁸ [7]¹³⁹ [10]¹⁴⁰ [12]¹⁴¹ [14]¹⁴² [16]¹⁴³ [17]¹⁴⁴ ;
soit :

$$E_x = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$

$$E_y = -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\right)$$

$$E_z = -\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)$$

$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ (cf. $\vec{B}$ ci-après) [3]¹⁴⁵ [5]¹⁴⁶ [17]¹⁴⁷ ; soit :

$$f_x = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y)$$

$$f_y = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z)$$

$$f_z = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x)$$

On en déduit que :

127. p. 130 pour la première égalité : $\vec{J} = \rho \vec{V}$

128. p. 228 : $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

129. p. 229 éq. (7) p. 660 éq. (21) et p. 665 éq. (40) : $\vec{i} = \gamma \vec{E}$

130. p. 386 pour la deuxième égalité

131. p. 23 éq. (19) et p. 201 éq. (20)

132. p. 20 éq. (5) : $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

133. p. 129 éq. (21,3) : $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

134. p. 661 éq. (26) : $\text{div } \vec{i} + \frac{d\rho}{dt} = 0$

135. p. 381 : $\text{div } J + \frac{d\rho}{dt} = 0$

136. p. 81 éq. (111.1) : $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

137. p. 229 éq. (5.115) : $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$; en unités gaussiennes

138. p. 375 : $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } Q$; en unités gaussiennes

139. p. 367 : $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } (\varphi)$; en unités gaussiennes

140. p. 335 éq. (5)

141. p. 68 et p. 91 : $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$; en unités gaussiennes

142. p. 36 éq. (9) : $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

143. p. 192 éq. (119.1) première : $\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; en unités gaussiennes

144. p. 87 éq. (211.3) : $\vec{\nabla} V = -(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E})$

145. p. 296 éq. (2) p. 408 éq. (I) : $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$

146. p. 375 : $F = q(E + \frac{1}{c} v \times B)$; en unités gaussiennes

147. p. 91 éq. (311.3) : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{f}}{dv} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad [10]^{148} \quad [16]^{149}; \text{ soit :}$$

$$F_x = \rho E_x + J_y B_z - J_z B_y$$

$$F_y = \rho E_y + J_z B_x - J_x B_z$$

$$F_z = \rho E_z + J_x B_y - J_y B_x$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{cf. } \vec{H} \text{ ci-après}) \quad [2]^{150} \quad [10]^{151} \quad [12]^{152} \quad [13]^{153} \quad [17]^{154} \quad [34]^{155} \quad [22]^{156}; \text{ soit :}$$

$$S_x = E_y H_z - E_z H_y$$

$$S_y = E_z H_x - E_x H_z$$

$$S_z = E_x H_y - E_y H_x$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad [3]^{157} \quad [10]^{158} \quad [14]^{159}; \text{ soit :}$$

$$P_x = \frac{dp_x}{dv} = \varepsilon_0 \chi E_x$$

$$P_y = \frac{dp_y}{dv} = \varepsilon_0 \chi E_y$$

$$P_z = \frac{dp_z}{dv} = \varepsilon_0 \chi E_z$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad [1]^{160} \quad [2]^{161} \quad [3]^{162} \quad [11]^{163} \quad [13]^{164} \quad [14]^{165} \quad [17]^{166} \quad [22]^{167}; \text{ soit :}$$

$$D_x = \varepsilon_0 E_x + P_x = \varepsilon E_x$$

$$D_y = \varepsilon_0 E_y + P_y = \varepsilon E_y$$

$$D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z = \varepsilon E_z$$

148. p. 360 pour la première égalité et p. 360 éq. (54-4) pour la seconde égalité

149. p. 201 éq. (125,1) : $\vec{K} = \mu \vec{E} + \frac{\vec{\mu} \vec{b}}{c} \wedge \vec{H}$; en unités gaussiennes

150. p. 231 éq. (5.126) : $\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$; en unités gaussiennes

151. p. 328 éq. (35) : $\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H}$

152. p. 103 éq. (31,2) : $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$; en unités gaussiennes

153. p. 163 éq. (30.20) et p. 373 éq. (75,14) : $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}]$; en unités gaussiennes

154. p. 93 éq. (323.1) : $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

155. p. 2/4 : $\mathbf{S} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$

156. p. 26 éq. (3)

157. p. 127 éq. (20) : $\vec{p} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$

158. p. 155 éq. (7) pour la première égalité et p. 155 éq. (8) pour la seconde égalité : $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

159. p. 301 éq. (7) : $\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E}$

160. p. 129 pour la première égalité

161. p. 228 : $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$; en unités gaussiennes

162. p. 657 éq. (1) pour la première égalité : $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$ et p. 658 éq. (6) pour la dernière égalité

163. p. 780 Appendix éq. (A.12) : $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{P}$ avec $\lambda = 1$ pour les systèmes rationalisés et $\lambda = 4\pi$ pour les systèmes non rationalisés

164. p. 56 éq. (7.1) : $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

165. p. 301 pour la dernière égalité

166. p. 86 éq. (131.3) pour la première égalité

167. p. 21 éq. (6) : $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ pour la dernière égalité

$\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$; soit :
 $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ (Condition de Lorentz [2]¹⁶⁸ ou relation de Lorentz-condition de jauge [17]¹⁶⁹).

$$\rho = \text{div } \vec{D} = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{P} \text{ ou } \rho + \rho_P = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E} \text{ [10]}^{170}.$$

Équations de Maxwell avec second membre

Ces équations concernent l'induction électrique $\vec{D}$ et le champ magnétique $\vec{H}$. Elles dépendantes de la métrique pseudo-euclidienne définie ci-après. On verra qu'elles sont liées au champ de tenseurs de Maxwell (cf. ci-après).

Pour beaucoup d'auteurs elles constituent le second couple (ou la seconde paire) des équations de Maxwell [12]¹⁷¹ [13]¹⁷².

Elles sont parfois dites *pour les sources*.

- $\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}$ [5]¹⁷³ [10]¹⁷⁴ [14]¹⁷⁵ [17]¹⁷⁶ ; soit :
 $\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$ (équation de conservation ou lois de Coulomb et de Gauss)

- $\boxed{\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}}$ (cf. $\vec{H}$ ci-après) ; [5]¹⁷⁷ [10]¹⁷⁸ [14]¹⁷⁹ [17]¹⁸⁰ ; soit :
 $\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial D_x}{\partial t} = J_x$
 $\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial D_y}{\partial t} = J_y$
 $\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial D_z}{\partial t} = J_z$ (loi d'Ampère)

Vecteurs axiaux

$\vec{\gamma}$: couple-effort ou moment d'une force ; $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix}$

168. p. 230

169. p. 88 éq. (221.1) : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ (dans le vide)

170. p. 158 éq. (21)

171. p. 102 eqs. (30.3) et (30.4) mais c'est le champ électrique $\vec{E}$ qui est utilisé à la place de l'induction électrique $\vec{D}$

172. p. 376 éq. (76.4) et p. 377 éq. (76.5)

173. p. 380 éq. (I) : $\text{div } D = 4\pi\rho$; en unités gaussiennes

174. p. 21 éq. (1) et p. 335

175. p. 49 éq. (35) : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

176. p. 82 éq. (111.2) : $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{T}$

177. p. 379 et p. 380 éq. (IV) : $\nabla \times H = \text{rot } H = \frac{4\pi J}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$; en unités gaussiennes

178. p. 21 éq. (4) et p. 335 éq. (4)

179. p. 49 éq. (354) : $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$

180. p. 82 éq. (111.3) : $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$

$\check{\Gamma}$: densité (volumique) d'un couple-effort ou densité (volumique) du moment d'une force ;

$$\check{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix}$$

$\check{H}$: champ (ou excitation) magnétique ; $\check{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$ [2]¹⁸¹ [3]¹⁸² [9]¹⁸³

[10]¹⁸⁴ [13]¹⁸⁵ [17]¹⁸⁶ [22]¹⁸⁷

$\check{B}$: induction magnétique ; $\check{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ [2]¹⁸⁸ [3]¹⁸⁹ [5]¹⁹⁰ [9]¹⁹¹ [10]¹⁹²

[13]¹⁹³ [17]¹⁹⁴

$\check{m}$: moment magnétique ; $\check{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}$ [10]¹⁹⁵

$\check{M}$: aimantation ou magnétisation ; $\check{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$ [2]¹⁹⁶ [3]¹⁹⁷ [5]¹⁹⁸

[10]¹⁹⁹ [13]²⁰⁰ [17]²⁰¹ [22]²⁰²

181. p. 226 : noté **H**

182. p. 658

183. p. 44 : noté **H**

184. p. 21

185. p. 155 : noté **H**

186. p. 82

187. p. 89 : noté **H**

188. p. 228 : notée **B**

189. p. 658

190. p. 372 et p. 374 : ce n'est pas très clair !

191. p. 44 : notée **B**

192. p. 21

193. p. 154 : notée **B**

194. p. 82

195. p. 242 et p. 243 : noté $\check{\mathcal{M}}$

196. p. 228 : notée **M**

197. p. 371 : notée $\vec{\mathcal{J}}$

198. p. 378 : notée $\check{m}$

199. p. 288 : notée $\check{\mathcal{J}}$

200. p. 155 : notée **M**

201. p. 86 : notée $\vec{I}$

202. p. 89 : notée **M**

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} : \text{rotationnel du champ électrique ; } \text{rot } \vec{E} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \text{rot } \vec{A} : \text{rotationnel du potentiel vecteur du vecteur d'induction magnétique ;} \\ \text{rot } \vec{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Relations

$$\check{\Gamma} = \frac{d\check{\gamma}}{dv} ; \text{ soit :}$$

$$\Gamma_x = \frac{d\gamma_x}{dv}$$

$$\Gamma_x = \frac{d\gamma_x}{dv}$$

$$\Gamma_x = \frac{d\gamma_x}{dv}$$

$$\check{B} = \text{rot } \vec{A} \text{ [1]}^{203} \text{ [3]}^{204} \text{ [5]}^{205} \text{ [10]}^{206} \text{ [14]}^{207} \text{ [17]}^{208} ; \text{ soit :}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\check{M} = \frac{d\check{m}}{dv} = \varkappa \check{H} \text{ [3]}^{209} \text{ [10]}^{210} \text{ [14]}^{211} \text{ [22]}^{212} ; \text{ soit :}$$

$$M_x = \frac{dm_x}{dv} = \varkappa H_x$$

$$M_y = \frac{dm_y}{dv} = \varkappa H_y$$

$$M_z = \frac{dm_z}{dv} = \varkappa H_z$$

203. pp. 132-133 : $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

204. p. 659 éq. (17) et p. 669 éq. (43) : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$

205. p. 375

206. p. 217 et p. 335 éq. (6)

207. p. 36 éq. (10) : $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ où $\vec{B}$ est appelé à tort champ magnétique

208. p. 87 éq. (211.1) : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

209. p. 371 éq. (1) : $\vec{\mathcal{J}} = \varkappa \vec{H}$

210. p. 288 : $\vec{\mathcal{J}} = \frac{d\check{\mathcal{M}}}{dv}$ pour la première égalité et p. 295 éq. (5) : $\vec{\mathcal{J}} = \chi_m \check{H}$ pour la seconde égalité

211. p. 317 : $d\vec{\mathcal{M}} = \vec{M} d\tau$ et p. 321 : $\vec{M} = \chi \vec{H}$

212. p. 89 éq. (8a) : $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$

$$\check{B} = \mu_0 (\check{H} + \check{M}) = \mu_0 (1 + \kappa) \check{H} = \mu \check{H} \quad [2]^{213} \quad [3]^{214} \quad [10]^{215} \quad [11]^{216} \quad [14]^{217} \\ [13]^{218} \quad [22]^{219} \quad [17]^{220}; \text{ soit :}$$

$$B_x = \mu_0 (H_x + M_x) = \mu H_x$$

$$B_y = \mu_0 (H_y + M_y) = \mu H_y$$

$$B_z = \mu_0 (H_z + M_z) = \mu H_z$$

$$\text{div } \vec{S} = \check{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \check{H}$$

Démonstration

Il s'agit de l'une des relations précédemment indiquées. Cependant nous allons la démontrer.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{S} &\triangleq \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial (E_y H_z - E_z H_y)}{\partial x} + \frac{\partial (E_z H_x - E_x H_z)}{\partial y} + \frac{\partial (E_x H_y - E_y H_x)}{\partial z} \\ &= E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} H_z - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} H_y \\ &\quad + E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial y} H_x - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial y} H_z \\ &\quad + E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z} H_y - E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z} H_x \\ &= H_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + H_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + H_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - E_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - E_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &= \check{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \check{H} \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

Équations de Maxwell sans second membre

Ces équations concernent le champ électrique $\vec{E}$ et l'induction magnétique $\check{B}$. Elles sont indépendantes de la métrique pseudo-euclidienne définie ci-après. On verra qu'elles sont liées au champ de tenseurs de Faraday (cf. ci-après).

Pour beaucoup d'auteurs elles constituent le premier couple (ou la première paire) des équations de Maxwell [12]²²¹ [13]²²².

Elles sont parfois dites *pour les champs*, mais cette dénomination n'est pas

213. p. 228 : $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$; en unités gaussiennes

214. p. 658 éq. (11) : $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J}$ et p. 659 éq. (16) pour la dernière égalité : $\vec{B} = \mu \vec{H}$

215. p. 295 éq. (40) : $\check{B} = \mu_0 (\check{H} + \chi_m \check{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \check{H} = \mu \check{H}$

216. p. 780 Appendix éq (A.12) : $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{M}$ avec $\lambda' = 1$ pour les systèmes rationnalisés et $\lambda' = 4\pi$ pour les systèmes non rationnalisés

217. p. 319 : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$ (attention!) et p. 320 : $\vec{B} = \mu \vec{H}$

218. p. 155 éq. (29,8) : $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$; en unités gaussiennes

219. p 380. 21 éq. (7) p. 79 éq. (2) et p. 89 éq. (8)

220. p. 86 éq. (131.4) : $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{I}$

221. p. 91 eqs. (26.1) et (26.2) mais c'est le champ magnétique $\vec{H}$ qui est utilisé à la place de l'induction magnétique $\check{B}$

222. p. 376 eqs. (76.1) et (76.2)

très claire car ces équations concernent le *champ* électrique mais l'*induction* magnétique .

• $\boxed{\text{div } \check{B} = 0}$ [5]²²³ [10]²²⁴ [14]²²⁵ [17]²²⁶ ; soit $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ (non existence de charges magnétiques libres)

• $\boxed{\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \check{B}}{\partial t} = \check{0}}$ [1]²²⁷ [3]²²⁸ [5]²²⁹ [10]²³⁰ [14]²³¹ [17]²³² ; soit :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \text{ (loi de Faraday).}$$

Conséquence des équations de Maxwell

On déduit donc des lois de Faraday et d'Ampère que :

$$\text{div } \vec{S} = \check{H} \cdot \left(-\frac{\partial \check{B}}{\partial t}\right) - \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\right). \text{ C'est le théorème de Poynting [22]²³³.}$$

$$\text{Si } \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \text{ et si } \check{B} = \mu_0 \check{H} \text{ on a } \text{div } \vec{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \text{ [17]²³⁴ [22]²³⁵}$$

Démonstration

$$W = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \check{H} \cdot \check{B}) \text{ donc :}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \check{H} \cdot \frac{\partial \check{B}}{\partial t} + \check{B} \cdot \frac{\partial \check{H}}{\partial t}).$$

Mais si $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ et si $\check{B} = \mu_0 \check{H}$ on a $\vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ et $\check{B} \cdot \frac{\partial \check{H}}{\partial t} = \check{H} \cdot \frac{\partial \check{B}}{\partial t}$ et donc :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \check{H} \cdot \frac{\partial \check{B}}{\partial t}.$$

Soit, d'après les équations de Maxwell :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{E} \cdot (\text{rot } \check{H} - \vec{J}) + \check{H} \cdot (-\text{rot } \vec{E}) = -\text{div } \vec{S} - \vec{E} \cdot \vec{J} \text{ et donc :}$$

$$\text{div } \vec{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \text{ QED.}$$

223. p. 380 éq. (II) : $\text{div } B = 0$

224. p. 335 éq. (3)

225. p. 37 éq. (16) : $\text{div } \vec{B} = 0$

226. p. 82 éq. (111.5) : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

227. p. 131 éq. (63) 3e : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

228. p. 664 éq. (31) : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

229. p. 380 éq. (III) : $\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$; en unités gaussiennes

230. p. 21 éq. (2) et p. 335 éq. (2)

231. p. 37 éq. (15) : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

232. p. 82 éq. (111.4) : $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

233. p. 26 éq. (4)

234. mais pas très clair !

235. p. 29 éq. (7)

2.3 Tenseur tridimensionnel des contraintes de Maxwell, en l'absence de polarisation et d'aimantation

On pourra consulter [10] [12] [34].

Ce tenseur est aussi appelé “tensions de Maxwell” ou “tenseur de Maxwell”. Cette dernière dénomination va créer une ambiguïté pour nous avec ce que nous allons appeler ci-après “Champ de tenseurs de Maxwell”.

On a $\vec{P} = \vec{0}$ et $\vec{M} = \vec{0}$ et donc $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Pour exprimer ce tenseur on peut donc utiliser l'un des quatre couples $(\vec{E}, \vec{H})$ (donc les champs), $(\vec{E}, \vec{B})$, $(\vec{D}, \vec{H})$, $(\vec{D}, \vec{B})$ (donc les inductions).

Posons $E^2 \triangleq ||\vec{E}||^2$, $D^2 \triangleq ||\vec{D}||^2$, $H^2 \triangleq ||\vec{H}||^2$, $B^2 \triangleq ||\vec{B}||^2$.

Alors $W \triangleq \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) = \frac{1}{2} (\frac{1}{\varepsilon_0} D^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2} (\frac{1}{\varepsilon_0} D^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$.

Donc $W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) = \frac{1}{2} \mu_0 (c^2 D^2 + H^2)$.

Alors le tenseur tridimensionnel des contraintes de Maxwell est $\sigma_{\alpha\beta} \triangleq (E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta) - \delta_{\alpha\beta} W$; $\alpha, \beta = x, y, z$ et $\delta_{\alpha\beta}$ symbole de Kronecker [12]²³⁶ [17]²³⁷ [34]²³⁸

Alors si nous choisissons d'utiliser le couple des champs $(\vec{E}, \vec{H})$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_x D_x + H_x B_x) - W & E_x D_y + H_x B_y & E_x D_z + H_x B_z \\ E_y D_x + H_y B_x & (E_y D_y + H_y B_y) - W & E_y D_z + H_y B_z \\ E_z D_x + H_z B_x & E_z D_y + H_z B_y & (E_z D_z + H_z B_z) - W \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (\varepsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_x^2) - W & \varepsilon_0 E_x E_y + \mu_0 H_x H_y & \varepsilon_0 E_x E_z + \mu_0 H_x H_z \\ \varepsilon_0 E_x E_y + \mu_0 H_x H_y & (\varepsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_y^2) - W & \varepsilon_0 E_y E_z + \mu_0 H_y H_z \\ \varepsilon_0 E_x E_z + \mu_0 H_x H_z & \varepsilon_0 E_y E_z + \mu_0 H_y H_z & (\varepsilon_0 E_z^2 + \mu_0 H_z^2) - W \end{pmatrix}$$

236. p. 111 éq. (33,3) : $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [(E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta) - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2)]$; en unités gaussiennes

237. p. 92 éq. (322.2) : $\bar{T}_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} [\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2]$; $i, j, k = 1, 2, 3$

238. p. 2/4 : $\sigma_{ij} = \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2)$
 $= \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \delta_{ij}$ ou p. 3/4 :
 $\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} [E_i E_j + H_i H_j - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \delta_{ij}]$; en unités gaussiennes

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Et alors le tenseur tridimensionnel des contraintes de Maxwell est symétrique.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - F_x \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_y}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} - F_y \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - F_z \quad [17]^{239}. \end{aligned}$$

Démonstration

C'est une conséquence de l'étude tensorielle qui suit (cf. la fin du chapitre sur cette étude) QED.

2.4 Équations des ondes électromagnétiques

On pourra consulter [3] [8] [10] [14] [17] [22].

Nous allons établir dans les substances diélectriques idéales de permittivité ε et magnétiques idéales de perméabilité μ les équations de comportement du champ électrique $\vec{E}$, du champ magnétique $\vec{H}$, du potentiel vecteur $\vec{A}$ et du potentiel scalaire V . Puis nous indiquerons le comportement pour les conducteurs et les non-conducteurs. Finalement nous indiquerons le comportement dans le vide (de permittivité ε_0 et de perméabilité μ_0).

2.4.1 Comportement du champ électrique $\vec{E}$

D'après la seconde des équations de Maxwell sans second membre on peut écrire :

$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\text{rot}(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B})$ [10]²⁴⁰. Soit, d'après les relations générales précédemment indiquées :

$$\Delta \vec{E} - \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B}) = \vec{0} \quad [10]^{241}.$$

Mais dans les substances idéales de permittivité ε et de perméabilité μ on a $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$, soit en tenant compte des équations de Maxwell avec second membre :

239. p. 93 éq. (324.3) : $\frac{\partial S_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{T}_{ij} - (\vec{J} \times \vec{B} + T \vec{E})_i$: avec $i = 1, 2, 3$

240. p. 335 éq. (7)

241. p. 335 éq. (9)

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} = \vec{0} \quad [10]^{242}.$$

Cas des conducteurs tels que $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ et $\rho = 0$

Alors l'équation du comportement du champ électrique $\vec{E}$ est :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad [10]^{243}.$$

Cas des non conducteurs tels que $\vec{J} = \vec{0}$ et $\rho = 0$

Alors l'équation du comportement du champ électrique $\vec{E}$ est :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad [10]^{244}.$$

2.4.2 Comportement du champ magnétique $\check{H}$

D'après la seconde des équations de Maxwell avec second membre on peut écrire :

$\text{rot}(\text{rot } \check{H}) = \text{rot}(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) + \text{rot } \vec{J} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{D}) + \text{rot } \vec{J} \quad [10]^{245}$. Soit, d'après les relations générales précédemment indiquées :

$$\Delta \check{H} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{D}) + \text{rot } \vec{J} - \text{grad}(\text{div } \check{H}) = \check{0} \quad [10]^{246}.$$

Mais dans les substances idéales de permittivité ε et de perméabilité μ on a $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \check{H}$, soit en tenant compte des équations de Maxwell sans second membre :

$$\Delta \check{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \check{H}}{\partial t^2} + \text{rot } \vec{J} = \check{0} \quad [10]^{247}.$$

Cas des conducteurs tels que $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

Alors l'équation du comportement du champ magnétique $\check{H}$ est, en réutilisant la seconde équation de Maxwell avec second membre :

$$\Delta \check{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \check{H}}{\partial t^2} - \gamma \mu \frac{\partial \check{H}}{\partial t} = \check{0} \quad [10]^{248}.$$

242. p. 335 éq. (11)

243. p. 336 éq. (14)

244. p. 336 éq. (17)

245. p. 336 éq. (18)

246. p. 336 éq. (19)

247. p. 336 éq. (21)

248. p. 337 éq. (22)

Cas des non conducteurs tels que $\vec{J} = \vec{0}$

Alors l'équation du comportement du champ magnétique $\vec{H}$ est :

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad [10]^{249}.$$

2.4.3 Comportement du potentiel vecteur $\vec{A}$

$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad [10]^{250}$, d'après les relations générales précédemment indiquées. Soit :

$$\Delta \vec{A} + \vec{\text{rot}} \vec{B} - \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) = \vec{0}.$$

Mais dans les substances idéales de permittivité ε et de perméabilité μ on a $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$, soit en tenant compte de la seconde équation de Maxwell avec second membre :

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t}) + \mu \vec{J} = \vec{0} \quad [10]^{251}.$$

Et ssi on a la condition de Lorentz : $\text{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad [10]^{252}$ alors :

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu \vec{J} = \vec{0} \quad [10]^{253}.$$

2.4.4 Comportement du potentiel scalaire V

On a $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ donc

$$\Delta V = \text{div} (\vec{\text{grad}} V) = -\text{div} (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \text{ ou}$$

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) + \text{div} \vec{E} = 0 \quad [10]^{254}.$$

Mais dans les substances diélectriques idéales de permittivité ε on a : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, soit en tenant compte de la première équation de Maxwell avec second membre :

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0.$$

Et ssi on a la condition de Lorentz : $\text{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ alors :

$$\Delta V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \quad [10]^{255} \text{ (équation de Poisson).}$$

249. p. 337 éq. (23)

250. p. 337 éq. (24)

251. p. 337 éq. (27)

252. p. 337 éq. (28)

253. p. 338 éq. (30)

254. p. 338 éq. (31)

255. p. 338 éq. (34)

2.4.5 Équations des ondes électromagnétiques dans le vide lorsque la condition de Lorentz est vérifiée

On a $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, et on suppose la condition de Lorentz $\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ [10]²⁵⁶ vérifiée. Alors :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \text{grad}_{\varepsilon_0} \rho &= \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \text{grad}_{\varepsilon_0} \rho = \vec{0} \\ [14]^{257}, \\ \Delta \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \text{rot } \vec{J} &= \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \text{rot } \vec{J} = \vec{0} [14]^{258}, \\ \Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{J} &= \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0} [14]^{259}, \\ \Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 [14]^{260}. \end{aligned}$$

Si on définit le d'alembertien $\square$ [26]²⁶¹ tel que :

$$\square \triangleq \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} \square \vec{E} &= \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \text{grad}_{\varepsilon_0} \rho = \Delta \vec{E}, \\ \square \vec{H} &= \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \vec{J}, \\ \square \vec{A} &= \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} [10]^{262}, \\ \square V &= \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} [10]^{263}. \end{aligned}$$

256. p. 358 éq. (41)

257. p. 58 éq. (57)

258. p. 58 éq. (58) écrite avec $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

259. p. 58 éq. (55)

260. p. 58 éq. (56)

261. avec un signe opposé à celui qui suit

262. p. 358 éq. (44)

263. p. 358 éq. (45)

Chapitre 3

Équations aux dimensions et systèmes d'unités

Ces équations aux dimensions sont données dans le système Longueur-Masse-Temps-Intensité du courant électrique ($[L] [M] [T] [I]$). Nous indiquons également les unités légales en Mètre-Kilogramme-Seconde-Ampère (MKSA) du Système International (SI). Il faut remarquer que [3] [22] utilisent le système Longueur-Masse-Temps-Charge électrique ($[L] [M] [T] [Q]$) et utilisent les unités Mètre-Kilogramme-Seconde-Coulomb (MKSC)¹.

3.1 Sans dimension

$\varepsilon_0 \mu_0 c^2$
 χ et $\varkappa$, ε_r et μ_r .
 k_2^B, k_4^B .
 k_3^J, λ et λ' .

1. mais qu'ils notent (MKSQ)

3.2 Ne faisant pas intervenir $[I]$

Grandeur physique	$[L]^l [M]^m [T]^t [I]^i$	Nom en MKSA	symbole
l	$[L]$	mètre	m
m	$[M]$	kilogramme	kg
t	$[T]$	seconde	s
s	$[L]^2$		m^2
v	$[L]^3$		m^3
$\vec{v}, c$	$[L] [T]^{-1}$		$m \cdot s^{-1}$
$\vec{a}$	$[L] [T]^{-2}$		$m \cdot s^{-2}$
$\vec{j}$	$[L] [T]^{-3}$		$m \cdot s^{-3}$
Fréquence	$[T]^{-1}$	hertz	Hz
Pulsation	$[T]^{-1}$		$rd \cdot s^{-1}$
$\vec{f}$	$[L] [M] [T]^{-2}$	newton	N
$\vec{\gamma}$	$[L]^2 [M] [T]^{-2}$		$m \cdot N$
Pression, contrainte	$[L]^{-1} [M] [T]^{-2}$	pascal	Pa
Puissance	$[L]^2 [M] [T]^{-3}$	watt	W
$w, \vec{f} \cdot \vec{l}$	$[L]^2 [M] [T]^{-2}$	joule	J
$\vec{E} \cdot \vec{D}, \vec{H} \cdot \vec{B}, W, t \vec{E} \cdot \vec{J}$	$[L]^{-1} [M] [T]^{-2}$		
Impulsion, quant. de mouvement	$[L] [M] [T]^{-1}$		$m \cdot kg \cdot s^{-1}$
Viscosité cinématique	$[L]^2 [T]^{-1}$		$m^2 \cdot s^{-1}$
Viscosité dynamique	$[L]^{-1} [M] [T]^{-1}$	poiseuille	Pl
$\vec{F}, \rho \vec{E}, \vec{J} \times \vec{B}$	$[L]^{-2} [M] [T]^{-2}$		
$\vec{\Gamma}$	$[L]^{-1} [M] [T]^{-2}$		
Densité (vol.) de pression	$[L]^{-4} [M] [T]^{-2}$		
Densité (vol.) de puissance	$[L]^{-1} [M] [T]^{-3}$		
Densité (vol.) d'énergie	$[L]^{-1} [M] [T]^{-2}$		
Densité (vol.) d'impulsion			
Densité (vol.) de quant. de mouvement	$[L]^{-2} [M] [T]^{-1}$		
$\vec{S}$	$[M] [T]^{-3}$		$kg \cdot s^{-3}$

rd est le symbole de radian.

3.3 Faisant intervenir $[I]$

Grandeur physique	$[L]^l [M]^m [T]^t [I]^i$	Nom en MKSA	symbole
$I, \vec{I}$	$[I]$	Ampère	A
V	$[L]^2 [M] [T]^{-3} [I]^{-1}$	volt	V
$\frac{\partial V}{\partial t}$	$[L]^2 [M] [T]^{-4} [I]^{-1}$		
q, Φ_e	$[T] [I]$	coulomb	C
R	$[L]^2 [M] [T]^{-3} [I]^{-2}$	ohm	Ω
G	$[L]^{-2} [M]^{-1} [T]^3 [I]^2$	siemens ou mho	S ou Ω^{-1}
r	$[L]^3 [M] [T]^{-3} [I]^{-2}$		$\Omega \cdot m$
γ	$[L]^{-3} [M]^{-1} [T]^3 [I]^2$		$S \cdot m^{-1}$
C	$[L]^{-2} [M]^{-1} [T]^4 [I]^2$	farad	F
$\varepsilon_0, \varepsilon$	$[L]^{-3} [M]^{-1} [T]^4 [I]^2$		$F \cdot m^{-1}$
$\vec{E}, \text{grad } V, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{v} \times \vec{B}$	$[L] [M] [T]^{-3} [I]^{-1}$		$V \cdot m^{-1}$
$\vec{D}, \vec{P}$	$[L]^{-2} [T] [I]$		$C \cdot m^{-2}$
$\frac{V}{c}, \mathbf{A}^0, \vec{A}$	$[L] [M] [T]^{-2} [I]^{-1}$		$H \cdot m^{-1} \cdot A^{-1}$
$\mathcal{R}$	$[L]^{-2} [M]^{-1} [T]^2 [I]^2$		$A \cdot tr \cdot Wb^{-1}$
$\mathcal{G}, L, M$	$[L]^2 [M] [T]^{-2} [I]^{-2}$	henry	H
$\mu_0, \mu, k_3^B, k_5^B, k_2^J$	$[L] [M] [T]^{-2} [I]^{-2}$		$H \cdot m^{-1}$
$\rho, \rho_P, \text{div } \vec{D},$	$[L]^{-3} [T] [I]$		
$\mathbf{J}^0, \rho c, \vec{J}$	$[L]^{-2} [I]$		$A \cdot m^{-2}$
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \gamma \vec{E}, \rho \vec{v}, \text{rot } \vec{H}$			
$\vec{H}, M$	$[L]^{-1} [I]$		$A \cdot tr \cdot m^{-1}$
$\vec{B}, \text{rot } \vec{A}, \text{div } \vec{A}, \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$	$[M] [T]^{-2} [I]^{-1}$	tesla	T
$\text{div } \vec{E}$	$[M] [T]^{-3} [I]^{-1}$		
$\Phi_m, L I$	$[L]^2 [M] [T]^{-2} [I]^{-1}$	weber	Wb
$\vec{p}$	$[L] [T] [I]$		$m \cdot s \cdot A$
$\vec{m}$	$[L]^2 [I]$		$m^2 \cdot A$
$\text{div } \vec{B}$	$[L]^{-1} [M] [T]^{-2} [I]^{-1}$		
$\text{rot } \vec{E}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$[M] [T]^{-3} [I]^{-1}$		
$\text{div } \vec{J}, \frac{\partial \rho}{\partial t}$	$[L]^{-3} [I]$		
$\frac{1}{\varepsilon_0}, k_1^B, k_1^J$	$[L]^3 [M] [T]^{-4} [I]^{-2}$		

Chapitre 4

Étude tensorielle

Pour une étude tensorielle *générale* on pourra consulter, au moins en partie, [1] [2] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [15] [16] [19] [20] [21] [24]. Nous nous plaçons dans le domaine réel mais on aurait pu se placer dans le domaine complexe.

4.1 Généralités

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^4$ et utilisons, pour les composantes des tenseurs, des indices de 0 à 3. On aurait pu tout aussi bien utiliser des indices de 1 à 4.

4.1.1 Notations de base

$\mathbb{R}$ corps de base.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3) \in \mathbb{R}^4.$$

4.1.2 Espaces vectoriels et fibrés

- $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^4$ espace tangent à $\mathbb{R}^4$, en $\mathbf{x}$, i.e. espace des vecteurs tangents à $\mathbb{R}^4$, en $\mathbf{x}$,
- $T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^4 \triangleq L(T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$ espace cotangent à $\mathbb{R}^4$, en $\mathbf{x}$, où L est l'ensemble des formes linéaires, i.e. espace des covecteurs tangents (ou des vecteurs cotangents) à $\mathbb{R}^4$, en $\mathbf{x}$,
- $T\mathbb{R}^4 \triangleq \cup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^4$ fibré tangent à $\mathbb{R}^4$,
- $T^*\mathbb{R}^4 \triangleq \cup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^4$ fibré cotangent à $\mathbb{R}^4$,

- $\bigotimes_p^q T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 \triangleq L(\underbrace{T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4 \times \dots \times T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 \times \dots \times T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4}_{q \text{ fois}}; \mathbb{R})$, où L

est l'ensemble des formes linéaires : espace de (p, q) - tenseurs (tenseurs p fois covariants et q fois contravariants et d'ordre $p + q$), en $\mathbf{x}$,

- ◇ $\bigotimes_0^0 T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}$ espace des scalaires,

- ◇ $\bigotimes_0^1 T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 \cong T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4$ espace des vecteurs,

- ◇ $\bigotimes_1^0 T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 = T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4$ espace des covecteurs,

- $\bigwedge_p T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 \triangleq L_a(\underbrace{T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4 \times \dots \times T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}}; \mathbb{R}) \subset \bigotimes_p^0 T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4$, où L_a est l'en-

semble des formes linéaires *alternées* : espace des p - formes extérieures [p - formes *alternées* ou $(p, 0)$ - tenseurs *antisymétriques*], en $\mathbf{x}$,

- ◇ $\bigwedge_0 T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}$ espace des scalaires,

- ◇ $\bigwedge_1 T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 = \bigotimes_1^0 T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 = T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4$ espace des covecteurs,

- ◇ $\bigwedge_p T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 = \emptyset$ si $p > 4$.

- $\bigotimes_p^q T^* \mathbb{R}^4 \triangleq \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \bigotimes_p^q T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4$, alors :

$$\begin{aligned} \bigotimes_p^q T^* \mathbb{R}^4 &= \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} L(\underbrace{T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4 \times \dots \times T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 \times \dots \times T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4}_{q \text{ fois}}; \mathbb{R}) \\ &= L(\underbrace{\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4 \times \dots \times \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}} \mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 \times \dots \times \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4}_{q \text{ fois}}; \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \mathbb{R}) \\ &= L(\underbrace{T \mathbb{R}^4 \times \dots \times T \mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{T^* \mathbb{R}^4 \times \dots \times T^* \mathbb{R}^4}_{q \text{ fois}}; \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \mathbb{R}) \end{aligned}$$

- $\bigwedge_p T^*\mathbb{R}^4 = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \bigwedge_p T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^4 \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \bigotimes_p^0 T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^4 = \bigotimes_p^0 T^*\mathbb{R}^4$, alors :

$$\begin{aligned} \bigwedge_p T^*\mathbb{R}^4 &= \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} L_a \left(\underbrace{T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^4 \times \dots \times T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}}; \mathbb{R} \right) \\ &= L_a \left(\underbrace{\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^4 \times \dots \times \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}}; \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \mathbb{R} \right) \\ &= L_a \left(\underbrace{T\mathbb{R}^4 \times \dots \times T\mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}}; \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

- $C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_p^q T^*\mathbb{R}^4)$: espace des champs de (p, q) - tenseurs. C'est un

espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et un module sur l'anneau $C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$ des fonctions numériques différentiables sur $\mathbb{R}^4$, alors :

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_p^q T^*\mathbb{R}^4) &= C^\infty[\mathbb{R}^4; L(\underbrace{T\mathbb{R}^4 \times \dots \times T\mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{T^*\mathbb{R}^4 \times \dots \times T^*\mathbb{R}^4}_{q \text{ fois}}; \mathbb{R})] \\ &= L[\underbrace{(C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4) \times \dots \times C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4))}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{(C^\infty(\mathbb{R}^4; T^*\mathbb{R}^4) \times \dots \times C^\infty(\mathbb{R}^4; T^*\mathbb{R}^4))}_{q \text{ fois}}; \\ &\quad C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})], \text{ où } L \text{ est l'ensemble des applications linéaires,} \end{aligned}$$

- $\Omega^p(\mathbb{R}^4) \triangleq C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigwedge_p T^*\mathbb{R}^4) \subset C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_p^0 T^*\mathbb{R}^4)$: espace des champs

de p - formes extérieures ou espace des p - formes différentielles extérieures. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et un module sur l'anneau $C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$ des fonctions numériques différentiables sur $\mathbb{R}^4$, alors :

$$\begin{aligned} \Omega^p(\mathbb{R}^4) &= C^\infty[\mathbb{R}^4; L_a(\underbrace{T\mathbb{R}^4 \times \dots \times T\mathbb{R}^4}_{p \text{ fois}}; \mathbb{R})] \\ &= L_a[\underbrace{(C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4) \times \dots \times C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4))}_{p \text{ fois}}; C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})]. \end{aligned}$$

Remarque : $\bigotimes_{0,0}^0 T^*\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$, $\bigotimes_{0,1}^1 T^*\mathbb{R}^4 = T\mathbb{R}^4$ et

$$\bigotimes_{1,1}^0 T^*\mathbb{R}^4 = T^*\mathbb{R}^4. \text{ Donc :}$$

$\diamond \Omega^0(\mathbb{R}^4) = C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_{0}^0 T^*\mathbb{R}^4) = C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R})$ est l'espace des champs de scalaires,

$\diamond \mathcal{X}(\mathbb{R}^4) \triangleq C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_{0}^1 T^*\mathbb{R}^4) = C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4)$ est l'espace des champs de vecteurs et,

$\diamond \Omega^1(\mathbb{R}^4) = C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_{1}^0 T^*\mathbb{R}^4) = C^\infty(\mathbb{R}^4; T^*\mathbb{R}^4)$ est l'espace des champs de covecteurs.

4.1.3 Tenseurs et formes extérieures

$\mathbf{t}_x \in \bigotimes_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}} T_x^*\mathbb{R}^4$ est un $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ - tenseur, en $\mathbf{x}$.

$\omega_x \in \bigwedge_{\mathbf{p}} T_x^*\mathbb{R}^4$ est une $\mathbf{p}$ - forme extérieure, en $\mathbf{x}$.

4.1.4 Champs de tenseurs

$\mathbf{t} \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}} T^*\mathbb{R}^4)$ est un champ de $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ - tenseurs. D'après ce que nous venons de dire il y a deux conceptions de $\mathbf{t}$:

première conception :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathbf{t}} & \bigotimes_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}} T^*\mathbb{R}^4 \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbf{t}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{t}_x) \end{array}, \text{ avec } \mathbf{t}_x \in \bigotimes_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}} T_x^*\mathbb{R}^4$$

et *seconde conception :*

$$C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4) \times \dots \times C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4) \times C^\infty(\mathbb{R}^4; T^*\mathbb{R}^4) \times \dots \times C^\infty(\mathbb{R}^4; T^*\mathbb{R}^4) \xrightarrow{\mathbf{t}} C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$$

$$\xrightarrow{\mathbf{t}} \mathbf{t}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{\mathbf{p}}, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^{\mathbf{q}})$$

avec :

$$\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^4 \xrightarrow{\mathbf{t}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{\mathbf{p}}, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^{\mathbf{q}})} \mathbb{R}$$

$$\longmapsto [\mathbf{t}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{\mathbf{p}}, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^{\mathbf{q}})]_{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{t}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_{1\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{u}_{\mathbf{p}\mathbf{x}}, \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^1, \dots, \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{q}})$$

En particulier soient $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^0}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^2}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^3}$ quatre champs de vecteurs qui constituent une base de $C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4)$ et $d\mathbf{x}^0, d\mathbf{x}^1, d\mathbf{x}^2, d\mathbf{x}^3$ quatre champs de covecteurs qui constituent la base duale de $C^\infty(\mathbb{R}^4; T^*\mathbb{R}^4)$,

i.e. telle que $d\mathbf{x}^i(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j}) = \delta_j^i$ ($i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$) et $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j}(d\mathbf{x}^i) = \delta_j^i$ ($i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$), où δ_j^i est le symbole de Kronecker.

On pose :

$$\mathbf{t}_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} \triangleq \mathbf{t}(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{i_p}}, d\mathbf{x}^{j_1}, \dots, d\mathbf{x}^{j_q}) \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$$

$$(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{0, 1, 2, 3\}).$$

Il s'agit des composantes du champ de tenseurs $\mathbf{t}$ dans les bases précédentes.

Produit tensoriel de champs de tenseurs (noté $\otimes$)

Soient $\mathbf{t} \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_p^q T^*\mathbb{R}^4)$ et $\mathbf{t}' \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_{p'}^{q'} T^*\mathbb{R}^4)$, alors

$$\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}' \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_{p+p'}^{q+q'} T^*\mathbb{R}^4) \text{ est tel que, par définition :}$$

$$(\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}')(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_{p+p'}, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^q, \mathbf{a}^{q+1}, \dots, \mathbf{a}^{q+q'})$$

$$= \mathbf{t}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^q) \mathbf{t}'(\mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_{p+p'}, \mathbf{a}^{q+1}, \dots, \mathbf{a}^{q+q'}).$$

Le produit tensoriel de champs de tenseurs est non commutatif.

Et, en utilisant ce produit tensoriel on remarque que :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{i_1 \dots i_p}^{\dots j_1 \dots j_q} d\mathbf{x}^{i_1} \otimes \dots \otimes d\mathbf{x}^{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{j_q}}$$

$$(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{0, 1, 2, 3\}).$$

Remarque : on a utilisé ci-devant la convention d'Einstein qui consiste à sommer (de 0 à 3) par rapport à tout indice qui se répète en position contravariante (en bas) et covariante (en haut).

4.1.5 Formes différentielles extérieures

$\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^4)$ est une p - forme différentielle extérieure. Il y a deux conception de ω :

première conception :

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\omega} \bigwedge_p T^*\mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \omega(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \omega_{\mathbf{x}}), \text{ avec } \omega_{\mathbf{x}} \in \bigwedge_p T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^4$$

et seconde conception :

$$C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4) \times \dots \times C^\infty(\mathbb{R}^4; T\mathbb{R}^4) \xrightarrow[\omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)]{\omega} C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}), \text{ avec :}$$

$$\mathbb{R}^4_{\mathbf{x}} \xrightarrow[\omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)]{\omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)} \mathbb{R} \xrightarrow[\omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)]{\omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)} [\omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)]_{\mathbf{x}} \triangleq \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_{1\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{u}_{p\mathbf{x}})$$

On pose :

$\omega_{i_1 \dots i_p} \triangleq \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}})$ ($i_1, \dots, i_p \in \{0, 1, 2, 3\}$), avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ alterné. Il s'agit des composantes de la p - forme différentielle extérieure ω dans la base duale précédente.

Produit tensoriel de formes différentielles extérieures (noté $\otimes$)

Attention : soient $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^4)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(\mathbb{R}^4)$, alors :

$$\omega \otimes \omega' \in \bigotimes_{p+p'} T_{\mathbf{x}}^* \mathbb{R}^4 \text{ mais } \omega \otimes \omega' \notin \Omega^{p+p'}(\mathbb{R}^4). \text{ On a, par définition :}$$

$$(\omega \otimes \omega')(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_{p+p'}) = \omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p) \omega'(\mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_{p+p'}).$$

Le produit tensoriel de formes différentielles extérieures est non commutatif.

Alors en utilisant ce produit tensoriel on remarque que :

$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} d\mathbf{x}^{i_1} \otimes \dots \otimes d\mathbf{x}^{i_p}$ ($i_1, \dots, i_p \in \{0, 1, 2, 3\}$), avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ alterné (écriture tenseur).

Produit extérieur de formes différentielles extérieures noté $(\wedge)$

Soient $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^4)$ et $\omega' \in \Omega^{p'}(\mathbb{R}^4)$, alors le produit extérieur $\omega'' \triangleq \omega \wedge \omega' \in \Omega^{p+p'}(\mathbb{R}^4)$ est tel que, par définition :

$$\omega''_{i_1 \dots i_{p+p'}} = \frac{1}{p!} \frac{1}{p'!} \sum_{\sigma \in S_{p+p'}} \varepsilon_\sigma \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} \omega'_{i_{\sigma(p+1)} \dots i_{\sigma(p+p')}} \\ = \sum_{\sigma \in A_{p+p'} \subset S_{p+p'}} \varepsilon_\sigma \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} \omega'_{i_{\sigma(p+1)} \dots i_{\sigma(p+p')}}, \text{ où :}$$

$S_{p+p'}$ est le groupe symétrique d'ordre $p + p'$ des permutations σ , $A_{p+p'}$ le sous ensemble de $S_{p+p'}$ des permutations telles que : $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+p')$ et ε_σ la signature de la permutation σ .

$\omega_{i_1 \dots i_p}$ et $\omega'_{i_1 \dots i_{p'}}$ étant alternés on vérifie que $\omega''_{i_1 \dots i_{p+p'}}$ ainsi défini l'est.

Alors en utilisant le produit extérieur de formes différentielles extérieures on remarque que :

$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^{i_p}$, avec $\omega_{i_1 \dots i_p}$ alterné (écriture forme),
ou :

$$\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 3} \omega_{i_1 \dots i_p} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^{i_p}.$$

La différentielle extérieure d

On pourra consulter [4] [6]¹ [19]².

Si $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^4)$ est une p - forme différentielle extérieure, alors $d\omega \in \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^4)$ la différentielle extérieure de ω est une $p + 1$ - forme différentielle extérieure telle que :

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{(p+1)!} (d\omega)_{i_1 \dots i_{p+1}} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^{i_{p+1}} \\ &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_{p+1} \leq 3} (d\omega)_{i_1 \dots i_{p+1}} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^{i_{p+1}}, \text{ avec :} \\ (d\omega)_{i_1 \dots i_{p+1}} &\triangleq \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots \hat{i}_q \dots i_{p+1}}}{\partial \mathbf{x}^{i_q}} \quad (\hat{i}_q \text{ représente un indice omis}). \end{aligned}$$

Propriété

On a $d^2 = 0$.

Exemples

• $p = 0$, $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^4)$, $d\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, avec :

$$(d\omega)_{i_1} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}^{i_1}}.$$

• $p = 1$, $\omega = \omega_{i_1} d\mathbf{x}^{i_1} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$,

$$d\omega = \frac{1}{2} (d\omega)_{i_1 i_2} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 \leq 3} (d\omega)_{i_1 i_2} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4),$$

avec :

$$(d\omega)_{i_1 i_2} = \frac{\partial \omega_{i_2}}{\partial \mathbf{x}^{i_1}} - \frac{\partial \omega_{i_1}}{\partial \mathbf{x}^{i_2}}.$$

• $p = 2$, $\omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \omega_{i_1 i_2} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$,

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{6} (d\omega)_{i_1 i_2 i_3} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \\ &= \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3} (d\omega)_{i_1 i_2 i_3} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \in \Omega^3(\mathbb{R}^4), \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$(d\omega)_{i_1 i_2 i_3} = \frac{\partial \omega_{i_2 i_3}}{\partial \mathbf{x}^{i_1}} - \frac{\partial \omega_{i_1 i_3}}{\partial \mathbf{x}^{i_2}} + \frac{\partial \omega_{i_1 i_2}}{\partial \mathbf{x}^{i_3}}.$$

• $p = 3$, $\omega = \frac{1}{6} \omega_{i_1 i_2 i_3} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3}$

$$= \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3} \omega_{i_1 i_2 i_3} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \in \Omega^3(\mathbb{R}^4),$$

$$d\omega = \frac{1}{24} (d\omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4}$$

$$= (d\omega)_{0123} d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}$$

$$(d\omega)_{0123} = \frac{\partial \omega_{123}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial \omega_{023}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \omega_{013}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial \omega_{012}}{\partial \mathbf{x}^3}.$$

• $p = 4$, $\omega = \frac{1}{24} \omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4}$

$$= \omega_{0123} d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4),$$

$$d\omega = 0, \text{ car } (d\omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = 0.$$

1. pp. 127-129 § 5.3 : Exterior differential et § 5.4 Poincaré's theorem
2. pp. 43-49 § 3.2.2

4.2 Présentation tensorielle des équations macroscopiques de Maxwell

Pour une présentation tensorielle des équations macroscopiques de Maxwell on pourra consulter [1]³ [4]⁴ [5]⁵ [6]⁶ [7]⁷ [8]⁸ [10]⁹ [12]¹⁰ [13]¹¹ [14]¹² [16]¹³ [18]¹⁴ [22]¹⁵ [24]¹⁶ [29] [35].

Comme nous l'avons dit nous nous sommes placés dans le domaine réel comme [4] [5] [6] [7] [8] [12] [13] [14] [15] [16] [24] [29] [35] alors que [1] [10] [18] [22] se sont placés dans le domaine complexe.

Soient $\mathbf{x}^0 \triangleq ct$, $\mathbf{x}^1 \triangleq x$, $\mathbf{x}^2 \triangleq y$, $\mathbf{x}^3 \triangleq z$ des coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^4$ où x, y, z sont des coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^3$.

Nous allons donc utiliser la base $(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1} = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{\partial}{\partial z})$ de $C^\infty(\mathbb{R}; T\mathbb{R}^4)$ et sa base duale $(d\mathbf{x}^0 = c dt, d\mathbf{x}^1 = dx, d\mathbf{x}^2 = dy, d\mathbf{x}^3 = dz)$ de $C^\infty(\mathbb{R}; T^*\mathbb{R}^4)$

Considérons le champ de $(2, 0)$ - tenseurs *symétriques*, dit champ de tenseurs métrique :

$$\mathbf{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \bigotimes_2 T^*\mathbb{R}^4); \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_{ij} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j \quad (i, j \in \{0, 1, 2, 3\}) \text{ où } \mathbf{g}_{ji} = \mathbf{g}_{ij} \text{ tel que :}$$

-
- 3. pp. 253-254 : Forme tensorielle des équations de Maxwell
 - 4. pp. 305-315 Chapitre 7 § C : Électromagnétisme
 - 5. pp. 372-392 Chapitre VII § 13 : Les équations de Maxwell (présentation non tensorielle et tensorielle)
 - 6. pp. 147-161 § 8 : Applications to electromagnetics and relativity § 9 : Comparison to conventional notations et § 10 : Conclusions
 - 7. pp. 195-202 § 21 pp. 235-236 § 25.2.4. pp. 366-372 § 37.3
 - 8. pp. 104-111 Chapitre IV § 5 : Électrodynamique (présentation non tensorielle et tensorielle)
 - 9. parties No. 1019/4 et 1016/13
 - 10. pp. 62-119 Chapitre III : Charge électrique dans le champ électromagnétique et Chapitre IV : Les équations du champ électromagnétique (présentation non tensorielle et tensorielle)
 - 11. pp. 370-415 Chapitre IX : Équations des ondes électromagnétiques
 - 12. p. 181 Chapitre III § 3.D.7 : Les équations de Maxwell
 - 13. pp. 191-204 § V : Les équations de Maxwell-Lorentz
 - 14. pp. 328-344 Leçon 22
 - 15. pp. 212-279 Part III : Theory of relativity and electron theory
 - 16. p. 220 § 19.13 : Twentieth-century formulation of Maxwell's equations

$$\mathbf{g} = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Alors } \mathbf{g}^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $g \triangleq \det(\mathbf{g}) = -1$ et $g^{-1} \triangleq \det(\mathbf{g}^{-1}) = -1$.

Cette métrique est dite pseudo-euclidienne.

Grâce à ce champ de tenseurs métrique la variété $\mathbb{R}^4$ devient riemannienne et on peut identifier tout champ de vecteurs et tout champ de covecteurs en écrivant $\mathbf{u} = \mathbf{u}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{u}_i d\mathbf{x}^i$, avec $\mathbf{u}^i = \mathbf{g}^{ij} \mathbf{u}_j$ et $\mathbf{u}_j = \mathbf{g}_{ji} \mathbf{u}^i$.

Dans la suite pour les formes différentielles extérieures nous allons privilégier l'écriture forme par rapport à l'écriture tenseur.

4.2.1 Le symbole et le tenseur de Levi-Civita

On pourra consulter [19]¹⁷ [33] [36]

Soit $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ le symbole de Levi-Civita non nul uniquement si les indices $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{0, 1, 2, 3\}$ sont tous différents et égal à ± 1 respectivement selon le signe de la permutation de 0, 1, 2, 3 à i_1, i_2, i_3, i_4 . Ici ε est un tenseur car $|g| = 1$ dit tenseur de Levi-Civita ou tenseur dualiseur.

4.2.2 L'opérateur * de Hodge

On pourra consulter [6]¹⁸ [19]¹⁹ [23] [28] [31].

Si $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^4)$, alors $*\omega \in \Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$ est tel que :

$$\begin{aligned} *\omega &= \frac{1}{(4-p)!} (*\omega)_{i_{p+1} \dots i_4} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_4} \\ &= \sum_{0 \leq i_{p+1} < \dots < i_4 \leq 3} (*\omega)_{i_{p+1} \dots i_4} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_4}, \text{ avec :} \\ (*\omega)_{i_{p+1} \dots i_4} &\triangleq \frac{1}{p!} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \omega^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \mathbf{g}^{i_1 j_1} \dots \mathbf{g}^{i_p j_p} \omega_{j_1 \dots j_p}. \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} &\bullet p = 0, \omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^4), \\ *\omega &= \frac{1}{24} (*\omega)_{i_1 i_2 i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4} \\ &= (*\omega)_{0123} d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4), \text{ avec :} \\ (*\omega)_{0123} &= \omega. \end{aligned}$$

17. p. 97 § 5.1.6 : Le tenseur de Levi-Civita ou tenseur dualiseur

18. pp. 124-126 § 4.8 : Hodge duality and star operator

19. pp. 97-99 : L'opérateur * de Hodge

- $p = 1$, $\omega = \omega_{i_1} d\mathbf{x}^{i_1} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$,
 $*\omega = \frac{1}{6} (*\omega)_{i_2 i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4}$
 $= \sum_{0 \leq i_2 < i_3 < i_4 \leq 3} (*\omega)_{i_2 i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4} \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)$, avec :
 $(*\omega)_{i_2 i_3 i_4} = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \omega^{i_1} = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} g^{i_1 j_1} \omega_{j_1}$, soit :

$$\begin{aligned} (*\omega)_{123} &= \omega^0 = \omega_0, \\ (*\omega)_{023} &= -\omega^1 = \omega_1, \\ (*\omega)_{013} &= \omega^2 = -\omega_2, \\ (*\omega)_{012} &= -\omega^3 = \omega_3, \end{aligned}$$

- $p = 2$, $\omega = \frac{1}{2} \omega_{i_1 i_2} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \omega_{i_1 i_2} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$,
 $*\omega = \frac{1}{2} (*\omega)_{i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4} = \sum_{0 \leq i_3 < i_4 \leq 3} (*\omega)_{i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$,
avec :

$$\begin{aligned} (*\omega)_{i_3 i_4} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \omega^{i_1 i_2} = \frac{1}{2} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \omega_{j_1 j_2}, \text{ soit :} \\ (*\omega)_{23} &= \omega^{01} = -\omega_{01}, \\ (*\omega)_{13} &= \omega^{02} = -\omega_{02}, \\ (*\omega)_{12} &= \omega^{03} = -\omega_{03}, \\ (*\omega)_{03} &= \omega^{12} = \omega_{12}, \\ (*\omega)_{02} &= \omega^{13} = \omega_{13}, \\ (*\omega)_{01} &= \omega^{23} = \omega_{23}. \end{aligned}$$

- $p = 3$, $\omega = \frac{1}{6} \omega_{i_1 i_2 i_3} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3}$
 $= \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3} \omega_{i_1 i_2 i_3} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)$,
 $*\omega = (*\omega)_{i_4} d\mathbf{x}^{i_4} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, avec :

$$\begin{aligned} (*\omega)_{i_4} &= \frac{1}{6} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \omega^{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{6} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3 j_3} \omega_{j_1 j_2 j_3}, \text{ soit :} \\ (*\omega)_0 &= \omega^{123} = -\omega_{123}, \\ (*\omega)_1 &= \omega^{023} = \omega_{023}, \\ (*\omega)_2 &= \omega^{013} = \omega_{013}, \\ (*\omega)_3 &= \omega^{012} = \omega_{012}. \end{aligned}$$

- $p = 4$
 $\omega = \frac{1}{24} \omega_{i_1 i_2 i_3 i_4} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge d\mathbf{x}^{i_2} \wedge d\mathbf{x}^{i_3} \wedge d\mathbf{x}^{i_4}$
 $= \omega_{0123} d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$,
 $*\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^4)$, avec :

$$\begin{aligned} *\omega &= \frac{1}{24} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{1}{24} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3 j_3} g^{i_4 j_4} \omega_{j_1 j_2 j_3 j_4}, \text{ soit :} \\ *\omega &= \omega^{0123} = -\omega_{0123}. \end{aligned}$$

4.2.3 L'opérateur $*^{-1}$

Ici, étant donné que $g = -1$, si $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^4)$, alors $*^{-1}\omega \in \Omega^{4-p}(\mathbb{R}^4)$ est tel que :

$$*^{-1}\omega = -(-1)^{p(4-p)} * \omega.$$

Exemples

- $p = 0 : *^{-1}\omega = - * \omega \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$,
- $p = 1 : *^{-1}\omega = * \omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)$,
- $p = 2 : *^{-1}\omega = - * \omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$,
- $p = 3 : *^{-1}\omega = * \omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$,
- $p = 4 : *^{-1}\omega = - * \omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^4)$.

4.2.4 La codifférentielle extérieure δ

Soit $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^4)$, alors :

si $p = 0 : \delta \omega \triangleq 0$,

si $p = 1, 2, 3, 4 : \delta \omega \triangleq (-1)^p *^{-1} (d(*\omega)) \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^4)$.

Propriété

On a $\delta^2 = 0$.

Exemples

- $p = 0 : \delta \omega = 0$,
- $p = 1 : \delta \omega = - *^{-1} (d(*\omega)) = * (d(*\omega)) \in \Omega^0(\mathbb{R}^4)$,
- $p = 2 : \delta \omega = *^{-1} (d(*\omega)) = * (d(*\omega)) \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$,
- $p = 3 : \delta \omega = - *^{-1} (d(*\omega)) = * (d(*\omega)) \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$,
- $p = 4 : \delta \omega = *^{-1} (d(*\omega)) = * (d(*\omega)) \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)$.

4.3 Champs de vecteurs identiques à des champs de covecteurs ou à des 1 - formes différentielles extérieures

4.3.1 Champ de position

$\mathbf{x} = \mathbf{x}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{x}_i d\mathbf{x}^i$. Alors :

$$(\mathbf{x}\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \mathbf{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{x}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct & -x & -y & -z \end{pmatrix}.$$

4.3.2 Champ de vitesse

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{v}_i d\mathbf{x}^i$. Alors :

$$(\mathbf{v}\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{v}^0 \\ \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{v}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -v_x & -v_y & -v_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c & -\frac{dx}{dt} & -\frac{dy}{dt} & -\frac{dz}{dt} \end{pmatrix}.$$

4.3.3 Champ de densité de courant électrique $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} \triangleq \mathbf{J}_i d\mathbf{x}^i \triangleq \rho c d\mathbf{x}^0 - J_x d\mathbf{x}^1 - J_y d\mathbf{x}^2 - J_z d\mathbf{x}^3$$

$$= \rho c^2 dt - J_x dx - J_y dy - J_z dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^4).$$

On peut considérer que $\mathbf{J} = \mathbf{J}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}$ et alors :

$$(\mathbf{J}\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{J}^0 \\ \mathbf{J}^1 \\ \mathbf{J}^2 \\ \mathbf{J}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{J}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c & -J_x & -J_y & -J_z \end{pmatrix}.$$

On a $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ [5]²⁰.

20. p. 386 : $\mathcal{J} = \rho V$

Calcul de $*\mathbf{J}$

$$*\mathbf{J} = \frac{1}{6} (*\mathbf{J})_{jkl} d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \wedge d\mathbf{x}^l \\ = \sum_{0 \leq j < k < l \leq 3} (*\mathbf{J})_{jkl} d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \wedge d\mathbf{x}^l \in \Omega^3(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}$$

$$(*\mathbf{J})_{jkl} = \varepsilon_{ijkl} \mathbf{J}^i; \text{ soit :}$$

$$(*\mathbf{J})_{123} = \mathbf{J}^0 = \mathbf{J}_0 = \rho c,$$

$$(*\mathbf{J})_{023} = -\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}_1 = -J_x,$$

$$(*\mathbf{J})_{013} = \mathbf{J}^2 = -\mathbf{J}_2 = J_y,$$

$$(*\mathbf{J})_{012} = -\mathbf{J}^3 = \mathbf{J}_3 = -J_z.$$

$$*\mathbf{J} = c(\rho dx \wedge dy \wedge dz - J_x dt \wedge dy \wedge dz + J_y dt \wedge dx \wedge dz - J_z dt \wedge dx \wedge dy).$$

Calcul de $d(*\mathbf{J})$

$$d(*\mathbf{J}) = \frac{1}{24} (d(*\mathbf{J}))_{ijkl} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \wedge d\mathbf{x}^l \\ = (d(*\mathbf{J}))_{0123} d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}$$

$$(d(*\mathbf{J}))_{0123} = \frac{\partial (*\mathbf{J})_{123}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial (*\mathbf{J})_{023}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial (*\mathbf{J})_{013}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial (*\mathbf{J})_{012}}{\partial \mathbf{x}^3} \\ = \frac{\partial \mathbf{J}^0}{\partial \mathbf{x}^0} + \frac{\partial \mathbf{J}^1}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{J}^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{J}^3}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} \text{ et :}$$

$$d(*\mathbf{J}) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} \right) d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3 \\ = c \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} \right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Calcul de $*(d(*\mathbf{J}))$

$$*(d(*\mathbf{J})) = (d(*\mathbf{J}))^{0123} = -(d(*\mathbf{J}))_{0123} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} \right) \in \Omega^0(\mathbb{R}^4).$$

Calcul de $\delta \mathbf{J}$

$$\delta \mathbf{J} = *(d(*\mathbf{J})) = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} \right) \in \Omega^0(\mathbb{R}^4).$$

4.3.4 Champ de potentiel vecteur

$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}_i d\mathbf{x}^i \triangleq \frac{V}{c} d\mathbf{x}^0 - A_x d\mathbf{x}^1 - A_y d\mathbf{x}^2 - A_z d\mathbf{x}^3 \\ = V dt - A_x dx - A_y dy - A_z dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^4).$$

On peut considérer que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}$ et alors :

$$(\mathbf{A} \cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}^0 \\ \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \text{ et :} \\ (\mathbf{A} \cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V}{c} & -A_x & -A_y & -A_z \end{pmatrix}.$$

Calcul de $*\mathbf{A}$

$$*\mathbf{A} = \frac{1}{6} (*\mathbf{A})_{jkl} d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \wedge d\mathbf{x}^l$$

$$= \sum_{0 \leq j < k < l \leq 3} (*\mathbf{A})_{jkl} d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \wedge d\mathbf{x}^l \in \Omega^3(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}$$

$$(*\mathbf{A})_{jkl} = \varepsilon_{ijkl} \mathbf{A}^i; \text{ soit :}$$

$$(*\mathbf{A})_{123} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_0 = \frac{V}{c},$$

$$(*\mathbf{A})_{023} = -\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}_1 = -A_x,$$

$$(*\mathbf{A})_{013} = \mathbf{A}^2 = -\mathbf{A}_2 = A_y,$$

$$(*\mathbf{A})_{012} = -\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_3 = -A_z.$$

$$*\mathbf{A} = \frac{V}{c} dx \wedge dy \wedge dz$$

$$+ c(-A_x dt \wedge dy \wedge dz + A_y dt \wedge dx \wedge dz - A_z dt \wedge dx \wedge dy).$$

Calcul de $d(*\mathbf{A})$

$$d(*\mathbf{A}) = \frac{1}{24} (d(*\mathbf{A}))_{ijkl} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \wedge d\mathbf{x}^l$$

$$= (d(*\mathbf{A}))_{0123} d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}$$

$$(d(*\mathbf{A}))_{0123} = \frac{\partial (*\mathbf{A})_{123}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial (*\mathbf{A})_{023}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial (*\mathbf{A})_{013}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial (*\mathbf{A})_{012}}{\partial \mathbf{x}^3}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial \mathbf{x}^0} + \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{A}^3}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{\partial (\frac{V}{c})}{\partial (ct)} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \text{ et :}$$

$$d(*\mathbf{A}) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) d\mathbf{x}^0 \wedge d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2 \wedge d\mathbf{x}^3$$

$$= c \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Calcul de $*(d(*\mathbf{A}))$

$$*(d(*\mathbf{A})) = (d(*\mathbf{A}))^{0123} = -(d(*\mathbf{A}))_{0123} = -\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) \in \Omega^0(\mathbb{R}^4).$$

Calcul de $\delta \mathbf{A}$

$$\delta \mathbf{A} = *(d(*\mathbf{A})) = -\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) \in \Omega^0(\mathbb{R}^4).$$

4.3.5 Champ de champ électrique

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{E}_i d\mathbf{x}^i. \text{ Alors :}$$

$$(\mathbf{E}^\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{E}^1 \\ \mathbf{E}^2 \\ \mathbf{E}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{E}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & -E_x & -E_y & -E_z \end{pmatrix}.$$

4.3.6 Champ de densité de force de Lorentz

$\mathbf{F} = \mathbf{F}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{F}_i d\mathbf{x}^i$. Alors :

$$(\mathbf{F}\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{F}^0 \\ \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{F}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} & -F_x & -F_y & -F_z \end{pmatrix}.$$

4.3.7 Champ de Poynting

$\mathbf{S} = \mathbf{S}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{S}_i d\mathbf{x}^i$. Alors :

$$(\mathbf{S}\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{S}^0 \\ \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{S}^2 \\ \mathbf{S}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{S}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & -S_x & -S_y & -S_z \end{pmatrix}.$$

4.3.8 Champ de polarisation

$\mathbf{P} = \mathbf{P}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{P}_i d\mathbf{x}^i$. Alors :

$$(\mathbf{P}\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{P}^0 \\ \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \\ \mathbf{P}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{P}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & -P_x & -P_y & -P_z \end{pmatrix}.$$

4.3.9 Champ d'aimantation

$\mathbf{M} = \mathbf{M}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathbf{M}_i d\mathbf{x}^i$. Alors :

$$(\mathbf{M}\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{M}^0 \\ \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{M}^2 \\ \mathbf{M}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$(\mathbf{M}_\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & -M_x & -M_y & -M_z \end{pmatrix}.$$

4.3.10 Relations

On constate, d'après ce qui précède, que :

$$\delta \mathbf{J} = -(\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}).$$

$$\delta \mathbf{A} = -(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}) = -(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}).$$

Donc, dans le vide, l'équation de continuité s'écrit $\delta \mathbf{J} = 0$ et la condition de Lorentz $\delta \mathbf{A} = 0$.

4.4 Champ de tenseurs de Faraday B

Cette dénomination n'est absolument pas générale ; elle est due à [5].

Certains auteurs parlent de champ de tenseurs électromagnétique ou de champ de tenseurs de Maxwell, alors que - comme [5] - nous réserverons cette dernière dénomination à un autre champ de tenseurs (cf. ci-après). Ce champ est noté $\mathbf{F}$ par [5]. C'est un champ de $(0, 2)$ - tenseurs *antisymétriques* identique à un champ de $(2, 0)$ - tenseurs *antisymétriques* ou à un champ de 2 - formes différentielles extérieures :

$$\mathbf{B} \triangleq d\mathbf{A} = \mathbf{B}_{ij} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} \mathbf{B}_{ij} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j. \text{ On a alors :}$$

$$(\mathbf{B}_{..}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{B}_{02} & \mathbf{B}_{03} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{20} & \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{B}_{30} & \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{1}{c} E_y & \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c} E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

[13]²¹ et [35]²². Notons que [5]²³ définit ce champ de tenseurs de Faraday avec des signes opposés.

Démonstration

$$\mathbf{B}_{ij} = (d\mathbf{A})_{ij} \triangleq \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^i} - \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \mathbf{x}^j} ; \text{ donc :}$$

$$\bullet \mathbf{B}_{01} = \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial \mathbf{x}^1} = \frac{\partial(-A_x)}{\partial(ct)} - \frac{\partial(\frac{V}{c})}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{1}{c} E_x \text{ et de même } \mathbf{B}_{02} = \frac{1}{c} E_y \text{ et } \mathbf{B}_{03} = \frac{1}{c} E_z,$$

$$\bullet \mathbf{B}_{12} = \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -B_z \text{ et de même } \mathbf{B}_{23} = -B_x \text{ et } \mathbf{B}_{13} = B_y \text{ QED.}$$

$$\text{On a } (\mathbf{B}_{..})^T = -(\mathbf{B}_{..}).$$

21. p. 376 éq. (76,1) (la première)

22. p. 2/5 noté : $F_{ab}^{(+---)}$ et où les indices x, y, z sont en haut

23. p. 384

Alors $\mathbf{B}^{ij} = (d\mathbf{A})^{ij} = \frac{\partial \mathbf{A}^j}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial \mathbf{A}^i}{\partial \mathbf{x}_j}$; soit :

$$(\mathbf{B}^{\bullet}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{00} & \mathbf{B}^{01} & \mathbf{B}^{02} & \mathbf{B}^{03} \\ \mathbf{B}^{10} & \mathbf{B}^{11} & \mathbf{B}^{12} & \mathbf{B}^{13} \\ \mathbf{B}^{20} & \mathbf{B}^{21} & \mathbf{B}^{22} & \mathbf{B}^{23} \\ \mathbf{B}^{30} & \mathbf{B}^{31} & \mathbf{B}^{32} & \mathbf{B}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

[13]²⁴ et [35]²⁵.

On a $(\mathbf{B}^{\bullet})^T = -(\mathbf{B}^{\bullet})$.

4.4.1 Calcul de $\ast \mathbf{B}$

C'est un champ de $(0, 2)$ - tenseurs antisymétriques identique à un champ de $(2, 0)$ - tenseurs antisymétriques ou à une 2 - forme différentielle extérieure :

$\ast \mathbf{B} = (\ast \mathbf{B})_{ij} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (\ast \mathbf{B})_{ij} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$, avec :

$(\ast \mathbf{B})_{kl} \triangleq \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} \mathbf{B}^{ij}$; soit :

$$((\ast \mathbf{B})_{\bullet}) \triangleq \begin{pmatrix} (\ast \mathbf{B})_{00} & (\ast \mathbf{B})_{01} & (\ast \mathbf{B})_{02} & (\ast \mathbf{B})_{03} \\ (\ast \mathbf{B})_{10} & (\ast \mathbf{B})_{11} & (\ast \mathbf{B})_{12} & (\ast \mathbf{B})_{13} \\ (\ast \mathbf{B})_{20} & (\ast \mathbf{B})_{21} & (\ast \mathbf{B})_{22} & (\ast \mathbf{B})_{23} \\ (\ast \mathbf{B})_{30} & (\ast \mathbf{B})_{31} & (\ast \mathbf{B})_{32} & (\ast \mathbf{B})_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}^{23} & -\mathbf{B}^{13} & \mathbf{B}^{12} \\ -\mathbf{B}^{23} & 0 & \mathbf{B}^{03} & -\mathbf{B}^{02} \\ \mathbf{B}^{13} & -\mathbf{B}^{03} & 0 & \mathbf{B}^{01} \\ -\mathbf{B}^{12} & \mathbf{B}^{02} & -\mathbf{B}^{01} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z & \frac{1}{c}E_y \\ B_y & \frac{1}{c}E_z & 0 & -\frac{1}{c}E_x \\ B_z & -\frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix} [35]^{26}$$

et alors :

$$((\ast \mathbf{B})^{\bullet}) \triangleq \begin{pmatrix} (\ast \mathbf{B})^{00} & (\ast \mathbf{B})^{01} & (\ast \mathbf{B})^{02} & (\ast \mathbf{B})^{03} \\ (\ast \mathbf{B})^{10} & (\ast \mathbf{B})^{11} & (\ast \mathbf{B})^{12} & (\ast \mathbf{B})^{13} \\ (\ast \mathbf{B})^{20} & (\ast \mathbf{B})^{21} & (\ast \mathbf{B})^{22} & (\ast \mathbf{B})^{23} \\ (\ast \mathbf{B})^{30} & (\ast \mathbf{B})^{31} & (\ast \mathbf{B})^{32} & (\ast \mathbf{B})^{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z & \frac{1}{c}E_y \\ -B_y & \frac{1}{c}E_z & 0 & -\frac{1}{c}E_x \\ -B_z & -\frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

24. p. 376 éq. (76,1) (la deuxième)

25. p. 3/5 noté : $F^{ab(+---)}$ et où les indices x, y, z sont en haut

26. p. 4/5 noté : $F_{ab}^{*(+---)}$ et où les indices x, y, z sont en haut

4.4.2 Calcul de $d(*\mathbf{B})$

C'est un champ de $(0, 3)$ - tenseurs antisymétriques identique à un champ de $(3, 0)$ - tenseurs antisymétriques ou à une 3 - forme différentielle extérieure :

$$\begin{aligned}
d(*\mathbf{B}) &= (d(*\mathbf{B}))_{ijk} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j \otimes d\mathbf{x}^k \\
&= \sum_{0 \leq i < j < k \leq 3} (d(*\mathbf{B}))_{ijk} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \in \Omega^3(\mathbb{R}^4), \text{ avec :} \\
(d(*\mathbf{B}))_{ijk} &= \frac{\partial(*\mathbf{B})_{jk}}{\partial \mathbf{x}^i} - \frac{\partial(*\mathbf{B})_{ik}}{\partial \mathbf{x}^j} + \frac{\partial(*\mathbf{B})_{ij}}{\partial \mathbf{x}^k}. \text{ Soit :} \\
(d(*\mathbf{B}))_{123} &= \frac{\partial(*\mathbf{B})_{23}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial(*\mathbf{B})_{13}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial(*\mathbf{B})_{12}}{\partial \mathbf{x}^3} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E}, \\
(d(*\mathbf{B}))_{023} &= \frac{\partial(*\mathbf{B})_{23}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial(*\mathbf{B})_{03}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial(*\mathbf{B})_{02}}{\partial \mathbf{x}^3} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \\
(d(*\mathbf{B}))_{013} &= \frac{\partial(*\mathbf{B})_{13}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial(*\mathbf{B})_{03}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial(*\mathbf{B})_{01}}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}, \\
(d(*\mathbf{B}))_{012} &= \frac{\partial(*\mathbf{B})_{12}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial(*\mathbf{B})_{02}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial(*\mathbf{B})_{01}}{\partial \mathbf{x}^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \text{ et alors :} \\
(d(*\mathbf{B}))^{123} &= \frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E}, \\
(d(*\mathbf{B}))^{023} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \\
(d(*\mathbf{B}))^{013} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}, \\
(d(*\mathbf{B}))^{012} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}.
\end{aligned}$$

4.4.3 Calcul de $*(d(*\mathbf{B}))$

C'est un champ de vecteurs identique à un champ de covecteurs ou à une 1 - forme différentielle extérieure :

$$\begin{aligned}
(d(\mathbf{B})) &= (* (d(*\mathbf{B})))_i d\mathbf{x}^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^4), \text{ avec :} \\
(* (d(*\mathbf{B})))_l &\triangleq \frac{1}{6} \varepsilon_{ijkl} (d(*\mathbf{B}))^{ijk}. \text{ Soit :} \\
(* (d(*\mathbf{B})))_0 &= -(d(*\mathbf{B}))^{123} = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E}, \\
(* (d(*\mathbf{B})))_1 &= (d(*\mathbf{B}))^{023} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \\
(* (d(*\mathbf{B})))_2 &= -(d(*\mathbf{B}))^{013} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \\
(* (d(*\mathbf{B})))_3 &= (d(*\mathbf{B}))^{012} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}.
\end{aligned}$$

4.4.4 Calcul de $\delta \mathbf{B}$

$$\delta \mathbf{B} \triangleq *^{-1} (d(*\mathbf{B})) = *(d(*\mathbf{B})).$$

Par conséquent c'est un champ de vecteurs identique à un champ de covecteurs ou à une 1 - forme différentielle extérieure :

$$\delta \mathbf{B} = (\delta \mathbf{B})_i d\mathbf{x}^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}$$

$$(\delta \mathbf{B})_0 = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E},$$

$$(\delta \mathbf{B})_1 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z},$$

$$(\delta \mathbf{B})_2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x},$$

$$(\delta \mathbf{B})_3 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \text{ et :}$$

$$(\delta \mathbf{B})^0 = (\delta \mathbf{B})_0 = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E},$$

$$(\delta \mathbf{B})^1 = -(\delta \mathbf{B})_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y},$$

$$(\delta \mathbf{B})^2 = -(\delta \mathbf{B})_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z},$$

$$(\delta \mathbf{B})^3 = -(\delta \mathbf{B})_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}. \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned} ((\delta \mathbf{B})^\cdot) &\triangleq \begin{pmatrix} (\delta \mathbf{B})^0 \\ (\delta \mathbf{B})^1 \\ (\delta \mathbf{B})^2 \\ (\delta \mathbf{B})^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix} \text{ et :} \\ ((\delta \mathbf{B})_\cdot) &\triangleq \begin{pmatrix} (\delta \mathbf{B})_0 & (\delta \mathbf{B})_1 & (\delta \mathbf{B})_2 & (\delta \mathbf{B})_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E} & -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} & -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} & -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Relation

$\mathbf{F} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}$ [. produit contracté tel que $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{J})^k \triangleq \mathbf{B}^{kl} \mathbf{J}_l$ où on a, bien entendu, utilisé la convention d'Einstein] [5]²⁷.

27. p. 386 : $f = \frac{1}{c} \mathcal{J} \cdot F = (\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J}; \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}) = -\frac{1}{c} F \cdot \mathcal{J}$; en unités gaussiennes et $f = (\frac{1}{c} \rho \vec{E} \cdot \vec{v}; \rho (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}))$; en unités gaussiennes

Démonstration

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{J})^\cdot &= (\mathbf{B}^\cdot) (\mathbf{J})^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} E_x & -\frac{1}{c} E_y & -\frac{1}{c} E_z \\ \frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c} E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho c \\ -J_x \\ -J_y \\ -J_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} (E_x J_x + E_y J_y + E_z J_z) \\ \rho E_x + B_z J_y - B_y J_z \\ \rho E_y + B_x J_z - B_z J_x \\ \rho E_z + B_y J_x - B_x J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = (\mathbf{F}^\cdot). \text{ Et par conséquent}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{F} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}$ QED. On a $\mathbf{F}^k = \mathbf{B}^{kl} \mathbf{J}_l$ et $\mathbf{F}_i = \mathbf{B}_{ij} \mathbf{J}^j$.

4.4.5 Calcul de $d\mathbf{B}$

C'est un champ de $(0, 3)$ - tenseurs antisymétriques identique à un champ de $(3, 0)$ - tenseurs antisymétriques ou à une 3 - forme différentielle extérieure :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{B} &= (d\mathbf{B})_{ijk} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j \otimes d\mathbf{x}^k \\
 &= \sum_{0 \leq i < j < k \leq 3} (d\mathbf{B})_{ijk} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \in \Omega^3(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d\mathbf{B})_{ijk} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{jk}}{\partial \mathbf{x}^i} - \frac{\partial \mathbf{B}_{ik}}{\partial \mathbf{x}^j} + \frac{\partial \mathbf{B}_{ij}}{\partial \mathbf{x}^k}. \text{ Soit :} \\
 (d\mathbf{B})_{123} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{23}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial \mathbf{B}_{13}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{B}_{12}}{\partial \mathbf{x}^3} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\text{div } \vec{B}, \\
 (d\mathbf{B})_{023} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{23}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial \mathbf{B}_{03}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{B}_{02}}{\partial \mathbf{x}^3} = -\frac{\partial B_x}{\partial (ct)} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\
 &= -\frac{1}{c} [\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]_x, \\
 (d\mathbf{B})_{013} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{13}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial \mathbf{B}_{03}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{B}_{01}}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{\partial B_y}{\partial (ct)} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\
 &= -\frac{1}{c} [\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]_y, \\
 (d\mathbf{B})_{012} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{12}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial \mathbf{B}_{02}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{B}_{01}}{\partial \mathbf{x}^2} = -\frac{\partial B_z}{\partial (ct)} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial y} \\
 &= -\frac{1}{c} [\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]_z \text{ et donc :} \\
 (d\mathbf{B})^{123} &= \text{div } \vec{B}, \\
 (d\mathbf{B})^{023} &= -\frac{1}{c} [\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]_x, \\
 (d\mathbf{B})^{013} &= -\frac{1}{c} [\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]_y, \\
 (d\mathbf{B})^{012} &= -\frac{1}{c} [\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]_z.
 \end{aligned}$$

4.4.6 Premier couple d'équations de Maxwell

Le premier couple d'équations de Maxwell s'écrit tensoriellement :

$\boxed{d\mathbf{B}=0}$. On dit que le champ de 2 - formes différentielles extérieures $\mathbf{B}$ est *fermé*.

Démonstration

La différentielle extérieure est telle que $d^2 = 0$. Donc puisque $\mathbf{B} \triangleq d\mathbf{A}$ on a $d\mathbf{B} = d^2\mathbf{A} = 0$. Or d'après ce qui précède $d\mathbf{B} = 0$ s'écrit :

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0} \text{ et } \boxed{\text{rôt } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}.$$

Il s'agit bien du premier couple des équations de Maxwell QED.

Remarque : cf. en Annexe de ce chapitre d'autres calculs concernant ce champ de tenseurs de Faraday.

4.5 Champ de tenseurs des contraintes ou champ de tenseurs des charges $\mathbf{C}$

On pourra consulter [5]²⁸.

C'est un champ de $(0, 2)$ - tenseurs *antisymétriques* identique à un champ de $(2, 0)$ - tenseurs *antisymétriques* ou à un champ de 2 - formes différentielles extérieures :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{ij} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} \mathbf{C}_{ij} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \in \omega^2(\mathbb{R}^4).$$

$$(\mathbf{C}_{..}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{00} & \mathbf{C}_{01} & \mathbf{C}_{02} & \mathbf{C}_{03} \\ \mathbf{C}_{10} & \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{20} & \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{30} & \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & cP_x & cP_y & cP_z \\ -cP_x & 0 & M_z & -M_y \\ -cP_y & -M_z & 0 & M_x \\ -cP_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $(\mathbf{C}_{..})^T = -(\mathbf{C}_{..})$. Alors :

$$(\mathbf{C}^{..}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{00} & \mathbf{C}^{01} & \mathbf{C}^{02} & \mathbf{C}^{03} \\ \mathbf{C}^{10} & \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} & \mathbf{C}^{13} \\ \mathbf{C}^{20} & \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} & \mathbf{C}^{23} \\ \mathbf{C}^{30} & \mathbf{C}^{31} & \mathbf{C}^{32} & \mathbf{C}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -cP_x & -cP_y & -cP_z \\ cP_x & 0 & M_z & -M_y \\ cP_y & -M_z & 0 & M_x \\ cP_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $(\mathbf{C}^{..})^T = -(\mathbf{C}^{..})$.

28. p. 383

4.6 Champ de tenseurs de Maxwell $\mathbf{H}$

Cette dénomination n'est absolument pas générale. Elle est due à [5].

Ce champ est noté $\mathbf{M}$ par [5]²⁹. C'est un champ de $(0, 2)$ - tenseurs *antisymétriques* identique à un champ de $(2, 0)$ - tenseurs *antisymétriques* ou à une 2 - forme différentielle extérieure :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{ij} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} \mathbf{H}_{ij} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \in \Omega^2(\mathbb{R}^4).$$

$\mathbf{H}$ est tel que :

$$\mathbf{H} \triangleq \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} + \mathbf{C} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{C} \text{ (car } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1) \text{ (relation dite de Maxwell)}$$

[5]³⁰. Alors on constate que, puisque $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ et $\check{H} = \frac{1}{\mu_0} \check{B} - \check{M}$:

$$(\mathbf{H}_{..}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{00} & \mathbf{H}_{01} & \mathbf{H}_{02} & \mathbf{H}_{03} \\ \mathbf{H}_{10} & \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{20} & \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{30} & \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c D_x & c D_y & c D_z \\ -c D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -c D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -c D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

[5]³¹ [13]³².

$$\text{On a } (\mathbf{H}_{..})^T = -(\mathbf{H}_{..}).$$

Et :

$$(\mathbf{H}^{..}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{00} & \mathbf{H}^{01} & \mathbf{H}^{02} & \mathbf{H}^{03} \\ \mathbf{H}^{10} & \mathbf{H}^{11} & \mathbf{H}^{12} & \mathbf{H}^{13} \\ \mathbf{H}^{20} & \mathbf{H}^{21} & \mathbf{H}^{22} & \mathbf{H}^{23} \\ \mathbf{H}^{30} & \mathbf{H}^{31} & \mathbf{H}^{32} & \mathbf{H}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c D_x & -c D_y & -c D_z \\ c D_x & 0 & -H_z & H_y \\ c D_y & H_z & 0 & -H_x \\ c D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

[13]³³.

$$\text{On a } (\mathbf{H}^{..})^T = -(\mathbf{H}^{..}).$$

4.6.1 Calcul de $*\mathbf{H}$

C'est un champ de $(0, 2)$ - tenseurs antisymétriques identique à un champ de $(2, 0)$ - tenseurs antisymétriques ou à une 2 - forme différentielle extérieure :

$$*\mathbf{H} = (*\mathbf{H})_{ij} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j$$

$$= \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (*\mathbf{H})_{ij} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \in \Omega^2(\mathbb{R}^4), \text{ avec :}$$

29. p. 383

30. p. 383 : $M = F + 4\pi C$

31. p. 382 mais avec des signes opposés

32. p. 377 éq. (76,5) (la première)

33. p. 377 éq. (76,5) (la deuxième)

$(*\mathbf{H})_{kl} \triangleq \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} \mathbf{H}^{ij}$; soit :

$$\begin{aligned} ((*\mathbf{H})_{..}) &\triangleq \begin{pmatrix} (*\mathbf{H})_{00} & (*\mathbf{H})_{01} & (*\mathbf{H})_{02} & (*\mathbf{H})_{03} \\ (*\mathbf{H})_{10} & (*\mathbf{H})_{11} & (*\mathbf{H})_{12} & (*\mathbf{H})_{13} \\ (*\mathbf{H})_{20} & (*\mathbf{H})_{21} & (*\mathbf{H})_{22} & (*\mathbf{H})_{23} \\ (*\mathbf{H})_{30} & (*\mathbf{H})_{31} & (*\mathbf{H})_{32} & (*\mathbf{H})_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{H}^{23} & -\mathbf{H}^{13} & \mathbf{H}^{12} \\ -\mathbf{H}^{23} & 0 & \mathbf{H}^{03} & -\mathbf{H}^{02} \\ \mathbf{H}^{13} & -\mathbf{H}^{03} & 0 & \mathbf{H}^{01} \\ -\mathbf{H}^{12} & \mathbf{H}^{02} & -\mathbf{H}^{01} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & -cD_z & cD_y \\ H_y & cD_z & 0 & -cD_x \\ H_z & -cD_y & cD_x & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\ \text{alors :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((*\mathbf{H})^{..}) &\triangleq \begin{pmatrix} (*\mathbf{H})^{00} & (*\mathbf{H})^{01} & (*\mathbf{H})^{02} & (*\mathbf{H})^{03} \\ (*\mathbf{H})^{10} & (*\mathbf{H})^{11} & (*\mathbf{H})^{12} & (*\mathbf{H})^{13} \\ (*\mathbf{H})^{20} & (*\mathbf{H})^{21} & (*\mathbf{H})^{22} & (*\mathbf{H})^{23} \\ (*\mathbf{H})^{30} & (*\mathbf{H})^{31} & (*\mathbf{H})^{32} & (*\mathbf{H})^{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -cD_z & cD_y \\ -H_y & cD_z & 0 & -cD_x \\ -H_z & -cD_y & cD_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.6.2 Calcul de $d(*\mathbf{H})$

C'est un champ de $(0, 3)$ - tenseurs antisymétriques identique à un champ de $(3, 0)$ - tenseurs antisymétriques ou à une 3 - forme différentielle extérieure :

$$\begin{aligned} d(*\mathbf{H}) &= (d(*\mathbf{H}))_{ijk} d\mathbf{x}^i \otimes d\mathbf{x}^j \otimes d\mathbf{x}^k \\ &= \sum_{0 \leq i < j < k \leq 3} (d(*\mathbf{H}))_{ijk} d\mathbf{x}^i \wedge d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{x}^k \in \Omega^3(\mathbb{R}^4), \text{ avec :} \\ (d(*\mathbf{H}))_{ijk} &= \frac{\partial (*\mathbf{H})_{jk}}{\partial \mathbf{x}^i} - \frac{\partial (*\mathbf{H})_{ik}}{\partial \mathbf{x}^j} + \frac{\partial (*\mathbf{H})_{ij}}{\partial \mathbf{x}^k}. \text{ Soit :} \\ (d(*\mathbf{H}))_{123} &= \frac{\partial (*\mathbf{H})_{23}}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial (*\mathbf{H})_{13}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial (*\mathbf{H})_{12}}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{\partial (-cD_x)}{\partial x} - \frac{\partial (cD_y)}{\partial y} + \frac{\partial (-cD_z)}{\partial z} \\ &= -c \operatorname{div} \vec{D}, \\ (d(*\mathbf{H}))_{023} &= \frac{\partial (*\mathbf{H})_{23}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial (*\mathbf{H})_{03}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial (*\mathbf{H})_{02}}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{\partial (-cD_x)}{\partial (ct)} - \frac{\partial (-H_z)}{\partial y} + \frac{\partial (-H_y)}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ (d(*\mathbf{H}))_{013} &= \frac{\partial (*\mathbf{H})_{13}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial (*\mathbf{H})_{03}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial (*\mathbf{H})_{01}}{\partial \mathbf{x}^3} = \frac{\partial (cD_y)}{\partial (ct)} - \frac{\partial (-H_z)}{\partial x} + \frac{\partial (-H_x)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}, \\ (d(*\mathbf{H}))_{012} &= \frac{\partial (*\mathbf{H})_{12}}{\partial \mathbf{x}^0} - \frac{\partial (*\mathbf{H})_{02}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial (*\mathbf{H})_{01}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial (-cD_z)}{\partial (ct)} - \frac{\partial (-H_y)}{\partial x} + \frac{\partial (-H_x)}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \text{ et alors :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d(*\mathbf{H}))^{123} &= c \operatorname{div} \vec{D}, \\
(d(*\mathbf{H}))^{023} &= -\frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \\
(d(*\mathbf{H}))^{013} &= \frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}, \\
(d(*\mathbf{H}))^{012} &= -\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}.
\end{aligned}$$

4.6.3 Calcul de $*(d(*\mathbf{H}))$

C'est un champ de vecteurs identique à un champ de covecteurs ou à une 1 - forme différentielle extérieure :

$$\begin{aligned}
(d(\mathbf{H})) &= (*(d(*\mathbf{H})))_i d\mathbf{x}^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^4), \text{ avec :} \\
(*(d(*\mathbf{H})))_l &\triangleq \frac{1}{6} \varepsilon_{ijkl} (d(*\mathbf{H}))^{ijk}. \text{ Soit :} \\
(*(d(*\mathbf{H})))_0 &= -(d(*\mathbf{H}))^{123} = -c \operatorname{div} \vec{D}, \\
(*(d(*\mathbf{H})))_1 &= (d(*\mathbf{H}))^{023} = -\frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \\
(*(d(*\mathbf{H})))_2 &= -(d(*\mathbf{H}))^{013} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\
(*(d(*\mathbf{H})))_3 &= (d(*\mathbf{H}))^{012} = -\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}.
\end{aligned}$$

4.6.4 Calcul de $\delta \mathbf{H}$

$$\delta \mathbf{H} \triangleq *^{-1} (d(*\mathbf{H})) = *(d(*\mathbf{H})).$$

Par conséquent c'est un champ de vecteurs identique à un champ de covecteurs ou à une 1 - forme différentielle extérieure :

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{H} &= (\delta \mathbf{H})_i d\mathbf{x}^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^4), \text{ avec :} \\
(\delta \mathbf{H})_0 &= -c \operatorname{div} \vec{D}, \\
(\delta \mathbf{H})_1 &= -\frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \\
(\delta \mathbf{H})_2 &= -\frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\
(\delta \mathbf{H})_3 &= -\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \text{ et :} \\
(\delta \mathbf{H})^0 &= (\delta \mathbf{H})_0 = -c \operatorname{div} \vec{D}, \\
(\delta \mathbf{H})^1 &= \frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\
(\delta \mathbf{H})^2 &= \frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}, \\
(\delta \mathbf{H})^3 &= \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}. \text{ Alors :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\delta \mathbf{H})^\cdot) &\triangleq \begin{pmatrix} (\delta \mathbf{H})^0 \\ (\delta \mathbf{H})^1 \\ (\delta \mathbf{H})^2 \\ (\delta \mathbf{H})^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \operatorname{div} \vec{D} \\ \frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{pmatrix} \text{ et :} \\
((\delta \mathbf{H})_\cdot) &\triangleq \begin{pmatrix} (\delta \mathbf{H})_0 & (\delta \mathbf{H})_1 & (\delta \mathbf{H})_2 & (\delta \mathbf{H})_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -c \operatorname{div} \vec{D} & -\frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & -\frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & -\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.6.5 Second couple d'équations de Maxwell

Le second couple d'équations de Maxwell s'écrit tensoriellement :

$$\boxed{\delta \mathbf{H} = -\mathbf{J}}.$$

Démonstration

D'après ce qui précède et le second couple des équations de Maxwell on a :

$$\begin{aligned}
(\delta \mathbf{H})_0 &= -c \operatorname{div} \vec{D} = -c \rho = -\mathbf{J}_0, \\
(\delta \mathbf{H})_1 &= -\frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x = -\mathbf{J}_1, \\
(\delta \mathbf{H})_2 &= -\frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y = -\mathbf{J}_2, \\
(\delta \mathbf{H})_3 &= -\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z = -\mathbf{J}_3, \text{ et par conséquent :} \\
\delta \mathbf{H} &= -\mathbf{J} \text{ QED.}
\end{aligned}$$

On constate que $(\delta \mathbf{H})^k = \frac{\partial \mathbf{H}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l}$ et, par conséquent :

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l} = -\mathbf{J}^k \text{ [5] }^{34} \text{ [8] }^{35} \text{ [12] }^{36} \text{ ou } \frac{\partial \mathbf{H}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^k} = \mathbf{J}^l.$$

Remarque : cf. en Annexe de ce chapitre d'autres calculs concernant ce champ de tenseurs de Maxwell.

34. p. 388 : $\sum \frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\sum \frac{\partial M^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\Pi}{c} \mathcal{J}^\mu$; $\mu = 0, 1, 2, 3$; en unités gaussiennes

35. p. 107 éq. (5.18) : $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta$

36. p. 101 éq. (30,2) : $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j$; en unités gaussiennes

4.7 Champ de tenseurs d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$, en l'absence de polarisation et d'aimantation

On pourra consulter [5]³⁷ [7]³⁸ [8]³⁹ [12]⁴⁰ [14]⁴¹ [16]⁴².

Ce champ de tenseurs appelé “stress-energy field tensor” en anglais est aussi appelé “champ de tenseurs d'impulsion-énergie”.

C'est un champ de $(2, 0)$ - tenseurs symétriques identique à un champ de $(0, 2)$ - tenseurs symétriques. Ce n'est donc pas une 2 - forme différentielle extérieure.

On a $\vec{P} = \vec{0}$ et $\check{M} = \check{0}$ et donc $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ et $\check{B} = \mu_0 \check{H}$.

Le champ de tenseurs d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$ qui va apparaître ci-après dans l'étude lagrangienne des équations électromagnétiques est, par définition, tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ij} &\triangleq \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{H}_{ik} \mathbf{g}^{kl} \mathbf{B}_{lj} \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{H}_i{}^l \mathbf{B}_{lj} = \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{H}_{ik} \mathbf{B}_j{}^k. \end{aligned}$$

Ou :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{kl} &\triangleq \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}^{kl} + \mathbf{H}^{ki} \mathbf{g}_{ij} \mathbf{B}^{jl} \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}^{kl} + \mathbf{H}^k{}_j \mathbf{B}^{jl} = \frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}^{kl} + \mathbf{H}^{ki} \mathbf{B}_i{}^l. \end{aligned}$$

Mais en l'absence de polarisation et d'aimantation $\mathbf{C} = 0$ et $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$ et le champ de tenseurs d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$ est tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ij} &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{B}_{ik} \mathbf{g}^{kl} \mathbf{B}_{lj} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{B}_i{}^l \mathbf{B}_{lj} \right] = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_j{}^k \right] [7]^{43} [16]^{44}. \end{aligned}$$

37. pp. 370-371 Chapitre VII § 12 et, en particulier, p. 371 3) et pp. 390-391 Chapitre VII § 13

38. pp. 361-372 Chapitre 6 § 2 et 3

39. pp. 110-111 Chapitre IV § 5.4 : Tenseur des contraintes électromagnétiques

40. pp. 105-119 Chapitre IV § 32, 33, 34, 35

41. pp. 76-78 § C” .3

42. pp. 202-204 Chapitre VII § 126

43. p. 210 éq. (24) : $T_{ik} = \frac{1}{4\pi} (-g^{lm} F_{il} F_{km} + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik})$; en unités gaussiennes. Soit $T_{ij} = \frac{1}{4\pi} [\frac{1}{4} (F_{mn} F^{mn}) g_{ij} - F_{ik} g^{kl} F_{jl}] = \frac{1}{4\pi} [\frac{1}{4} (F_{mn} F^{mn}) g_{ij} + F_{ik} g^{kl} F_{lj}]$; en unités gaussiennes et où F joue le rôle de $\mathbf{B}$

44. p. 204 éq. (126,2) : $M_{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi c^2} (\frac{1}{4} g_{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F_{\lambda\alpha} F_{\mu}{}^{\alpha})$; en unités gaussiennes. Soit $M_{ij} = \frac{1}{4\pi c^2} [\frac{1}{4} (F_{mn} F^{mn}) g_{ij} - F_{ik} F_j{}^k] = \frac{1}{4\pi c^2} [\frac{1}{4} (F_{mn} F^{mn}) g_{ij} + F_{ik} F_j{}^k]$; en unités gaussiennes et où F joue le rôle de $\mathbf{B}$ et M celui de $\mathbf{T}$ (on a utilisé le fait que $F_j{}^k = -F^k{}_j$)

Ou :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{kl} &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \mathbf{g}^{kl} + \mathbf{B}^{ki} \mathbf{g}_{ij} \mathbf{B}^{jl} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \mathbf{g}^{kl} + \mathbf{B}^k_j \mathbf{B}^{jl} \right] = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \mathbf{g}^{kl} + \mathbf{B}^{ki} \mathbf{B}_i^l \right] [7]^{45} [8]^{46} [12]^{47}. \end{aligned}$$

On constate que l'on a bien $\mathbf{T}_{ji} = \mathbf{T}_{ij}$ et $\mathbf{T}^{lk} = \mathbf{T}^{kl}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_j^k &= \mathbf{g}^{ki} \mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji} \mathbf{g}^{ik} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \delta_j^k + \mathbf{B}^{kl} \mathbf{B}_{lj} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \delta_j^k + \mathbf{B}_{jl} \mathbf{B}^{lk} \right] (\delta_j^k \text{ symbole de Kronecker}) \text{ ou :} \\ \mathbf{T}_j^k &= \mathbf{T}^{kl} \mathbf{g}_{lj} = \mathbf{g}_{jl} \mathbf{T}^{lk} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \delta_j^k + \mathbf{B}^{ki} \mathbf{B}_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \delta_j^k + \mathbf{B}_{ji} \mathbf{B}^{ik} \right] (\delta_j^k \text{ symbole de Kronecker}). \end{aligned}$$

4.7.1 Calcul de $\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}$

On trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn} &= 2 (B_x H_x + B_y H_y + B_z H_z - E_x D_x - E_y D_y - E_z D_z) \\ &= 2 (\vec{H} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{D}) = 2 (\mu_0 H^2 - \varepsilon_0 E^2) = 2 \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 - \varepsilon_0 E^2 \right) \\ &= 2 \left(\mu_0 H^2 - \frac{1}{\varepsilon_0} D^2 \right) = 2 \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 - \frac{1}{\varepsilon_0} D^2 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn} &= \frac{2}{\mu_0} (B^2 - \frac{1}{c^2} E^2) = 2\varepsilon_0 (c^2 B^2 - E^2) \\ &= 2\mu_0 (H^2 - c^2 D^2) = \frac{2}{\varepsilon_0} (\frac{1}{c^2} H^2 - D^2). \end{aligned}$$

4.7.2 Calcul de $(\mathbf{T}_{..})$ $(\mathbf{T}^{..})$ et $(\mathbf{T}_{\cdot}^{\cdot})$

On trouve :

$$(\mathbf{T}_{..}) = (\mathbf{T}_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{T}_{02} & \mathbf{T}_{03} \\ \mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{30} & \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -\frac{1}{c} S_x & -\frac{1}{c} S_y & -\frac{1}{c} S_z \\ -\frac{1}{c} S_x & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ -\frac{1}{c} S_y & -\sigma_{xy} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ -\frac{1}{c} S_z & -\sigma_{xz} & -\sigma_{yz} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

démontré en Annexe de ce chapitre)

45. p. 372 éq. (13') : $T^{ik} = \frac{1}{4\pi c} (-F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm})$; en unités gaussiennes, où il faut comprendre que $F_l^k = F_l^k$.

Soit $T^{kl} = \frac{1}{4\pi c} [\frac{1}{4} (F_{mn} F^{mn}) g^{kl} - F^{ki} F_i^l]$; en unités gaussiennes et où F joue le rôle de $\mathbf{B}$ (on a utilisé le fait que $F_i^l = -F_i^l$ démontré en Annexe de ce chapitre)

46. p. 110 éq. (5.40) : $T_{em}^{\alpha\beta} = F_\gamma^\alpha F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$

47. p. 111 éq. (33,1) : $T^{ik} = \frac{1}{4\pi} (-F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm})$; en unités gaussiennes. On fait alors les mêmes remarques que pour la référence précédente mais on constate que c a disparu et que, par conséquent, l'une de ces deux références est erronée

$$(\mathbf{T}^\bullet) = (\mathbf{T}^{kl}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{00} & \mathbf{T}^{01} & \mathbf{T}^{02} & \mathbf{T}^{03} \\ \mathbf{T}^{10} & \mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}^{12} & \mathbf{T}^{13} \\ \mathbf{T}^{20} & \mathbf{T}^{21} & \mathbf{T}^{22} & \mathbf{T}^{23} \\ \mathbf{T}^{30} & \mathbf{T}^{31} & \mathbf{T}^{32} & \mathbf{T}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c} S_x & \frac{1}{c} S_y & \frac{1}{c} S_z \\ \frac{1}{c} S_x & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ \frac{1}{c} S_y & -\sigma_{xy} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ \frac{1}{c} S_z & -\sigma_{xz} & -\sigma_{yz} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

[12]⁴⁸ et :

$$(\mathbf{T}_\bullet) = (\mathbf{T}_j^k) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_0^0 & \mathbf{T}_1^0 & \mathbf{T}_2^0 & \mathbf{T}_3^0 \\ \mathbf{T}_0^1 & \mathbf{T}_1^1 & \mathbf{T}_2^1 & \mathbf{T}_3^1 \\ \mathbf{T}_0^2 & \mathbf{T}_1^2 & \mathbf{T}_2^2 & \mathbf{T}_3^2 \\ \mathbf{T}_0^3 & \mathbf{T}_1^3 & \mathbf{T}_2^3 & \mathbf{T}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -\frac{1}{c} S_x & -\frac{1}{c} S_y & -\frac{1}{c} S_z \\ \frac{1}{c} S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \frac{1}{c} S_y & \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \frac{1}{c} S_z & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Donc, en particulier, $\mathbf{T}^{00} = \mathbf{T}_{00} = \mathbf{T}_0^0 = W$.

4.7.3 Relation

On a $\frac{\partial \mathbf{T}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l} = -\mathbf{F}^k$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial \mathbf{T}^{0l}}{\partial \mathbf{x}^l} &= \frac{\partial \mathbf{T}^{00}}{\partial \mathbf{x}^0} + \frac{\partial \mathbf{T}^{01}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{T}^{02}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{T}^{03}}{\partial \mathbf{x}^3} \\ &= \frac{\partial W}{\partial (ct)} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{S} \\ &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{c} (\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}) \\ &= \frac{1}{2c} [(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{H} \cdot (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) - \vec{E} \cdot (\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}))]. \end{aligned}$$

Et comme $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ il y a des simplifications et on a :

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{0l}}{\partial \mathbf{x}^l} = -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} = -\mathbf{F}^0 = -\mathbf{F}_0.$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial \mathbf{T}^{1l}}{\partial \mathbf{x}^l} &= \frac{\partial \mathbf{T}^{10}}{\partial \mathbf{x}^0} + \frac{\partial \mathbf{T}^{11}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{T}^{12}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{T}^{13}}{\partial \mathbf{x}^3} \\ &= \frac{\partial}{\partial (ct)} \left(\frac{1}{c} \right) (E_y H_z - E_z H_y) - \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_x^2 - \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_0 E_x E_y + \mu_0 H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_0 E_x E_z + \mu_0 H_x H_z) \\ &= \frac{1}{c^2} (H_z \frac{\partial E_y}{\partial t} + E_y \frac{\partial H_z}{\partial t} - H_y \frac{\partial E_z}{\partial t} - E_z \frac{\partial H_y}{\partial t}) - 2\varepsilon_0 E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - 2\mu_0 H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ &\quad + \varepsilon_0 (E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x}) + \mu_0 (H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial x}) \\ &\quad - \varepsilon_0 (E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_x \frac{\partial E_y}{\partial y}) - \mu_0 (H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x \frac{\partial H_y}{\partial y}) \\ &\quad - \varepsilon_0 (E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + E_x \frac{\partial E_z}{\partial z}) - \mu_0 (H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} + H_x \frac{\partial H_z}{\partial z}) \\ &= -\varepsilon_0 E_x (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}) \\ &\quad + E_y [\frac{1}{c^2} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \varepsilon_0 (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})] + E_z [-\frac{1}{c^2} \frac{\partial H_y}{\partial t} + \varepsilon_0 (\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z})] \\ &\quad - \mu_0 H_x (\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}) \\ &\quad + H_y [-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mu_0 (\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y})] + H_z [\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 (\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z})]. \text{ Soit} \end{aligned}$$

48. p. 109 éq. (32,15)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{T}^{1l}}{\partial \mathbf{x}^l} \\
&= \varepsilon_0 \left[-E_x \operatorname{div} \vec{E} + E_y \left(\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) + E_z \left(-\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right] \\
&+ \mu_0 \left[-H_x \operatorname{div} \vec{H} + H_y \left(-\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + H_z \left(\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \right] \\
&= -\rho E_x + \mu_0 (H_y J_z - H_z J_y) = -(\rho E_x + J_y B_z - J_z B_y) = -F_x = -\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}_1.
\end{aligned}$$

De même $\frac{\partial \mathbf{T}^{2l}}{\partial \mathbf{x}^l} = -F_y = -\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}_2$ et $\frac{\partial \mathbf{T}^{3l}}{\partial \mathbf{x}^l} = -F_z = -\mathbf{F}^3 = \mathbf{F}_3$.

Par conséquent $\frac{\partial \mathbf{T}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l} = -\mathbf{F}^k$ QED.

Et comme $\mathbf{F} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}$ on a $\frac{\partial \mathbf{T}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l} = -\mathbf{F}^k = -\mathbf{B}^{kl} \mathbf{J}_l$ [5]⁴⁹.

Conséquence en tridimensionnel

Avec $k = 1$ on a $\frac{\partial}{\partial(ct)} \left(\frac{1}{c} S_x \right) - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -F_x$.

Avec $k = 2$ on a $\frac{\partial}{\partial(ct)} \left(\frac{1}{c} S_y \right) - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -F_y$.

Avec $k = 3$ on a $\frac{\partial}{\partial(ct)} \left(\frac{1}{c} S_z \right) - \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -F_z$.

Il s'agit bien des relations annoncées concernant le tenseur tridimensionnel des contraintes de Maxwell en l'absence de polarisation et d'aimantations.

Conséquence de la relation précédente

Comme $\frac{\partial \mathbf{T}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l} = -\mathbf{F}^k$ on a $\frac{\partial \mathbf{T}^{lk}}{\partial \mathbf{x}^k} = -\mathbf{F}^l$ soit $\frac{\partial \mathbf{T}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^k} = -\mathbf{F}^l$.

$$\frac{\partial \mathbf{T}_j^k}{\partial \mathbf{x}^k} = \frac{\partial (\mathbf{T}^{kl} \mathbf{g}_{lj})}{\partial \mathbf{x}^k} = \frac{\partial \mathbf{T}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^k} \mathbf{g}_{lj} = -\mathbf{F}^l \mathbf{g}_{lj} = -\mathbf{F}_j.$$

49. p. 391 : $(\operatorname{div} T)^k = \sum_i \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i} = f^k = \frac{1}{c} (\mathcal{J} \cdot F)^k = \frac{1}{c} (\sum_i \mathcal{J}_i F^{ik})$; en unités gaussiennes

4.8 Étude lagrangienne des équations électromagnétiques

On pourra consulter [5]⁵⁰ [7]⁵¹ [8]⁵² [12]⁵³ [14]⁵⁴ [22]⁵⁵

Nous nous plaçons toujours dans le vide, en l'absence de polarisation, d'aimantation. Alors $\vec{P} = \vec{0}$, $\vec{M} = \vec{0}$ et donc $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

4.8.1 Préliminaires

- $\frac{\partial \mathbf{B}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^l} = -\mu_0 \mathbf{J}^k$ ou $\frac{\partial \mathbf{B}^{lk}}{\partial \mathbf{x}^k} = -\mu_0 \mathbf{J}^l$ soit $\frac{\partial \mathbf{B}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^k} = \mu_0 \mathbf{J}^l$.
- $\mathbf{B}^{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} \right) = -\mathbf{B}^{lk} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} \right) = -\mathbf{B}^{lk} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^l} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^k} \right) = -\mathbf{B}^{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} \right)$
donc $\mathbf{B}^{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} \right) = 0$.
- $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} (\mathbf{B}^{kl} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l}) = \mathbf{B}^{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} \right) + \frac{\partial \mathbf{B}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^k} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} = \mu_0 \mathbf{J}^l \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l}$.
- $d(\mathbf{B}_{kl} \mathbf{B}^{kl}) = \mathbf{B}_{kl} d\mathbf{B}^{kl} + \mathbf{B}^{kl} d\mathbf{B}_{kl}$ mais $\mathbf{B}_{kl} d\mathbf{B}^{kl} = \mathbf{B}^{kl} d\mathbf{B}_{kl}$ et, par conséquent, $d(\mathbf{B}_{kl} \mathbf{B}^{kl}) = 2 \mathbf{B}^{kl} d\mathbf{B}_{kl}$ [12]⁵⁶.

Autre démonstration

On a $\mathbf{B}_{kl} \mathbf{B}^{kl} = 2(\mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2)$ et on vérifie que les deux membres de l'équation $d(\mathbf{B}_{kl} \mathbf{B}^{kl}) = 2 \mathbf{B}^{kl} d\mathbf{B}_{kl}$ sont égaux à
 $4[(B_x dB_x + B_y dB_y + B_z dB_z) - \frac{1}{c^2}(E_x dE_x + E_y dE_y + E_z dE_z)]$ QED.

4.8.2 Le lagrangien $\mathcal{L}$ et l'action $\mathcal{S}$

Considérons le lagrangien (ou plutôt la densité de lagrangien [5]⁵⁷)
 $\mathcal{L} = \frac{1}{4} \mathbf{B}_{kl} \mathbf{H}^{kl} + \mathbf{A}_l \mathbf{J}^l = \frac{1}{4\mu_0} \mathbf{B}_{kl} \mathbf{B}^{kl} + \mathbf{A}_l \mathbf{J}^l$ et considérons qu'il est fonction de $\mathbf{A}_l$ et $\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k}$; $l = 0, 1, 2, 3$; $k = 0, 1, 2, 3$ (sans être fonction *explicite* de $\mathbf{x}^j$; $j = 0, 1, 2, 3$): $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{A}_l, \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})$.

50. p. 389

51. pp. 366-372 Chapitre 6 § 3 : Équations du champ électromagnétique

52. pp. 108-110 Chapitre IV § 3 : Formulation lagrangienne de l'électrodynamique classique

53. pp. 93-95 § 27 : L'action du champ électromagnétique pp. 101-103 § 30 : La seconde paire des équations de Maxwell pp. 105-109 § 32 : Tenseur d'énergie-impulsion pp. 110-114 § 33 : Tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

54. pp. 47-48 § C.3.2 : Intégrale d'action du champ pp. 74-76 § C".2 : Étude "lagrangienne" de l'électromagnétisme pp. 76-78 § C".3 : Recherche de l'énergie et de la quantité de mouvement d'un champ électromagnétique à partir du théorème de Noether pp. 345-359 Annexe X.11 : Théorie classique des champs

55. p. 220 éq. (24)

56. p. 101

57. p. 389

On considère que le mouvement des charges est donné et donc que $\mathbf{J}$ ne varie pas ; soit $d\mathbf{J} = 0$ [12]⁵⁸.

Considérons l'action $\mathcal{S} \triangleq \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \mathcal{L}(\mathbf{A}_l, \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k}) d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3$.

On a alors les quatre équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] = 0; l = 0, 1, 2, 3.$$

Démonstration

Soit $\delta \mathcal{S}$ une variation de l'action $\mathcal{S}$ due à des variations $\delta \mathbf{A}_l$ de $\mathbf{A}_l$, nulles pour les bornes inf et sup et $\delta(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})$ de $\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k}$. Alors :

$$\delta \mathcal{S} = \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} \delta \mathbf{A}_l + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k} \right) \right] d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3$$

Mais $\delta(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} (\delta \mathbf{A}_l)$ et donc :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} \delta \mathbf{A}_l + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} (\delta \mathbf{A}_l) \right] d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3 \\ &= \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} \delta \mathbf{A}_l + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \delta \mathbf{A}_l \right] - \delta \mathbf{A}_l \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] \right\} d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \delta \mathcal{S} &= \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] \right\} \delta \mathbf{A}_l d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3 \\ &+ \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \delta \mathbf{A}_l \right] d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3 \\ &= \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] \right\} \delta \mathbf{A}_l d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3 \\ &+ \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} d \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \delta \mathbf{A}_l \right]. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] \right\} \delta \mathbf{A}_l d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3 + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \delta \mathbf{A}_l \right]_{\inf}^{\sup} \\ &= \int \int \int \int_{\inf}^{\sup} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] \right\} \delta \mathbf{A}_l d\mathbf{x}^0 d\mathbf{x}^1 d\mathbf{x}^2 d\mathbf{x}^3 \text{ car les variations } \delta \mathbf{A}_l \\ &\text{sont nulles pour les bornes inf et sup.} \end{aligned}$$

Pour les extrémales on a $\delta \mathcal{S} = 0; \forall \delta \mathbf{A}_l$ et donc $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] = 0; l = 0, 1, 2, 3$ QED.

Calcul de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})}$

Pour cela calculons $d\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{1}{4\mu_0} d(\mathbf{B}_{kl} \mathbf{B}^{kl}) + \mathbf{J}^l d\mathbf{A}_l = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^{kl} d\mathbf{B}_{kl} + \mathbf{J}^l d\mathbf{A}_l \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^{kl} d \left(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k} - \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \mathbf{x}^l} \right) + \mathbf{J}^l d\mathbf{A}_l \\ &= \frac{1}{2\mu_0} [\mathbf{B}^{kl} d \left(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k} \right) - \mathbf{B}^{kl} d \left(\frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \mathbf{x}^l} \right)] + \mathbf{J}^l d\mathbf{A}_l. \text{ Soit :} \end{aligned}$$

58. p. 101 § 30 : “on ne doit pas faire varier le courant j^i ”

$$\begin{aligned}
d\mathcal{L} &= \frac{1}{2\mu_0} [\mathbf{B}^{kl} d(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k}) - \mathbf{B}^{lk} d(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})] + \mathbf{J}^l d\mathbf{A}_l \\
&= \frac{1}{2\mu_0} [\mathbf{B}^{kl} d(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k}) + \mathbf{B}^{kl} d(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})] + \mathbf{J}^l d\mathbf{A}_l \\
&= \mathbf{J}^l d\mathbf{A}_l + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl} d(\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k}). \text{ Et, par conséquent :} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} &= \mathbf{J}^l \text{ et } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl}.
\end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$\mathbf{J}^l - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl} = 0$ soit $\frac{\partial \mathbf{H}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^k} = \mathbf{J}^l$. On retrouve le second couple d'équations de Maxwell.

Calcul de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^j}$

Étant donné que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{A}_l, \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})$ on a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{A}_l} \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \frac{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})}{\partial \mathbf{x}^j}$;
soit, en tenant compte des équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^j} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \frac{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})}{\partial \mathbf{x}^j} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right] \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \frac{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})}{\partial \mathbf{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})} \right].
\end{aligned}$$

Définition du tenseur d'énergie-impulsion

On a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^k} \delta_j^k$ (δ_j^k symbole de Kronecker) et donc, d'après ce qui précède :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} [\mathcal{L} \delta_j^k - \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^k})}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} [\mathcal{L} \delta_j^k - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl} \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j}] = 0$$

Cependant la quantité entre crochets conduisant à un futur tenseur non symétrique nous allons profiter du fait que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} (\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l}) = \mathbf{J}^l \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l}$ pour écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} [\mathcal{L} \delta_j^k - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl} (\frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j} - \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l})] &= \mathbf{J}^l \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l}; \text{ Soit :} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} \{ [\frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) + \mathbf{A}_j \mathbf{J}^l] \delta_j^k - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl} \mathbf{B}_{jl} \} &= \mathbf{J}^l \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} \text{ ou :} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} [(\frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn})) \delta_j^k - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{kl} \mathbf{B}_{jl}] &= \mathbf{J}^l \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^k} (\mathbf{A}_l \mathbf{J}^l) \delta_j^k \\
= \mathbf{J}^l (\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{x}^l} - \frac{\partial \mathbf{A}_l}{\partial \mathbf{x}^j}) &= -\mathbf{B}_{jl} \mathbf{J}^l = -\mathbf{F}_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Posons } \mathbf{T}_j^k &\triangleq \frac{1}{4\mu_0} [(\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \delta_j^k - 4 \mathbf{B}^{kl} \mathbf{B}_{jl}] \\
= \frac{1}{4\mu_0} [(\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \delta_j^k + 4 \mathbf{B}^{kl} \mathbf{B}_{lj}] &\text{. Il s'agit bien du tenseur d'énergie-impulsion.}
\end{aligned}$$

Alors on a :

$$\frac{\partial \mathbf{T}_j^k}{\partial \mathbf{x}^k} = -\mathbf{F}_j.$$

Et alors $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{g}_{ik} \mathbf{T}_j^k = \frac{1}{4\mu_0} [(\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \mathbf{g}_{ik} \delta_j^k + 4 \mathbf{g}_{ik} \mathbf{B}^{kl} \mathbf{B}_{lj}]$
 $= \frac{1}{\mu_0} [\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}_{ij} + \mathbf{B}_i^l \mathbf{B}_{lj}]$.
 Et $\mathbf{T}^{kl} = \mathbf{T}_j^k \mathbf{g}^{jl} = \frac{1}{4\mu_0} [(\mathbf{B}_{mn} \mathbf{B}^{mn}) \delta_j^k \mathbf{g}^{jl} + 4 \mathbf{B}^{ki} \mathbf{B}_{ij} \mathbf{g}^{jl}]$
 $= \frac{1}{\mu_0} [\frac{1}{4} (\mathbf{B}_{mn} \mathbf{H}^{mn}) \mathbf{g}^{kl} + \mathbf{B}^{ki} \mathbf{B}_i^l]$
 Et $\frac{\partial \mathbf{T}^{kl}}{\partial \mathbf{x}^k} = \frac{\partial (\mathbf{T}_j^k \mathbf{g}^{jl})}{\partial \mathbf{x}^k} = \frac{\partial \mathbf{T}_j^k}{\partial \mathbf{x}^k} \mathbf{g}^{jl} = -\mathbf{F}_j \mathbf{g}^{jl} = -\mathbf{F}^l$. On retrouve bien un résultat précédent.

4.9 Comportement unifié du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur $\vec{A}$, dans le vide, avec la condition de Lorentz

On a vu que :

$$\begin{aligned} \square V &= \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} [10]^{59}, \\ \square \vec{A} &= \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} [10]^{60}, \text{ Soit :} \\ \square A_x &= \Delta A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x, \\ \square A_y &= \Delta A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu_0 J_y, \\ \square A_z &= \Delta A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_0 J_z. \end{aligned}$$

Posons $\square \mathbf{A} = (\square \mathbf{A})^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} = (\square \mathbf{A})_i d\mathbf{x}^i$, avec :

$$\begin{aligned} ((\square \mathbf{A})^\bullet) &\triangleq \begin{pmatrix} (\square \mathbf{A})^0 \\ (\square \mathbf{A})^1 \\ (\square \mathbf{A})^2 \\ (\square \mathbf{A})^3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \square \mathbf{A}^0 \\ \square \mathbf{A}^1 \\ \square \mathbf{A}^2 \\ \square \mathbf{A}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \square V \\ \square A_x \\ \square A_y \\ \square A_z \end{pmatrix}. \text{ Alors :} \\ ((\square \mathbf{A})^\bullet) &= \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{\varepsilon_0 c} \\ -\mu_0 J_x \\ -\mu_0 J_y \\ -\mu_0 J_z \end{pmatrix} = -\mu_0 (\mathbf{J}^\bullet). \text{ Soit :} \end{aligned}$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} [10]^{61} [14]^{62} \text{ qui regroupe } \square V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ et } \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}.$$

59. p. 358 éq. (45)

60. p. 358 éq. (44)

61. p. 359 éq. (46)

62. p. 58 éq. (59) où $\square$ est noté $\square^2$

Annexe de ce chapitre

Autres calculs concernant le champ de tenseurs de Faraday

Soient $\mathbf{B}^i_j \triangleq \mathbf{g}^{ik} \mathbf{B}_{kj}$ et $\mathbf{B}_j^i \triangleq \mathbf{g}_{jk} \mathbf{B}^{ki}$. Alors, si on considère que i est un indice de ligne et j un indice de colonne, on trouve :

$$(\mathbf{B} \cdot) = (\mathbf{B}^i_j) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^0_0 & \mathbf{B}^0_1 & \mathbf{B}^0_2 & \mathbf{B}^0_3 \\ \mathbf{B}^1_0 & \mathbf{B}^1_1 & \mathbf{B}^1_2 & \mathbf{B}^1_3 \\ \mathbf{B}^2_0 & \mathbf{B}^2_1 & \mathbf{B}^2_2 & \mathbf{B}^2_3 \\ \mathbf{B}^3_0 & \mathbf{B}^3_1 & \mathbf{B}^3_2 & \mathbf{B}^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{1}{c} E_y & \frac{1}{c} E_z \\ \frac{1}{c} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c} E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c} E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

[35]⁶³.

$$(\mathbf{B} \cdot) = (\mathbf{B}_j^i) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^0_0 & \mathbf{B}^0_1 & \mathbf{B}^0_2 & \mathbf{B}^0_3 \\ \mathbf{B}^1_0 & \mathbf{B}^1_1 & \mathbf{B}^1_2 & \mathbf{B}^1_3 \\ \mathbf{B}^2_0 & \mathbf{B}^2_1 & \mathbf{B}^2_2 & \mathbf{B}^2_3 \\ \mathbf{B}^3_0 & \mathbf{B}^3_1 & \mathbf{B}^3_2 & \mathbf{B}^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} E_x & -\frac{1}{c} E_y & -\frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c} E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

On a $(\mathbf{B} \cdot) = -(\mathbf{B} \cdot)$ ou $\mathbf{B}_j^i = -\mathbf{B}^i_j$.

Autres calculs concernant le champ de tenseurs de Maxwell

Soient $\mathbf{H}^i_j \triangleq \mathbf{g}^{ik} \mathbf{H}_{kj}$ et $\mathbf{H}_j^i \triangleq \mathbf{g}_{jk} \mathbf{H}^{ki}$. Alors, si on considère que i est un indice de ligne et j un indice de colonne, on trouve :

$$(\mathbf{H} \cdot) = (\mathbf{H}^i_j) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^0_0 & \mathbf{H}^0_1 & \mathbf{H}^0_2 & \mathbf{H}^0_3 \\ \mathbf{H}^1_0 & \mathbf{H}^1_1 & \mathbf{H}^1_2 & \mathbf{H}^1_3 \\ \mathbf{H}^2_0 & \mathbf{H}^2_1 & \mathbf{H}^2_2 & \mathbf{H}^2_3 \\ \mathbf{H}^3_0 & \mathbf{H}^3_1 & \mathbf{H}^3_2 & \mathbf{H}^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c D_x & c D_y & c D_z \\ c D_x & 0 & H_z & -H_y \\ c D_y & -H_z & 0 & H_x \\ c D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{H} \cdot) = (\mathbf{H}_j^i) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^0_0 & \mathbf{H}^0_1 & \mathbf{H}^0_2 & \mathbf{H}^0_3 \\ \mathbf{H}^1_0 & \mathbf{H}^1_1 & \mathbf{H}^1_2 & \mathbf{H}^1_3 \\ \mathbf{H}^2_0 & \mathbf{H}^2_1 & \mathbf{H}^2_2 & \mathbf{H}^2_3 \\ \mathbf{H}^3_0 & \mathbf{H}^3_1 & \mathbf{H}^3_2 & \mathbf{H}^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c D_x & -c D_y & -c D_z \\ -c D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -c D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -c D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

On a $(\mathbf{H} \cdot) = -(\mathbf{H} \cdot)$ ou $\mathbf{H}_j^i = -\mathbf{H}^i_j$.

63. p. 2/5 noté : F^a_b et où les indices x, y, z sont en haut

Chapitre 5

Systèmes d'unités et valeurs numériques

On pourra consulter [3]¹ [11]² [14]³ [22]. Nous suivons la présentation et les notations de [11]. Pour tout système d'unités on a des constantes $k_1^J, k_2^J = c^{-2} k_1^J, k_3^J$ et λ, λ' qui s'en déduisent telles que :

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 (\vec{E} + 4\pi k_1^J \vec{P}) \text{ soit } \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \lambda \vec{P} \text{ avec } \lambda = 4\pi \varepsilon_0 k_1^J. \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + 4\pi \varepsilon_0 \mu_0 c^2 k_2^J \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + 4\pi \varepsilon_0 c^2 k_2^J \vec{M}); \text{ soit :} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \lambda' \vec{M} \text{ avec } \lambda' = 4\pi \varepsilon_0 c^2 k_2^J = 4\pi \varepsilon_0 k_1^J = \lambda.\end{aligned}$$

Les équations de Maxwell sont alors [11]⁴ :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \varepsilon_0 k_1^J \rho} \text{ et } \boxed{\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{k_2^J}{\varepsilon_0 \mu_0 k_1^J k_3^J} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi k_2^J}{\mu_0 k_3^J} \vec{J}}$$

et :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \text{ et } \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + k_3^J \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}.$$

Les systèmes rationalisés correspondent à $\lambda = \lambda' = 1$ et les systèmes non rationalisés à $\lambda = \lambda' = 4\pi$.

5.1 Système SI ou Giorgi rationalisé

On pourra consulter [1] [3] [10] [11] et en partie [14] [17] [34]. C'est le choix que nous avons fait précédemment dans ce rapport de recherche.

-
1. pp. 513-535 Chapitre XXVII : Systèmes d'unités
 2. Table 1 p 779 Table 2 p. 781 Table 3 p. 782 Table 4 p. 783
 3. pp. 226-228
 4. p. 778 éqs. (A8)

Il s'agit d'un système rationalisé.

$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (exactement d'après la définition du mètre) [11]⁵.
 $c^2 = 89\,875\,517\,873\,681\,764 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ [11]⁶.

$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} (\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2)$ et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} (\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2})$ et donc $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

$k_1^J = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} = 10^{-7} c^2 (\text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{A}^{-2})$,
 $k_2^J = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} (\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2})$,
 $k_3^J = 1$. Soit :

$\lambda = \lambda' = 1$. Il s'agit bien d'un système rationalisé. On a :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ et } \check{H} = \frac{1}{\mu_0} \check{B} - \check{M}.$$

Les équations de Maxwell sont alors :

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}, \quad \boxed{\text{r\ddot{ot}} \check{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}}$$

$$\boxed{\text{div } \check{B} = 0}, \quad \boxed{\text{r\ddot{ot}} \vec{E} + \frac{\partial \check{B}}{\partial t} = \check{0}}.$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \check{B}).$$

5.2 Système électrostatique (esu)

On pourra consulter [11].

Il s'agit d'un système non rationalisé.

$\varepsilon_0 = 1$ et $\mu_0 = c^{-2}$ et donc $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

$k_1^J = \varepsilon_0^{-1} = 1$, $k_2^J = \mu_0 = c^{-2}$, $k_3^J = 1$. Soit :

$\lambda = \lambda' = 4\pi$. Il s'agit bien d'un système non rationalisé. On a :

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \text{ et } \check{H} = c^2 \check{B} - 4\pi \check{M}.$$

Les équations de Maxwell sont alors :

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho}, \quad \boxed{\text{r\ddot{ot}} \check{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 4\pi \vec{J}}$$

5. p. 3

6. p. 780

$$\boxed{\operatorname{div} \check{B} = 0}, \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \check{B}}{\partial t} = \check{0}}.$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \check{B}).$$

5.3 Système électromagnétique (emu)

On pourra consulter [11].

Il s'agit d'un système non rationalisé.

$$\varepsilon_0 = c^{-2} \text{ et } \mu_0 = 1 \text{ et donc } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

$$k_1^J = \varepsilon_0^{-1} = c^2, k_2^J = \mu_0 = 1, k_3^J = 1. \text{ Soit :}$$

$\lambda = \lambda' = 4\pi$. Il s'agit bien d'un système non rationalisé. On a :

$$\vec{D} = \frac{1}{c^2} \vec{E} + 4\pi \vec{P} \text{ et } \check{H} = \check{B} - 4\pi \check{M}.$$

les équations de Maxwell sont alors :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho}, \boxed{\operatorname{rot} \check{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 4\pi \vec{J}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \check{B} = 0}, \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \check{B}}{\partial t} = \check{0}}.$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \check{B}).$$

5.4 Système gaussien

On pourra consulter [1]⁷ [2] [5] [7] [9] [11] [12] [13] [16] et, en partie, [34].

Il s'agit d'un système non rationalisé.

$$\varepsilon_0 = 1 \text{ et } \mu_0 = 1 \text{ et donc } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = c^2.$$

$$k_1^J = \varepsilon_0^{-1} = 1, k_2^J = \frac{\mu_0}{c^2} = c^{-2}, k_3^J = c^{-1}. \text{ Soit :}$$

$\lambda = \lambda' = 4\pi$. Il s'agit bien d'un système non rationalisé. On a :

7. p. 253

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad [2]^8 \quad [5]^9 \quad [13]^{10} \quad \text{et} \quad \check{H} = \check{B} - 4\pi \check{M} \quad [2]^{11} \quad [5]^{12} \quad [13]^{13}.$$

Les équations de Maxwell sont alors :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho}, \quad \boxed{\operatorname{r\ddot{o}t} \check{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \check{B} = 0}, \quad \boxed{\operatorname{r\ddot{o}t} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \check{B}}{\partial t} = \check{0}}.$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \check{B} \right).$$

5.5 Système de Heaviside-Lorentz

On pourra consulter [4]¹⁴ [8]¹⁵ [11].

Il s'agit d'un système rationalisé.

$\varepsilon_0 = 1$ et $\mu_0 = 1$ et donc $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = c^2$.

$k_1^J = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi}$, $k_2^J = \frac{1}{4\pi c^2}$, $k_3^J = c^{-1}$. Soit :

$\lambda = \lambda' = 1$. Il s'agit bien d'un système rationalisé. On a :

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P} \quad \text{et} \quad \check{H} = \check{B} - \check{M}.$$

Les équations de Maxwell sont alors :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}, \quad \boxed{\operatorname{r\ddot{o}t} \check{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \check{B} = 0}, \quad \boxed{\operatorname{r\ddot{o}t} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \check{B}}{\partial t} = \check{0}}.$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \check{B} \right).$$

8. p. 228 éq. (6,7) : $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$

9. p. 373 : $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{p}$

10. p. 155 : $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$

11. p. 228 : $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$

12. p. 379 : $H = B - 4\pi m$

13. p. 155 éq. (29,8) : $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$

14. avec $c = 1$, $\vec{P} = \vec{0}$ (sans le dire) et $\check{M} = \check{0}$ (en le disant)

15. avec $c = 1$, $\vec{P} = \vec{0}$ et $\check{M} = \check{0}$

Bibliographie

- [1] A. Angot. *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*. Collection technique et scientifique du CNET. Cinquième édition. Éditions de la revue d'optique. Paris. 1965.
- [2] A.I. Borisenko et I.E. Tarapov. *Vector and tensor analysis with applications*. Applications to electromagnetic theory. Dover Publications, Inc. New York. 1979
- [3] G. Bruhat. *Cours de physique générale. Électricité*. Huitième édition. Masson et Cie. Paris. 1963. À l'INSA Toulouse réf. C 0178.
- [4] Y. Choquet-Bruhat. *Géométrie différentielle et systèmes linéaires*. Dunod. Paris. 1968.
- [5] R. Deheuvels. *Tenseurs et spineurs*. PUF. Paris. 1993.
- [6] G. A. Deschamps. *III. Exterior differential forms*. Mathematics applied to physics. pp. 111-161. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1970. À la Bib. Math. et Méca Toulouse réf. C 1964 M. Code barre BM 04525.
- [7] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Première partie. Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs*. Éditions MIR. Moscou. 1982.
- [8] E. Elbaz. *Relativité générale et gravitation*. Ellipses. Éditions marketing. Paris. 1986.
- [9] H. Flanders. *Differential forms with applications to the physical sciences*. Dover Publications, Inc. New York. 1989.
- [10] G. Fournet. *Électricité générale*. Cours de l'École Supérieure d'Électricité (ESE). Paris. Nos. 1019/1-1969, 1019/2-1969, 1019/3-1970, 1019/4-1970, 1016/13-1969, 1019/6-1970 . 1970.
- [11] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Third edition. John Wiley and sons, Inc. New York, ... Toronto. 1999. Au LAAS Toulouse réf : JAC P071. À l'INSA réf. JAC 537.6.

- [12] L. Landau et E. Lifchitz. *Physique théorique. Tome 2. Théorie des champs*. Éditions MIR. Quatrième édition revue et complétée. Moscou. 1989.
- [13] L. Landau et E. Lifchitz. *Physique théorique. Tome 8. Électrodynamique des milieux continus*. Éditions MIR. Deuxième édition remaniée et complétée. Moscou. 1990.
- [14] R. Laverriere. *Électrodynamique classique. Volume 2. Électromagnétisme*. Bréal éditions. Rosny sous Bois. Novembre 1992.
- [15] D. Leborgne. *Calcul différentiel et géométrie*. PUF. Paris. 1982.
- [16] A. Lichnerowicz. *Éléments de calcul tensoriel*. Armand Colin. Paris 1946. Et Éditions Jacques Gabay. Sceaux. 1987.
- [17] L. Pinchard. *Électromagnétisme classique et théorie des distributions*. Édition marketing. Ellipses. Paris. 1990.
- [18] Postnikov. *Leçons de géométrie. Géométrie différentielle*. pp. 328-344. Leçon 12. Éditions MIR. Moscou. 1990.
- [19] M. Renaud. *Champs de tenseurs. Bases mobiles et naturelles. Torsion. Courbure*. Rapport de Recherche LAAS No 17123. Avril 2017. Hal 01523409.
- [20] Ph. Robba. *Cours de mathématiques*. pp. 511-594. Chapitre XII. Tenseurs. Formes différentielles. École Supérieure d'Électricité No. 1020. Paris. 1968-1969.
- [21] L. Schwartz. *Les tenseurs*. Hermann. Paris. 1981.
- [22] A. Sommerfeld. *Lectures on theoretical physics. Volume III. Electrodynamics*. Academic Press. New York et Londres. 1964. À la BU Sciences Toulouse réf. C 270819. PPN 019328 575.
- [23] D. Tevian. *The Hodge dual operator*. Department of Mathematics, Oregon State University, Corvallis, OR 97331, EUE. 29 janvier 1999.
- [24] L. W. Tu. *An introduction to manifolds*. Second edition. Universitext. Springer Science+Business. Media LLC. 2011.
- [25] Wikipedia. *Curl (mathematics)*.
[https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)).
- [26] Wikipedia. *D'alembertien*.
<https://fr.wikipedia.org/wiki/D'alembertien>.
- [27] Wikipedia. *Divergence (analyse vectorielle)*.
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Divergence_\(analyse_vectorielle\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Divergence_(analyse_vectorielle)).
- [28] Wikipedia. *Dualité de Hodge*.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Dualité_de_Hodge.

- [29] Wikipedia. *Équations de Maxwell*.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Équations_de_Maxwell.
- [30] Wikipedia. *Gradient*. <https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>.
- [31] Wikipedia. *Hodge dual*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Hodge_dual.
- [32] Wikipedia. *Laplace operator*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_operator.
- [33] Wikipedia. *Levi-Civita symbol*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_symbol.
- [34] Wikipedia. *Tenseur des contraintes de Maxwell*.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_des_contraintes_de_Maxwell.
- [35] Wikipedia. *Tenseur électromagnétique*.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_électromagnétique.
- [36] Wikipedia. *Tenseur de Levi-Civita*.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Tenseur_de_Levi-Civita.