HAL
open science

Calculs de résultants sous forme de déterminants

Marc Renaud

To cite this version:

Marc Renaud. Calculs de résultants sous forme de déterminants. Rapport LAAS n° 18166. 2018, 144p. hal-01823546

HAL Id: hal-01823546

https://laas.hal.science/hal-01823546v1

Submitted on 26 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calculs de résultants sous forme de déterminants

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

1 Introduction

Le but de cet article est de calculer le résultant de k formes (ou polynômes homogènes) en k variables, qui exprime la condition pour que ces polynômes aient un zéro commun non nul.

Ce résultant est un polynôme en les coefficients des k formes. Son calcul est inconnu dans le cas général.

Lorsque les degrés des formes sont tous égaux cet article présente les **seuls** cas actuellement connus où le calcul du résultat est théoriquement possible sous la forme d'un déterminant, présentés en [24]. Cependant pour certains de ces cas le calcul effectif des éléments de ce déterminant n'est pas connu, ce qui empêche le calcul effectif du résultant. Nous présentons – pour la première fois à notre connaissance – le calcul effectif du résultant de trois formes ternaires de degré trois sous la forme d'un déterminant d'ordre minimal treize, alors que le calcul effectif sous la forme d'un déterminant d'ordre quinze était déjà connu grâce a une méthode due à J. Sylvester.

Bien entendu même dans le cas où le calcul effectif de tous les éléments du déterminant est possible, le calcul pratique du résultant est hors de portée lorsque l'ordre de ce déterminant est trop élevé.

Lorsque les degrés des formes ne sont pas tous égaux cet article présente quelques cas de calculs du résultant.

Concernant les travaux historiques sur les résultants signalons ceux de :

- Étienne Bezout (1730-1783)
- Joseph (dit James) Sylvester (1814-1897)
- Arthur Cayley (1821-1895)
- Francis Macaulay (1862-1937)
- Alfred Dixon (1865-1936).

Quelques remarques et notations générales

$*$ ssi signifie : "si et seulement si".
$*$ l'ordre utilisé pour classer les monômes est toujours lexicographique
$*$ $E(u)$ représente la partie entière d'un nombre réel u

2 Notations

2.1 Notation des variables

Soient k variables $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, \ldots = x,\, y,\, z,\, t,\, u,\, v,\, \ldots$.

2.2 Notation des formes ou polynômes homogènes

Soient k formes (i.e. k polynômes homogènes) :

$f_1(x_1,\, \ldots\, ,\, x_k)$, de degré $d_1,\ \ldots,\ f_k(x_1,\, \ldots\, ,\, x_k)$, de degré d_k.

2.3 Notations de certains espaces

$S^d\,\mathbb{C}^k$ ensemble des formes de k variables de degré d.
Alors $\dim\,(S^d\,\mathbb{C}^k) = C^d_{d+k-1} \triangleq \frac{(d+k-1)!}{d!\,(k-1)!}$:

- $\dim\,(S^d\,\mathbb{C}^1) = 1$
- $\dim\,(S^d\,\mathbb{C}^2) = d+1$
  - $\diamond$ $\dim\,(S^0\,\mathbb{C}^2) = 1$; base : $\{1\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^1\,\mathbb{C}^2) = 2$; base : $\{x,\, y\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^2\,\mathbb{C}^2) = 3$; base : $\{x^2,\, x\,y,\, y^2\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^3\,\mathbb{C}^2) = 4$; base : $\{x^3,\, x^2\,y,\, x\,y^2,\, y^3\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^4\,\mathbb{C}^2) = 5$; base : $\{x^4,\, x^3\,y,\, x^2\,y^2,\, x\,y^3,\, y^4\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^5\,\mathbb{C}^2) = 6$; base : $\{x^5,\, x^4\,y,\, x^3\,y^2,\, x^2\,y^3,\, x\,y^4,\, y^5\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^6\,\mathbb{C}^2) = 7$; base : $\{x^6,\, x^5\,y,\, x^4\,y^2,\, x^3\,y^3,\, x^2\,y^4,\, x\,y^5,\, y^6\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^7\,\mathbb{C}^2) = 8$; base : $\{x^7,\, x^6\,y,\, x^5\,y^2,\, x^4\,y^3,\, x^3\,y^4,\, x^2\,y^5,\, x\,y^6,\, y^7\}$.
  - $\diamond$ etc.
- $\dim\,(S^d\,\mathbb{C}^3) = \frac{(d+2)\,(d+1)}{2}$
  - $\diamond$ $\dim\,(S^0\,\mathbb{C}^3) = 1$; base $\{1\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^1\,\mathbb{C}^3) = 3$; base : $\{x,\, y,\, z\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^2\,\mathbb{C}^3) = 6$; base : $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, y^2,\, y\,z,\, z^2\}$.
  - $\diamond$ $\dim\,(S^3\,\mathbb{C}^3) = 10$; base : $\{x^3,\, x^2\,y,\, x^2\,z,\, x\,y^2,\, x\,y\,z,\, x\,z^2,\, y^3,\, y^2\,z,\, y\,z^2,\, z^3\}$.

$\diamond$ $\dim(S^4\,\mathbb{C}^3) = 15$; base : $\{x^4,\, x^3\,y,\, x^3\,z,\, x^2\,y^2,\, x^2\,y\,z,\, x^2\,z^2,\, x\,y^3,\, x\,y^2\,z,\, x\,y\,z^2,\, x\,z^3,\, y^4,\, y^3\,z,\, y^2\,z^2,\, y\,z^3,\, z^4\}$.

$\diamond$ $\dim(S^5\,\mathbb{C}^3) = 21$; base : $\{x^5,\, \ldots\,,\, z^5\}$.

$\diamond$ $\dim(S^6\,\mathbb{C}^3) = 28$; base : $\{x^6,\, \ldots\,,\, z^6\}$.

$\diamond$ $\dim(S^7\,\mathbb{C}^3) = 36$; base : $\{x^7,\, \ldots\,,\, z^7\}$.

$\diamond$ $\dim(S^8\,\mathbb{C}^3) = 45$; base : $\{x^8,\, \ldots\,,\, z^8\}$.

$\diamond$ etc.

- $\dim(S^d\,\mathbb{C}^4) = \frac{(d+3)\,(d+2)\,(d+1)}{6}$

$\diamond$ $\dim(S^0\,\mathbb{C}^4) = 1$; base $\{1\}$.

$\diamond$ $\dim(S^1\,\mathbb{C}^4) = 4$; base : $\{x,\, y,\, z,\, t\}$.

$\diamond$ $\dim(S^2\,\mathbb{C}^4) = 10$; base : $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, x\,t,\, y^2,\, y\,z,\, y\,t,\, z^2,\, z\,t,\, t^2\}$.

$\diamond$ $\dim(S^3\,\mathbb{C}^4) = 20$; base : $\{x^3,\, x^2\,y,\, x^2\,z,\, x^2\,t,\, x\,y^2,\, x\,y\,z,\, x\,y\,t,\, x\,z^2,\, x\,z\,t,\, x\,t^2,\, y^3,\, y^2\,z,\, y^2\,t,\, y\,z^2,\, y\,z\,t,\, y\,t^2,\, z^3,\, z^2\,t,\, z\,t^2,\, t^3\}$.

$\diamond$ $\dim(S^4\,\mathbb{C}^4) = 35$; base : $\{x^4,\, x^3\,y,\, x^3\,z,\, x^3\,t,\, x^2\,y^2,\, x^2\,y\,z,\, x^2\,y\,t,\, x^2\,z^2,\, x^2\,z\,t,\, x^2\,t^2,\, x\,y^3,\, x\,y^2\,z,\, x\,y^2\,t,\, x\,y\,z^2,\, x\,y\,z\,t,\, x\,y\,t^2,\, x\,z^3,\, x\,z^2\,t,\, x\,z\,t^2,\, x\,t^3,\, y^4,\, y^3\,z,\, y^3\,t,\, y^2\,z^2,\, y^2\,z\,t,\, y^2\,t^2,\, y\,z^3,\, y\,z^2\,t,\, y\,z\,t^2,\, y\,t^3,\, z^4,\, z^3\,t,\, z^2\,t^2,\, z\,t^3,\, t^4\}$.

$\diamond$ $\dim(S^5\,\mathbb{C}^4) = 56$; base : $\{x^5,\, \ldots\,,\, t^5\}$.

$\diamond$ $\dim(S^6\,\mathbb{C}^4) = 84$; base : $\{x^6,\, \ldots\,,\, t^6\}$.

$\diamond$ $\dim(S^7\,\mathbb{C}^4) = 120$; base : $\{x^7,\, \ldots\,,\, t^7\}$.

$\diamond$ etc.

- $\dim(S^d\,\mathbb{C}^5) = \frac{(d+4)\,(d+3)\,(d+2)\,(d+1)}{24}$

$\diamond$ $\dim(S^0\,\mathbb{C}^5) = 1$; base $\{1\}$.

$\diamond$ $\dim(S^1\,\mathbb{C}^5) = 5$; base : $\{x,\, y,\, z,\, t,\, u\}$.

$\diamond$ $\dim(S^2\,\mathbb{C}^5) = 15$; base : $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, x\,t,\, x\,u,\, y^2,\, y\,z,\, y\,t,\, y\,u,\, z^2,\, z\,t,\, z\,u,\, t^2,\, t\,u,\, u^2\}$.

$\diamond$ $\dim(S^3\,\mathbb{C}^5) = 35$; base : $\{x^3,\, x^2\,y,\, x^2\,z,\, x^2\,t,\, x^2\,u,\, x\,y^2,\, x\,y\,z,\, x\,y\,t,\, x\,y\,u,\, x\,z^2,\, x\,z\,t,\, x\,z\,u,\, x\,t^2,\, x\,t\,u,\, x\,u^2,\, y^3,\, y^2\,z,\, y^2\,t,\, y^2\,u,\, y\,z^2,\, y\,z\,t,\, y\,z\,u,\, y\,t^2,\, y\,t\,u,\, y\,u^2,\, z^3,\, z^2\,t,\, z^2\,u,\, z\,t^2,\, z\,t\,u,\, z\,u^2,\, t^3,\, t^2\,u,\, t\,u^2,\, u^3\}$.

$\diamond$ $\dim(S^4\,\mathbb{C}^5) = 70$; base : $\{x^4,\, \ldots\,,\, u^4\}$.

$\diamond$ $\dim(S^5\,\mathbb{C}^5) = 126$; base : $\{x^5,\, \ldots\,,\, u^5\}$.

◇ etc.

- $\dim(S^d\,\mathbb{C}^6) = \frac{(d+5)\,(d+4)\,(d+3)\,(d+2)\,(d+1)}{120}$

  ◇ $\dim(S^0\,\mathbb{C}^6) = 1$; base $\{1\}$.

  ◇ $\dim(S^1\,\mathbb{C}^6) = 6$; base : $\{x\,y,\ z,\ t,\ u,\ v\}$.

  ◇ $\dim(S^2\,\mathbb{C}^6) = 21$; base : $\{x^2,\ x\,y,\ x\,z,\ x\,t,\ x\,u,\ x\,v,\ y^2,\ y\,z,\ y\,t,\ y\,u,\ y\,v,\ z^2,\ z\,t,\ z\,u,\ z\,v,\ t^2,\ t\,u,\ t\,v,\ u^2,\ u\,v,\ v^2\}$.

  ◇ $\dim(S^3\,\mathbb{C}^6) = 56$; base : $\{x^3,\ \ldots\ ,\ v^3\}$.

  ◇ $\dim(S^4\,\mathbb{C}^6) = 126$; base : $\{x^4,\ \ldots\ ,\ v^4\}$.

  ◇ etc.

- etc.

$\wedge^p\,\mathbb{C}^k$ ensemble des $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_p$ et $\wedge^0\,\mathbb{C}^k = \{1\}$. Alors $\dim(\wedge^p\,\mathbb{C}^k) = C_k^p \triangleq \frac{k!}{p!\,(k-p)!}$; $0 \leqslant p \leqslant k$:

◇ $\dim(\wedge^0\,\mathbb{C}^1) = 1$; base : $\{1\}$,

◇ $\dim(\wedge^1\,\mathbb{C}^1) = 1$; base : $\{\xi_1\}$,

◇ $\dim(\wedge^0\,\mathbb{C}^2) = 1$; base : $\{1\}$,

◇ $\dim(\wedge^1\,\mathbb{C}^2) = 2$; base : $\{\xi_1,\ \xi_2\}$,

◇ $\dim(\wedge^2\,\mathbb{C}^2) = 1$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2\}$,

◇ $\dim(\wedge^0\,\mathbb{C}^3) = 1$; base : $\{1\}$,

◇ $\dim(\wedge^1\,\mathbb{C}^3) = 3$; base : $\{\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\}$,

◇ $\dim(\wedge^2\,\mathbb{C}^3) = 3$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2,\ \xi_1 \wedge \xi_3,\ \xi_2 \wedge \xi_3\}$,

◇ $\dim(\wedge^3\,\mathbb{C}^3) = 1$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3\}$,

◇ $\dim(\wedge^0\,\mathbb{C}^4) = 1$; base : $\{1\}$,

◇ $\dim(\wedge^1\,\mathbb{C}^4) = 4$; base : $\{\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4\}$,

◇ $\dim(\wedge^2\,\mathbb{C}^4) = 6$; base :
$\{\xi_1 \wedge \xi_2,\ \xi_1 \wedge \xi_3,\ \xi_1 \wedge \xi_4,\ \xi_2 \wedge \xi_3,\ \xi_2 \wedge \xi_4,\ \xi_3 \wedge \xi_4,\ \}$,

◇ $\dim(\wedge^3\,\mathbb{C}^4) = 4$; base :
$\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3,\ \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4,\ \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4,\ \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4\}$,

◇ $\dim(\wedge^4\,\mathbb{C}^4) = 1$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^0 \mathbb{C}^5) = 1$; base : $\{1\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^1 \mathbb{C}^5) = 5$; base : $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^2 \mathbb{C}^5) = 10$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2, \xi_1 \wedge \xi_3, \xi_1 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_3, \xi_2 \wedge \xi_4, \xi_2 \wedge \xi_5, \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_4 \wedge \xi_5\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^3 \mathbb{C}^5) = 10$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^4 \mathbb{C}^5) = 5$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^5 \mathbb{C}^5) = 1$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^0 \mathbb{C}^6) = 1$; base : $\{1\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^1 \mathbb{C}^6) = 6$; base : $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^2 \mathbb{C}^6) = 15$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2, \xi_1 \wedge \xi_3, \xi_1 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_3, \xi_2 \wedge \xi_4, \xi_2 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_6, \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_3 \wedge \xi_6, \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_5 \wedge \xi_6\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^3 \mathbb{C}^6) = 20$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_3 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^4 \mathbb{C}^6) = 15$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^5 \mathbb{C}^6) = 6$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6, \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6\}$,

$\diamond$ $\dim(\wedge^6 \mathbb{C}^6) = 1$; base : $\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \wedge \xi_6\}$,

$\diamond$ ...

2.4 Notations des déterminants

- si $k = 2$ soit $AB \triangleq \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\,b' + \ldots.$

- si $k = 3$ soit $ABC \triangleq \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\,b'\,c'' + \ldots.$

- si $k = 4$ soit $ABCD \triangleq \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = a\,b'\,c''\,d''' + \ldots.$

- $k = 5$ soit $ABCDE \triangleq \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' & e''' \\ a'''' & b'''' & c'''' & d'''' & e'''' \end{vmatrix} = a\,b'\,c''\,d'''\,e'''' + \ldots.$

- $k = 6$ soit $ABCDEF \triangleq \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e'' & f'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' & e''' & f''' \\ a'''' & b'''' & c'''' & d'''' & e'''' & f'''' \\ a''''' & b''''' & c''''' & d''''' & e''''' & f''''' \end{vmatrix}$
$= a\,b'\,c''\,d'''\,e''''\,f''''' + \ldots.$

- $\ldots$

2.5 Notation du produit vectoriel pour $k = 3$

Lorsque $k = 3$ on note :
$A \times B = \begin{bmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'\,b'' - b'\,a'' \\ b\,a'' - a\,b'' \\ a\,b' - b\,a' \end{bmatrix}$, où $\times$ représente le produit vectoriel.

Alors $ABC = (A,\, B,\, C) = (A \times B) \cdot C$ où $(\ ,\ ,\ )$ représente un produit mixte et $\cdot$ un produit scalaire.

3 Définitions et problème à résoudre

3.1 Définitions

Le résultant $R(f_1, \ldots, f_k)$ des k formes $f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_k)$ est le polynôme irréductible en les coefficients de ces formes qui s'annule lorsque ces formes ont un zéro commun sur $\mathbb{C}^k - \{0\}$, i.e. un zéro commun non nul ; il est tel que $R(x_1^{d_1}, \ldots, x_k^{d_k}) = 1$

$R(f_1, \ldots, f_k)$ est une forme, donc un polynôme homogène, en les coefficients de chaque forme f_i, de degré $d_1 \ldots d_{i-1}\, d_{i+1} \ldots d_k$.

$R(f_1, \ldots, f_k)$ est une forme de degré total $D = \sum_{i=1}^{k} d_1 \ldots d_{i-1}\, d_{i+1} \ldots d_k$.

$t_k \triangleq \sum_{i=1}^{k}(d_i - 1)$ est le degré critique [14] [1].

Dans le cas particulier où $d_1 = \ldots = d_k = d$ le degré total est $D = k\, d^{k-1}$ et le degré critique $t_k = k\,(d-1)$.

3.2 Problème à résoudre

• Si on considère k formes à k variables il y a **un** résultant [31] [48] [2]. Voir [44] [3] pour les degrés et les poids, ce qui permet de prévoir les termes qui doivent intervenir dans ce résultant.

• Le calcul général est celui où :

$f_1(x_1, \ldots, x_k)$ est de degré d_1, $\ldots$, $f_k(x_1, \ldots, x_k)$ est de degré d_k.

• Le cas particulier est celui où $d_1 = \ldots = d_k = d$.

• Dans le cas général, ou même dans le cas particulier, on ne sait pas calculer ce résultant de manière théorique et par conséquent on ne sait pas le calculer de manière effective.

• Il existe des cas généraux pour lesquels on sait calculer ce résultant de manière théorique sous la forme d'un déterminant, que le calcul effectif soit possible ou non.

• Lorsque l'on sait calculer ce résultant de manière théorique sous la forme d'un déterminant on peut chercher le déterminant d'ordre minimal. Il arrive que le calcul effectif du déterminant d'ordre minimal est inconnu alors que celui d'un déterminant d'ordre supérieur est possible.

1. p. 2
2. p. 159
3. n. 78

4 Cas particulier où les degrés des k formes sont tous égaux à d et complexe associé

4.1 Définitions

Soit donc k le nombre des formes à k variables et $p \in \mathbb{Z}\,;\ -k+1 \leqslant p \leqslant k$ (il y a donc $2\,k$ valeurs possibles de p) et $m \in \mathbb{Z}$ un paramètre appelé paramètre de torsion [4] et noté t par [14] [5].

Soient :

• $A^{-p} \triangleq S^{m-p\,d}\,\mathbb{C}^k \otimes \wedge^p\,\mathbb{C}^k$, qui n'apparaît en fait que si $m - p\,d \geqslant 0$ et $0 \leqslant p \leqslant k$,

• $B^{-p} \triangleq \left(S^{p\,d-m+(k-1)\,(d-1)-1}\,\mathbb{C}^k\right)^* \otimes \wedge^{p+k-1}\,\mathbb{C}^k$, qui n'apparaît en fait que si $p\,d - m + (k-1)\,(d-1) - 1 \geqslant 0$ et $0 \leqslant p + k - 1 \leqslant k$ i.e. $-k+1 \leqslant p \leqslant 1$,

• $C^{-p} \triangleq A^{-p} \oplus B^{-p}$, où A^{-p} et/ou B^{-p} peut/peuvent disparaître.

4.2 Dimensions

$\dim A^{-p} = \max(0,\ \frac{k}{p!\,(k-p)!}\,\frac{(m-p\,d+k-1)!}{(m-p\,d)!})$, dans la mesure où A^{-p} existe, pour les $2\,k$ valeurs : $p = -k+1,\ -k+2,\ \ldots,\ k-1,\ k$.

$\dim B^{-p} = \max(0,\ \frac{k}{(p+k-1)!\,(-p+1)!}\,\frac{[p\,d-m+(k-1)\,d-1]!}{[p\,d-m+(k-1)\,d-k]!})$, dans la mesure où B^{-p} existe, pour les $2\,k$ valeurs : $p = -k+1,\ -k+2,\ \ldots,\ k-1,\ k$.

4.3 Complexe de Weyman (ou, plus rarement, de Koszul) associé

Considérons le complexe de Weyman (ou, plus rarement, de Koszul) :

$C^\bullet \triangleq C^\bullet(m\,;\ f_1,\ \ldots,\ f_k)$ [24] [6] :

$C^\bullet\ :\ \{0 \longrightarrow C^{-k} \xrightarrow{\delta^{-k}} C^{-k+1} \xrightarrow{\delta^{-k+1}} \ldots \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \ldots \xrightarrow{\delta^{k-3}} C^{k-2} \xrightarrow{\delta^{k-2}} C^{k-1} \longrightarrow 0\}$, tel que, par définition d'un complexe :

$\delta^{-k} \circ \delta^{-k+1} = \delta^{-k+1} \circ \delta^{-k+2} = \ldots = \delta^{k-3} \circ \delta^{k-2} = 0.$

4. "twist parameter" en anglais

5. p. 2

6. pp. 428-430 § B : "The Cayley determinental formula" pour le complexe de Koszul et pp. 430-433 § C : "Polynomial expressions for the resultant via Weyman's complexes" pour le complexe de Weyman

Il s'agit plus précisemment d'un complexe de co-chaines [3] [7] [30] [8] pour lequel les indices des termes C^{-p}, placés en haut (comme co-variant) augmentent de gauche à droite. Les applications δ^{-p} sont appelées differentielles ou co-bords. Cette notion de complexe de co-chaines est liée à celle d'algèbre et de co-homologie. Elle est également liée à la notion d'injectif et au foncteur Ext. Ce complexe est fini ou borné car il ne s'étend pas à l'infini ni a gauche ni a droite.

Signalons que la notion de complexe de chaines [3] [9] [30] [10] utilise des termes munis d'indices placés en bas (comme variant) qui diminuent de gauche à droite. Les applications entre termes (notées ∂ et non δ) sont appelées différentielles ou bords. Cette notion de complexe de chaines est liée a celle de topologie et d'homologie. Elle est également liée à la notion de projectif et au foncteur Tor. Ce complexe est fini ou borné s'il ne s'étend à l'infini ni a gauche ni a droite.

Il y a donc, a priori, $2\,k$ termes [11] dans le complexe et $2\,k-1$ différentielles δ [12], mais en fait il y en aura souvent moins.

Posons $n_{-p} = \dim C^{-p}$; $-k+1 \leqslant p \leqslant k$. On a :

$C^{-p} \xrightarrow{\delta^{-p}} C^{-p+1}$, avec :

$A^{-p} \xrightarrow{\delta_{11}^{-p}} A^{-p+1}$, $B^{-p} \xrightarrow{\delta_{12}^{-p}} A^{-p+1}$ et $B^{-p} \xrightarrow{\delta_{22}^{-p}} B^{-p+1}$. Alors :

$\delta^{-p} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^{-p} & \delta_{12}^{-p} \\ 0 & \delta_{22}^{-p} \end{bmatrix}$.

Lorsque $m \leqslant k\,(d-1)$ le complexe associé est appelé complexe de Weyman (noté W par la suite, à la droite du complexe).

Lorsque $m > k\,(d-1)$ le complexe associé est appelé complexe de Koszul (noté K par la suite, à la droite du complexe). Mais alors on verra que le complexe est :

$C^{\bullet}$: $\{0 \longrightarrow C^{-k} = A^{-k} \xrightarrow{\delta_{11}^{-k}} C^{-k+1} = A^{-k+1} \xrightarrow{\delta_{11}^{-k+1}} \ldots \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}}$ $C^{-1} = A^{-1} \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}} C^{0} = A^{0} \longrightarrow 0\}$ (K) et que les premiers termes peuvent disparaître.

7. p. 136
8. p. 118
9. p. 121
10. p. 117
11. on parlera toujours de termes non triviaux i.e. non nuls
12. on parlera toujours de différentielles non triviales i.e. non nulles

4.4 Utilisation du jacobien et de ses dérivées partielles

On peut augmenter le nombre de formes de k à $2\,k+1$ en utilisant le jacobien des k formes initiales et ses k dérivées partielles. Malheureusement le degré de toutes ces formes n'est pas le même et, en général, cette utilisation n'apporte pas d'aide au calcul du résultant [44].

Soit $J \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^k} \end{vmatrix}$ le jacobien des k formes initiales.

• Aux k équations initiales $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$, de degré d, en $\frac{(k+d-1)!}{d!\,(k-1)!}$ monômes on peut adjoindre :

• une équation $J = 0$, de degré $(d-1)\,k$ en $\frac{[k+(d-1)\,k-1]!}{[(d-1)\,k]!\,(k-1)!}$ monômes et :

• k équations $\frac{\partial J}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial J}{\partial x_k} = 0$, de degré $(d-1)\,k-1$ en $\frac{(d\,k-2)!}{[(d-1)\,k-1]!\,(k-1)!}$ monômes.

4.5 Cas étudiés

Cas a : $d = 1$. $t_1 = 0$, $\frac{t_1}{2} = 0$, $E(\frac{t_1}{2}) = 0$.

Cas b : $k = 2$; $d \geqslant 2$. $t_2 = 2\,(d-1)$, $\frac{t_2}{2} = d-1$, $E(\frac{t_2}{2}) = d-1$.

Cas c : $k = 3$; $d \geqslant 2$. $t_3 = 3\,(d-1)$, $\frac{t_3}{2} = 1,5\,(d-1)$.

Cas d : $k = 4$; $d \geqslant 2$. $t_4 = 4\,(d-1)$, $\frac{t_4}{2} = 2\,(d-1)$, $E(\frac{t_4}{2}) = 2\,(d-1)$.

Cas e : $k = 5$; $d = 2$. $t_5 = 5$, $\frac{t_5}{2} = 2,5$, $E(\frac{t_5}{2}) = 2$.

Cas f : $k = 5$; $d = 3$. $t_5 = 10$, $\frac{t_5}{2} = 5$, $E(\frac{t_5}{2}) = 5$.

Cas g : $k = 6$; $d = 2$. $t_6 = 6$, $\frac{t_6}{2} = 3$, $E(\frac{t_6}{2}) = 3$.

4.5.1 Cas a : cas des formes linéaires : $d = 1$

Alors le résultant est de degré k. On calcule le résultant comme un déterminant d'ordre k. En effet pour que les k formes linéaires $f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_k)$ aient un zéro commun non nul il faut et il suffit que le déterminant formé avec les coefficients de ces formes s'annule. Il s'agit d'un cas trivial de la méthode de Sylvester exposée ci-après.

• $k = 2$

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x + b\,y$
$f_2 = a^{'}\,x + b^{'}\,y$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x + B\,y$ où f, A, B sont des matrices colonnes 2×1.

Alors $R(f_1,\ f_2) = AB$, de degré 2.

• $k = 3$

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z$
$f_2 = a^{'}\,x + b^{'}\,y + c^{'}\,z$
$f_3 = a^{''}\,x + b^{''}\,y + c^{''}\,z$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x + B\,y + C\,z$ où f, A, B, C sont des matrices colonnes 3×1.

Alors $R(f_1,\ f_2,\ f_3) = ABC$, de degré 3.

• $k = 4$

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z + d\,t$
$f_2 = a^{'}\,x + b^{'}\,y + c^{'}\,z + d^{'}\,t$
$f_3 = a^{''}\,x + b^{''}\,y + c^{''}\,z + d^{''}\,t$
$f_4 = a^{'''}\,x + b^{'''}\,y + c^{'''}\,z + d^{'''}\,t$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x + B\,y + C\,z + D,t$ où f, A, B, C, D sont des matrices colonnes 4×1.

Alors $R(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4) = ABCD$, de degré 4.

• $k = 5$

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z + d\,t + e\,u$
$f_2 = a^{'}\,x + b^{'}\,y + c^{'}\,z + d^{'}\,t + e^{'}\,u$
$f_3 = a^{''}\,x + b^{''}\,y + c^{''}\,z + d^{''}\,t + e^{''}\,u$
$f_4 = a^{'''}\,x + b^{'''}\,y + c^{'''}\,z + d^{'''}\,t + e^{'''}\,u$
$f_5 = a^{''''}\,x + b^{''''}\,y + c^{''''}\,z + d^{''''}\,t + e^{''''}\,u$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x + B\,y + C\,z + D,t + E\,u$ où f, A, B, C, D, E sont des matrices colonnes 5×1.

Alors $R(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5) = ABCDE$, de degré 5.

• $k = 6$

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z + d\,t + e\,u + f\,v$
$f_2 = a^{'}\,x + b^{'}\,y + c^{'}\,z + d^{'}\,t + e^{'}\,u + f^{'}\,v$
$f_3 = a^{''}\,x + b^{''}\,y + c^{''}\,z + d^{''}\,t + e^{''}\,u + f^{''}\,v$
$f_4 = a^{'''}\,x + b^{'''}\,y + c^{'''}\,z + d^{'''}\,t + e^{'''}\,u + f^{'''}\,v$
$f_5 = a^{''''}\,x + b^{''''}\,y + c^{''''}\,z + d^{''''}\,t + e^{''''}\,u + f^{''''}\,v$
$f_6 = a^{'''''}\,x + b^{'''''}\,y + c^{'''''}\,z + d^{'''''}\,t + e^{'''''}\,u + f^{'''''}\,v.$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x + B\,y + C\,z + D, t + E\,u + F\,v$ où f, A, B, C, D, E, F sont des matrices colonnes 6×1.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5,\, f_6) = ABCDEF$, de degré 6.

• etc.

4.5.2 Cas b : Cas des formes binaires non linéaires : $k = 2$; $d \geqslant 2$

Alors le résultant est de degré $2\,d$.

Le complexe associé est $0 \longrightarrow C^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \longrightarrow 0$. Il comporte, a priori, 4 termes et 3 différentielles. Plus précisemment il a, a priori, la forme :

$$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = S^{m-2\,d}\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$$
$$= (S^{m-d}\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2) \oplus (S^{2\,d-m-2}\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$$
$$= S^m\,\mathbb{C}^2 \oplus [(S^{d-m-2}\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = (S^{-m-2}\,\mathbb{C}^2)^* \longrightarrow 0.$$

Pour A^{-2} il faut $m \geqslant 2\,d$, pour A^{-1} il faut $m \geqslant d$, pour B^{-1} il faut $m \leqslant 2\,d - 2$, pour A^0 il faut $m \geqslant 0$, pour B^0 il faut $m \leqslant d - 2$, pour B^1 il faut $m \leqslant -2$.

Lorsque $m \leqslant 2\,(d-1)$ le complexe associé est W et lorsque $m > 2\,(d-1)$ le complexe associé est K.

$*$ **Cas b2 :** $d = 2$. $E(\frac{t_2}{2}) = 1$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$
$f_2 = a^{'}\,x^2 + b^{'}\,x\,y + c^{'}\,y^2$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2$ où f, A, B, C sont des matrices colonnes 2×1.

Le résultant est de degré 4.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = S^{m-4}\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^{m-2}\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2) \oplus (S^{2-m}\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^m\,\mathbb{C}^2 \oplus [(S^{-m}\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = (S^{-m-2}\,\mathbb{C}^2)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 2$ le complexe associé est W et lorsque $m > 2$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = -2$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^4\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{22}^{-1}} C^0 = B^0 = (S^2\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{22}^{0}}$
$C^1 = B^1 = \{1\} \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 5$, $n_0 = 6$, $n_1 = 1$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 6$.

Exemple : si $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (K) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \{1\} \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}} C^{-1} = A^{-1} = S^2\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^4\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 1$, $n_{-1} = 6$, $n_0 = 5$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 6$.

Formule de Sylvester utilisant le jacobien

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\,a\,x + b\,y & b\,x + 2\,c\,y \\ 2\,a'\,x + b'\,y & b'\,x + 2\,c'\,y \end{vmatrix}$
$= 2\,[(a\,b' - b\,a')\,x^2 + 2\,(a\,c' - c\,a')\,x\,y + (b\,c' - c\,b')\,y^2]$ et :

Pour que les 3 formes f_1, f_2, J, de degrés 2, aient un zéro commun non nul il faut et il suffit que le déterminant formé avec les coefficients de ces 3 formes s'annule ; par conséquent :

$R(f_1,\, f_2) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & a' & a\,b' - b\,a' \\ b & b' & 2\,(a\,c' - c\,a') \\ c & c' & b\,c' - c\,b' \end{vmatrix}$
$= (a\,c' - c\,a')^2 - (a\,b' - b\,a')\,(b\,c' - c\,b').$

Le coefficient $-\frac{1}{2}$ apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

$*$ **Cas b3 :** $d = 3$. $E(\frac{t_2}{2}) = 2$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3$
$f_2 = a^{'}\,x^3 + b^{'}\,x^2\,y + c^{'}\,x\,y^2 + d^{'}\,y^3$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x^3 + B\,x^2\,y + C\,x\,y^2 + D\,y^3$ où f, A, B, C, D sont des matrices colonnes 2×1.

Le résultant est de degré 6.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = S^{m-6}\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^{m-3}\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2) \oplus (S^{4-m}\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^m\,\mathbb{C}^2 \oplus [(S^{1-m}\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = (S^{-m-2}\,\mathbb{C}^2)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 4$ le complexe associé est W et lorsque $m > 4$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = -2$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^6\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{22}^{-1}} C^0 = B^0 = (S^3\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{22}^{0}}$
$C^1 = B^1 = \{1\} \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 7$, $n_0 = 8$, $n_1 = 1$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 8$.

Exemple : si $m = 6$ il y a 3 termes dans le complexe (K) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \{1\} \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}} C^{-1} = A^{-1} = S^3\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^6\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 1$, $n_{-1} = 8$, $n_0 = 7$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 8$.

$*$ **Cas b4 :** $d = 4$. $E(\frac{t_2}{2}) = 3$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^4 + b\,x^3\,y + c\,x^2\,y^2 + d\,x\,y^3 + e\,y^4$
$f_2 = a^{'}\,x^4 + b^{'}\,x^3\,y + c^{'}\,x^2\,y^2 + d^{'}\,x\,y^3 + e^{'}\,y^4$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x^4 + B\,x^3\,y + C\,x^2\,y^2 + D\,x\,y^3 + E\,y^3$ où f, A, B, C, D, E sont des matrices colonnes 2×1.

Le résultant est de degré 8.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = S^{m-8}\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^{m-4}\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2) \oplus (S^{6-m}\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^m\,\mathbb{C}^2 \oplus [(S^{2-m}\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = (S^{-m-2}\,\mathbb{C}^2)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 6$ le complexe associé est W et lorsque $m > 6$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = -2$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^8\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{22}^{-1}} C^0 = B^0 = (S^4\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{22}^{0}}$
$C^1 = B^1 = \{1\} \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 9$, $n_0 = 10$, $n_1 = 1$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 10$.

Exemple : si $m = 8$ il y a 3 termes dans le complexe (K) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \{1\} \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}} C^{-1} = A^{-1} = S^4\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^8\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 1$, $n_{-1} = 10$, $n_0 = 9$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 10$.

$*$ **etc**.

4.5.3 Cas c : Cas des formes ternaires non linéaires : $k = 3$; $d \geqslant 2$

Alors le résultant est de degré $3\,d^2$.

Le complexe associé est :
$0 \longrightarrow C^{-3} \xrightarrow{\delta^{-3}} C^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \longrightarrow 0$. Il comporte, a priori, 6 termes et 5 différentielles. Plus précisemment il a, a priori, la forme :

$0 \longrightarrow C^{-3} = A^{-3} = S^{m-3\,d}\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^{m-2\,d}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-d}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3) \oplus (S^{3\,d-m-3}\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^3 \oplus [(S^{2\,d-m-3}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3] \xrightarrow{\delta^0}$
$C^1 = B^1 = (S^{d-m-3}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{22}^{1}} C^2 = B^2 = (S^{-m-3}\,\mathbb{C}^3)^* \longrightarrow 0.$

Pour A^{-3} il faut $m \geqslant 3\,d$, pour A^{-2} il faut $m \geqslant 2\,d$, pour A^{-1} il faut $m \geqslant d$, pour B^{-1} il faut $m \leqslant 3\,d - 3$, pour A^0 il faut $m \geqslant 0$, pour B^0 il faut $m \leqslant 2\,d - 3$, pour B^1 il faut $m \leqslant d - 3$, pour B^2 il faut $m \leqslant -3$.

Lorsque $m \leqslant 3\,(d-1)$ le complexe associé est W et lorsque $m > 3\,(d-1)$ le complexe associé est K.

$*$ **Cas c2 :** $d = 2$. $E(\frac{t_3}{2}) = 1$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,x\,z + d\,y^2 + e\,y\,z + f\,z^2$
$f_2 = a^{'}\,x^2 + b^{'}\,x\,y + c^{'}\,x\,z + d^{'}\,y^2 + e^{'}\,y\,z + f^{'}\,z^2$
$f_3 = a^{''}\,x^2 + b^{''}\,x\,y + c^{''}\,x\,z + d^{''}\,y^2 + e^{''}\,y\,z + f^{''}\,z^2$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,x\,z + D\,y^2 + E\,y\,z + F\,z^2$ où f, A, B, C, D, E, F sont des matrices colonnes 3×1.

On remarque la symétrie :

$$\begin{array}{ccccc} x & \to & y & \to & z \\ y & \to & z & \to & x \\ z & \to & x & \to & y \\ a & \to & d & \to & f \\ b & \to & e & \to & c \\ c & \to & b & \to & e \\ d & \to & f & \to & a \\ e & \to & c & \to & b \\ f & \to & a & \to & d \end{array} .$$

Le résultant est de degré 12.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-3} = A^{-3} = S^{m-6}\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^{m-4}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-2}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3) \oplus (S^{3-m}\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^3 \oplus [(S^{1-m}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3] \xrightarrow{\delta^0}$
$C^1 = B^1 = (S^{-1-m}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{22}^1} C^2 = B^2 = (S^{-m-3}\,\mathbb{C}^3)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 3$ le complexe associé est W et lorsque $m > 3$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = -1$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^4\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta_{22}^{-1}} C^0 = B^0 = (S^2\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{22}^0}$
$C^1 = B^1 = \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 15$, $n_0 = 18$, $n_1 = 3$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 18$.

Exemple : si $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (K) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}} C^{-1} = A^{-1} = S^2\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^4\,\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 3$, $n_{-1} = 18$, $n_0 = 15$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 18$.

Formule de Sylvester utilisant le jacobien [14] [13]

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\,a\,x + b\,y + c\,z & b\,x + 2\,d\,y + e\,z & c\,x + e\,y + 2\,f\,z \\ 2\,a'\,x + b'\,y + c'\,z & b'\,x + 2\,d'\,y + e'\,z & c'\,x + e'\,y + 2\,f'\,z \\ 2\,a''\,x + b''\,y + c''\,z & b''\,x + 2\,d''\,y + e''\,z & c''\,x + e''\,y + 2\,f''\,z \end{vmatrix}.$$

J est de degré 3 ; donc $\frac{\partial J}{\partial x}$, $\frac{\partial J}{\partial y}$ et $\frac{\partial J}{\partial z}$ sont de degré 2. Et donc $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est, à un coefficient près, le déterminant, d'ordre 6, formé avec les coefficients des 6 formes $f_1,\ f_2,\ f_3,\ \frac{\partial J}{\partial x},\ \frac{\partial J}{\partial y},\ \frac{\partial J}{\partial z}$ sur la base $x^2,\ x\,y,\ x\,z,\ y^2,\ y\,z,\ z^2$.

On touve :

$J = 2\,ABC\,x^3 + 2\,(-2\,ACD + ABE)\,x^2\,y + 2\,(-ACE + 2\,ABF)\,x^2\,z$
$+\,2\,(2\,ADE - BCD)\,x\,y^2 + 2\,(4\,ADF - BCE)\,x\,y\,z + 2\,(2\,AEF - BCF)\,x\,z^2$
$+\,2\,BDE\,y^3 + 2\,(2\,BDF + CDE)\,y^2\,z + 2\,(BEF + 2\,CDF)\,y\,z^2$
$+2\,CEF\,z^3$. Et on peut vérifier que J est invariant par la symétrie précédente.

En fait $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est le déterminant, d'ordre 6, formé avec les coefficients des 6 formes $f_1,\ f_2,\ f_3,\ \frac{1}{8}\,\frac{\partial J}{\partial x},\ \frac{1}{8}\,\frac{\partial J}{\partial y},\ \frac{1}{8}\,\frac{\partial J}{\partial z}$ sur la base $x^2,\ x\,y,\ x\,z,\ y^2,\ y\,z,\ z^2$:

$R(f_1,\ f_2,\ f_3)$

$$= \begin{vmatrix} a & a' & a'' & \frac{3}{4}\,ABC & -\frac{1}{2}\,ACD + \frac{1}{4}\,ABE & -\frac{1}{4}\,ACE + \frac{1}{2}\,ABF \\ b & b' & b'' & -ACD + \frac{1}{2}\,ABE & ADE - \frac{1}{2}\,BCD & ADF - \frac{1}{4}\,BCE \\ c & c' & c'' & -\frac{1}{2}\,ACE + ABF & ADF - \frac{1}{4}\,BCE & AEF - \frac{1}{2}\,BCF \\ d & d' & d'' & \frac{1}{2}\,ADE - \frac{1}{4}\,BCD & \frac{3}{4}\,BDE & \frac{1}{2}\,BDF + \frac{1}{4}\,CDE \\ e & e' & e'' & ADF - \frac{1}{4}\,BCE & BDF + \frac{1}{2}\,CDE & \frac{1}{2}\,BEF + CDF \\ f & f' & f'' & \frac{1}{2}\,AEF - \frac{1}{4}\,BCF & \frac{1}{4}\,BEF + \frac{1}{2}\,CDF & \frac{3}{4}\,CEF \end{vmatrix}.$$

On verra plus loin (cf. Cas c2* $m = 2$) une expression plus simple du résultant sous la forme d'un déterminant d'ordre 6.

$*$ **Cas c3 :** $d = 3$. $E(\frac{t_3}{2}) = 3$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x^2\,z + d\,x\,y^2 + e\,x\,y\,z + f\,x\,z^2 + g\,y^3 + h\,y^2\,z$
$+\,i\,y\,z^2 + j\,z^3$

$f_2 = a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x^2\,z + d'\,x\,y^2 + e'\,x\,y\,z + f'\,x\,z^2 + g'\,y^3 + h'\,y^2\,z$
$+\,i'\,y\,z^2 + j'\,z^3$

$f_3 = a''\,x^3 + b''\,x^2\,y + c''\,x^2\,z + d''\,x\,y^2 + e''\,x\,y\,z + f''\,x\,z^2 + g''\,y^3 + h''\,y^2\,z$
$+\,i''\,y\,z^2 + j''\,z^3$; ce que l'on note matriciellement :

13. p. 26 § 7.2

$f = A\,x^3 + B\,x^2\,y + C\,x^2\,z + D\,x\,y^2 + E\,x\,y\,z + F\,x\,z^2 + G\,y^3 + H\,y^2\,z$
$+ I\,y\,z^2 + J\,z^3$ où A, B, C, D, E, F, G, H, I, J sont des matrices colonnes 3×1.

On remarque la symétrie :

$$\begin{array}{ccccc} x & \to & y & \to & z \\ y & \to & z & \to & x \\ z & \to & x & \to & y \\ a & \to & g & \to & j \\ b & \to & h & \to & f \\ c & \to & d & \to & i \\ d & \to & i & \to & c \\ e & \to & e & \to & e \\ f & \to & b & \to & h \\ g & \to & j & \to & a \\ h & \to & f & \to & b \\ i & \to & c & \to & d \\ j & \to & a & \to & g \end{array} .$$

Le résultant est de degré 27.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-3} = A^{-3} = S^{m-9}\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^{m-6}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-3}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3) \oplus (S^{6-m}\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^3 \oplus [(S^{3-m}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3] \xrightarrow{\delta^0}$
$C^1 = B^1 = (S^{-m}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{22}^1} C^2 = B^2 = (S^{-m-3}\,\mathbb{C}^3)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 6$ le complexe associé est W et lorsque $m > 6$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = 0$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^6\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= \{1\} \oplus [(S^3\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 28$, $n_0 = 31$, $n_1 = 3$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 31$.

Exemple : si $m = 6$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2 \mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^3 \mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1 \mathbb{C}^3) \oplus \{1\} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^6 \mathbb{C}^3 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 3$, $n_{-1} = 31$, $n_0 = 28$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 31$.

$*$ **Cas c4 :** $d = 4$. $E(\frac{t_3}{2}) = 4$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^4 + b\,x^3\,y + c\,x^3\,z + d\,x^2\,y^2 + e\,x^2\,y\,z + f\,x^2\,z^2 + g\,x\,y^3 + h\,x\,y^2\,z$
$+ i\,x\,y\,z^2 + j\,x\,z^3 + k\,y^4 + l\,y^3\,z + m\,y^2\,z^2 + n\,y\,z^3 + o\,z^4$
$f_2 = a^{'}\,x^4 + b^{'}\,x^3\,y + c^{'}\,x^3\,z + d^{'}\,x^2\,y^2 + e^{'}\,x^2\,y\,z + f^{'}\,x^2\,z^2 + g^{'}\,x\,y^3 + h^{'}\,x\,y^2\,z$
$+ i^{'}\,x\,y\,z^2 + j^{'}\,x\,z^3 + k^{'}\,y^4 + l\,y^3\,z + m^{'}\,y^2\,z^2 + n^{'}\,y\,z^3 + o^{'}\,z^4$
$f_3 = a^{''}\,x^4 + b^{''}\,x^3\,y + c^{''}\,x^3\,z + d^{''}\,x^2\,y^2 + e^{''}\,x^2\,y\,z + f^{''}\,x^2\,z^2 + g^{''}\,x\,y^3 + h^{''}\,x\,y^2\,z$
$+ i^{''}\,x\,y\,z^2 + j^{''}\,x\,z^3 + k^{''}\,y^4 + l^{''}\,y^3\,z + m^{''}\,y^2\,z^2 + n^{''}\,y\,z^3 + o^{''}\,z^4$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x^4 + B\,x^3\,y + C\,x^3\,z + D\,x^2\,y^2 + E\,x^2\,y\,z + F\,x^2\,z^2 + G\,x\,y^3 + H\,x\,y^2\,z$
$+ I\,x\,y\,z^2 + J\,x\,z^3 + K\,y^4 + L\,y^3\,z + M\,y^2\,z^2 + N\,y\,z^3 + O\,z^4$ où :
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O sont des matrices colonnes 3×1.

On remarque la symétrie :

$$\begin{array}{ccccc}
x & \to & y & \to & z \\
y & \to & z & \to & x \\
z & \to & x & \to & y \\
a & \to & k & \to & o \\
b & \to & l & \to & j \\
c & \to & g & \to & n \\
d & \to & m & \to & f \\
e & \to & h & \to & i \\
f & \to & d & \to & m \\
g & \to & n & \to & c \\
h & \to & i & \to & e \\
i & \to & e & \to & h \\
j & \to & b & \to & l \\
k & \to & o & \to & a \\
l & \to & j & \to & b \\
m & \to & f & \to & d \\
n & \to & c & \to & g \\
o & \to & a & \to & k
\end{array}.$$

Le résultant est de degré 48.

Le complexe associé est :

$$0 \longrightarrow C^{-3} = A^{-3} = S^{m-12}\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^{m-8}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^{-2}}$$
$$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-4}\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3) \oplus (S^{9-m}\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$$
$$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^3 \oplus [(S^{5-m}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3] \xrightarrow{\delta^0}$$
$$C^1 = B^1 = (S^{1-m}\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta_{22}^1} C^2 = B^2 = (S^{-m-3}\,\mathbb{C}^3)^* \longrightarrow 0.$$

Lorsque $m \leqslant 9$ le complexe associé est W et lorsque $m > 9$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = 1$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^8\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$$
$$= S^1\,\mathbb{C}^3 \oplus [(S^4\,\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^3] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = \wedge^1\,\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0.$$

$n_{-1} = 45$, $n_0 = 48$, $n_1 = 3$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 48$.

Exemple : si $m = 8$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2\,\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$$
$$= (S^4\,\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^3) \oplus (S^1\,\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^8\,\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0.$$

$n_{-2} = 3$, $n_{-1} = 48$, $n_0 = 45$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 48$.

$*$ **etc**.

4.5.4 Cas d : Cas des formes quaternaires non linéaires : $k = 4$; $d \geqslant 2$

Alors le résultant est de degré $4\,d^3$.

Le complexe associé est $0 \longrightarrow C^{-4} \xrightarrow{\delta^{-4}} C^{-3} \xrightarrow{\delta^{-3}} C^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2} C^3 \longrightarrow 0$. Il comporte, a priori, 8 termes et 7 différentielles. Plus précisemment il a, a priori, la forme :

$$0 \longrightarrow C^{-4} = A^{-4} = S^{m-4\,d}\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-4}} C^{-3} = A^{-3} = S^{m-3\,d}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}}$$
$$C^{-2} = A^{-2} = S^{m-2\,d}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta^{-2}}$$
$$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-d}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4) \oplus (S^{4\,d-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$$
$$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^4 \oplus [(S^{3\,d-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4] \xrightarrow{\delta^0}$$
$$C^1 = B^1 = (S^{2\,d-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{22}^1}$$
$$C^2 = B^2 = (S^{d-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{22}^2} C^3 = B^3 = (S^{-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \longrightarrow 0.$$

Pour A^{-4} il faut $m \geqslant 4\,d$, pour A^{-3} il faut $m \geqslant 3\,d$, pour A^{-2} il faut $m \geqslant 2\,d$, pour A^{-1} il faut $m \geqslant d$, pour B^{-1} il faut $m \leqslant 4\,d-4$, pour A^0 il faut $m \geqslant 0$, pour B^0 il faut $m \leqslant 3\,d-4$, pour B^1 il faut $m \leqslant 2\,d-4$, pour B^2 il faut $m \leqslant d-4$, pour B^3 il faut $m \leqslant -4$.

Lorsque $m \leqslant 4\,(d-1)$ le complexe associé est W et lorsque $m > 4\,(d-1)$ le complexe associé est K.

$*$ **Cas d2 :** $d = 2$. $E(\frac{t_4}{2}) = 2$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,x\,z + d\,x\,t + e\,y^2 + f\,y\,z + g\,y\,t + h\,z^2$
$+ i\,z\,t + j\,t^2$
$f_2 = a^{'}\,x^2 + b^{'}\,x\,y + c^{'}\,x\,z + d^{'}\,x\,t + e^{'}\,y^2 + f^{'}\,y\,z + g^{'}\,y\,t + h^{'}\,z^2$
$+ i^{'}\,z\,t + j^{'}\,t^2$
$f_3 = a^{''}\,x^2 + b^{''}\,x\,y + c^{''}\,x\,z + d^{''}\,x\,t + e^{''}\,y^2 + f^{''}\,y\,z + g^{''}\,y\,t + h^{''}\,z^2$
$+ i^{''}\,z\,t + j^{''}\,t^2$
$f_4 = a^{'''}\,x^2 + b^{'''}\,x\,y + c^{'''}\,x\,z + d^{'''}\,x\,t + e^{'''}\,y^2 + f^{'''}\,y\,z + g^{'''}\,y\,t + h^{'''}\,z^2$
$+ i^{'''}\,z\,t + j^{'''}\,t^2$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,x\,z + D\,x\,t + E\,y^2 + F\,y\,z + G\,y\,t + H\,z^2 + I\,z\,t + J\,t^2$
où f, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J sont des matrices colonnes 4×1.

On remarque la symétrie :

$$\begin{array}{cccccccc}
x & \to & y & \to & z & \to & t \\
y & \to & z & \to & t & \to & x \\
z & \to & t & \to & x & \to & y \\
t & \to & x & \to & y & \to & z \\
a & \to & e & \to & h & \to & j \\
b & \to & f & \to & i & \to & d \\
c & \to & g & \to & c & \to & g \\
d & \to & b & \to & f & \to & i \\
e & \to & h & \to & j & \to & a \\
f & \to & i & \to & d & \to & b \\
g & \to & c & \to & g & \to & c \\
h & \to & j & \to & a & \to & e \\
i & \to & d & \to & b & \to & f \\
j & \to & a & \to & e & \to & h
\end{array}.$$

Le résultant est de degré 32.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-4} = A^{-4} = S^{m-8}\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-4}} C^{-3} = A^{-3} = S^{m-6}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}}$
$C^{-2} = A^{-2} = S^{m-4}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-2}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4) \oplus (S^{4-m}\,\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^4 \oplus [(S^{2-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4] \xrightarrow{\delta^0}$
$C^1 = B^1 = (S^{-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{22}^1}$
$C^2 = B^2 = (S^{-2-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{22}^2} C^3 = B^3 = (S^{-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 4$ le complexe associé est W et lorsque $m > 4$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = 0$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^4\,\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = \{1\} \oplus [(S^2\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0$

$n_{-1} = 35$, $n_0 = 41$, $n_1 = 6$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 41$.

Exemple : si $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^2\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4) \oplus \{1\} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^4\,\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 6$, $n_{-1} = 41$, $n_0 = 35$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 41$.

Exemple : si $m = 5$ il y a 3 termes dans le complexe (K) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = S^1\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}} C^{-1} = A^{-1} = S^3\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^5\,\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 24$, $n_{-1} = 80$, $n_0 = 56$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 80$.

$*$ **Cas d3 :** $d = 3$. $E(\frac{t_4}{2}) = 4$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a_1\,x^3 + a_2\,x^2\,y + a_3\,x^2\,z + a_4\,x^2\,t + a_5\,x\,y^2 + a_6\,x\,y\,z + a_7\,x\,y\,t$
$+ a_8\,x\,z^2 + a_9\,x\,z\,t + a_{10}\,x\,t^2 + a_{11}\,y^3 + a_{12}\,y^2\,z + a_{13}\,y^2\,t + a_{14}\,y\,z^2 + a_{15}\,y\,z\,t$
$+ a_{16}\,y\,t^2 + a_{17}\,z^3 + a_{18}\,z^2\,t + a_{19}\,z\,t^2 + a_{20}\,t^3$
$f_2 = a_1^{'}\,x^3 + a_2^{'}\,x^2\,y + a_3^{'}\,x^2\,z + a_4^{'}\,x^2\,t + a_5^{'}\,x\,y^2 + a_6^{'}\,x\,y\,z + a_7^{'}\,x\,y\,t$
$+ a_8^{'}\,x\,z^2 + a_9^{'}\,x\,z\,t + a_{10}^{'}\,x\,t^2 + a_{11}^{'}\,y^3 + a_{12}^{'}\,y^2\,z + a_{13}^{'}\,y^2\,t + a_{14}^{'}\,y\,z^2 + a_{15}^{'}\,y\,z\,t$
$+ a_{16}^{'}\,y\,t^2 + a_{17}^{'}\,z^3 + a_{18}^{'}\,z^2\,t + a_{19}^{'}\,z\,t^2 + a_{20}^{'}\,t^3$
$f_3 = a_1^{''}\,x^3 + a_2^{''}\,x^2\,y + a_3^{''}\,x^2\,z + a_4^{''}\,x^2\,t + a_5^{''}\,x\,y^2 + a_6^{''}\,x\,y\,z + a_7^{''}\,x\,y\,t$
$+ a_8^{''}\,x\,z^2 + a_9^{''}\,x\,z\,t + a_{10}^{''}\,x\,t^2 + a_{11}^{''}\,y^3 + a_{12}^{''}\,y^2\,z + a_{13}^{''}\,y^2\,t + a_{14}^{''}\,y\,z^2 + a_{15}^{''}\,y\,z\,t$
$+ a_{16}^{''}\,y\,t^2 + a_{17}^{''}\,z^3 + a_{18}^{''}\,z^2\,t + a_{19}^{''}\,z\,t^2 + a_{20}^{''}\,t^3$

$f_4 = a_1^{'''}\, x^3 + a_2^{'''}\, x^2\, y + a_3^{'''}\, x^2\, z + a_4^{'''}\, x^2\, t + a_5^{'''}\, x\, y^2 + a_6^{'''}\, x\, y\, z + a_7^{'''}\, x\, y\, t$
$+ a_8^{'''}\, x\, z^2 + a_9^{'''}\, x\, z\, t + a_{10}^{'''}\, x\, t^2 + a_{11}^{'''}\, y^3 + a_{12}^{'''}\, y^2\, z + a_{13}^{'''}\, y^2\, t + a_{14}^{'''}\, y\, z^2 + a_{15}^{'''}\, y\, z\, t$
$+ a_{16}^{'''}\, y\, t^2 + a_{17}^{'''}\, z^3 + a_{18}^{'''}\, z^2\, t + a_{19}^{'''}\, z\, t^2 + a_{20}^{'''}\, t^3$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A_1\, x^3 + A_2\, x^2\, y + A_3\, x^2\, z + A_4\, x^2\, t + A_5\, x\, y^2 + A_6\, x\, y\, z + A_7\, x\, y\, t$
$+ A_8\, x\, z^2 + A_9\, x\, z\, t + A_{10}\, x\, t^2 + A_{11}\, y^3 + A_{12}\, y^2\, z + A_{13}\, y^2\, t + A_{14}\, y\, z^2 + A_{15}\, y\, z\, t$
$+ A_{16}\, y\, t^2 + A_{17}\, z^3 + A_{18}\, z^2\, t + A_{19}\, z\, t^2 + A_{20}\, t^3$ où f, A_1, $\ldots$, A_{20} sont des matrices colonnes 4×1.

On remarque la symétrie :

$$\begin{array}{ccccccc}
x & \to & y & \to & z & \to & t \\
y & \to & z & \to & t & \to & x \\
z & \to & t & \to & x & \to & y \\
t & \to & x & \to & y & \to & z \\
a_1 & \to & a_{11} & \to & a_{17} & \to & a_{20} \\
a_2 & \to & a_{12} & \to & a_{18} & \to & a_{10} \\
a_3 & \to & a_{13} & \to & a_8 & \to & a_{16} \\
a_4 & \to & a_5 & \to & a_{14} & \to & a_{19} \\
a_5 & \to & a_{14} & \to & a_{19} & \to & a_4 \\
a_6 & \to & a_{15} & \to & a_9 & \to & a_7 \\
a_7 & \to & a_6 & \to & a_{15} & \to & a_9 \\
a_8 & \to & a_{16} & \to & a_3 & \to & a_{13} \\
a_9 & \to & a_7 & \to & a_6 & \to & a_{15} \\
a_{10} & \to & a_2 & \to & a_{12} & \to & a_{18} \\
a_{11} & \to & a_{17} & \to & a_{20} & \to & a_1 \\
a_{12} & \to & a_{18} & \to & a_{10} & \to & a_2 \\
a_{13} & \to & a_8 & \to & a_{16} & \to & a_3 \\
a_{14} & \to & a_{19} & \to & a_4 & \to & a_5 \\
a_{15} & \to & a_9 & \to & a_7 & \to & a_6 \\
a_{16} & \to & a_3 & \to & a_{13} & \to & a_8 \\
a_{17} & \to & a_{20} & \to & a_1 & \to & a_{11} \\
a_{18} & \to & a_{10} & \to & a_2 & \to & a_{12} \\
a_{19} & \to & a_4 & \to & a_5 & \to & a_{14} \\
a_{20} & \to & a_1 & \to & a_{11} & \to & a_{17}
\end{array} .$$

Le résultant est de degré 108.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-4} = A^{-4} = S^{m-12}\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-4}} C^{-3} = A^{-3} = S^{m-9}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}}$
$C^{-2} = A^{-2} = S^{m-6}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-3}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4) \oplus (S^{8-m}\,\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^4 \oplus [(S^{5-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4] \xrightarrow{\delta^0}$
$C^1 = B^1 = (S^{2-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{22}^1}$
$C^2 = B^2 = (S^{-1-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4) \xrightarrow{\delta_{22}^2} C^3 = B^3 = (S^{-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 8$ le complexe associé est W et lorsque $m > 8$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = 2$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^6\,\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^2\,\mathbb{C}^4 \oplus [(S^3\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 84$, $n_0 = 90$, $n_1 = 6$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 90$.

Exemple : si $m = 6$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^3\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4) \oplus (S^2\,\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^6\,\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 6$, $n_{-1} = 90$, $n_0 = 84$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 90$.

$*$ **Cas d4 :** $d = 4$. $E(\frac{t_4}{2}) = 6$.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a_1\,x^4 + \ldots + a_{35}\,t^4$
$f_2 = a_1^{'}\,x^4 + \ldots + a_{35}^{'}\,t^4$
$f_3 = a_1^{''}\,x^4 + \ldots + a_{35}^{''}\,t^4$
$f_4 = a_1^{''}\,x^4 + \ldots + a_{35}^{''}\,t^4$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A_1\,x^4 + \ldots + A_{35}\,t^4$ où f, A_1, $\ldots$, A_{35} sont des matrices colonnes 4×1.

Le résultant est de degré 256.

Le complexe associé est :

$0 \longrightarrow C^{-4} = A^{-4} = S^{m-16}\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-4}} C^{-3} = A^{-3} = S^{m-12}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}}$
$C^{-2} = A^{-2} = S^{m-8}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-4}\,\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4) \oplus (S^{12-m}\,\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^4 \oplus [(S^{8-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^4] \xrightarrow{\delta^0}$
$C^1 = B^1 = (S^{4-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{22}^1}$
$C^2 = B^2 = (S^{-m}\,\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta_{22}^2} C^3 = B^3 = (S^{-m-4}\,\mathbb{C}^4)^* \longrightarrow 0.$

Lorsque $m \leqslant 12$ le complexe associé est W et lorsque $m > 12$ le complexe associé est K.

Exemple : si $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1 \mathbb{C}^4 \oplus (S^8 \mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^4 \mathbb{C}^4 \oplus [(S^4 \mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3 \mathbb{C}^4] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = \wedge^2 \mathbb{C}^4 \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 169$, $n_0 = 175$, $n_1 = 6$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 175$.

Exemple : si $m = 8$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2 \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^4 \mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1 \mathbb{C}^4) \oplus (S^4 \mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^8 \mathbb{C}^4 \oplus \wedge^3 \mathbb{C}^4 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 6$, $n_{-1} = 175$, $n_0 = 169$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 175$.

$*$ **etc**.

4.5.5 Cas e : Cas des formes quinaires de degré deux : $k = 5$; $d = 2$. $E(\frac{t_5}{2}) = 2$

Alors le résultant est de degré 80.

Le complexe associé est :
$0 \longrightarrow C^{-5} \xrightarrow{\delta^{-5}} C^{-4} \xrightarrow{\delta^{-4}} C^{-3} \xrightarrow{\delta^{-3}} C^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2}$
$C^3 \xrightarrow{\delta^3} C^4 \longrightarrow 0$. Il comporte, a priori, 10 termes et 9 différentielles. Plus précisemment il a, a priori, la forme :

$0 \longrightarrow C^{-5} = A^{-5} = S^{m-10} \mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-5}} C^{-4} = A^{-4} = S^{m-8} \mathbb{C}^5 \otimes \wedge^4 \mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-4}}$
$C^{-3} = A^{-3} = S^{m-6} \mathbb{C}^5 \otimes \wedge^3 \mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^{m-4} \mathbb{C}^5 \otimes \wedge^2 \mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-2} \mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1 \mathbb{C}^5) \oplus (S^{5-m} \mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m \mathbb{C}^5 \oplus [(S^{3-m} \mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4 \mathbb{C}^5] \xrightarrow{\delta^0}$
$C^1 = B^1 = (S^{1-m} \mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^3 \mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{22}^1}$
$C^2 = B^2 = (S^{-1-m} \mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^2 \mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{22}^2} C^3 = B^3 = (S^{-3-m} \mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^1 \mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{22}^3}$
$C^4 = B^4 = (S^{-5-m} \mathbb{C}^5)^* \longrightarrow 0.$

Pour A^{-5} il faut $m \geqslant 10$, pour A^{-4} il faut $m \geqslant 8$, pour A^{-3} il faut $m \geqslant 6$, pour A^{-2} il faut $m \geqslant 4$, pour A^{-1} il faut $m \geqslant 2$, pour B^{-1} il faut $m \leqslant 5$, pour A^0 il faut $m \geqslant 0$, pour B^0 il faut $m \leqslant 3$, pour B^1 il faut $m \leqslant 1$, pour B^2 il faut $m \leqslant -1$, pour B^3 il faut $m \leqslant -3$, pour B^4 il faut $m \leqslant -5$.

Lorsque $m \leqslant 5$ le complexe associé est W et lorsque $m > 5$ le complexe associé est K.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,x\,z + d\,x\,t + e\,x\,u + f\,y^2 + g\,y\,z + h\,y\,t,$
$+\,i\,y\,u + j\,z^2 + k\,z\,t + l\,z\,u + m\,t^2 + n\,t\,u + o\,u^2$
$f_2 = a^{'}\,x^2 + b^{'}\,x\,y + c^{'}\,x\,z + d^{'}\,x\,t + e^{'}\,x\,u + f^{'}\,y^2 + g^{'}\,y\,z + h^{'}\,y\,t,$
$+\,i^{'}\,y\,u + j^{'}\,z^2 + k^{'}\,z\,t + l^{'}\,z\,u + m^{'}\,t^2 + n^{'}\,t\,u + o^{'}\,u^2$
$f_3 = a^{''}\,x^2 + b^{''}\,x\,y + c^{''}\,x\,z + d^{''}\,x\,t + e^{''}\,x\,u + f^{''}\,y^2 + g^{''}\,y\,z + h^{''}\,y\,t,$
$+\,i^{''}\,y\,u + j^{''}\,z^2 + k^{''}\,z\,t + l^{''}\,z\,u + m^{''}\,t^2 + n^{''}\,t\,u + o^{''}\,u^2$
$f_4 = a^{'''}\,x^2 + b^{'''}\,x\,y + c^{'''}\,x\,z + d^{'''}\,x\,t + e^{'''}\,x\,u + f^{'''}\,y^2 + g^{'''}\,y\,z + h^{'''}\,y\,t,$
$+\,i^{'''}\,y\,u + j^{'''}\,z^2 + k^{'''}\,z\,t + l^{'''}\,z\,u + m^{'''}\,t^2 + n^{'''}\,t\,u + o^{'''}\,u^2$
$f_5 = a^{''''}\,x^2 + b^{''''}\,x\,y + c^{''''}\,x\,z + d^{''''}\,x\,t + e^{''''}\,x\,u + f^{''''}\,y^2 + g^{''''}\,y\,z + h^{''''}\,y\,t,$
$+\,i^{''''}\,y\,u + j^{''''}\,z^2 + k^{''''}\,z\,t + l^{''''}\,z\,u + m^{''''}\,t^2 + n^{''''}\,t\,u + o^{''''}\,u^2$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,x\,z + D\,x\,t + E\,x\,u + F\,y^2 + G\,y\,z + H\,y\,t,$
$+\,I\,y\,u + J\,z^2 + K\,z\,t + L\,z\,u + M\,t^2 + N\,t\,u + O\,u^2$ où :
f, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O sont des matrices colonnes 5×1.

On remarque la symétrie :

$$\begin{array}{ccccccccc}
x & \to & y & \to & z & \to & t & \to & u \\
y & \to & z & \to & t & \to & u & \to & x \\
z & \to & t & \to & u & \to & x & \to & y \\
t & \to & u & \to & x & \to & y & \to & z \\
u & \to & x & \to & y & \to & z & \to & t \\
a & \to & f & \to & j & \to & m & \to & o \\
b & \to & g & \to & k & \to & n & \to & e \\
c & \to & h & \to & l & \to & d & \to & i \\
d & \to & i & \to & c & \to & h & \to & l \\
e & \to & b & \to & g & \to & k & \to & n \\
f & \to & j & \to & m & \to & o & \to & a \\
g & \to & k & \to & n & \to & e & \to & b \\
h & \to & l & \to & d & \to & i & \to & c \\
i & \to & c & \to & h & \to & l & \to & d \\
j & \to & m & \to & o & \to & a & \to & f \\
k & \to & n & \to & e & \to & b & \to & g \\
l & \to & d & \to & i & \to & c & \to & h \\
m & \to & o & \to & a & \to & f & \to & j \\
n & \to & e & \to & b & \to & g & \to & k \\
o & \to & a & \to & f & \to & j & \to & m
\end{array}.$$

Exemple : si $m = 1$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^4\,\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$$
$$= S^1\,\mathbb{C}^5 \oplus [(S^2\,\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4\,\mathbb{C}^5] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = \wedge^3\,\mathbb{C}^5 \longrightarrow 0.$$

$n_{-1} = 70$, $n_0 = 80$, $n_1 = 10$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 80$.

Exemple : si $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$$
$$= (S^2\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^5) \oplus (S^1\,\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^4\,\mathbb{C}^5 \longrightarrow 0.$$

$n_{-2} = 10$, $n_{-1} = 80$, $n_0 = 70$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 80$.

Exemple : si $m = 6$ il y a 4 termes dans le complexe (K) :

$$0 \longrightarrow C^{-3} = A^{-3} = \wedge^3\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^2\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}}$$
$$C^{-1} = A^{-1} = S^4\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}} C^0 = A^0 = S^6\,\mathbb{C}^5 \longrightarrow 0.$$

$n_{-3} = 10$, $n_{-2} = 150$, $n_{-1} = 350$, $n_0 = 210$ et $n_{-3} + n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 360$

De plus si $m = 7$ il y a 4 termes dans le complexe, si $m = 8$, 9 il y en a 5 et si $m \geqslant 10$ il y en a 6.

4.5.6 Cas f : Cas des formes quinaires de degré trois : $k = 5$; $d = 3$. $E(\frac{t_5}{2}) = 5$

Alors le résultant est de degré 405.

Le complexe associé est $0 \longrightarrow C^{-5} \xrightarrow{\delta^{-5}} C^{-4} \xrightarrow{\delta^{-4}} C^{-3} \xrightarrow{\delta^{-3}} C^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \xrightarrow{\delta^2} C^3 \xrightarrow{\delta^3} C^4 \longrightarrow 0$. Il comporte, a priori, 10 termes et 9 différentielles. Plus précisemment il a, a priori, la forme :

$$0 \longrightarrow C^{-5} = A^{-5} = S^{m-15}\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-5}} C^{-4} = A^{-4} = S^{m-12}\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^4\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-4}}$$
$$C^{-3} = A^{-3} = S^{m-9}\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^{m-6}\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta^{-2}}$$
$$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-3}\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^5) \oplus (S^{10-m}\,\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$$
$$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^m\,\mathbb{C}^5 \oplus [(S^{7-m}\,\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4\,\mathbb{C}^5] \xrightarrow{\delta^0}$$
$$C^1 = B^1 = (S^{4-m}\,\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{22}^1}$$
$$C^2 = B^2 = (S^{1-m}\,\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{22}^2}$$
$$C^3 = B^3 = (S^{-2-m}\,\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{22}^3} C^4 = B^4 = (S^{-5-m}\,\mathbb{C}^5)^* \longrightarrow 0.$$

Pour A^{-5} il faut $m \geqslant 15$, pour A^{-4} il faut $m \geqslant 12$, pour A^{-3} il faut $m \geqslant 9$, pour A^{-2} il faut $m \geqslant 6$, pour A^{-1} il faut $m \geqslant 3$, pour B^{-1} il faut

$m \leqslant 10$, pour A^0 il faut $m \geqslant 0$, pour B^0 il faut $m \leqslant 7$, pour B^1 il faut $m \leqslant 4$, pour B^2 il faut $m \leqslant 1$, pour B^3 il faut $m \leqslant -2$, pour B^4 il faut $m \leqslant -5$.

Lorsque $m \leqslant 10$ le complexe associé est W et lorsque $m > 10$ le complexe associé est K.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a_1\, x^3 + \ldots + a_{35}\, u^3$
$f_2 = a_1^{'}\, x^3 + \ldots + a_{35}^{'}\, u^3$
$f_3 = a_1^{''}\, x^3 + \ldots + a_{35}^{''}\, u^3$
$f_4 = a_1^{'''}\, x^3 + \ldots + a_{35}^{'''}\, u^3$
$f_5 = a_1^{''''}\, x^3 + \ldots + a_{35}^{''''}\, u^3$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A_1\, x^3 + \ldots + A_{35}\, u^3$, où f, A_1, $\ldots$, A_{35} sont des matrices colonnes 5×1.

Exemple : si $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^5) \oplus (S^6\,\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^4\,\mathbb{C}^5 \oplus [(S^3\,\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4\,\mathbb{C}^5] \xrightarrow{\delta^0} C^1 = B^1 = \wedge^3\,\mathbb{C}^5 \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 235$, $n_0 = 245$, $n_1 = 10$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 245$.

Exemple : si $m = 6$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^3\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^5) \oplus (S^4\,\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^6\,\mathbb{C}^5 \oplus [(S^1\,\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4\,\mathbb{C}^5] \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 10$, $n_{-1} = 245$, $n_0 = 235$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 245$.

Exemple : si $m = 11$ il y a 4 termes dans le complexe (K) :

$0 \longrightarrow C^{-3} = A^{-3} = S^2\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^5\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^5 \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} = (S^8\,\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^5) \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}} C^0 = A^0 = S^{11}\,\mathbb{C}^5 \longrightarrow 0.$

$n_{-3} = 150$, $n_{-2} = 1260$, $n_{-1} = 2475$, $n_0 = 1365$ et
$n_{-3} + n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 2625$.

De plus si $m = 12, 13, 14$ il y a 5 termes dans le complexe et si $m \geqslant 15$ il y en a 6.

4.5.7 Cas g : Cas des formes sextaires de degré deux : $k = 6$; $d = 2$. $E(\frac{t_6}{2}) = 3$

Alors le résultant est de degré 192.

Le complexe associé est ;
$0 \longrightarrow C^{-6} \xrightarrow{\delta^{-6}} C^{-5} \xrightarrow{\delta^{-5}} C^{-4} \xrightarrow{\delta^{-4}} C^{-3} \xrightarrow{\delta^{-3}} C^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0} \xrightarrow{\delta^{0}} C^{1} \xrightarrow{\delta^{1}}$
$C^{2} \xrightarrow{\delta^{2}} C^{3} \xrightarrow{\delta^{3}} C^{4} \xrightarrow{\delta^{4}} C^{5} \longrightarrow 0.$
Il comporte, a priori, 12 termes et 11 différentielles. Plus précisemment il a, a priori, la forme :

$0 \longrightarrow C^{-6} = A^{-6} = S^{m-12}\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{11}^{-6}} C^{-5} = A^{-5} = S^{m-10}\,\mathbb{C}^6 \otimes \wedge^5\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{11}^{-5}}$
$C^{-4} = A^{-4} = S^{m-8}\,\mathbb{C}^6 \otimes \wedge^4\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{11}^{-4}} C^{-3} = A^{-3} = S^{m-6}\,\mathbb{C}^6 \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}}$
$C^{-2} = A^{-2} = S^{m-4}\,\mathbb{C}^6 \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^{m-2}\,\mathbb{C}^6 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^6) \oplus (S^{6-m}\,\mathbb{C}^6)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^{0} = A^{0} \oplus B^{0} = S^{m}\,\mathbb{C}^6 \oplus [(S^{4-m}\,\mathbb{C}^6)^* \otimes \wedge^5\,\mathbb{C}^6] \xrightarrow{\delta^{0}}$
$C^{1} = B^{1} = (S^{2-m}\,\mathbb{C}^6)^* \otimes \wedge^4\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{22}^{1}} C^{2} = B^{2} = (S^{-m}\,\mathbb{C}^6)^* \otimes \wedge^3\,\mathbb{C}^6) \xrightarrow{\delta_{22}^{2}}$
$C^{3} = B^{3} = (S^{-2-m}\,\mathbb{C}^6)^* \otimes \wedge^2\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{22}^{3}}$
$C^{4} = B^{4} = (S^{-4-m}\,\mathbb{C}^6)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{22}^{4}} C^{5} = B^{5} = (S^{-6-m}\,\mathbb{C}^6)^* \longrightarrow 0.$

Pour A^{-6} il faut $m \geqslant 12$, pour A^{-5} il faut $m \geqslant 10$, pour A^{-4} il faut $m \geqslant 8$, pour A^{-3} il faut $m \geqslant 6$, pour A^{-2} il faut $m \geqslant 4$, pour A^{-1} il faut $m \geqslant 2$, pour B^{-1} il faut $m \leqslant 6$, pour A^{0} il faut $m \geqslant 0$, pour B^{0} il faut $m \leqslant 4$, pour B^{1} il faut $m \leqslant 2$, pour B^{2} il faut $m \leqslant 0$, pour B^{3} il faut $m \leqslant -2$, pour B^{3} il faut $m \leqslant -4$, pour B^{5} il faut $m \leqslant -6$.

Lorsque $m \leqslant 6$ le complexe associé est W et lorsque $m > 6$ le complexe associé est K.

On note les formes de la façon suivante :

$f_1 = a_1\,x^2 + \ldots + a_{21}\,v^2$
$f_2 = a_1^{'}\,x^2 + \ldots + a_{21}^{'}\,v^2$
$f_3 = a_1^{''}\,x^2 + \ldots + a_{21}^{''}\,v^2$
$f_4 = a_1^{'''}\,x^2 + \ldots + a_{21}^{'''}\,v^2$
$f_5 = a_1^{''''}\,x^2 + \ldots + a_{21}^{''''}\,v^2$
$f_6 = a_1^{'''''}\,x^2 + \ldots + a_{21}^{'''''}\,v^2$; ce que l'on note matriciellement :

$f = A_1\,x^2 + \ldots + A_{21}\,v^2$, où f, A_1, $\ldots$, A_{21} sont des matrices colonnes 6×1.

Exemple : si $m = 2$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\,\mathbb{C}^6 \oplus (S^4\,\mathbb{C}^6)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{0} = A^{0} \oplus B^{0}$
$= S^2\,\mathbb{C}^6 \oplus [(S^2\,\mathbb{C}^6)^* \otimes \wedge^5\,\mathbb{C}^6] \xrightarrow{\delta^{0}} C^{1} = B^{1} = \wedge^4\,\mathbb{C}^6 \longrightarrow 0.$

$n_{-1} = 132$, $n_0 = 147$, $n_1 = 15$ et $n_0 = n_{-1} + n_1 = 147$.

Exemple : si $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (W) :

$0 \longrightarrow C^{-2} = A^{-2} = \wedge^2 \mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta^{-2}} C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$
$= (S^2 \mathbb{C}^6 \otimes \wedge^1 \mathbb{C}^6) \oplus (S^2 \mathbb{C}^6)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^4 \mathbb{C}^6 \oplus \wedge^5 \mathbb{C}^6 \longrightarrow 0.$

$n_{-2} = 15$, $n_{-1} = 147$, $n_0 = 132$ et $n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 147$.

Exemple : si $m = 7$ il y a 4 termes dans le complexe (K) :

$0 \longrightarrow C^{-3} = A^{-3} = S^1 \mathbb{C}^6 \otimes \wedge^3 \mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{11}^{-3}} C^{-2} = A^{-2} = S^3 \mathbb{C}^6 \otimes \wedge^2 \mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{11}^{-2}}$
$C^{-1} = A^{-1} = S^5 \mathbb{C}^6 \otimes \wedge^1 \mathbb{C}^6 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}} C^0 = A^0 = S^7 \mathbb{C}^6 \longrightarrow 0.$

$n_{-3} = 120$, $n_{-2} = 840$, $n_{-1} = 1512$, $n_0 = 792$ et
$n_{-3} + n_{-1} = n_{-2} + n_0 = 1632$.

De plus si $m = 8$, 9 il y a 5 termes dans le complexe, si $m = 10$, 11 il y en a 6 et si $m \geqslant 12$ il y en a 7.

4.6 Cas où il n'y a que deux termes dans le complexe

Ces cas sont ceux répertoriés en [24] [14].

Ces cas sont **exclusivement** les cas suivants, sous-cas des cas précédents :

Cas a : $d = 1$. Ce cas a déjà été traité.

Cas b* : $k = 2$; $d \geqslant 2$; $-1 \leqslant m \leqslant 2\,d - 1$.

Cas c* : $k = 3$; $d \geqslant 2$; $d - 2 \leqslant m \leqslant 2\,d - 1$.

Cas d* : $k = 4$; $d \geqslant 2$; $2\,d - 3 \leqslant m \leqslant 2\,d - 1$.

Cas e* : $k = 5$; $d = 2$; $m = 2$, 3.

Cas f* : $k = 5$; $d = 3$; $m = 5$.

Cas g* : $k = 6$; $d = 2$; $m = 3$.

En effet, pour ces cas, étudiés en détails dans cette section, on peut vérifier qu'il n'y a que les deux termes dans le complexe précédent, qui correspondent à $p = 1$:

$C^\bullet \triangleq C^\bullet(m\,;\, f_1, \ldots, f_k)$: $\{0 \longrightarrow C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \longrightarrow 0\}$. Avec :

$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$; $A^{-1} = S^{m-d}\mathbb{C}^k \otimes \wedge^1\mathbb{C}^k$ et $B^{-1} = (S^{k\,(d-1)-m}\mathbb{C}^k)^*$

14. p. 432. Cependant dans cette référence il faut noter que le nombre de formes et de variables est $k + 1$ et non k comme ici

$C^0 = A^0 \oplus B^0$; $A^0 = S^m\mathbb{C}^k$ et $B^0 = (S^{(k-1)\,(d-1)-(m+1)}\mathbb{C}^k)^* \otimes \wedge^{k-1}\mathbb{C}^k$

$\delta^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^{-1} & \delta_{12}^{-1} \\ 0 & \delta_{22}^{-1} \end{bmatrix}$. On a :

$\alpha(k,\, d,\, m) \triangleq \dim A^{-1} = \max(0,\, \frac{k}{(k-1)!}\, \frac{(m-d+k-1)!}{(m-d)!})$, dans la mesure où A^{-1} existe.

$\beta(k,\, d,\, m) \triangleq \dim B^{-1} = \max(0,\, \frac{1}{(k-1)!}\, \frac{(k\,d-m-1)!}{(k\,d-m-k)!})$, dans la mesure où B^{-1} existe.

$\gamma(k,\, d,\, m) \triangleq \dim A^0 = \max(0,\, \frac{1}{(k-1)!}\, \frac{(m+k-1)!}{m!})$, dans la mesure où A^0 existe. On constate que γ est indépendant de d.

$\delta(k,\, d,\, m) \triangleq \dim B^0 = \max(0,\, \frac{k}{(k-1)!}\, \frac{[(k-1)\,d-(m+1)]!}{[(k-1)\,d-(m+1)-(k-1)]!})$, dans la mesure où B^0 existe.

$n_{-1} = \alpha(k,\, d,\, m) + \beta(k,\, d,\, m)$, $n_0 = \gamma(k,\, d,\, m) + \delta(k,\, d,\, m)$ et $n_{-1} = n_0$.

Une fois choisi des bases [15] dans les différents espaces les matrices des applications linéaires sont les suivantes :

$[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

avec :

- $[\delta_{11}^{-1}]$, de dimensions $\gamma(k,\, d,\, m) \times \alpha(k,\, d,\, m)$,
- $[\delta_{12}^{-1}]$, de dimensions $\gamma(k,\, d,\, m) \times \beta(k,\, d,\, m)$,
- $[\delta_{22}^{-1}]$, de dimensions $\delta(k,\, d,\, m) \times \beta(\mathrm{k,d,m})$ et :
- $[\delta^{-1}]$, de dimensions $[\gamma(k,\, d,\, m)+\delta(k,\, d,\, m)] \times [\alpha(k,\, d,\, m)+\beta(k,\, d,\, m)]$.

Et alors la valeur du paramètre m de torsion est telle que :
$\gamma(k,\, d,\, m) + \delta(k,\, d,\, m) = \alpha(k,\, d,\, m) + \beta(k,\, d,\, m)$ et alors la matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée et $R(f_1,\, \ldots\, , f_k) = \pm \det [\delta^{-1}]$.

4.6.1 Méthode de Sylvester

Cette méthode s'applique lorsque $\delta = 0$ [44] [16]. Ceci se produit lorsque $m \geqslant (k-1)\,(d-1)$ et alors $\alpha(k,\, d,\, m) + \beta(k,\, d,\, m) = \gamma(k,\, d,\, m)$.
Les **seuls** sous-cas des cas précédents pour lesquels cette méthode s'applique sont les suivants :

15. nous avons choisi l'ordre lexicographique
16. No 93

Cas a : $d = 1$.

Cas b** : $k = 2$; $d \geqslant 2$; $d - 1 \leqslant m \leqslant 2\,d - 1$.

Cas c** : $k = 3$; $d \geqslant 2$; $m = 2\,d - 2,\ 2\,d - 1$.

Cas d** : $k = 4$; $d = 2$; $m = 3$.

Cette méthode sera expliquée dans chacun des cas considérés.

4.6.2 Cas b* : $-1 \leqslant m \leqslant 2\,d - 1$

Alors on peut constater que le complexe associé n'a que les deux termes C^{-1} et C^0 tels que :

$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$; $A^{-1} = S^{m-d}\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et $B^{-1} = (S^{2\,(d-1)-m}\mathbb{C}^2)^*$,

$C^0 = A^0 \oplus B^0$; $A^0 = S^m\mathbb{C}^2$ et $B^0 = (S^{(d-1)-(m+1)}\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et :

$\alpha(2,\, d,\, m) = \max(0,\, 2\,(m - d + 1))$, $\beta(2,\, d,\, m) = \max(0,\, 2\,d - m - 1)$, $\gamma(2,\, d,\, m) = \max(0,\, m+1)$, $\delta(2,\, d,\, m) = \max(0,\, 2\,(d-m-1))$. On constate que γ est indépendant de d.

Lorsque $-1 \leqslant m \leqslant 2\,(d-1)$ le complexe est W et lorsque $m = 2\,d - 1$ le complexe est K.

La matrice $[\delta^{-1}]$ d'ordre minimal est obtenue pour $m = d - 1$. Alors $\alpha(2,\, d,\, d-1) = 0$, $\beta(2,\, d,\, d-1) = d$, $\gamma(2,\, d,\, d-1) = d$ et $\delta(2,\, d,\, d-1) = 0$. On constate que $[\delta^{-1}] = [\delta_{12}^{-1}]$, matrice d'ordre d. La méthode de Sylvester s'applique.

Alors le complexe est :

$$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^{d-1}\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{12}^{-1}} C^0 = A^0 = S^{d-1}\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0 \text{ (W)}.$$

La méthode de Sylvester s'applique pour $m = d - 1,\, \ldots\, , 2\,d - 1$.

$*$ **Cas b2* :** $-1 \leqslant m \leqslant 3$

Rappel : nous avons déjà calculé le résultant (cf. Cas b2).

$A^{-1} = S^{m-2}\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et et $B^{-1} = (S^{2-m}\mathbb{C}^2)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^2$ et $B^0 = (S^{-m}\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et :

$\alpha(2,\, 2,\, m) = \max(0,\, 2\,(m - 1))$, $\beta(2,\, 2,\, m) = \max(0,\, 3 - m)$, $\gamma(2,\, 2,\, m) = \max(0,\, m + 1)$, $\delta(2,\, 2,\, m) = \max(0,\, 2\,(1 - m))$.

• $m = -1$ **:**

$\alpha(2,\, 2,\, -1) = 0$, $\beta(2,\, 2,\, -1) = 4$, $\gamma(2,\, 2,\, -1) = 0$, $\delta(2,\, 2,\, -1) = 4$.

$$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^3\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{22}^{-1}} C^0 = B^0 = (S^1\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0 \text{ (W)}.$$

0n a bien $\gamma(2,\, 2,\, -1) + \delta(2,\, 2,\, -1) = \alpha(2,\, 2,\, -1) + \beta(2,\, 2,\, -1) = 4$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 4. Ce cas est le dual du cas $m = 3$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 0$ **:**

$\alpha(2,\, 2,\, 0) = 0$, $\beta(2,\, 2,\, 0) = 3$, $\gamma(2,\, 2,\, 0) = 1$, $\delta(2,\, 2,\, 0) = 2$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^0\,\mathbb{C}^2 \oplus \wedge^1\,\mathbb{C}^2$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix} \longrightarrow 0$.

0n a bien $\gamma(2,\, 2,\, 0) + \delta(2,\, 2,\, 0) = \alpha(2,\, 2,\, 0) + \beta(2,\, 2,\, 0) = 3$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 3. Ce cas est le dual du cas $m = 2$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 1$ **:**

$\alpha(2,\, 2,\, 1) = 0$, $\beta(2,\, 2,\, 1) = 2$, $\gamma(2,\, 2,\, 1) = 2$, $\delta(2,\, 2,\, 1) = 0$.

$$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^1\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{12}^{-1}} C^0 = A^0 = S^1\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0 \text{ (W)}.$$

0n a bien $\gamma(2,\, 2,\, 1) + \delta(2,\, 2,\, 1) = \alpha(2,\, 2,\, 1) + \beta(2,\, 2,\, 1) = 2$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 2. **Ce cas est celui qui conduit au déterminant d'ordre minimal**. La méthode de Sylvester s'applique.

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x^2,\, y\}$:

$f_1 = [a]\, x^2 + [b\, x + c\, y]\, y$
$f_2 = [a']\, x^2 + [b'\, x + c'\, y]\, y$.

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{10} \triangleq \begin{vmatrix} a & b\, x + c\, y \\ a' & b'\, x + c'\, y \end{vmatrix} = (a\, b' - b\, a')\, x + (a\, c' - c\, a')\, y = 0.$$

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x,\, y^2\}$:

$f_1 = [a\, x + b\, y]\, x + [c]\, y^2$
$f_2 = [a'\, x + b'\, y]\, x + [c']\, y^2$.

Pour que les 2 formes $f_1,\ f_2$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{01} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x + b\,y & c \\ a'\,x + b'\,y & c' \end{vmatrix} = (a\,c' - c\,a')\,x + (b\,c' - c\,b')\,y = 0.$$

On obtient donc 2 formes $D_{10},\ D_{01}$, de degrés 1, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 2 éléments, $\{x,\ y\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\ f_2) = -\begin{vmatrix} a\,b' - b\,a' & a\,c' - c\,a' \\ a\,c' - c\,a' & b\,c' - c\,b' \end{vmatrix}$$
$$= (a\,c' - c\,a')^2 - (a\,b' - b\,a')\,(b\,c' - c\,b').$$

Le coefficient -1 apparaît pour que $R(x,\ y) = 1$.

Remarque : $D_{10} = \frac{1}{4}\,\frac{\partial J}{\partial x}$ et $D_{01} = \frac{1}{4}\,\frac{\partial J}{\partial y}$.

• $m = 2$ **:**

$\alpha(2,\ 2,\ 2) = 2,\ \beta(2,\ 2,\ 2) = 1,\ \gamma(2,\ 2,\ 2) = 3,\ \delta(2,\ 2,\ 2) = 0.$

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \oplus (S^0\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^2\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta^{-1}_{11}]\ \ [\delta^{-1}_{12}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(2,\ 2,\ 2) + \delta(2,\ 2,\ 2) = \alpha(2,\ 2,\ 2) + \beta(2,\ 2,\ 2) = 3$. Le résultant $R(f_1,\ f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 3. Ce cas est le dual du cas $m = 0$. La méthode de Sylvester s'applique.

◇ On exprime les 2 formes $f_1,\ f_2$ sur la base, à 3 éléments, $\{x^2,\ x\,y,\ y^2\}$.

◇ On décompose les 2 formes $f_1,\ f_2$ sur la base, à 2 éléments, $\{x,\ y\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$f_1 = [a\,x + b\,y]\,x + [c\,y]\,y$
$f_2 = [a'\,x + b'\,y]\,x + [c'\,y]\,y.$

Pour que les 2 formes $f_1,\ f_2$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{00} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x + b\,y & c\,y \\ a'\,x + b'\,y & c'\,y \end{vmatrix} = (a\,c' - c\,a')\,x\,y + (b\,c' - c\,b')\,y^2 = 0.$$

On obtient donc 3 formes $f_1,\ f_2,\ D_{00}$, de degrés 2, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 3 éléments, $\{x^2,\ x\,y,\ y^2\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\ f_2) = -\begin{vmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & a\,c' - c\,a' \\ c & c' & b\,c' - c\,b' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient -1 apparaît pour que $R(x,\ y) = 1$.

• $m = 3$ **:** [c'est le premier cas ou le complexe est (K)]

$\alpha(2,\, 2,\, 3) = 4$, $\beta(2,\, 2,\, 3) = 0$, $\gamma(2,\, 2,\, 3) = 4$, $\delta(2,\, 2,\, 3) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} = S^1\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}} C^0 = A^0 = S^3\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (K).

0n a bien $\gamma(2,\, 2,\, 3) + \delta(2,\, 2,\, 3) = \alpha(2,\, 2,\, 3) + \beta(2,\, 2,\, 3) = 4$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 4. Ce cas est le dual du cas $m = -1$. La méthode de Sylvester s'applique, mais elle est triviale :

pour que les 4 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$ aient un zéro commun non nul sur la base, à 4 éléments, $\{x^3,\, x^2\,y,\, x\,y^2,\, y^3\}$ il faut et il suffit que :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

$*$ **Cas b3* :** $-1 \leqslant m \leqslant 5$

$A^{-1} = S^{m-3}\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et et $B^{-1} = (S^{4-m}\mathbb{C}^2)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^2$ et $B^0 = (S^{1-m}\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et :

$\alpha(2,\, 3,\, m) = \max(0,\, 2\,(m-2))$, $\beta(2,\, 3,\, m) = \max(0,\, 5-m)$,
$\gamma(2,\, 3,\, m) = \max(0,\, m+1)$, $\delta(2,\, 3,\, m) = \max(0,\, 2\,(2-m))$.

• $m = -1$ **:**

$\alpha(2,\, 3,\, -1) = 0$, $\beta(2,\, 3,\, -1) = 6$, $\gamma(2,\, 3,\, -1) = 0$, $\delta(2,\, 3,\, -1) = 6$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^5\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{22}^{-1}} C^0 = B^0 = (S^2\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W).

0n a bien $\gamma(2,\, 3,\, -1) + \delta(2,\, 3,\, -1) = \alpha(2,\, 3,\, -1) + \beta(2,\, 3,\, -1) = 6$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 6. Ce cas est le dual du cas $m = 5$ qu'il est préférable d'utiliser car alors lequel la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 0$ **:**

$\alpha(2,\, 3,\, 0) = 0$, $\beta(2,\, 3,\, 0) = 5$, $\gamma(2,\, 3,\, 0) = 1$, $\delta(2,\, 3,\, 0) = 4$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^4\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^0\,\mathbb{C}^2 \oplus [(S^1\,\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(2,\,3,\,0)+\delta(2,\,3,\,0)=\alpha(2,\,3,\,0)+\beta(2,\,3,\,0)=5$. Le résultant $R(f_1,\,f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 5. Ce cas est le dual du cas $m=4$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m=1$ **:**

$\alpha(2,\,3,\,1)=0,\ \beta(2,\,3,\,1)=4,\ \gamma(2,\,3,\,1)=2,\ \delta(2,\,3,\,1)=2.$

$0\longrightarrow C^{-1}=B^{-1}=(S^3\,\mathbb{C}^2)^*\xrightarrow{\delta^{-1}}C^0=A^0\oplus B^0=S^1\,\mathbb{C}^2\oplus\wedge^1\mathbb{C}^2\longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}]=\begin{bmatrix}[\delta_{12}^{-1}]\\ [\delta_{22}^{-1}]\end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(2,\,3,\,1)+\delta(2,\,3,\,1)=\alpha(2,\,3,\,1)+\beta(2,\,3,\,1)=4$. Le résultant $R(f_1,\,f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 4. Ce cas est le dual du cas $m=3$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m=2$ **:**

$\alpha(2,\,3,\,2)=0,\ \beta(2,\,3,\,2)=3,\ \gamma(2,\,3,\,2)=3,\ \delta(2,\,3,\,2)=0.$

$0\longrightarrow C^{-1}=B^{-1}=(S^2\,\mathbb{C}^2)^*\xrightarrow{\delta_{12}^{-1}}C^0=A^0=S^2\,\mathbb{C}^2\longrightarrow 0$ (W).

0n a bien $\gamma(2,\,3,\,2)+\delta(2,\,3,\,2)=\alpha(2,\,3,\,2)+\beta(2,\,3,\,2)=3$. Le résultant $R(f_1,\,f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 3. **Ce cas est celui qui conduit au déterminant d'ordre minimal**. La méthode de Sylvester s'applique.

◇ On décompose les 2 formes $f_1,\,f_2$ sur la base, à 2 éléments, $\{x^3,\,y\}$:

$f_1=[a]\,x^3+[b\,x^2+c\,x\,y+d\,y^2]\,y$
$f_2=[a']\,x^3+[b'\,x^2+c'\,x\,y+d'\,y^2]\,y.$

Pour que les 2 formes $f_1,\,f_2$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{20}\triangleq\begin{vmatrix} a & b\,x^2+c\,x\,y+d\,y^2\\ a' & b'\,x^2+c'\,x\,y+d'\,y^2\end{vmatrix}$$
$$=(a\,b'-b\,a')\,x^2+(a\,c'-c\,a')\,x\,y+(a\,d'-d\,a')\,y^2=0.$$

◇ On décompose les 2 formes $f_1,\,f_2$ sur la base, à 2 éléments, $\{x^2,\,y^2\}$:

$f_1=[a\,x+b\,y]\,x^2+[c\,x+d\,y]\,y^2$
$f_2=[a'\,x+b'\,y]\,x^2+[c'\,x+d'\,y]\,y^2.$

Pour que les 2 formes $f_1,\ f_2$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{11} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x + b\,y & c\,x + d\,y \\ a'\,x + b'\,y & c'\,x + d'\,y \end{vmatrix}$$
$$= (a\,c' - c\,a')\,x^2 + (b\,c' - c\,b' + a\,d' - d\,a')\,x\,y + (b\,d' - d\,b')\,y^2 = 0.$$

$\diamond$ On décompose les 2 formes $f_1,\ f_2$ sur la base, à 2 éléments, $\{x,\ y^3\}$:

$$f_1 = [a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2]\,x + [d]\,y^3$$
$$f_2 = [a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2]\,x + [d']\,y^3.$$

Pour que les 2 formes$f_1,\ f_2$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{02} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 & d \\ a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 & d \end{vmatrix}$$
$$= (a\,d' - d\,a')\,x^2 + (b\,d' - d\,b')\,x\,y + (c\,d' - d\,c')\,y^2 = 0.$$

On obtient donc 3 formes $D_{20},\ D_{11},\ D_{02}$, de degrés 2, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 3 éléments, $\{x^2,\ x\,y,\ y^2\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\ f_2) = -\begin{vmatrix} a\,b' - b\,a' & a\,c' - c\,a' & a\,d' - d\,a' \\ a\,c' - c\,a' & b\,c' - c\,b' + a\,d' - d\,a' & b\,d' - d\,b' \\ a\,d' - d\,a' & b\,d' - d\,b' & c\,d' - d\,c' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient -1 apparaît pour que $R(x,\ y) = 1$.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(2,\ 3,\ 3) = 2,\ \beta(2,\ 3,\ 3) = 2,\ \gamma(2,\ 3,\ 3) = 4,\ \delta(2,\ 3,\ 3) = 0.$

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1 \mathbb{C}^2 \oplus (S^1\,\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^3\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta^{-1}_{11}]\ \ [\delta^{-1}_{12}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(2,\ 3,\ 3) + \delta(2,\ 3,\ 3) = \alpha(2,\ 3,\ 3) + \beta(2,\ 3,\ 3) = 4$. Le résultant $R(f_1,\ f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 4. Ce cas est le dual du cas $m = 1$. La méthode de Sylvester s'applique.

$\diamond$ On exprime les 2 formes $f_1,\ f_2$ sur la base, à 4 éléments, $\{x^3,\ x^2\,y,\ x\,y^2,\ y^3\}$.

$\diamond$ On décompose les 2 formes $f_1,\ f_2$ sur la base, à 2 éléments, $\{x^2,\ y\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$$f_1 = [a\,x]\,x^2 + [b\,x^2 + c\,x\,y + d\,y^2]\,y$$
$$f_2 = [a'\,x]\,x^2 + [b'\,x^2 + c'\,x\,y + d'\,y^2]\,y.$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{10} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x & b\,x^2 + c\,x\,y + d\,y^2 \\ a'\,x & b'\,x^2 + c'\,x\,y + d'\,y^2 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,b' - b\,a')\,x^3 + (a\,c' - c\,a')\,x^2\,y + (a\,d' - d\,a')\,x\,y^2 = 0.$$

$\diamond$ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x,\, y^2\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$$f_1 = [a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2]\,x + [d\,y]\,y^2$$
$$f_2 = [a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2]\,x + [d'\,y]\,y^2.$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{01} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 & d\,y \\ a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2 & d'\,y \end{vmatrix}$$
$$= (a\,d' - d\,a')\,x^2\,y + (b\,d' - d\,b')\,x\,y^2 + (c\,d' - d\,c')\,y^3 = 0.$$

On obtient donc 4 formes f_1, f_2, D_{10}, D_{01}, de degrés 3, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 4 éléments, $\{x^3,\, x^2\,y,\, x\,y^2,\, y^3\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\, f_2) = -\begin{vmatrix} a & a' & a\,b' - b\,a' & 0 \\ b & b' & a\,c' - c\,a' & a\,d' - d\,a' \\ c & c' & a\,d' - d\,a' & b\,d' - d\,b' \\ d & d' & 0 & c\,d' - d\,c' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient -1 apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

• $m = 4$ **:**

$\alpha(2,\, 3,\, 4) = 4$, $\beta(2,\, 3,\, 4) = 1$, $\gamma(2,\, 3,\, 4) = 5$, $\delta(2,\, 3,\, 4) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\,\mathbb{C}^2) \oplus (S^0\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^4\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta^{-1}_{11}]\ \ [\delta^{-1}_{12}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(2,\, 3,\, 4) + \delta(2,\, 3,\, 4) = \alpha(2,\, 3,\, 4) + \beta(2,\, 3,\, 4) = 5$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 5. Ce cas est le dual du cas $m = 0$. La méthode de Sylvester s'applique.

$\diamond$ On calcule les 4 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$ sur la base, à 5 éléments, $\{x^4,\, x^3\,y,\, x^2\,y^2,\, x\,y^3,\, y^4\}$.

$\diamond$ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x,\, y\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$f_1 = [a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2]\,x + [d\,y^2]\,y$
$f_2 = [a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2]\,x + [d'\,y^2]\,y.$

Pour que les 2 formes $f_1,\ f_2$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{00} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 & d\,y^2 \\ a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2 & d'\,y^2 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,d' - d\,a')\,x^2\,y^2 + (b\,d' - d\,b')\,x\,y^3 + (c\,d' - d\,c')\,y^4 = 0.$$

On obtient donc 5 formes $x\,f_1,\ y\,f_1,\ x\,f_2,\ y\,f_2,\ D_{00}$, de degrés 4, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 5 éléments, $\{x^4,\ x^3\,y,\ x^2\,y^2,\ x\,y^3,\ y^4\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\ f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 & 0 \\ b & a & b' & a' & 0 \\ c & b & c' & b' & a\,d' - d\,a' \\ d & c & d' & c' & b\,d' - d\,b' \\ 0 & d & 0 & d' & c\,d' - d\,c' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\ y) = 1$.

• $m = 5$ **:** [c'est le deuxième cas ou le complexe est (K)]

$\alpha(2,\ 3,\ 5) = 6,\ \beta(2,\ 3,\ 5) = 0,\ \gamma(2,\ 3,\ 5) = 6,\ \delta(2,\ 3,\ 5) = 0.$

$$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} = S^2\,\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}} C^0 = A^0 = S^5\,\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0 \text{ (K)}.$$

0n a bien $\gamma(2,\ 3,\ 5) + \delta(2,\ 3,\ 5) = \alpha(2,\ 3,\ 5) + \beta(2,\ 3,\ 5) = 6$. Le résultant $R(f_1,\ f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 6. Ce cas est le dual du cas $m = -1$. La méthode de Sylvester s'applique, mais elle est triviale :

pour que les 6 formes $x^2\,f_1,\ x\,y\,f_1,\ y^2\,f_1,\ x^2\,f_2,\ x\,y\,f_2,\ y^2\,f_2$ aient un zéro commun non nul sur la base, à 6 éléments, $\{x^5,\ x^4\,y,\ x^3\,y^2,\ x^2\,y^3,\ x\,y^4,\ y^5\}$ il faut et il suffit que :

$$R(f_1,\ f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & a' & 0 & 0 \\ b & a & 0 & b' & a' & 0 \\ c & b & a & c' & b' & a' \\ d & c & b & d' & c' & b' \\ 0 & d & c & 0 & d' & c' \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & d' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\ y) = 1$.

$*$ **Cas b4* :** $-1 \leqslant m \leqslant 7$

$A^{-1} = S^{m-4}\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et et $B^{-1} = (S^{6-m}\mathbb{C}^2)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^2$ et $B^0 = (S^{2-m}\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2$ et :

$\alpha(2,\, 4,\, m) = \max(0,\, 2\,(m-3))$, $\beta(2,\, 4,\, m) = \max(0,\, 7-m)$,
$\gamma(2,\, 4,\, m) = \max(0,\, m+1)$, $\delta(2,\, 4,\, m) = \max(0,\, 2\,(3-m))$.

• $m = -1$ **:**

$\alpha(2,\, 4,\, -1) = 0$, $\beta(2,\, 4,\, -1) = 8$, $\gamma(2,\, 4,\, -1) = 0$, $\delta(2,\, 4,\, -1) = 8$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^7\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{22}^{-1}} C^0 = B^0 = (S^3\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W).

0n a bien $\gamma(2,\, 4,\, -1) + \delta(2,\, 4,\, -1) = \alpha(2,\, 4,\, -1) + \beta(2,\, 4,\, -1) = 8$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 8. Ce cas est le dual du cas $m = 7$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 0$ **:**

$\alpha(2,\, 4,\, 0) = 0$, $\beta(2,\, 4,\, 0) = 7$, $\gamma(2,\, 4,\, 0) = 1$, $\delta(2,\, 4,\, 0) = 6$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^6\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^0\mathbb{C}^2 \oplus [(S^2\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(2,\, 4,\, 0) + \delta(2,\, 4,\, 0) = \alpha(2,\, 4,\, 0) + \beta(2,\, 4,\, 0) = 7$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 7. Ce cas est le dual du cas $m = 6$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 1$ **:**

$\alpha(2,\, 4,\, 1) = 0$, $\beta(2,\, 4,\, 1) = 6$, $\gamma(2,\, 4,\, 1) = 2$, $\delta(2,\, 4,\, 1) = 4$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^5\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^1\mathbb{C}^2 \oplus [(S^1\mathbb{C}^2)^* \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(2,\, 4,\, 1) + \delta(2,\, 4,\, 1) = \alpha(2,\, 4,\, 1) + \beta(2,\, 4,\, 1) = 6$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 6. Ce cas est le dual du cas $m = 5$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 2$ **:**

$\alpha(2,\, 4,\, 2) = 0$, $\beta(2,\, 4,\, 2) = 5$, $\gamma(2,\, 4,\, 2) = 3$, $\delta(2,\, 4,\, 2) = 2$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^4\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^2\mathbb{C}^2 \oplus \wedge^1\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(2,\,4,\,2)+\delta(2,\,4,\,2) = \alpha(2,\,4,\,2)+\beta(2,\,4,\,2) = 5$. Le résultant $R(f_1,\,f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 5. Ce cas est le dual du cas $m = 4$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(2,\,4,\,3) = 0$, $\beta(2,\,4,\,3) = 4$, $\gamma(2,\,4,\,3) = 4$, $\delta(2,\,4,\,3) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^3\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta_{12}^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^3\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W).

0n a bien $\gamma(2,\,4,\,3)+\delta(2,\,4,\,3) = \alpha(2,\,4,\,3)+\beta(2,\,4,\,3) = 4$. Le résultant $R(f_1,\,f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 4. **Ce cas est celui qui conduit au déterminant d'ordre minimal**. La méthode de Sylvester s'applique.

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x^4,\,y\}$:

$$f_1 = [a]\,x^4 + [b\,x^3 + c\,x^2\,y + d\,x\,y^2 + e\,y^3]\,y$$
$$f_2 = [a']\,x^4 + [b'\,x^3 + c'\,x^2\,y + d'\,x\,y^2 + e'\,y^3]\,y$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{30} \triangleq \begin{vmatrix} a & b\,x^3 + c\,x^2\,y + d\,x\,y^2 + e\,y^3 \\ a' & b'\,x^3 + c'\,x^2\,y + d'\,x\,y^2 + e'\,y^3 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,b' - b\,a')\,x^3 + (a\,c' - c\,a')\,x^2\,y + (a\,d' - d\,a')\,x\,y^2 + (a\,e' - e\,a')\,y^3 = 0.$$

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x^3,\,y^2\}$:

$$f_1 = [a\,x + b\,y]\,x^3 + [c\,x^2 + d\,x\,y + e\,y^2]\,y^2$$
$$f_2 = [a'\,x + b'\,y]\,x^3 + [c'\,x^2 + d'\,x\,y + e'\,y^2]\,y^2$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{21} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x + b\,y & c\,x^2 + d\,x\,y + e\,y^2 \\ a'\,x + b'\,y & c'\,x^2 + d'\,x\,y + e'\,y^2 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,c' - c\,a')\,x^3 + (b\,c' - c\,b' + a\,d' - d\,a')\,x^2\,y + (b\,d' - d\,b' + a\,e' - e\,a')\,x\,y^2$$
$$+ (b\,e' - e\,a')\,y^3 = 0.$$

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x^2,\,y^3\}$:

$f_1 = [a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2]\,x^2 + [d\,x + e\,y]\,y^3$
$f_2 = [a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2]\,x^2 + [d'\,x + e'\,y]\,y^3$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{12} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 & d\,x + e\,y \\ a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2 & d'\,x + e'\,y \end{vmatrix}$$
$= (a\,d' - d\,a')\,x^3 + (b\,d' - d\,b' + a\,e' - e\,a')\,x^2\,y + (c\,d' - d\,c' + b\,e' - e\,b')\,x\,y^2$
$+ (c\,e' - e\,c')\,y^3 = 0.$

$\diamond$ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x,\, y^4\}$:

$f_1 = [a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3]\,x^2 + [e]\,y^4$
$f_2 = [a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3]\,x^2 + [e']\,y^4$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{03} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3 & e \\ a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3 & e' \end{vmatrix}$$
$= (a\,e' - e\,a')\,x^3 + (b\,e' - e\,b')\,x^2\,y + (c\,e' - e\,c')\,x\,y^2 + (d\,e' - e\,d')\,y^3 = 0.$

On obtient donc 4 formes D_{30}, D_{21}, D_{12}, D_{03}, de degrés 3, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 4 éléments, $\{x^3,\, x^2\,y,\, x\,y^2,\, y^3\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a\,b' - b\,a' & a\,c' - c\,a' & a\,d' - d\,a' & a\,e' - e\,a' \\ a\,c' - c\,a' & b\,c' - c\,b' + a\,d' - d\,a' & b\,d' - d\,b' + a\,e' - e\,a' & b\,e' - e\,b' \\ a\,d' - d\,a' & b\,d' - d\,b' + a\,e' - e\,a' & c\,d' - d\,c' + b\,e' - e\,b' & c\,e' - e\,c' \\ a\,e' - e\,a' & b\,e' - e\,b' & c\,e' - e\,c' & d\,e' - e\,d' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

• $m = 4$ **:**

$\alpha(2,\, 4,\, 4) = 2$, $\beta(2,\, 4,\, 4) = 3$, $\gamma(2,\, 4,\, 4) = 5$, $\delta(2,\, 4,\, 4) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\mathbb{C}^2 \oplus (S^2\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^4\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta^{-1}_{11}]\ \ [\delta^{-1}_{12}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(2,\, 4,\, 4) + \delta(2,\, 4,\, 4) = \alpha(2,\, 4,\, 4) + \beta(2,\, 4,\, 4) = 5$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 5. Ce cas est le dual du cas $m = 2$. La méthode de Sylvester s'applique.

$\diamond$ On exprime les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 5 éléments, $\{x^4,\, x^3\,y,\, x^2\,y^2,\, x\,y^3,\, y^4\}$.

$\diamond$ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x^3,\, y\}$: il y a 2 façons de faire ; par exemple :

$$f_1 = [a\,x]\,x^3 + [b\,x^3 + c\,x^2\,y + d\,x\,y^2 + e\,y^3]\,y$$
$$f_2 = [a'\,x]\,x^3 + [b'\,x^3 + c'\,x^2\,y + d'\,x\,y^2 + e'\,y^3]\,y$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{30} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x & b\,x^3 + c\,x^2\,y + d\,x\,y^2 + e\,y^3 \\ a'\,x & b'\,x^3 + c'\,x^2\,y + d'\,x\,y^2 + e'\,y^3 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,b' - b\,a')\,x^4 + (a\,c' - c\,a')\,x^3\,y + (a\,d' - d\,a')\,x^2\,y^2 + (a\,e' - e\,a')\,x\,y^3 = 0.$$

$\diamond$ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x^2,\, y^2\}$: il y a 2 façons de faire ; par exemple :

$$f_1 = [a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2]\,x^2 + [d\,x\,y + e\,y^2]\,y^2$$
$$f_2 = [a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2]\,x^2 + [d'\,x\,y + e'\,y^2]\,y^2$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{11} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 & d\,x\,y + e\,y^2 \\ a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2 & d'\,x\,y + e'\,y^2 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,d' - d\,a')\,x^3\,y + (a\,e' - e\,a' + b\,d' - d\,b')\,x^2\,y^2 + (b\,e' - e\,b' + c\,d' - d\,c')\,x\,y^3$$
$$+ (c\,e' - e\,c')\,y^4 = 0.$$

$\diamond$ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x,\, y^3\}$: il y a 2 façons de faire ; par exemple :

$$f_1 = [a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3]\,x + [e\,y]\,y^3$$
$$f_2 = [a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3]\,x + [e'\,y]\,y^3$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{02} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3 & e\,y \\ a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3 & e'\,y \end{vmatrix}$$
$$= (a\,e' - e\,a')\,x^3\,y + (b\,e' - e\,b')\,x^2\,y^2 + (c\,e' - e\,c')\,x\,y^3 + (d\,e' - e\,d')\,y^4 = 0.$$

On obtient donc 5 formes f_1, f_2, D_{20}, D_{11}, D_{02}, de degrés 4, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 5 éléments,
$\{x^4,\, x^3\,y,\, x^2\,y^2,\, x\,y^3,\, y^4\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & a' & a\,b' - b\,a' & 0 & 0 \\ b & b' & a\,c' - c\,a' & a\,d' - d\,a' & a\,e' - e\,a' \\ c & c' & a\,d' - d\,a' & a\,e' - e\,a' + b\,d' - d\,b' & b\,e' - e\,b' \\ d & d' & a\,e' - e\,a' & b\,e' - e\,b' + c\,d' - d\,c' & c\,e' - e\,c' \\ e & e' & 0 & c\,e' - e\,c' & d\,e' - e\,d' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

• $m = 5$ **:**

$\alpha(2,\, 4,\, 5) = 4$, $\beta(2,\, 4,\, 5) = 2$, $\gamma(2,\, 4,\, 5) = 6$, $\delta(2,\, 4,\, 5) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2) \oplus (S^1\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^5\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta^{-1}_{11}] \quad [\delta^{-1}_{12}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(2,\, 4,\, 5) + \delta(2,\, 4,\, 5) = \alpha(2,\, 4,\, 5) + \beta(2,\, 4,\, 5) = 6$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 6. Ce cas est le dual du cas $m = 1$. La méthode de Sylvester s'applique.

◇ On exprime les 4 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$ sur la base, à 6 éléments, $\{x^5,\, x^4\,y,\, x^3\,y^2,\, x^2\,y^3,\, x\,y^4,\, y^5\}$.

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x^2,\, y\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$$f_1 = [a\,x^2]\,x^2 + [b\,x^3 + c\,x^2\,y + d\,x\,y^2 + e\,y^3]\,y$$
$$f_2 = [a'\,x^2]\,x^2 + [b'\,x^3 + c'\,x^2\,y + d'\,x\,y^2 + e'\,y^3]\,y$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{10} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^2 & b\,x^3 + c\,x^2\,y + d\,x\,y^2 + e\,y^3 \\ a'\,x^2 & b'\,x^3 + c'\,x^2\,y + d'\,x\,y^2 + e'\,y^3 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,b' - b\,a')\,x^5 + (a\,c' - c\,a')\,x^4\,y + (a\,d' - d\,a')\,x^3\,y^2 + (a\,e' - e\,a')\,x^2\,y^3 = 0.$$

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x,\, y^2\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$$f_1 = [a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3]\,x + [e\,y^2]\,y^2$$
$$f_2 = [a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2]\,x + [d'\,x\,y + e'\,y^2]\,y^2$$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{01} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3 & e\,y^2 \\ a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3 & e'\,y^2 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,e' - e\,a')\,x^3\,y^2 + (b\,e' - e\,b')\,x^2\,y^3 + (c\,e' - e\,c')\,x\,y^4 + (d\,e' - e\,d')\,y^5 = 0.$$

On obtient donc 6 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$, D_{10}, D_{01}, de degrés 5, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 6 éléments, $\{x^5,\, x^4\,y,\, x^3\,y^2,\, x^2\,y^3,\, x\,y^4,\, y^5\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\, f_2) = -\begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 & a\,b' - b\,a' & 0 \\ b & a & b' & a' & a\,c' - c\,a' & 0 \\ c & b & c' & b' & a\,d' - d\,a' & a\,e' - e\,a' \\ d & c & d' & c' & a\,e' - e\,a' & b\,e' - e\,b' \\ e & d & e' & d' & 0 & c\,e' - e\,c' \\ 0 & e & 0 & e' & 0 & d\,e' - e\,d' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient -1 apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

• $m = 6$ **:**

$\alpha(2,\, 4,\, 6) = 6$, $\beta(2,\, 4,\, 6) = 1$, $\gamma(2,\, 4,\, 6) = 7$, $\delta(2,\, 4,\, 6) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2) \oplus (S^0\mathbb{C}^2)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^6\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta^{-1}_{11}]\quad [\delta^{-1}_{12}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(2,\, 4,\, 6) + \delta(2,\, 4,\, 6) = \alpha(2,\, 4,\, 6) + \beta(2,\, 4,\, 6) = 7$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 7. Ce cas est le dual du cas $m = 0$. La méthode de Sylvester s'applique.

◇ On exprime les 6 formes $x^2\,f_1$, $x\,y\,f_1$, $y^2\,f_1$, $x^2\,f_2$, $x\,y\,f_2$, $y^2\,f_2$ sur la base, à 7 éléments, $\{x^6,\, x^5\,y,\, x^4\,y^2,\, x^3\,y^3,\, x^2\,y^4,\, x\,y^5,\, y^6\}$.

◇ On décompose les 2 formes f_1, f_2 sur la base, à 2 éléments, $\{x,\, y\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$f_1 = [a\,x^3 + b\,x^2\ y + c\,x\,y^2 + d\,y^3]\,x + [e\,y^3]\,y$
$f_2 = [a'\,x^3 + b'\,x^2\ y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3]\,x + [e'\,y^3]\,y$

Pour que les 2 formes f_1, f_2 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{00} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x^3 + b\,x^2\ y + c\,x\,y^2 + d\,y^3 & e\,y^3 \\ a'\,x^3 + b'\,x^2\ y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3 & e'\,y^3 \end{vmatrix}$$
$$= (a\,e' - e\,a')\,x^3\,y^3 + (b\,e' - e\,b')\,x^2\,y^4 + (c\,e' - c\,c')\,x\,y^5 + (d\,e' - e\,d')\,y^6 = 0.$$

On obtient donc 7 formes $x^2\,f_1$, $x\,y\,f_1$, $y^2\,f_1$, $x^2\,f_2$, $x\,y\,f_2$, $y^2\,f_2$, D_{00}, de degrés 6, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 6 éléments, $\{x^6,\, x^5\,y,\, x^4\,y^2,\, x^3\,y^3,\, x^2\,y^4,\, x\,y^5,\, y^6\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\, f_2) = -\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & b' & a' & 0 & 0 \\ c & b & a & c' & b' & a' & 0 \\ d & c & b & d' & c' & b' & a\,e' - e\,a' \\ e & d & c & e' & d' & c' & b\,e' - e\,b' \\ 0 & e & d & 0 & e' & d' & c\,e' - e\,c' \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & e' & d\,e' - e\,d' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient -1 apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

• $m = 7$ **:** [c'est le troisième cas ou le complexe est (K)]

$\alpha(2,\, 4,\, 7) = 8$, $\beta(2,\, 4,\, 7) = 0$, $\gamma(2,\, 4,\, 7) = 8$, $\delta(2,\, 4,\, 7) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} = S^3\mathbb{C}^2 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\delta_{11}^{-1}} C^0 = A^0 = S^7\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ (K).

0n a bien $\gamma(2,\, 4,\, 7) + \delta(2,\, 4,\, 7) = \alpha(2,\, 4,\, 7) + \beta(2,\, 4,\, 7) = 8$. Le résultant $R(f_1,\, f_2)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 8. Ce cas est le dual du cas $m = -1$. La méthode de Sylvester s'applique, mais elle est triviale :

pour que les 8 formes $x^3\, f_1$, $x^2\, y\, f_1$, $x\, y^2\, f_1$, $y^3 f_1$,
$x^3\, f_2$, $x^2\, y\, f_2$, $x\, y^2\, f_2$, $y^3 f_2$ aient un zéro commun non nul sur la base, à 7 éléments, $\{x^7,\, x^6\, y,\, x^5\, y^2,\, x^4\, y^3,\, x^3\, y^4,\, x^2\, y^5,\, x\, y^6,\, y^7\}$ il faut et il suffit que :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & b' & a' & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & c' & b' & a' & 0 \\ d & c & b & a & d' & c' & b' & a' \\ e & d & c & b & e' & d' & c' & b' \\ 0 & e & d & c & 0 & e' & d' & c' \\ 0 & 0 & e & d & 0 & 0 & e' & d' \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & e' \end{vmatrix}.$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\, y) = 1$.

$*$ **etc**.

4.6.3 Cas c* : cas des formes ternaires non linéaires : $k = 3$; $d \geqslant 2$; $d - 2 \leqslant m \leqslant 2\,d - 1$

Alors le résultant est de degré $3\,d^2$.

On a :

$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$; $A^{-1} = S^{m-d}\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3$ et $B^{-1} = (S^{3\,(d-1)-m}\mathbb{C}^3)^*$,

$C^0 = A^0 \oplus B^0$; $A^0 = S^m\mathbb{C}^3$ et $B^0 = (S^{2\,(d-1)-(m+1)}\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3$ et :

$\alpha(3,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{3\,(m-d+2)\,(m-d+1)}{2})$, $\beta(3,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{(3\,d-m-1)\,(3\,d-m-2)}{2})$, $\gamma(3,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{(m+2)\,(m+1)}{2})$, $\delta(3,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{3\,(2\,d-m-1)\,(2\,d-m-2)}{2})$. On constate que γ est indépendant de d.

La matrice $[\delta^{-1}]$ d'ordre minimal est obtenue pour :

$m = 3\,r$ si $d = 2\,r+1$,
$m = 3\,r-2$ ou $m = 3\,r-1$ si $d = 2\,r$.

$\diamond$ Si $d = 2\,r+1$ on a $\alpha(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) = \delta(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) = \frac{3\,(r+1)\,r}{2}$ et $\beta(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) = \gamma(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) = \frac{(3\,r+2)\,(3\,r+1)}{2}$. On constate que la matrice $[\delta_{12}^{-1}]$ est carrée, d'ordre $\gamma(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) = \beta(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) = \frac{(3\,r+2)\,(3\,r+1)}{2}$ alors que la matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée, d'ordre :
$\gamma(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) + \delta(3,\, 2\,r+1,\, 3\,r) = \alpha + \beta = 6\,r\,(r+1) + 1$.

$\diamond$ Si $d = 2\,r$:

$\diamond$ si $m = 3\,r-2$ alors :
$\alpha(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(r-1)}{2})$, $\beta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(r+1)}{2})$, $\gamma(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(3\,r-1)}{2})$ et $\delta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(r+1)}{2})$. la matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée, d'ordre :
$\gamma(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2)+\delta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2) = \alpha(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2)+\beta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-2) = 6\,r^2$.

$\diamond$ si $m = 3\,r-1$ alors :
$\alpha(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(r+1)}{2})$, $\beta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(3\,r-1)}{2})$, $\gamma(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(3\,r+1)}{2})$ et $\delta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1) = \max(0,\, \frac{3\,r\,(r-1)}{2})$. la matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée, d'ordre ;
$\gamma(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1)+\delta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1) = \alpha(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1)+\beta(3,\, 2\,r,\, 3\,r-1) = 6\,r^2$.

La méthode de Sylvester s'applique pour $m = 2\,d-2,\, 2\,d-1$.

$\diamond$ Avec $m = 2\,d-2$ on a :

$(S^{d-2}\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^{d-1}\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta_{12}^{-1}} S^{2\,d-2}\mathbb{C}^3$.

$\alpha(3,\, d,\, 2\,d-2) = \max(0,\, \frac{3\,d\,(d-1)}{2})$, $\beta(3,\, d,\, 2\,d-2) = \max(0,\, \frac{d\,(d+1)}{2})$, $\gamma(3,\, d,\, 2\,d-2) = \max(0,\, d\,(2\,d-1))$ et $\delta(3,\, d,\, 2\,d-2) = 0$. la matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée, d'ordre :
$\gamma(3,\, d,\, 2\,d-2) + \delta(3,\, d,\, 2\,d-2) = \alpha(3,\, d,\, 2\,d-2) + \beta(3,\, d,\, 2\,d-2)$
$= d\,(2\,d-1)$.

$\diamond$ Avec $m = 2\,d-1$ on a :

$(S^{d-1}\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^{d-2}\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta_{12}^{-1}} S^{2\,d-1}\mathbb{C}^3$.

$\alpha(3,\, d,\, 2\,d-1) = \max(0,\, \frac{3\,d\,(d+1)}{2})$, $\beta(3,\, d,\, 2\,d-1) = \max(0,\, \frac{d\,(d-1)}{2})$, $\gamma(3,\, d,\, 2\,d-1) = \max(0,\, d\,(2\,d+1))$ et $\delta(3,\, d,\, 2\,d-1) = 0$. la matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée, d'ordre :
$\gamma(3,\, d,\, 2\,d-1) + \delta(3,\, d,\, 2\,d-1) = \alpha(3,\, d,\, 2\,d-1) + \beta(3,\, d,\, 2\,d-1)$
$= d\,(2\,d+1)$.

Par conséquent il vaut mieux utiliser la valeur $m = 2\,d-2$ que la valeur $m = 2\,d-1$ car elle conduit à une matrice $[\delta^{-1}]$ d'ordre plus petit.

d	m le mieux	ordre de δ^{-1}	m le mieux pour S.	ordre de δ^{-1}
2	1 ou 2	6	2	6
3	3	13	4	15
4	4 ou 5	24	6	28
5	6	37	8	45
6	7 ou 8	54	10	66
7	9	73	12	91
8	10 ou 11	96	14	120
9	12	121	16	153
10	13 ou 14	150	18	190
...	...	...	...	...

Le complexe associé est toujours celui de Weyman.

$*$ **Cas c2* :** $0 \leqslant m \leqslant 3$

Rappel : on a déjà calculé le résultant grâce à la formule de Sylvester utilisant le jacobien (cf. Cas c2).

$A^{-1} = S^{m-2}\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3$ et et $B^{-1} = (S^{3-m}\mathbb{C}^3)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^3$ et $B^0 = (S^{1-m}\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3$ et :

$\alpha(3,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{3\,m\,(m-1)}{2})$, $\beta(3,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{(5-m)\,(4-m)}{2})$,
$\gamma(3,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{(m+2)\,(m+1)}{2})$,
$\delta(3,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{3\,(3-m)\,(2-m)}{2})$.

• $m = 0$ **:**

$\alpha(3,\, 2,\, 0) = 0$, $\beta(3,\, 2,\, 0) = 10$, $\gamma(3,\, 2,\, 0) = 1$, $\delta(3,\, 2,\, 0) = 9$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^3\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^0\mathbb{C}^3 \oplus [(S^1\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(3,\, 2,\, 0)+\delta(3,\, 2,\, 0) = \alpha(3,\, 2,\, 0)+\beta(3,\, 2,\, 0) = 10$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 10. Ce cas est le dual du cas $m = 3$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 1$ **:**

$\alpha(3,\, 2,\, 1) = 0,\ \beta(3,\, 2,\, 1) = 6,\ \gamma(3,\, 2,\, 1) = 3,\ \delta(3,\, 2,\, 1) = 3.$

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^1\mathbb{C}^3 \oplus \wedge^2\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(3,\, 2,\, 1) + \delta(3,\, 2,\, 1) = \alpha(3,\, 2,\, 1) + \beta(3,\, 2,\, 1) = 6$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 6. Ce cas est le dual du cas $m = 2$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 2$ **:**

$\alpha(3,\, 2,\, 2) = 3,\ \beta(3,\, 2,\, 2) = 3,\ \gamma(3,\, 2,\, 2) = 6,\ \delta(3,\, 2,\, 2) = 0.$

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\mathbb{C}^3 \oplus (S^1\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^2\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(3,\, 2,\, 2) + \delta(3,\, 2,\, 2) = \alpha(3,\, 2,\, 2) + \beta(3,\, 2,\, 2) = 6$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 6. Ce cas est le dual du cas $m = 1$. La méthode de Sylvester s'applique.

$\diamond$ On exprime les 3 formes $f_1,\, f_2,\, f_3$ sur la base, à 6 éléments, $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, y^2,\, y\,z,\, z^2\}$.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\, f_2,\, f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^2,\, y,\, z\}$: il y a 2 façons de faire ; par exemple :

$$\begin{aligned} f_1 &= [a]\, x^2 + [b\,x + d\,y + e\,z]\, y + [c\,x + f\,z]\, z \\ f_2 &= [a']\, x^2 + [b'\,x + d'\,y + e'\,z]\, y + [c'\,x + f'\,z]\, z \\ f_3 &= [a'']\, x^2 + [b''\,x + d''\,y + e''\,z]\, y + [c''\,x + f''\,z]\, z \end{aligned}$$

Pour que les 3 formes $f_1,\, f_2,\, f_3$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{100} \triangleq \begin{vmatrix} a & b\,x + d\,y + e\,z & c\,x + f\,z \\ a' & b'\,x + d'\,y + e'\,z & c'\,x + f'\,z \\ a'' & b''\,x + d''\,y + e''\,z & c''\,x + f''\,z \end{vmatrix}$$
$$= ABC\,x^2 - ACD\,x\,y + (ABF - ACE)\,x\,z + ADF\,y\,z + AEF\,z^2 = 0.$$

Grâce à la symétrie du Cas c2 on obtient :

$\diamond$ $D_{010} = -ACD\,x^2 + (ADE - BCD)\,x\,y + ADF\,x\,z + BDE\,y^2 + BDF\,y\,z = 0$ et :

$\diamond$ $D_{001} = ADF\,x\,y + AEF\,x\,z + BDF\,y^2 + (BEF + CDF)\,y\,z + CEF\,z^2 = 0$

On obtient donc 6 formes f_1, f_2, f_3, D_{100}, D_{010}, D_{001}, de degrés 2, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 6 éléments, $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, y^2,\, y\,z,\, z^2\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' & ABC & -ACD & 0 \\ b & b' & b'' & -ACD & ADE-BCD & ADF \\ c & c' & c'' & ABF-ACE & ADF & AEF \\ d & d' & d'' & 0 & BDE & BDF \\ e & e' & e'' & ADF & BDF & BEF+CDF \\ f & f' & f'' & AEF & 0 & CEF \end{vmatrix}.$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\, y,\, z) = 1$.

Comparaison avec la formule de Sylvester utilisant le jacobien

La décomposition suivante des 3 formes $f_1,\, f_2,\, f_3$ sur la base, à 3 éléments, $\{x^2,\, y,\, z\}$:

$f_1 = [a]\, x^2 + [b\,x + d\,y + \frac{e}{2}\, z]\, y + [c\,x + \frac{e}{2}\, y + f\, z]\, z$

$f_2 = [a']\, x^2 + [b'\,x + d'\,y + \frac{e'}{2}\, z]\, y + [c'\,x + \frac{e'}{2}\, y + f'\, z]\, z$

$f_3 = [a'']\, x^2 + [b''\,x + d''\,y + \frac{e''}{2}\, z]\, y + [c''\,x + \frac{e''}{2}\, y + f''\, z]\, z$ conduit à :

$D_{100} = \frac{1}{8}\,\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{4}\,(B,\, C,\, f)$ et, grâce à la symétrie du Cas c2 :

$D_{010} = \frac{1}{8}\,\frac{\partial J}{\partial y} + \frac{1}{4}\,(E,\, B,\, f)$ et :

$D_{001} = \frac{1}{8}\,\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{1}{4}\,(C,\, E,\, f)$.

Étant donné que $f = 0$ on retrouve la formule de Sylvester utilisant le jacobien.

Exemple :

$f_1 = a\,x^2 + e\,y\,z$

$f_2 = c^{'}\,x\,z + d^{'}\,y^2$

$f_3 = b^{''}\,x\,y + f^{''}\,z^2$; Alors :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = a\,d^{'}\,f^{''}\,(a\,d^{'}\,f^{''} + e\,c^{'}\,b^{''})^3$ de degré 12.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(3,\, 2,\, 3) = 9$, $\beta(3,\, 2,\, 3) = 1$, $\gamma(3,\, 2,\, 3) = 10$, $\delta(3,\, 2,\, 3) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^0\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^3\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta_{11}^{-1}]\quad [\delta_{12}^{-1}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(3,\, 2,\, 3)+\delta(3,\, 2,\, 3) = \alpha(3,\, 2,\, 3)+\beta(3,\, 2,\, 3) = 10$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 10.
Ce cas est le dual du cas $m = 0$. La méthode de Sylvester s'applique.

$\diamond$ On exprime les 9 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $z\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$, $z\,f_2$, $x\,f_3$, $y\,f_3$, $z\,f_3$ sur la base, à 10 éléments $\{x^3,\ x^2\,y,\ x^2\,z,\ x\,y^2,\ x\,y\,z,\ x\,z^2,\ y^3,\ y^2\,z,\ y\,z^2,\ z^3\}$.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base, à 3 éléments, $\{x,\ y,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$$\begin{aligned}
f_1 &= [a\,x + b\,y + c\,z]\,x + [d\,y + e\,z]\,y + [f\,z]\,z\\
f_2 &= [a'\,x + b'\,y + c'\,z]\,x + [d'\,y + e'\,z]\,y + [f'\,z]\,z\\
f_3 &= [a''\,x + b''\,y + c''\,z]\,x + [d''\,y + e''\,z]\,y + [f''\,z]\,z
\end{aligned}$$

Pour que les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{000} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x + b\,y + c\,z & d\,y + e\,z & f\,z \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z & d'\,y + e'\,z & f'\,z \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z & d''\,y + e''\,z & f''\,z \end{vmatrix}$$
$$= ADF\,x\,y\,z + AEF\,x\,z^2 + BDF\,y^2\,z + (CDF + BEF)\,y\,z^2 + CEF\,z^3 = 0.$$

On obtient donc 10 formes $x\,f_1,\ y\,f_1,\ z\,f_1,\ x\,f_2,\ y\,f_2,\ z\,f_2,\ x\,f_3,\ y\,f_3,\ z\,f_3,\ D_{000}$, de degrés 3, qui doivent avoir un zéro commun non nul sur la base, à 10 éléments, $\{x^3,\ x^2\,y,\ x^2\,z,\ x\,y^2,\ x\,y\,z,\ x\,z^2,\ y^3,\ y^2\,z,\ y\,z^2,\ z^3\}$. Par conséquent :

$$R(f_1,\ f_2,\ f_3) = -\begin{vmatrix}
a & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & a'' & 0 & 0 & 0 \\
b & a & 0 & b' & a' & 0 & b'' & a'' & 0 & 0 \\
c & 0 & a & c' & 0 & a' & c'' & 0 & a'' & 0 \\
d & b & 0 & d' & b' & 0 & d'' & b'' & 0 & 0 \\
e & c & b & e' & c' & b' & e'' & c'' & b'' & ADF \\
f & 0 & c & f' & 0 & c' & f'' & 0 & c'' & AEF \\
0 & d & 0 & a' & d' & 0 & 0 & d'' & 0 & 0 \\
0 & e & d & 0 & e' & d' & 0 & e'' & d'' & BDF \\
0 & f & e & 0 & f' & e' & 0 & f'' & e'' & CDF + BEF \\
0 & 0 & f & 0 & 0 & f' & 0 & 0 & f'' & CEF
\end{vmatrix}.$$

Le coefficient -1 apparaît pour que $R(x,\ y,\ z) = 1$.

Exemple :

Pour l'exemple précédent on retrouve évidemment le même résultant.

$*$ **Cas c3* :** $1 \leqslant m \leqslant 5$

$A^{-1} = S^{m-3}\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3$ et $B^{-1} = (S^{6-m}\mathbb{C}^3)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^3$ et $B^0 = (S^{3-m}\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3$ et :

$\alpha(3,\ 3,\ m) = \max(0,\ \frac{3\,(m-1)\,(m-2)}{2})$, $\beta(3,\ 3,\ m) = \max(0,\ \frac{(8-m)\,(7-m)}{2})$, $\gamma(3,\ 3,\ m) = \max(0,\ \frac{(m+2)\,(m+1)}{2})$, $\delta(3,\ 3,\ m) = \max(0,\ \frac{3\,(5-m)\,(4-m)}{2})$.

• $m = 1$ **:**

$\alpha(3,\, 3,\, 1) = 0$, $\beta(3,\, 3,\, 1) = 21$, $\gamma(3,\, 3,\, 1) = 3$, $\delta(3,\, 3,\, 1) = 18$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^5\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^1\mathbb{C}^3 \oplus [(S^2\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3] \longrightarrow 0$ et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(3,\, 3,\, 1)+\delta(3,\, 3,\, 1) = \alpha(3,\, 3,\, 1)+\beta(3,\, 3,\, 1) = 21$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 21. Ce cas est le dual du cas $m = 5$. Mais ce cas n'a aucun intérêt par rapport au cas $m = 2$.

• $m = 2$ **:**

$\alpha(3,\, 3,\, 2) = 0$, $\beta(3,\, 3,\, 2) = 15$, $\gamma(3,\, 3,\, 2) = 6$, $\delta(3,\, 3,\, 2) = 9$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^4\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^2\mathbb{C}^3 \oplus [(S^1\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n bien $\gamma(3,\, 3,\, 2) + \delta(3,\, 3,\, 2) = \alpha(3,\, 3,\, 2) + \beta(3,\, 3,\, 2) = 15$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 15. Ce cas est le dual du cas $m = 4$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(3,\, 3,\, 3) = 3$, $\beta(3,\, 3,\, 3) = 10$, $\gamma(3,\, 3,\, 3) = 10$, $\delta(3,\, 3,\, 3) = 3$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\mathbb{C}^3 \oplus (S^3\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^3\mathbb{C}^3 \oplus \wedge^2\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n bien $\gamma(3,\, 3,\, 3) + \delta(3,\, 3,\, 3) = \alpha(3,\, 3,\, 3) + \beta(3,\, 3,\, 3) = 13$.

C'est le premier cas pour lequel les trois matrices $[\delta_{11}^{-1}]$, $[\delta_{12}^{-1}]$ et $[\delta_{22}^{-1}]$ sont présentes. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre minimal 13, mais le calcul de la matrice symétrique $[\delta_{12}^{-1}]$ est très compliqué.

Nous allons proposer un calcul de cette matrice. Cependant vu la difficulté de son calcul ce cas $m = 3$ n'a aucun intérêt par rapport au cas $m = 4$ (cf. ci-après) qui, bien que conduisant à un résultant sous la forme d'un déterminant d'ordre 15 plus elevé, n'offre pas de difficulté de calcul (car, on le verra, la méthode de Sylvester s'applique alors).

$\diamond$ On exprime les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base, à 10 éléments $\{x^3,\ \ldots\ ,z^3\}$.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^4,\ y,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire et il faut faire intervenir les inverses des variables.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{300} des coefficients de ces trois formes sur cette base soit nul. Mais ce déterminant ne peut s'exprimer que sur une base, à 13 éléments $\{x^3,\ \ldots\ ,z^3,\ (1),\ (2),\ (3)\}$, pour laquelle nous allons proposer ci-après les 3 éléments $\{(1),\ (2),\ (3)\}$.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{030} puis D_{003} sur cette base à 13 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^3,\ y^2,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire et il faut faire intervenir les inverses des variables.

Pour que ces trois formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{210} des coefficints de ces trois formes sur cette base soit nul. Mais il faut exprimer ce déterminant sur la base précédente, à 13 éléments.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{021} puis D_{102} sur cette base à 13 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^2,\ y^2,\ z^2\}$: il y a plusieurs façons de faire et il faut faire intervenir les inverses des variables.

Pour que ces trois formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{111} des coefficints de ces trois formes sur cette base soit nul. Mais il faut exprimer ce déterminant sur la base précédente, à 13 éléments.

On obtient donc 13 formes
$f_1,\ f_2,\ f_3,\ D_{300},\ D_{210},\ D_{201},\ D_{120},\ D_{111},\ D_{102},\ D_{030},\ D_{021},\ D_{012},\ D_{003}$
qui doivent avoir un zéro commun sur la base précédente, à 13 éléments. Le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est le déterminant des coefficients de ces 13 formes sur cette base à 13 éléments.

Il y a plusieurs choix pour les éléments (1), (2), (3). Choisissons par exemple :

$$\begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} = (H\,y^2 + I\,y\,z + J\,z^2)\ \times\ (A\,x^2 + C\,x\,z + F\,z^2)\,y^{-1}$$
$$+\,(A\,x^2 + B\,x\,y + D\,y^2)\ \times\ (G\,y^2 + H\,y\,z + I\,z^2)\,z^{-1}.$$

Alors si nous posons pour simplifier $M \triangleq [\delta_{12}^{-1}]$ et si nous notons : m_{ij} ; $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 10$ les éléments de cette matrice symétrique on obtient :

$$R(f_1,\, f_2,\, f_3)$$
$$= \begin{vmatrix}
a & a' & a'' & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & 0 & m_{18} & m_{19} & 0 \\
b & b' & b'' & m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} & m_{29} & m_{2,10} \\
c & c' & c'' & m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & m_{37} & m_{38} & m_{39} & m_{3,10} \\
d & d' & d'' & m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} & m_{48} & m_{49} & m_{4,10} \\
e & e' & e'' & m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{56} & m_{57} & m_{58} & m_{59} & m_{5,10} \\
f & f' & f'' & m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} & m_{67} & m_{68} & m_{69} & m_{6,10} \\
g & g' & g'' & 0 & m_{27} & m_{37} & m_{47} & m_{57} & m_{67} & m_{77} & m_{78} & m_{79} & m_{7,10} \\
h & h' & h'' & m_{18} & m_{28} & m_{38} & m_{48} & m_{58} & m_{68} & m_{78} & m_{88} & m_{89} & m_{8,10} \\
i & i' & i'' & m_{19} & m_{29} & m_{39} & m_{49} & m_{59} & m_{69} & m_{79} & m_{89} & m_{99} & m_{9,10} \\
j & j' & j'' & 0 & m_{2,10} & m_{3,10} & m_{4,10} & m_{5,10} & m_{6,10} & m_{7,10} & m_{8,10} & m_{9,10} & m_{10,10} \\
0 & 0 & 0 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\
0 & 0 & 0 & a' & b' & c' & d' & e' & f' & g' & h' & i' & j' \\
0 & 0 & 0 & a'' & b'' & c'' & d'' & e'' & f'' & g'' & h'' & i'' & j''
\end{vmatrix},$$

Le coefficient 1 apparaît pour que $R(x,\, y,\, z) = 1$.

avec :

$m_{11} = 2\,ABC$
$m_{12} = ABE - 2\,ACD$
$m_{13} = -ACE + 2\,ABF$
$m_{14} = ADE - ACG$
$m_{15} = 2\,ADF$
$m_{16} = ABJ + AEF$
$m_{18} = -AFG$
$m_{19} = ADJ$

$m_{22} = 2\,ADE - 2\,ACG - 2\,BCD$
$m_{23} = ABI - ACH - BCE + 2\,ADF$
$m_{24} = -2\,AEG + ADH + BDE - BCG$
$m_{25} = -AEH + 2\,ADI - 2\,AFG + 2\,BDF$
$m_{26} = 2\,ADJ - AFH + BEF$
$m_{27} = AGH$
$m_{28} = 2\,AGI - BFG$
$m_{29} = 2\,AGJ + AHI + BDJ$
$m_{2,10} = AHJ$

$m_{33} = 2\,ABJ - 2\,BCF + 2\,AEF$
$m_{34} = ADI + CDE - 2\,AFG$
$m_{35} = 2\,ADJ + AEI - 2\,AFH + 2\,CDF$
$m_{36} = 2\,AEJ - BCJ - AFI + CEF$
$m_{37} = AGI$
$m_{38} = 2\,AGJ + AHI - CFG$
$m_{39} = 2\,AHJ + CDJ$
$m_{3,10} = AIJ$

$m_{44} = 2\,AGH - 2\,BEG + 2\,BDH$
$m_{45} = 2\,AGI + 2\,BDI - CEG - 2\,BFG$
$m_{46} = 2\,AGJ + BDJ - CFG + DEF$
$m_{47} = 2\,BGH$
$m_{48} = 2\,BGI + CGH - DFG$
$m_{49} = 2\,BGJ + CGI$
$m_{4,10} = CGJ$

$m_{55} = 2\,AGJ + 2\,AHI + 2\,BEI + 2\,BDJ + 2\,CDI - 2\,CEH - 2\,CFG$
$- 2\,BFH - 2\,DEF$
$m_{56} = 2\,AHJ + 2\,CDJ + BEJ - 2\,CFH$
$m_{57} = 2\,BGI$
$m_{58} = 2\,BGJ + 2\,BHI + 2\,CGI - EFG$
$m_{59} = 2\,BHJ + 2\,CGJ + 2\,CHI - DEJ$
$m_{5,10} = 2\,CHJ$

$m_{66} = 2\,AIJ + 2\,CEJ - 2\,CFI$
$m_{67} = BGJ$
$m_{68} = 2\,CGJ + BHJ$
$m_{69} = 2\,CHJ + BIJ - DFJ$
$m_{6,10} = 2\,CIJ$

$m_{77} = 2\,DGH$
$m_{78} = EGH + 2\,DGI$
$m_{79} = DGJ + EGI$
$m_{7,10} = EGJ$

$m_{88} = 2\,EGI + 2\,DGJ + 2\,DHI$
$m_{89} = 2\,EGJ + EHI + DHJ + FGI$
$m_{8,10} = EHJ + FGJ$

$m_{99} = 2\,EHJ + 2\,FGJ + 2\,FHI$
$m_{9,10} = EIJ + 2\,FHJ$

$m_{10,10} = 2\,FIJ$

Exemple : si $f = A\,x^3 + E\,x\,y\,z + G\,y^3 + J\,z^3$ i.e. si $B = C = D = F = H = I = 0$ on trouve, avec :

$$\begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{bmatrix} = J\,z^2 \times A\,x^2\,y^{-1} + A\,x^2 \times G\,y^2\,z^{-1} :$$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = [(AGJ)^3 - AEG \,\centerdot\, AEJ \,\centerdot\, EGJ]^3$, qui est bien de degré 27.

Si $A = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} e \\ e' \\ e'' \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ g' \\ 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j'' \end{bmatrix}$ alors :

$AGJ = a\,g'\,j''$, $AEG = -a\,g'\,e''$, $AEJ = a\,e'\,j''$, $EGJ = e\,g'\,j''$ et :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = a^6\,g'^6\,j''^6\,(a\,g'\,j'' + e\,e'\,e'')^3$.

• $m = 4$ **:**

$\alpha(3,\,3,\,4) = 9$, $\beta(3,\,3,\,4) = 6$, $\gamma(3,\,3,\,4) = 15$, $\delta(3,\,3,\,4) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^2\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$ $C^0 = A^0 = S^4\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta_{11}^{-1}] \quad [\delta_{12}^{-1}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(3,\,3,\,4)+\delta(3,\,3,\,4) = \alpha(3,\,3,\,4)+\beta(3,\,3,\,4) = 15$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 15. Ce cas est le dual du cas $m = 2$. La méthode de Sylvester s'applique.

◇ On exprime les 9 formes $x\,f_1,\, y\,f_1,\, z\,f_1,\, x\,f_2,\, y\,f_2,\, z\,f_2,\, x\,f_3,\, y\,f_3,\, z\,f_3$ sur la base, à 15 éléments $\{x^4,\, \ldots,\, z^4\}$.

◇ On décompose les 3 formes $f_1,\, f_2,\, f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^3,\, y,\, z\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$f_1 = [a]\,x^3 + [b\,x^2 + d\,x\,y + e\,x\,z + g\,y^2 + h\,y\,z + i\,z^2]\,y$
$+ [c\,x^2 + f\,x\,z + j\,z^2]\,z$
$f_2 = [a']\,x^3 + [b'\,x^2 + d'\,x\,y + e'\,x\,z + g'\,y^2 + h'\,y\,z + i'\,z^2]\,y$
$+ [c'\,x^2 + f'\,x\,z + j'\,z^2]\,z$
$f_3 = [a'']\,x^3 + [b''\,x^2 + d''\,x\,y + e''\,x\,z + g''\,y^2 + h''\,y\,z + i''\,z^2]\,y$
$+ [c''\,x^2 + f''\,x\,z + j''\,z^2]\,z$

Pour que les 3 formes $f_1,\, f_2,\, f_3$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{200} \triangleq \begin{vmatrix} a & b\,x^2+d\,x\,y+e\,x\,z+g\,y^2+h\,y\,z+i\,z^2 & c\,x^2+f\,x\,z+j\,z^2 \\ a' & b'\,x^2+d'\,x\,y+e'\,x\,z+g'\,y^2+h'\,y\,z+i'\,z^2 & c'\,x^2+f'\,x\,z+j'\,z^2 \\ a'' & b''\,x^2+d''\,x\,y+e''\,x\,z+g''\,y^2+h''\,y\,z+i''\,z^2 & c''\,x^2+f''\,x\,z+j''\,z^2 \end{vmatrix}$$
$= ABC\,x^4 - ACD\,x^3\,y + (-ACE+ABF)\,x^3\,z - ACG\,x^2\,y^2$
$+ (-ACH+ADF)\,x^2\,y\,z + (-ACI+AEF+ABJ)\,x^2\,z^2 - AFG\,x\,y^2\,z$
$+ (-AFH+ADJ)\,x\,y\,z^2 + (-AFI+AEJ)\,x\,z^3 + AGJ\,y^2\,z^2 + AHJ\,y\,z^3$
$+ AIJ\,z^4$ (les termes en $x\,y^3$, y^4, $y^3\,z$ n'interviennent pas).

Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient :

◇ $D_{020} = -ACG\,x^4 + (-BCG-AEG)\,x^3\,y - AFG\,x^3\,z$
$+ (CDG-BEG+AGH)\,x^2\,y^2 + (-BFG+AGI)\,x^2\,y\,z + AGJ\,x^2\,z^2$
$+ (-DEG+BGH)\,x\,y^3 + (-DFG+BGI)\,x\,y^2\,z + BGJ\,x\,y\,z^2 + DGH\,y^4$
$+ DGI\,y^3\,z + DGJ\,y^2\,z^2$ (les termes en $x\,z^3$, $y\,z^3$, z^4 n'interviennent pas).

◇ $D_{002} = AGJ\,x^2\,y^2 + AHJ\,x^2\,y\,z + AIJ\,x^2\,z^2 + BGJ\,x\,y^3$
$+ (CGJ+BHJ)\,x\,y^2\,z + (CHJ+BIJ)\,x\,y\,z^2 + CIJ\,x\,z^3 + DGJ\,y^4$
$+ (EGJ+DHJ)\,y^3\,z + (FGJ+EHJ+DIJ)\,y^2\,z^2 + (FHJ+EIJ)\,y\,z^3$
$+ FIJ\,z^4$ (les termes x^4, $x^3\,y$, $x^3\,z$ n'interviennent pas).

◇ On décompose les 3 formes f_1, f_2, f_3 sur la base à 3 éléments $\{x^2,\ y^2,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire ; par exemple :

$f_1 = [a\,x+b\,y]\,x^2 + [d\,x+g\,y]\,y^2 + [c\,x^2+e\,x\,y+f\,x\,z+h\,y^2+i\,y\,z+j\,z^2]\,z$
$f_2 = [a'\,x+b'\,y]\,x^2 + [d'\,x+g'\,y]\,y^2 + [c'\,x^2+e'\,x\,y+f'\,x\,z+h'\,y^2+i'\,y\,z+j'\,z^2]\,z$
$f_3 = [a''\,x+b''\,y]\,x^2 + [d''\,x+g''\,y]\,y^2 + [c''\,x^2+e''\,x\,y+f''\,x\,z+h''\,y^2+i''\,y\,z+j''\,z^2]\,z$

Pour que les 3 formes f_1, f_2, f_3 aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{110} \triangleq \begin{vmatrix} a\,x+b\,y & d\,x+g\,y & c\,x^2+e\,x\,y+f\,x\,z+h\,y^2+i\,y\,z+j\,z^2 \\ a'\,x+b'\,y & d'\,x+g'\,y & c'\,x^2+e'\,x\,y+f'\,x\,z+h'\,y^2+i'\,y\,z+j'\,z^2 \\ a''\,x+b''\,y & d''\,x+g''\,y & c''\,x^2+e''\,x\,y+f''\,x\,z+h''\,y^2+i''\,y\,z+j''\,z^2 \end{vmatrix}$$
$= -ACD\,x^4 + (-BCD-ACG+ADE)\,x^3\,y + ADF\,x^3\,z$
$+ (-BCG+BDE-AEG+ADH)\,x^2\,y^2 + (BDF-AFG+ADI)\,x^2\,y\,z$
$+ ADJ\,x^2\,z^2 + (BDH+AGH-BEG)\,x\,y^3$
$+ (BDI+AGI-BFG)\,x\,y^2\,z + (BDJ+AGJ)\,x\,y\,z^2 + BGH\,y^4 + BGI\,y^3\,z$
$+ BGJ\,y^2\,z^2$ (les termes $x\,z^3$, $y\,z^3$, z^4 n'interviennent pas, comme dans D_{020}).

Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient :

$D_{011} = AGI\,x^2\,y^2 + (AHI + AGJ)\,x^2\,y\,z + AHJ\,x^2\,z^2 + BGI\,x\,y^3$
$+ (BHI + BGJ + CGI)\,x\,y^2\,z + (CHI + CGJ + BHJ)\,x\,y\,z^2 + CHJ\,x\,z^3$
$+ DGI\,y^4 + (DHI + DGJ + EGI)\,y^3\,z + (FGI + EHI + EGJ + DHJ)\,y^2\,z^2$
$+(EHJ+FHI+FGJ)\,y\,z^3+FHJ\,z^4$ (les termes x^4, $x^3\,y$, $x^3\,z$ n'interviennent pas, comme dans D_{002}).

$D_{101} = ABF\,x^4 + ADF\,x^3\,y + (-BCF + ABJ + AEF)\,x^3\,z - AFG\,x^2\,y^2$
$+ (CDF + ADJ - AFH)\,x^2\,y\,z + (-AFI + CEF + AEJ - BCJ)\,x^2\,z^2$
$+ (-CFG + AGJ)\,x\,y^2\,z + (-CFH + AHJ + CDJ)\,x\,y\,z^2$
$+ (-CFI + AIJ + CEJ)\,x\,z^3 + CGJ\,y^2\,z^2 + CHJ\,y\,z^3 + CIJ\,z^4$ (les termes $x\,y^3$, y^4, $y^3\,z$ n'interviennent pas, comme dans D_{200}).

$R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est, à un coefficient près, le déterminant des coefficients des 15 formes
$x\,f_1,\ y\,f_1,\ z\,f_1,\ x\,f_2,\ y\,f_2,\ z\,f_2,\ x\,f_3,\ y\,f_3,\ z\,f_3,\ D_{200},\ D_{110},\ D_{101},\ D_{002},\ D_{011},\ D_{002}$
sur la base, à 15 éléments $\{x^4,\ \ldots\ ,z^4\}$.

Exemple précédent : si $f = A\,x^3 + E\,x\,y\,z + G\,y^3 + J\,z^3$ i.e. si $B = C = D = F = H = I = 0$ on trouve :

$D_{200} = AEJ\,x\,z^3 + AGJ\,y^2\,z^2$
$D_{020} = -AEG\,x^3\,y + AGJ\,x^2\,z^2$
$D_{002} = AGJ\,x^2\,y^2 + EGJ\,y^3\,z$
$D_{110} = -AEG\,x^2\,y^2 + AGJ\,x\,y\,z^2$
$D_{011} = AGJ\,x^2\,y\,z + EGJ\,y^2\,z^2$
$D_{101} = AEJ\,x^2\,z^2 + AGJ\,x\,y^2\,z$ et on retrouve :

$R(f_1,\ f_2,\ f_3) = \left[(AGJ)^3 - AEG\ \centerdot\ AEJ\ \centerdot\ EGJ\right]^3$, qui est bien de degré 27.

• $m = 5$ **:**

$\alpha(3,\ 3,\ 5) = 18$, $\beta(3,\ 3,\ 5) = 3$, $\gamma(3,\ 3,\ 5) = 21$, $\delta(3,\ 3,\ 5) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^1\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^5\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta_{11}^{-1}]\quad [\delta_{12}^{-1}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(3,\ 3,\ 5)+\delta(3,\ 3,\ 5) = \alpha(3,\ 3,\ 5)+\beta(3,\ 3,\ 5) = 21$. Le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 21. Ce cas est le dual du cas $m = 1$. La méthode de Sylvester s'applique. Mais ce cas n'a aucun intérêt par rapport au cas $m = 4$.

$*$ **Cas c4* :** $2 \leqslant m \leqslant 7$

$A^{-1} = S^{m-4}\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3$ et et $B^{-1} = (S^{9-m}\mathbb{C}^3)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^3$ et $B^0 = (S^{5-m}\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3$ et :

$\alpha(3,\,4,\,m) = \max(0,\,\frac{3\,(m-2)\,(m-3)}{2})$, $\beta(3,\,4,\,m) = \max(0,\,\frac{(11-m)\,(10-m)}{2})$, $\gamma(3,\,4,\,m) = \max(0,\,\frac{(m+2)\,(m+1)}{2})$, $\delta(3,\,4,\,m) = \max(0,\,\frac{3\,(7-m)\,(6-m)}{2})$.

• $m = 2$ **:**

$\alpha(3,\,4,\,2) = 0$, $\beta(3,\,4,\,2) = 36$, $\gamma(3,\,4,\,2) = 6$, $\delta(3,\,4,\,2) = 30$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^7\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^2\mathbb{C}^3 \oplus [(S^3\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(3,\,4,\,2)+\delta(3,\,4,\,2) = \alpha(3,\,4,\,2)+\beta(3,\,4,\,2) = 36$. Le résultant $R(f_1,\,f_2,\,f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 36. Ce cas est le dual du cas $m = 7$ pour lequel la méthode de Sylvester s'applique. Mais ce cas n'a aucun intérêt par rapport au cas $m = 3$.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(3,\,4,\,3) = 0$, $\beta(3,\,4,\,3) = 28$, $\gamma(3,\,4,\,3) = 10$, $\delta(3,\,4,\,3) = 18$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^6\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^3\mathbb{C}^3 \oplus [(S^2\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(3,\,4,\,3)+\delta(3,\,4,\,3) = \alpha(3,\,4,\,3)+\beta(3,\,4,\,3) = 28$. Le résultant $R(f_1,\,f_2,\,f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 28. Ce cas est le dual du cas $m = 6$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 4$ **:**

$\alpha(3,\,4,\,4) = 3$, $\beta(3,\,4,\,4) = 21$, $\gamma(3,\,4,\,4) = 15$, $\delta(3,\,4,\,4) = 9$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\mathbb{C}^3 \oplus (S^5\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^4\mathbb{C}^3 \oplus [(S^1\mathbb{C}^3)^* \otimes \wedge^2\mathbb{C}^3] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(3,\,4,\,4)+\delta(3,\,4,\,4) = \alpha(3,\,4,\,4)+\beta(3,\,4,\,4) = 24$. Le résultant $R(f_1,\,f_2,\,f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 24. **Ce cas conduit au déterminant d'ordre minimal, mais il est difficile de calculer la matrice** $[\delta_{12}^{-1}]$. Ce cas est le dual du cas $m = 5$ qu'il est préférable d'utiliser.

• $m = 5$ **:**

$\alpha(3,\,4,\,5) = 9$, $\beta(3,\,4,\,5) = 15$, $\gamma(3,\,4,\,5) = 21$, $\delta(3,\,4,\,5) = 3$.

$$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^4\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$$
$$C^0 = A^0 \oplus B^0 = S^5\mathbb{C}^3 \oplus \wedge^2\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0 \text{ (W) et } [\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}.$$

0n a bien $\gamma(3,\ 4,\ 5)+\delta(3,\ 4,\ 5) = \alpha(3,\ 4,\ 5)+\beta(3,\ 4,\ 5) = 24$. **Le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre minimal 24, mais le calcul de la matrice $[\delta_{12}^{-1}]$ est très compliqué**.

Nous allons proposer une ébauche de calcul de cette matrice. Cependant vu la difficulté de son calcul ce cas $m = 5$ n'a aucun intérêt par rapport au cas $m = 6$ (cf. ci-après) qui, bien que conduisant à un résultant sous la forme d'un déterminant d'ordre 26 plus elevé, n'offre pas de difficulté de calcul (car, on le verra, la méthode de Sylvester s'applique alors).

$\diamond$ On exprime les 9 formes $x\,f_1,\ y\,f_1,\ z\,f_1,\ x\,f_2,\ y\,f_2,\ z\,f_2,\ x\,f_3,\ y\,f_3,\ z\,f_3$ sur la base, à 21 éléments $\{x^5,\ \ldots,\ z^5\}$.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^5,\ y,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire et il faut faire intervenir les inverses des variables.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{400} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Mais ce déterminant ne peut s'exprimer que sur une base, à 24 éléments $\{x^5,\ \ldots,\ z^5,\ (1),\ (2),\ (3)\}$, pour laquelle il est difficile de calculer les 3 éléments $\{(1),\ (2),\ (3)\}$.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{040} puis D_{004} sur cette base à 24 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^4,\ y^2,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire et il faut faire intervenir les inverses des variables.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{310} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Mais ce déterminant ne peut s'exprimer que sur la base, à 24 éléments, précédente.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{031} puis D_{103} sur cette base à 24 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^4,\ y,\ z^2\}$: il y a plusieurs façons de faire et il faut faire intervenir les inverses des variables.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{301} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Mais ce déterminant ne peut s'exprimer que sur la base, à 24 éléments, précédente.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{130} puis D_{013} sur cette base à 24 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^3,\ y^3,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire et il faut faire intervenir les inverses des variables.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{220} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Mais ce déterminant ne peut s'exprimer que sur la base, à 24 éléments, précédente.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{022} puis D_{202} sur cette base à 24 éléments.

On obtient donc 24 formes
$x\,f_1,\ y\,f_1,\ z\,f_1,\ x\,f_2,\ y\,f_2,\ z\,f_2,\ x\,f_3,\ y\,f_3,\ z\,f_3,\ D_{400},\ D_{310},\ D_{301},\ D_{220},\ D_{211},$
$D_{202},\ D_{130},\ D_{121},\ D_{112},\ D_{103},\ D_{040},\ D_{031},\ D_{022},\ D_{013},\ D_{004}$
qui doivent avoir un zéro commun sur la base précédente, à 24 éléments. Le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est le déterminant des coefficients de ces 24 formes sur cette base à 24 éléments.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments (1), (2), (3).

Exemple

$f_1 = a\,x^4 + m\,y^2\,z^2$
$f_2 = f'\,x^2\,z^2 + k'\,y^4$
$f_3 = d''\,x^2\,y^2 + o''\,z^4$. Avec :

$(1) = k'\,o''\,x^{-1}\,y^3\,z^3$
$(2) = a\,o''\,x^3\,y^{-1}\,z^3$
$(3) = a\,k'\,x^3\,y^3\,z^{-1}$ on trouve :

$R(f_1,\ f_2,\ f_3) = (a\,k'\,o'')^4\,(a\,k'\,o'' + m\,f'\,d'')^{12}$, de degré 48.

• $m = 6$ **:**

$\alpha(3,\ 4,\ 6) = 18,\ \beta(3,\ 4,\ 6) = 10,\ \gamma(3,\ 4,\ 6) = 28,\ \delta(3,\ 4,\ 6) = 0.$

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^3\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^6\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta_{11}^{-1}]\quad [\delta_{12}^{-1}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(3,\ 4,\ 6)+\delta(3,\ 4,\ 6) = \alpha(3,\ 4,\ 6)+\beta(3,\ 4,\ 6) = 28$. Le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 28. La méthode de Sylvester s'applique.

$\diamond$ On exprime les 18 formes $x^2\, f_1,\ \ldots\ , z^2\, f_1,\ x^2\, f_2,\ \ldots\ , z^2\, f_2,\ x^2\, f_3,\ \ldots\ , z^2\, f_3$ sur la base, à 28 éléments $\{x^6,\ \ldots\ , z^6\}$,

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^4,\ y,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{300} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Ce déterminant s'exprime sur la base, à 28 éléments, précédente.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{030} puis D_{003} sur cette base à 28 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^3,\ y^2,\ z\}$: il y a plusieurs façons de faire.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{210} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Ce déterminant s'exprime sur la base, à 28 éléments, précédente.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{021} puis D_{102} sur cette base à 28 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^3,\ y,\ z^2\}$: il y a plusieurs façons de faire.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{201} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Ce déterminant s'exprime sur la base, à 28 éléments, précédente.

$\diamond$ Grâce à la symétrie du Cas c3 on obtient les déterminants D_{120} puis D_{012} sur cette base à 24 éléments.

$\diamond$ On décompose les 3 formes $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur la base à 3 éléments $\{x^2,\ y^2,\ z^2\}$: il y a plusieurs façons de faire.

Pour que ces 3 formes aient un zéro commun sur cette base il faut et il suffit que le déterminant D_{111} des coefficients de ces 3 formes sur cette base soit nul. Ce déterminant s'exprime sur la base, à 28 éléments, précédente.

On obtient donc 28 formes
$x^2\, f_1,\ \ldots\ , z^2\, f_1,\ x^2\, f_2,\ \ldots\ , z^2\, f_2,\ x^2\, f_3,\ \ldots\ , z^2\, f_3,\ D_{300},\ \ldots\ , D_{003}$ qui doivent avoir un zéro commun sur la base, à 28 éléments $\{x^6,\ \ldots\ , z^6\}$.

Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est le déterminant des coefficients de ces 28 formes sur cette base à 28 éléments.

Pour l'**exemple** précédent on trouve évidemment le même résultant.

• $m = 7$ **:**

$\alpha(3,\, 4,\, 7) = 30$, $\beta(3,\, 4,\, 7) = 6$, $\gamma(3,\, 4,\, 7) = 36$, $\delta(3,\, 4,\, 7) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^3\mathbb{C}^3 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^3) \oplus (S^2\mathbb{C}^3)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 = S^7\mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta_{11}^{-1}] \quad [\delta_{12}^{-1}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(3,\, 4,\, 7)+\delta(3,\, 4,\, 7) = \alpha(3,\, 4,\, 7)+\beta(3,\, 4,\, 7) = 36$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 36. La méthode de Sylvester s'applique. Mais ce cas n'a aucun intérêt par rapport au cas $m = 6$.

• **etc**.

4.6.4 Cas d* : Cas des formes quaternaires non linéaires : $k = 4$; $d \geqslant 2$; $2\,d - 3 \leqslant m \leqslant 2\,d - 1$ (il y a 3 valeurs)

Alors le résultant est de degré $4\,d^3$.

On a :

$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$; $A^{-1} = S^{m-d}\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4$ et $B^{-1} = (S^{4\,(d-1)-m}\mathbb{C}^4)^*$,

$C^0 = A^0 \oplus B^0$; $A^0 = S^m\mathbb{C}^4$ et $B^0 = (S^{3\,(d-1)-(m+1)}\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4$ et :

$\alpha(4,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{2\,(m-d+3)\,(m-d+2)\,(m-d+1)}{3})$,
$\beta(4,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{(4\,d-m-1)\,(4\,d-m-2)\,(4\,d-m-3)}{6})$,
$\gamma(4,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{(m+3)\,(m+2)\,(m+1)}{6})$,
$\delta(4,\, d,\, m) = \max(0,\, \frac{2\,(3\,d-m-1)\,(3\,d-m-2)\,(3\,d-m-3)}{3})$. On constate que γ est indépendant de d.

La matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée :
$\gamma(4,\, d,\, m) + \delta(4,\, d,\, m) = \alpha(4,\, d,\, m) + \beta(4,\, d,\, m)$.

Le complexe associé est toujours celui de Weyman.

• $m = 2\,d - 3$

Alors :

$\alpha(4,\, d,\, 2\,d - 3) = \frac{2\,d\,(d-1)\,(d-2)}{3}$,
$\beta(4,\, d,\, 2\,d - 3) = \frac{(2\,d+2)\,(2\,d+1)\,d}{3}$,

$\gamma(4,\, d,\, 2\,d-3) = \frac{(2\,d-1)\,(2\,d-2)\,d}{3}$,
$\delta(4,\, d,\, 2\,d-3) = \frac{2\,(d+2)\,(d+1)\,d}{3}$.
La matrice $[\delta_{12}^{-1}]$ n'est pas carrée mais la matrice $[\delta^{-1}]$ l'est d'ordre :
$\gamma(4,\, d,\, 2\,d-3) + \delta(4,\, d,\, 2\,d-3) = \alpha(4,\, d,\, 2\,d-3) + \beta(4,\, d,\, 2\,d-3)$
$= 2\,(d^2+1)\,d$. Ce cas est le dual du cas $m = 2\,d-1$. Mais il est préférable d'utiser le cas $m = 2\,d-1$ car $\delta(4,\, d,\, 2\,d-1)$ (cf. ci-après) est plus petit que $\delta(4,\, d,\, 2\,d-3)$.

- $m = 2\,(d-1)$

Alors :

$\alpha(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \delta(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \frac{2\,(d+1)\,d\,(d-1)}{3}$ et
$\beta(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \gamma(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \frac{(2\,d+1)\,(2\,d-1)\,d}{3}$.
On constate que la matrice $[\delta_{12}^{-1}]$ est carrée d'ordre :
$\gamma(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \beta(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \frac{(2\,d+1)\,(2\,d-1)\,d}{3}$ alors que la matrice $[\delta^{-1}]$ est carrée d'ordre :
$\gamma(4,\, d,\, 2\,(d-1)) + \delta(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \alpha(4,\, d,\, 2\,(d-1)) + \beta(4,\, d,\, 2\,(d-1))$
$= (2\,d^2-1)\,d$. **Il s'agit de la matrice $[\delta^{-1}]$ d'ordre minimal**.

Pour calculer la matrice $[\delta^{-1}]$:

$\diamond$ on multiplie les 4 formes $f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4$ par les $\frac{(d+1)\,d\,(d-1)}{6}$ monômes $x^{d-2},\, \ldots,\, t^{d-2}$ pour obtenir $\alpha(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \frac{2\,(d+1)\,d\,(d-1)}{3}$ formes, de degrés $2\,(d-1)$, sur la base des $\gamma(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \frac{(2\,d+1)\,(2\,d-1)\,d}{3}$ monômes $x^{2\,(d-1)},\, \ldots,\, t^{2\,(d-1)}$,

$\diamond$ et on calcule les $\beta(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \frac{(2\,d+1)\,(2\,d-1)\,d}{3}$ formes $D_{2\,(d-1),000},\, \ldots,$ $D_{000,2\,(d-1)}$, sur la base, à $(2\,d^2-1)\,d$ éléments, $x^{2\,(d-1)},\, \ldots,\, t^{2\,(d-1)}$, $(1),\, \ldots,$ $(\delta(4,\, d,\, 2\,(d-1)) = \frac{2\,(d+1)\,d\,(d-1)}{3})$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments $(1),\, \ldots,\, (\frac{2\,(d+1)\,d\,(d-1)}{3})$.

d	$2\,(d-1)$	$\alpha(4,\, d,\, 2\,(d-1))$ $= \delta(4,\, d,\, 2\,(d-1))$	$\beta(4,\, d,\, 2\,(d-1))$ $= \gamma(4,\, d,\, 2\,(d-1))$	$\gamma(4,\, d,\, 2\,(d-1)) + \delta(4,\, d,\, 2\,(d-1))$ $= \alpha(4,\, d,\, 2\,(d-1)) + \beta(4,\, d,\, 2\,(d-1))$
2	2	4	10	14
3	4	16	35	51
4	6	40	84	124
5	8	80	165	245
6	10	140	286	426
7	12	224	455	679
8	14	336	680	1016
9	16	480	969	1449
10	18	660	1330	1990
...	...	...	...	...

.

• $m = 2\,d - 1$

Alors :

$\alpha(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{2\,(d+2)\,(d+1)\,d}{3}$,
$\beta(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{(2\,d-1)\,(2\,d-2)\,d}{3}$,
$\gamma(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{(2\,d+2)\,(2\,d+1)\,d}{3}$,
$\delta(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{2\,d\,(d-1)\,(d-2)}{3}$.
La matrice $[\delta_{12}^{-1}]$ n'est pas carrée mais la matrice $[\delta^{-1}]$ l'est d'ordre :
$\gamma(4,\, d,\, 2\,d-1) + \delta(4,\, d,\, 2\,d-1) = \alpha(4,\, d,\, 2\,d-1) + \beta(4,\, d,\, 2\,d-1)$
$= 2\,(d^2+1)\,d$. Ce cas est le dual du cas $m = 2\,d-3$.

Pour calculer la matrice $[\delta^{-1}]$:

$\diamond$ on multiplie les 4 formes f_1, f_2, f_3, f_4 par les $\frac{(d+2)\,(d+1)\,d}{6}$ monômes $x^{d-1}, \ldots, t^{d-1}$ pour obtenir $\alpha(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{2\,(d+2)\,(d+1)\,d}{3}$ formes, de degrés $2\,d-1$, sur la base des $\gamma(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{(2\,d+2)\,(2\,d+1)\,d}{3}$ monômes $x^{2\,d-1}, \ldots, t^{2\,d-1}$,

$\diamond$ et on calcule les $\beta(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{(2\,d-1)\,(2\,d-2)\,d}{3}$ formes $D_{2\,d-3,000}, \ldots,$ $D_{000,2\,d-3}$, sur la base, à $2\,(d^2+1)\,d$ éléments, $x^{2\,d-1}, \ldots, t^{2\,d-1}$, $(1), \ldots,$ $(\delta(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{2\,d\,(d-1)\,(d-2)}{3})$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments $(1), \ldots, (\frac{2\,d\,(d-1)\,(d-2)}{3})$, mais dans ce cas $\delta(4,\, d,\, 2\,d-1) = \frac{2\,d\,(d-1)\,(d-2)}{3}$ est moins élevé que dans le cas $m = 2\,(d-1)$ et donc ce cas $m = 2\,d-1$ peut être plus intéressant que le cas $m = 2\,(d-1)$, bien que l'ordre de la matrice $[\delta^{-1}]$ soit plus élevé. C'est exactement ce qui se passe lorsque $d = 2$ (cf. ci-après) ; il vaut mieux utiliser $m = 2\,d-1 = 3$ que $m = 2\,(d-2) = 2$; ce qui évite le très difficile calcul de la matrice $[\delta_{12}^{-1}]$, étant donné que la méthode de Sylvester s'applique.

$*$ **Cas d2* :** $1 \leqslant m \leqslant 3$

$A^{-1} = S^{m-2}\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4$ et et $B^{-1} = (S^{4-m}\mathbb{C}^4)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^4$ et $B^0 = (S^{2-m}\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4$ et :

$\alpha(4,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{2\,(m+1)\,m\,(m-1)}{3})$, $\beta(4,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{(7-m)\,(6-m)\,(5-m)}{6})$,
$\gamma(4,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{(m+3)\,(m+2)\,(m+1)}{6})$, $\delta(4,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{2\,(5-m)\,(4-m)\,(3-m)}{3})$.

• $m = 1$ **:**

$\alpha(4,\, 2,\, 1) = 0$, $\beta(4,\, 2,\, 1) = 20$, $\gamma(4,\, 2,\, 1) = 4$, $\delta(4,\, 2,\, 1) = 16$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = B^{-1} = (S^3\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^1\mathbb{C}^4 \oplus [(S^1\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{12}^{-1}] \\ [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\ 2,\ 1)+\delta(4,\ 2,\ 1) = \alpha(4,\ 2,\ 1)+\beta(4,\ 2,\ 1) = 20$. Le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 20. Ce cas est le dual du cas $m = 3$ qu'il est préférable d'utiliser car alors la méthode de Sylvester s'applique.

• $m = 2$ **:**

$\alpha(4,\ 2,\ 2) = 4,\ \beta(4,\ 2,\ 2) = 10,\ \gamma(4,\ 2,\ 2) = 10,\ \delta(4,\ 2,\ 2) = 4.$

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\mathbb{C}^4 \oplus (S^2\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^2\mathbb{C}^4 \oplus \wedge^3\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\ 2,\ 2)+\delta(4,\ 2,\ 2) = \alpha(4,\ 2,\ 2)+\beta(4,\ 2,\ 2) = 14$. Le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 14. **Ce cas est celui qui conduit au déterminant d'ordre minimal, mais il est difficile de calculer la matrice** $[\delta_{12}^{-1}]$.

◇ On exprime les 4 formes $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ sur la base, à 10 éléments $\{x^2,\ \ldots\ ,t^2\}$.

◇ Comme précédemment on calcule les 10 formes :
$D_{2000},\ D_{1100},\ D_{1010},\ D_{1001},\ D_{0200},\ D_{01100},\ D_{0101},\ D_{0020},\ D_{0011},\ D_{0002}$ sur la base, à 14 éléments, $\{x^2,\ \ldots\ ,t^2,\ (1),\ (2),\ (3),\ (4)\}$, mais toute la difficulté consiste à trouver les éléments (1), (2), (3), (4).

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 14 dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ (à un facteur multiplicatif près).

Cependant vu la difficulté de son calcul ce cas $m = 2$ n'a aucun intérêt par rapport au cas $m = 3$ (cf. ci-après) qui, bien que conduisant à un résultant sous la forme d'un déterminant d'ordre 20 plus élevén n'offre pas de difficulté de calcul (car, on le verra, la méthode de Sylvester s'applique alors).

Exemple

$f_1 = a\,x^2 + i\,z\,t$
$f_2 = d^{'}\,x\,t + e^{'}\,y^2$
$f_3 = b^{''}\,x\,y + h^{''}\,z^2$
$f_4 = f^{'''}\,y\,z + j^{'''}\,t^2.$

Avec :

$(1) = a\,h^{''}\,x^{-1}\,y\,z\,t,$
$(2) = e^{'}\,j^{'''}\,x\,y^{-1}\,z\,t,$
$(3) = a\,h^{''}\,x\,y\,z^{-1}\,t$ et
$(4) = e^{'}\,j^{'''}\,x\,y\,z\,t^{-1}$. On trouve :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = (a\, e'\, h''\, j''')^3\, (a\, e'\, h''\, j''' - i\, d'\, b''\, f''')^5$, de degré 32.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(4,\, 2,\, 3) = 16$, $\beta(4,\, 2,\, 3) = 4$, $\gamma(4,\, 2,\, 3) = 20$, $\delta(4,\, 2,\, 3) = 0$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4) \oplus (S^1\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}}$
$C^0 = A^0 = S^3\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \left[\ [\delta_{11}^{-1}] \quad [\delta_{12}^{-1}]\ \right]$.

0n a bien $\gamma(4,\, 2,\, 3)+\delta(4,\, 2,\, 3) = \alpha(4,\, 2,\, 3)+\beta(4,\, 2,\, 3) = 20$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 20. La méthode de Sylvester s'applique. **C'est le dernier cas pour lequel elle s'applique**.

$\diamond$ On exprime les 16 formes $x\, f_1,\, y\, f_1,\, z\, f_1,\, t\, f_1$; $x\, f_2,\, y\, f_2,\, z\, f_2,\, t\, f_2$; $x\, f_3,\, y\, f_3,\, z\, f_3,\, t\, f_3$; $x\, f_4,\, y\, f_4,\, z\, f_4,\, t\, f_4$, sur la base, à 20 éléments, $\{x^3,\, \ldots\, , t^3\}$.

$\diamond$ On calcule les 4 formes D_{1000}, D_{0100}, D_{0010}, D_{0001}, sur cette base.

$*$ Pour calculer D_{1000} on décompose $f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4$ sur la base $\{x^2,\, y,\, z,\, t\}$; il y a plusieurs façons de faire. L'une des plus économiques est :

$$\begin{aligned}
f_1 &= [a]\, x^2 + [b\, x + e\, y + f\, z + g\, t]\, y + [c\, x + h\, z + i\, t]\, z + [d\, x + j\, t]\, t\\
f_2 &= [a']\, x^2 + [b'\, x + e'\, y + f'\, z + g'\, t]\, y + [c'\, x + h'\, z + i'\, t]\, z + [d'\, x + j'\, t]\, t\\
f_3 &= [a'']\, x^2 + [b''\, x + e''\, y + f''\, z + g''\, t]\, y + [c''\, x + h''\, z + i''\, t]\, z + [d''\, x + j''\, t]\, t\\
f_4 &= [a''']\, x^2 + [b'''\, x + e'''\, y + f'''\, z + g\, t]\, y + [c'''\, x + h'''\, z + i'''\, t]\, z + [d'''\, x + j'''\, t]\, t.
\end{aligned}$$

Pour que $f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4$ aient un zéro commun non nul sur cette base il faut et il suffit que :

$$D_{1000} \triangleq \begin{vmatrix} a & b\, x + e\, y + f\, z + g\, t & c\, x + h\, z + i\, t & d\, x + j\, t \\ a' & b'\, x + e'\, y + f'\, z + g'\, t & c'\, x + h'\, z + i'\, t & d'\, x + j'\, t \\ a'' & b''\, x + e''\, y + f''\, z + g''\, t & c''\, x + h''\, z + i''\, t & d''\, x + j''\, t \\ a''' & b'''\, x + e'''\, y + f'''\, z + g'''\, t & c'''\, x + h'''\, z + i'''\, t & d'''\, x + j'''\, t \end{vmatrix} = 0.$$

Soit :

$D_{1000} = m_{11}\, x^3 + m_{21}\, x^2\, y + m_{31}\, x^2\, z + m_{41}\, x^2\, t + m_{61}\, x\, y\, z + m_{71}\, x\, y\, t$
$+ m_{81}\, x\, z^2 + m_{91}\, x\, z\, t + m_{10,1}\, x\, t^2 + m_{15,1}\, y\, z\, t + m_{16,1}\, y\, t^2 + m_{18,1}\, z^2\, t$
$+ m_{19,1}\, z\, t^2 + m_{20,1}\, t^3$ (il y a 14 termes), avec :

$m_{11} = ABCD$, $m_{21} = ACDE$, $m_{31} = ACDF - ABDH$,
$m_{41} = ACDG - ABDI + ABCJ$, $m_{61} = ADEH$, $m_{71} = ADEI - ACEJ$,
$m_{81} = ADFH$, $m_{91} = ADGH + ADFI - ACFJ + ABHJ$,
$m_{10,1} = ABIJ + ADGI - ACGJ$, $m_{15,1} = AEHJ$, $m_{16,1} = AEIJ$,
$m_{18,1} = AFHJ$, $m_{19,1} = AGHJ + AFIJ$, $m_{20,1} = AGIJ$.

$*$ Pour calculer D_{0100} on décompose $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ sur la base $\{x,\ y^2,\ z,\ t\}$. En utilisant la symétrie du cas d2 on obtient directement :

$D_{0100} = m_{12}\,x^3 + m_{22}\,x^2\,y + m_{32}\,x^2\,z + m_{42}\,x^2\,t + m_{52}\,x\,y^2 + m_{62}\,x\,y\,z$
$+ m_{72}\,x\,y\,t + m_{92}\,x\,z\,t + m_{10,2}\,x\,t^2 + m_{11,2}\,y^3 + m_{12,2}\,y^2\,z + m_{13,2}\,y^2\,t$
$+ m_{15,2}\,y\,z\,t + m_{16,2}\,y\,t^2$ (il y a 14 termes), avec :

$m_{12} = -ACDE$, $m_{22} = ADEF - BCDE + ACEG$, $m_{32} = -ADEH$,
$m_{42} = ACEJ - ADEI$, $m_{52} = BCEG - BDEF - AEFG$,
$m_{62} = -BDEH + AEGH$, $m_{72} = BCEJ - BDEI + AEGI - AEFJ$,
$m_{92} = -AEHJ$, $m_{10,2} = -AEIJ$, $m_{11,2} = -BEFG$, $m_{12,2} = BEGH$,
$m_{13,2} = BEGI - BEFJ$, $m_{15,2} = -BEHJ$, $m_{16,2} = -BEIJ$.

$*$ Pour calculer D_{0010} on décompose $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ sur la base $\{x,\ y,\ z^2,\ t\}$. En utilisant la symétrie du cas d2 on obtient directement :

$D_{0010} = m_{23}\,x^2\,y + m_{33}\,x^2\,z + m_{53}\,x\,y^2 + m_{63}\,x\,y\,z + m_{73}\,x\,y\,t$
$+ m_{83}\,x\,z^2 + m_{93}\,x\,z\,t + m_{11,3}\,y^3 + m_{12,3}\,y^2\,z + m_{13,3}\,y^2\,t + m_{14,3}\,y\,z^2$
$+ m_{15,3}\,y\,z\,t + m_{17,3}\,z^3 + m_{18,3}\,z^2\,t$ (il y a 14 termes), avec :

$m_{23} = ADEH$, $m_{33} = ADFH$, $m_{53} = -AEGH + BDEH$,
$m_{63} = -AFGH - BDFH + CDEH - AEHI$, $m_{73} = AEHJ$,
$m_{83} = CDFH - AFIJ$, $m_{93} = AFHJ$, $m_{11,3} = -BEGH$,
$m_{12,3} = BEHI - BFGH - CEGH$, $m_{13,3} = BEHJ$,
$m_{14,3} = -CFGH + BFHI + CEHI$, $m_{15,3} = BFHJ + CEHJ$,
$m_{17,3} = CFHI$, $m_{18,3} = CFHJ$.

$*$ Pour calculer D_{0001} on décompose $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ sur la base $\{x,\ y,\ z,\ t^2\}$. En utilisant la symétrie du cas d2 on obtient directement :

$D_{0001} = m_{64}\,x\,y\,z + m_{74}\,x\,y\,t + m_{84}\,x\,z^2 + m_{94}\,x\,z\,t + m_{10,4}\,x\,t^2$
$+ m_{12,4}\,y^2\,z + m_{13,4}\,y^2\,t + m_{14,4}\,y\,z^2 + m_{15,4}\,y\,z\,t + m_{16,4}\,y\,t^2 + m_{17,4}\,z^3$
$+ m_{18,4}\,z^2\,t + m_{19,4}\,z\,t^2 + m_{20,4}\,t^3$ (il y a 14 termes), avec :

$m_{64} = -AEHJ$, $m_{74} = -AEIJ$, $m_{84} = -AFHJ$,
$m_{94} = -AFIJ - AGHJ$, $m_{10,4} = -AGIJ$, $m_{12,4} = -BEHJ$,
$m_{13,4} = -BEIJ$, $m_{14,4} = -CEHJ - BFHJ$,
$m_{15,4} = -CEIJ - BFIJ - BGHJ - DEHJ$, $m_{16,4} = -BGIJ - DEIJ$,
$m_{17,4} = -CFHJ$, $m_{18,4} = -DFHJ - CFIJ - CGHJ$,
$m_{19,4} = -CGIJ - DFIJ - DGHJ$, $m_{20,4} = -DGIJ$.

Par conséquent :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) =$

$$\left|\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
a & 0 & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 & a'' & 0 & 0 & 0 & a''' & 0 & 0 & 0 & m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\
b & a & 0 & 0 & b' & a' & 0 & 0 & b'' & a'' & 0 & 0 & b''' & a''' & 0 & 0 & m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\
c & 0 & a & 0 & c' & 0 & a' & 0 & c'' & 0 & a'' & 0 & c''' & 0 & a''' & 0 & m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\
d & 0 & 0 & a & d' & 0 & 0 & a' & d'' & 0 & 0 & a'' & d''' & 0 & 0 & a''' & m_{41} & m_{42} & 0 & 0 \\
e & b & 0 & 0 & e' & b' & 0 & 0 & e'' & b'' & 0 & 0 & e''' & b''' & 0 & 0 & 0 & m_{52} & m_{53} & 0 \\
f & c & b & 0 & f' & c' & b' & 0 & f'' & c'' & b'' & 0 & f''' & c''' & b''' & 0 & m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} \\
g & d & 0 & b & g' & d' & 0 & b' & g'' & d'' & 0 & b'' & g''' & d''' & 0 & b''' & m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} \\
h & 0 & c & 0 & h' & 0 & c' & 0 & h'' & 0 & c'' & 0 & h''' & 0 & c''' & 0 & m_{81} & 0 & m_{83} & m_{84} \\
i & 0 & d & c & i' & 0 & d' & c' & i'' & 0 & d'' & c'' & i''' & 0 & d''' & c''' & m_{91} & m_{92} & m_{93} & m_{94} \\
j & 0 & 0 & d & j' & 0 & 0 & d' & j'' & 0 & 0 & d'' & j''' & 0 & 0 & d''' & m_{10,1} & m_{10,2} & 0 & m_{10,4} \\
0 & e & 0 & 0 & 0 & e' & 0 & 0 & 0 & e'' & 0 & 0 & 0 & e''' & 0 & 0 & 0 & m_{11,2} & m_{11,3} & 0 \\
0 & f & e & 0 & 0 & f' & e' & 0 & 0 & f'' & e'' & 0 & 0 & f''' & e''' & 0 & 0 & m_{12,2} & m_{12,3} & m_{12,4} \\
0 & g & 0 & e & 0 & g' & 0 & e' & 0 & g'' & 0 & e'' & 0 & g''' & 0 & e''' & 0 & m_{13,2} & m_{13,3} & m_{13,4} \\
0 & h & f & 0 & 0 & h' & f' & 0 & 0 & h'' & f'' & 0 & 0 & h''' & f''' & 0 & 0 & 0 & m_{14,3} & m_{14,4} \\
0 & i & g & f & 0 & i' & g' & f' & 0 & i'' & g'' & f'' & 0 & i''' & g''' & f''' & m_{15,1} & m_{15,2} & m_{15,3} & m_{15,4} \\
0 & j & 0 & g & 0 & j' & 0 & g' & 0 & j'' & 0 & g'' & 0 & j''' & 0 & g''' & m_{16,1} & m_{16,2} & 0 & m_{16,4} \\
0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & h' & 0 & 0 & 0 & h'' & 0 & 0 & O & h''' & 0 & 0 & 0 & m_{17,3} & m_{17,4} \\
0 & 0 & i & h & 0 & 0 & i' & h' & 0 & 0 & i'' & h'' & 0 & O & i''' & h''' & m_{18,1} & 0 & m_{18,3} & m_{18,4} \\
0 & 0 & j & i & 0 & 0 & j' & i' & 0 & 0 & j'' & i'' & 0 & O & j''' & i''' & m_{19,1} & 0 & 0 & m_{19,4} \\
0 & 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & j' & 0 & 0 & 0 & j'' & 0 & O & 0 & j''' & m_{20,1} & 0 & 0 & m_{20,4}
\end{array}\right| .$$

Exemple précédent :

$f_1 = a\, x^2 + i\, z\, t$
$f_2 = d^{'}\, x\, t + e^{'}\, y^2$
$f_3 = b^{''}\, x\, y + h^{''}\, z^2$
$f_4 = f^{'''}\, y\, z + j^{'''}\, t^2.$

On trouve $m_{81} = m_{33} = -a\, d'\, h''\, f'''$,
$m_{15,1} = -m_{92} = m_{73} = -m_{64} = a\, e'\, h''\, j'''$ $m_{16,2} = m_{13,4} = i\, e'\, b''\, j'''$ et tous les autres m_{ij} nuls. Et alors, tous calculs faits, on retrouve :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = (a\, e^{'}\, h^{''}\, j^{'''})^3\, (a\, e^{'}\, h^{''}\, j^{'''} - i\, d^{'}\, b^{''}\, f^{'''})^5$, de degré 32.

$*$ **Cas d3* :** $3 \leqslant m \leqslant 5$

$A^{-1} = S^{m-3}\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4$ et et $B^{-1} = (S^{8-m}\mathbb{C}^4)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^4$ et $B^0 = (S^{5-m}\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4$ et :

$\alpha(4,\, 3,\, m) = \max(0,\, \frac{2\, m\, (m-1)\, (m-2)}{3})$,
$\beta(4,\, 3,\, m) = \max(0,\, \frac{(11-m)\, (10-m)\, (9-m)}{6})$,
$\gamma(4,\, 3,\, m) = \max(0,\, \frac{(m+3)\, (m+2)\, (m+1)}{6})$,
$\delta(4,\, 3,\, m) = \max(0,\, \frac{2\, (8-m)\, (7-m)\, (6-m)}{3})$.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(4,\,3,\,3) = 4$, $\beta(4,\,3,\,3) = 56$, $\gamma(4,\,3,\,3) = 20$, $\delta(4,\,3,\,3) = 40$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\mathbb{C}^4 \oplus (S^5\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^3\mathbb{C}^4 \oplus [(S^2\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\,3,\,3)+\delta(4,\,3,\,3) = \alpha(4,\,3,\,3)+\beta(4,\,3,\,3) = 60$. Le résultant $R(f_1,\,f_2,\,f_3,\,f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 60. Ce cas est le dual du cas $m = 5$ qu'il est préférable d'utiliser.

• $m = 4$ **:**

$\alpha(4,\,3,\,4) = 16$, $\beta(4,\,3,\,4) = 35$, $\gamma(4,\,3,\,4) = 35$, $\delta(4,\,3,\,4) = 16$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4) \oplus (S^4\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^4\mathbb{C}^4 \oplus [(S^1\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\,3,\,4)+\delta(4,\,3,\,4) = \alpha(4,\,3,\,4)+\beta(4,\,3,\,4) = 51$. Le résultant $R(f_1,\,f_2,\,f_3,\,f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 51. **Ce cas est celui qui conduit au déterminant d'ordre minimal, mais il est difficile de calculer la matrice** $[\delta_{12}^{-1}]$.

◇ On exprime les 16 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $z\,f_1$, $t\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$, $z\,f_2$, $t\,f_2$, $x\,f_3$, $y\,f_3$, $z\,f_3$, $t\,f_3$, $x\,f_4$, $y\,f_4$, $z\,f_4$, $t\,f_4$, sur la base, à 35 éléments, $\{x^4,\,\ldots,t^4\}$.

◇ On calcule les 35 formes $D_{4000},\,\ldots,D_{0004}$, sur la base, à 51 éléments, $\{x^4,\,\ldots,t^4,\,(1),\,\ldots,(16)\}$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments $(1),\,\ldots,(16)$. De plus ce calcul paraît hors de portée d'un point de vue pratique, dans le cas général.

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 51, dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\,f_2,\,f_3,\,f_4)$ (à un facteur multiplicatif près).

• $m = 5$ **:**

$\alpha(4,\,3,\,5) = 40$, $\beta(4,\,3,\,5) = 20$, $\gamma(4,\,3,\,5) = 56$, $\delta(4,\,3,\,5) = 4$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4) \oplus (S^3\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0 =$
$S^5\mathbb{C}^4 \oplus \wedge^3\mathbb{C}^4 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\,3,\,5) + \delta(4,\,3,\,5) = \alpha(4,\,3,\,5) + \beta(4,\,3,\,5) = 60$.

Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 60.

$\diamond$ On exprime les 40 formes $x^2\, f_1,\, \ldots\, , t^2\, f_1\, ;\, x^2\, f_2,\, \ldots\, , t^2\, f_2\, ;$ $x^2\, f_3,\, \ldots\, , t^2\, f_3\, ;\, x^2\, f_4,\, \ldots\, , t^2\, f_4$, sur la base, à 56 éléments, $\{x^5,\, \ldots\, , t^5\}$.

$\diamond$ On calcule les 20 formes $D_{3000},\, \ldots\, , D_{0003}$, sur la base, à 60 éléments, $\{x^5,\, \ldots\, , t^5,\, (1),\, (2),\, (3),\, (4)\}$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments (1), (2), (3), (4). De plus ce calcul paraît hors de portée d'un point de vue pratique, dans le cas général.

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 60, dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ (à un facteur multiplicatif près).

En fait bien que ce cas ($m = 5$) conduit a une matrice $[\delta^{-1}]$ d'ordre 60 plus elevé que le cas $m = 4$ (qui conduit a une matrice $[\delta^{-1}]$ d'ordre 51) il est plus intéressant car il ne nécessite que le calcul des 4 éléments $\{(1),\, (2),\, (3),\, (4)\}$.

Exemple

$f_1 = a_1\, x^3 + a_{18}\, z^2\, t$
$f_2 = a'_{10}\, x\, t^2 + a'_{11}\, y^3$
$f_3 = a''_2\, x^2\, y + a''_{17}\, z^3$
$f_4 = a'''_{12}\, y^2\, z + a'''_{20}\, t^3$. On peut choisir :

$(1) = a'_{11}\, a''_{17}\, a'''_{20}\, x^{-1}\, y^2\, z^2\, t^2$
$(2) = a_1\, a''_{17}\, a'''_{20}\, x^2\, y^{-1}\, z^2\, t^2$
$(3) = a_1\, a'_{11}\, a'''_{20}\, x^2\, y^2\, z^{-1}\, t^2$
$(4) = a_1\, a'_{11}\, a''_{17}\, x^2\, y^2\, z^2\, t^{-1}$ et alors on trouve :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \left(a_1\, a'_{11}\, a''_{17}\, a'''_{20}\right)^{15} \left(a_1\, a'_{11}\, a''_{17}\, a'''_{20} - a''_2\, a'_{10}\, a'''_{12}\, a_{18}\right)^9$
$\left(a_1\, a'_{11}\, a''_{17} - a''_2\, a'_{10}\, a_{12}\right)'' \left(a'_{11}\, a''_{17}\, a'''_{20} - a''_2\, a'''_{12}\, a_{18}\right) \left(a_1\, a''_{17}\, a'''_{20} - a'_{10}\, a'''_{12}\, a_{18}\right)$
$\left(a_1\, a'_{11}\, a'''_{20} - a''_2\, a'_{10}\, a_{18}\right)$, qui est bien de degré 108.

$*$ **Cas d4* :** $5 \leqslant m \leqslant 7$

$A^{-1} = S^{m-4}\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4$ et et $B^{-1} = \left(S^{12-m}\mathbb{C}^4\right)^*$,
$A^0 = S^m\mathbb{C}^4$ et $B^0 = \left(S^{8-m}\mathbb{C}^4\right)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4$ et :

$\alpha(4,\, 4,\, m) = \max(0,\, \frac{2\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{3})$,
$\beta(4,\, 4,\, m) = \max(0,\, \frac{(15-m)\,(14-m)\,(13-m)}{6})$,
$\gamma(4,\, 4,\, m) = \max(0,\, \frac{(m+3)\,(m+2)\,(m+1)}{6})$,
$\delta(4,\, 4,\, m) = \max(0,\, \frac{2\,(11-m)\,(10-m)\,(9-m)}{3})$.

• $m = 5$ **:**

$\alpha(4,\, 4,\, 5) = 16$, $\beta(4,\, 4,\, 5) = 120$, $\gamma(4,\, 4,\, 5) = 56$, $\delta(4,\, 4,\, 5) = 80$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4) \oplus (S^7\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^5\mathbb{C}^4 \oplus [(S^3\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\, 4,\, 5) + \delta(4,\, 4,\, 5) = \alpha(4,\, 4,\, 5) + \beta(4,\, 4,\, 5) = 136$.
Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 136. Ce cas est le dual du cas $m = 7$ qu'il est préférable d'utiliser.

• $m = 6$ **:**

$\alpha(4,\, 4,\, 6) = 40$, $\beta(4,\, 4,\, 6) = 84$, $\gamma(4,\, 4,\, 6) = 84$, $\delta(4,\, 4,\, 6) = 40$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4) \oplus (S^6\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^6\mathbb{C}^4 \oplus [(S^2\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4] \longrightarrow 0$ (W) et
$[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\, 4,\, 6) + \delta(4,\, 4,\, 6) = \alpha(4,\, 4,\, 6) + \beta(4,\, 4,\, 6) = 124$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 124. **Ce cas est celui qui conduit au déterminant d'ordre minimal, mais il est difficile de calculer la matrice** $[\delta_{12}^{-1}]$.

◇ On exprime les 40 formes $x^2\, f_1,\, \ldots\, , t^2\, f_1\, ;\, x^2\, f_2,\, \ldots\, , t^2\, f_2\, ;$
$x^2\, f_3,\, \ldots\, , t^2\, f_3\, ;\, x^2\, f_4,\, \ldots\, , t^2\, f_4$, sur la base, à 84 éléments, $\{x^6,\, \ldots\, , t^6\}$.
◇ On calcule les 84 formes $D_{6000},\, \ldots\, , D_{0006}$, sur la base, à 124 éléments, $\{x^6,\, \ldots\, , t^6,\, (1),\, \ldots\, , (40)\}$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments $(1),\, \ldots\, , (40)$. De plus ce calcul paraît hors de portée d'un point de vue pratique, dans le cas général.

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 124, dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ (à un facteur multiplicatif près).

• $m = 7$ **:**

$\alpha(4,\, 4,\, 7) = 80$, $\beta(4,\, 4,\, 7) = 56$, $\gamma(4,\, 4,\, 7) = 120$, $\delta(4,\, 4,\, 7) = 16$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^3\mathbb{C}^4 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^4) \oplus (S^5\mathbb{C}^4)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^7\mathbb{C}^4 \oplus [(S^1\mathbb{C}^4)^* \otimes \wedge^3\mathbb{C}^4] \longrightarrow 0$ (W) et
$[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

0n a bien $\gamma(4,\, 4,\, 7) + \delta(4,\, 4,\, 7) = \alpha(4,\, 4,\, 7) + \beta(4,\, 4,\, 7) = 136$.

Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 136.

$\diamond$ On exprime les 80 formes $x^3\, f_1,\, \ldots\, , t^3\, f_1\, ;\, x^3\, f_2,\, \ldots\, , t^3\, f_2\, ;$ $x^3\, f_3,\, \ldots\, , t^3\, f_3\, ;\, x^3\, f_4,\, \ldots\, , t^3\, f_4$, sur la base, à 120 éléments, $\{x^7,\, \ldots\, , t^7\}$.

$\diamond$ On calcule les 56 formes $D_{5000},\, \ldots\, , D_{0005}$, sur la base, à 136 éléments, $\{x^7,\, \ldots\, ,^7,\, (1),\, \ldots\, , (16)\}$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments $(1),\, \ldots\, , (16)$. De plus ce calcul paraît hors de portée d'un point de vue pratique, dans le cas général.

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 136, dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ (à un facteur multiplicatif près).

$*$ **etc**.

4.6.5 Cas e* : $m = 2,\, 3$

On a :

$C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}\, ;\, A^{-1} = S^{m-2}\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^5$ et $B^{-1} = (S^{5-m}\mathbb{C}^5)^*$,

$C^0 = A^0 \oplus B^0\, ;\, A^0 = S^m\mathbb{C}^5$ et $B^0 = (S^{3-m}\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4\mathbb{C}^5$ et :

$\alpha(5,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{5\,(m+2)\,(m+1)\,m\,(m-1)}{24})$,
$\beta(5,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{(9-m)\,(8-m)\,(7-m)\,(6-m)}{24})$,
$\gamma(5,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{(m+4)\,(m+3)\,(m+2)\,(m+1)}{24})$,
$\delta(5,\, 2,\, m) = \max(0,\, \frac{5\,(7-m)\,(6-m)\,(5-m)\,(4-m)}{24})$.

Le complexe associé est, dans les 2 cas ($m = 2$ et $m = 3$), celui de Weyman.

• $m = 2$ **:**

$\alpha(5,\, 2,\, 2) = 5,\, \beta(5,\, 2,\, 2) = 35,\, \gamma(5,\, 2,\, 2) = 15,\, \delta(5,\, 2,\, 2) = 25.$

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = \wedge^1\mathbb{C}^5 \oplus (S^3\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^2\mathbb{C}^5 \oplus [(S^1\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4\mathbb{C}^5] \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta^{-1}_{11}] & [\delta^{-1}_{12}] \\ 0 & [\delta^{-1}_{22}] \end{bmatrix}$.

On a bien $\gamma(5,\, 2,\, 2)+\delta(5,\, 2,\, 2) = \alpha(5,\, 2,\, 2)+\beta(5,\, 2,\, 2) = 40$. Le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5)$ est obtenu sous la forme d'un déterminant d'ordre 40. Ce cas est le dual du cas $m = 3$ qu'il est préférable d'utiliser car (cf. ci-après) $\delta(5,\, 2,\, 3) = 5 < \delta(5,\, 2,\, 2) = 25$.

• $m = 3$ **:**

$\alpha(5,\, 2,\, 3) = 25$, $\beta(5,\, 2,\, 3) = 15$, $\gamma(5,\, 2,\, 3) = 35$, $\delta(5,\, 2,\, 3) = 5$.

$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^5) \oplus (S^2\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$
$= S^3\mathbb{C}^5 \oplus \wedge^4\mathbb{C}^5 \longrightarrow 0$ (W) et $[\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}$.

On a bien $\gamma(5,\, 2,\, 3) + \delta(5,\, 2,\, 3) = \alpha(5,\, 2,\, 3) + \beta(5,\, 2,\, 3) = 40$.

$\diamond$ On exprime les 25 formes :
$x\,f_1$, $y\,f_1$, $z\,f_1$, $t\,f_1$, $u\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$, $z\,f_2$, $t\,f_2$, $u\,f_2$, $x\,f_3$, $y\,f_3$, $z\,f_3$, $t\,f_3$, $u\,f_3$, $x\,f_4$, $y\,f_4$, $z\,f_4$, $t\,f_4$, $u\,f_4$, $x\,f_5$, $y\,f_5$, $z\,f_5$, $t\,f_5$, $u\,f_5$, sur la base, à 35 éléments, $\{x^3,\, \ldots,\, u^3\}$.

$\diamond$ On calcule les 15 formes D_{20000}, $\ldots$, D_{00002}, sur la base, à 40 éléments, $\{x^3,\, \ldots,\, u^3,\, (1),\, \ldots,\, (5)\}$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments (1), $\ldots$, (5). De plus ce calcul paraît hors de portée d'un point de vue pratique, dans le cas général.

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 40, dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5)$ (à un facteur multiplicatif près).

Exemple :

$f_1 = a\,x^2 + g\,y\,z$
$f_2 = f^{'}\,y^2 + k^{'}\,z\,t$
$f_3 = j^{''}\,z^2 + n^{''}\,t\,u$
$f_4 = e^{'''}\,x\,u + m^{'''}\,t^2$
$f_5 = b^{''''}\,x\,y + o^{''''}\,u^2$.

Avec :

$(1) = f'\,j''\,m'''\,o''''\,x^{-1}\,y\,z\,t\,u$
$(2) = a\,j''\,m'''\,o''''\,x\,y^{-1}\,z\,t\,u$
$(3) = a\,f'\,m'''\,o''''\,x\,y\,z^{-1}\,t\,u$
$(4) = a\,f'\,j''\,o''''\,x\,y\,z\,t^{-1}\,u$
$(5) = a\,f'\,j''\,m'''\,x\,y\,z\,t\,u^{-1}$ on trouve :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5) = (a\,f^{'}\,j^{''}\,m^{'''}\,o^{''''})^5\,(a\,f^{'}\,j^{''}\,m^{'''}\,o^{''''} + g\,k^{'}\,n^{''}\,e^{'''}\,b^{''''})^{11}$, de degré 80.

4.6.6 Cas f* : $m = 5$

Le complexe associé est celui de Weyman :

$$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^2\mathbb{C}^5 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^5) \oplus (S^5\mathbb{C}^5)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$$
$$= S^5\mathbb{C}^5 \oplus [(S^2\mathbb{C}^5)^* \otimes \wedge^4\mathbb{C}^5] \longrightarrow 0 \text{ (W) et } [\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}.$$

$\alpha(5,\, 3,\, 5) = 75$, $\beta(5,\, 3,\, 5) = 126$, $\gamma(5,\, 3,\, 5) = 126$, $\delta(5,\, 3,\, 5) = 75$.

On a bien $\gamma(5,\, 3,\, 5) + \delta(5,\, 3,\, 5) = \alpha(5,\, 3,\, 5) + \beta(5,\, 3,\, 5) = 201$.

$\diamond$ On exprime les 75 formes :
$x^2\, f_1,\, \ldots\, , u^2\, f_1,\, x^2\, f_2,\, \ldots\, , u^2\, f_2,\, x^2\, f_3,\, \ldots\, , u^2\, f_3,$
$x^2\, f_4,\, \ldots\, , u^2\, f_4,\, x^2\, f_5,\, \ldots\, , u^2\, f_5$, sur la base, à 126 éléments, $\{x^5,\, \ldots\, , u^5\}$.

$\diamond$ On calcule les 126 formes $D_{50000},\, \ldots\, , D_{00005}$, sur la base, à 201 éléments, $\{x^5,\, \ldots\, , u^5,\, (1),\, \ldots\, , (75)\}$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments $(1),\, \ldots\, , (75)$. De plus ce calcul paraît hors de portée d'un point de vue pratique, dans le cas général.

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 201, dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5)$ (à un facteur multiplicatif près).

4.6.7 Cas g* : $m = 3$

Le complexe associé est celui de Weyman :

$$0 \longrightarrow C^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1} = (S^1\mathbb{C}^6 \otimes \wedge^1\mathbb{C}^6) \oplus (S^3\mathbb{C}^6)^* \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 = A^0 \oplus B^0$$
$$= S^3\mathbb{C}^6 \oplus [(S^1\mathbb{C}^6)^* \otimes \wedge^5\mathbb{C}^6] \longrightarrow 0 \text{ (W) et } [\delta^{-1}] = \begin{bmatrix} [\delta_{11}^{-1}] & [\delta_{12}^{-1}] \\ 0 & [\delta_{22}^{-1}] \end{bmatrix}.$$

$\alpha(6,\, 2,\, 3) = 36$, $\beta(6,\, 2,\, 3) = 56$, $\gamma(6,\, 2,\, 3) = 56$, $\delta(6,\, 2,\, 3) = 36$.

On a bien $\gamma(6,\, 2,\, 3) + \delta(6,\, 2,\, 3) = \alpha(6,\, 2,\, 3) + \beta(6,\, 2,\, 3) = 92$.

$\diamond$ On exprime les 36 formes :
$x\, f_1,\, \ldots\, , v\, f_1,\, x\, f_2,\, \ldots\, , v\, f_2,\, x\, f_3,\, \ldots\, , v\, f_3,$
$x\, f_4,\, \ldots\, , v\, f_4,\, x\, f_5,\, \ldots\, , v\, f_5,\, x\, f_6,\, \ldots\, , v\, f_6$, sur la base, à 56 éléments, $\{x^3,\, \ldots\, , v^3\}$.

$\diamond$ On calcule les 56 quations $D_{300000},\, \ldots\, , D_{000003}$, sur la base, à 92 éléments, $\{x^3,\, \ldots\, , v^3,\, (1),\, \ldots\, , (36)\}$.

Toute la difficulté consiste à trouver les éléments $(1),\, \ldots\, , (36)$. De plus ce calcul paraît hors de portée d'un point de vue pratique, dans le cas général.

En cas de succès on obtient une matrice $[\delta^{-1}]$, d'ordre 92, dont le déterminant donne le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5,\, f_6)$ (à un facteur multiplicatif près).

5 Formule déterminentale de Cayley : résultant du complexe

On pourra consulter [9] [17] [24] [18].

Pour chaque $m > k\,(d-1)$ le résultant $R(f_1, \ldots, f_k)$ est égal au déterminant du complexe $C^\bullet(m\,;\, f_1, \ldots, f_k)$ [24] [19]. Le cas le plus "économique" est donc $m = k\,(d-1)+1$.

Dans le cas général le déterminant d'un complexe est un produit de rapports de déterminants. Nous allons expliquer cette notion sur quelques exemples ; elle n'a d'intérêt que lorsque le complexe comporte au moins 3 termes.

5.1 Cas b

Pour ce cas tel que $k = 2$ le cas le plus "économique" est donc $m = 2\,d-1$. Alors le complexe n'a que 2 termes et la notion de déterminant du complexe n'a aucun intérêt. Cependant cette notion a un intéret avec une valeur de m plus grande (cf. ci-après).

5.1.1 Cas b3

Alors $d = 3$ et le cas le plus "économique" $m = 5$ n'ayant aucun intérêt examinons le cas $m = 6$. Le complexe correspondant à été exposé précedemment ; il comporte 3 termes et est (K) (cf. Cas b3 $m = 6$). Les matrices $[\delta_{11}^{-1}]$ et $[\delta_{11}^{-2}]$, de dimensions respectives 7×8 et 8×1 sont telles que $[\delta_{11}^{-1}]\,[\delta_{11}^{-2}] = [0]$, de dimensions 7×1.

La matrice $[\delta_{11}^{-1}]$ est celle des coefficients des 8 formes
$x^3\,f_1$, $x^2\,y\,f_1$, $x\,y^2\,f_1$, $y^3\,f_1$, $x^3\,f_2$, $x^2\,y\,f_2$, $x\,y^2\,f_2$, $y^3\,f_2$ sur la base,
à 7 éléments, $\{x^6,\, x^5\,y,\, x^4\,y^2,\, x^3\,y^3,\, x^2\,y^4,\, x\,y^5,\, y^6\}$. On trouve :

$$[\delta_{11}^{-1}] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & b' & a' & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & c' & b' & a' & 0 \\ d & c & b & a & d' & c' & b' & a' \\ 0 & d & c & b & 0 & d' & c' & b' \\ 0 & 0 & d & c & 0 & 0 & d' & c' \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & d' \end{bmatrix}$$

17. article reproduit dans [24] pp. 498-502 Appendix B
18. pp. 428-430 § B : The Cayley determinantal formula
19. p. 428 Théorème 1.4

La matrice $[\delta_{11}^{-2}]$ est telle que :

$[\delta_{11}^{-2}]^T = \left[\begin{array}{cccccccc} a' & b' & c' & d' & -a & -b & -c & -d \end{array}\right]$.

Soit $\overline{[\delta_{11}^{-2}]}$ la sous-matrice, de dimensions 1×1, de la matrice $[\delta_{11}^{-2}]$ obtenue en choisissant la ligne non nulle i (il y en a toujours une) et $\overline{[\delta_{11}^{-1}]}$ la sous-matrice, de dimensions 7×7, de la matrice $[\delta_{11}^{-1}]$ obtenue en éliminant la colonne i ; alors

$R(f_1,\, f_2) = \pm \frac{\det \overline{[\delta_{11}^{-1}]}}{\det \overline{[\delta_{11}^{-2}]}}$.

5.2 Cas c

Pour ce cas tel que $k = 3$ le cas le plus "économique" est donc $m = 3\,d - 2$.

5.2.1 Cas c2

Alors $d = 2$ et le cas le plus "économique" $m = 4$. Le complexe correspondant à été exposé précedemment ; il comporte 3 termes et est (K) (cf. Cas c2 $m = 4$). Les matrices $[\delta_{11}^{-1}]$ et $[\delta_{11}^{-2}]$, de dimensions respectives 15×18 et 18×3 sont telles que $[\delta_{11}^{-1}]\,[\delta_{11}^{-2}] = [0]$, de dimensions 15×3. C'est exactement le cas traité par [9] et qui est reproduit dans [24] [20], toutefois avec des notations plus anciennes.

La matrice $[\delta_{11}^{-1}]$ est celle des coefficients des 18 formes
$x^2\, f_1,\, x\, y\, f_1,\, x\, z\, f_1,\, y^2\, f_1,\, y\, z\, f_1,\, z^2\, f_1,\, x^2\, f_2,\, x\, y\, f_2,\, x\, z\, f_2,\, y^2\, f_2,\, y\, z\, f_2,\, z^2\, f_2,$
$x^2\, f_3,\, x\, y\, f_3,\, x\, z\, f_3,\, y^2\, f_3,\, y\, z\, f_3,\, z^2\, f_3$ sur la base, à 15 éléments,
$\{x^4,\, x^3\, y,\, x^3\, z,\, x^2\, y^2,\, x^2\, y,\, x^2\, z^2,\, x\, y^3,\, x\, y^2\, z,\, x\, y\, z^2,\, x\, z^3,\, y^4,\, y^3\, z,\, y^2\, z^2,\, y\, z^3,\, z^4\}$.
On trouve :

20. pp. 498-502 Appendix B

$$[\delta_{11}^{-1}] = \begin{bmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b' & a' & 0 & 0 & 0 & 0 & b'' & a'' & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c' & 0 & a' & 0 & 0 & 0 & c'' & 0 & a'' & 0 & 0 & 0 \\
d & b & 0 & a & 0 & 0 & d' & b' & 0 & a' & 0 & 0 & d'' & b'' & 0 & a'' & 0 & 0 \\
e & c & b & 0 & a & 0 & e' & c' & b' & 0 & a' & 0 & e'' & c'' & b'' & 0 & a'' & 0 \\
f & 0 & c & 0 & 0 & a & f' & 0 & c' & 0 & 0 & a' & f'' & 0 & c'' & 0 & 0 & a'' \\
0 & d & 0 & b & 0 & 0 & 0 & d' & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & d'' & 0 & b'' & 0 & 0 \\
0 & e & d & c & b & 0 & 0 & e' & d' & c' & b' & 0 & 0 & e'' & d'' & c'' & b'' & 0 \\
0 & f & e & 0 & c & b & 0 & f' & e' & 0 & c' & b' & 0 & f'' & e'' & 0 & c'' & b'' \\
0 & 0 & f & 0 & 0 & c & 0 & 0 & f' & 0 & 0 & c' & 0 & 0 & f'' & 0 & 0 & c'' \\
0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d'' & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e & d & 0 & 0 & 0 & 0 & e' & d' & 0 & 0 & 0 & 0 & e'' & d'' & 0 \\
0 & 0 & 0 & f & e & d & 0 & 0 & 0 & f' & e' & d' & 0 & 0 & 0 & f'' & e'' & d'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & f & e & 0 & 0 & 0 & 0 & f' & e' & 0 & 0 & 0 & 0 & f'' & e'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f''
\end{bmatrix}.$$

La matrice $[\delta_{11}^{-2}]$ est telle que :

$$[\delta_{11}^{-2}]^T = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'' & b'' & c'' & d'' & e'' & f'' & -a' & -b' & -c' & -d' & -e' & -f' \\
-a'' & -b'' & -c'' & -d'' & -e'' & -f'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & d & e & f \\
a' & b' & c' & d' & e' & f' & -a & -b & -c & -d & -e & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Soit $\overline{[\delta_{11}^{-2}]}$ la sous-matrice, de dimensions 3×3, de la matrice $[\delta_{11}^{-2}]$ obtenue en choisissant les lignes i, j, k et $\overline{[\delta_{11}^{-1}]}$ la sous-matrice, de dimensions 15×15, de la matrice $[\delta_{11}^{-1}]$ obtenue en éliminant les colonnes i, j, k ; alors

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm \frac{\det \overline{[\delta_{11}^{-1}]}}{\det \overline{[\delta_{11}^{-2}]}}$.

5.3 Cas d

Pour ce cas tel que $k = 4$ le cas le plus "économique" est donc $m = 4\,d - 3$.

5.3.1 Cas d2

Alors $d = 2$ et le cas le plus "économique" $m = 5$. Le complexe correspondant à été exposé précedemment ; il comporte 3 termes et est (K) (cf. Cas d2 $m = 5$). Les matrices $[\delta_{11}^{-1}]$ et $[\delta_{11}^{-2}]$, de dimensions respectives 56×80 et 80×24 sont telles que $[\delta_{11}^{-1}]\,[\delta_{11}^{-2}] = [0]$, de dimensions 56×24.

La matrice $[\delta_{11}^{-1}]$ est celle des coefficients des 80 formes $\{x^3\, f_1,\, \ldots\, , t^3\, f_4\}$ sur la base, à 56 éléments, $\{x^5,\, \ldots\, , t^5\}$.

La matrice $[\delta_{11}^{-2}]$ est difficile à obtenir.

Soit $\overline{[\delta_{11}^{-2}]}$ la sous-matrice, de dimensions 24×24, de la matrice $[\delta_{11}^{-2}]$ obtenue en choisissant les lignes et les colonnes convenables ; alors

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \pm \frac{\det\, \overline{[\delta_{11}^{-1}]}}{\det\, \overline{[\delta_{11}^{-2}]}}$.

Attention : avec $m = 4$ il y a 3 termes dans le complexe (W) mais le résultant n'est pas le déterminant de ce complexe (même à un facteur multiplicatif près).

6 Cas où les degrés des formes ne sont pas tous égaux

Rappel : $R(f_1, \ldots, f_k)$ est une forme, donc un polynôme homogène, en les coefficients de chaque forme f_i, de degré $d_1 \ldots d_{i-1}\, d_{i+1} \ldots d_k$.

$R(f_1, \ldots, f_k)$ est une forme de degré total $D = \sum_{i=1}^{k} d_1 \ldots d_{i-1}\, d_{i+1} \ldots d_k$.

$t_k \triangleq \sum_{i=1}^{k}(d_i - 1)$ est le degré critique.

Fonction de Hilbert [14] [21]

La fonction de Hilbert $H_{(d_1, \ldots, d_k)}$ est définie par :

$\prod_{i=1}^{k} \frac{(1-X^{d_i})}{(1-X)^k} = \sum_{m=0}^{\infty} H_{(d_1, \ldots, d_k)}(m)\, X^m$.

Elle vérifie la propriété $H_{(d_1, \ldots, d_k)}(m) = H_{(d_1, \ldots, d_k)}(t_k - m)$ [14] [22].

Fonction i [14] [23]

La fonction i est telle que $i(m)$ est la dimension de l'espace vectoriel des éléments de degrés m dans l'idéal engendré par une suite régulière de k formes de degrés $d_1, \ldots, d_k$ [14] [24]. Elle est telle que :

$i(t_k - m) = C_{t_k - m + k - 1}^{k-1} - H_{(d_1, \ldots, d_k)}(t_k - m)$.

Fonction ρ [14] [25]

La fonction ρ est définie par :

$\rho(m) = C_{m+k-1}^{k-1} + i(t_k - m)$.

Elle vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$ [14] [26].

Méthode utilisant les bezoutiens

Un résultat général [14] [27]

Pour $k \geqslant 3$ et avec $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_k$ (ce qui est le cas général) le résultant $R(f_1, \ldots, f_k)$ peut s'exprimer sous forme d'un déterminant utilisant la notion de bezoutien (définie ci-après) ssi l'inegalité suivante est vérifiée :

21. p. 7 éq. (12)
22. p. 7 éq. (11)
23. p. 2
24. p. 2
25. p. 2 éq. (1)
26. p. 14
27. p. 21 Lemme 5.3

$d_3 + \ldots + d_k - k < d_1 + d_2 - 1$ [14] [28].

De plus ssi c'est le cas le résultant s'exprime sous forme d'un déterminant d'ordre $\rho(m)$, $\forall\ m$ tel que :

$d_3 + \ldots + d_k - k < m < d_1 + d_2$.

Si $d_3 + \ldots + d_k - k \geqslant d_1 + d_2 - 1$ le résultant ne peut pas s'exprimer sous la forme d'un déterminant utilisant la notion de bezoutien mais peut l'être parfois sous la forme d'un rapport de déterminants [14]. Nous en donnons plusieurs exemples ci-après.

Remarque 1 : lorsque les degrés des formes sont tous égaux on peut vérifier que l'on retrouve exactement les cas précédents ou m est le paramètre de torsion.

Remarque 2 : lorsque $d_1 = \ldots = d_{k-1} = 1 \leqslant d_k$ le résultant peut s'exprimer sous la forme d'un déterminant utilisant la notion de bezoutien ssi l'inégalité suivante est vérifiée :

$d_k - 1 < 1$ i.e. $d_k < 4$.

Ce n'est donc pas le cas lorsque $d_k \geqslant 4$. Cependant nous allons voir ci-après la méthode de Lang qui permet de calculer le résultant $\forall\ d_k$.

Notion de bezoutien (ou de forme de Morley) [1] [14] [28] [29] [34] [38] [51]

On va utiliser cette notion pour $k \geqslant 3$.

Soient les k-uples de nombres entiers positifs ou nuls $\gamma = (\gamma_1 \ldots \gamma_k)$ et $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_k)$. On pose $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_k$ et $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.

Soient $X \triangleq (x_1, \ldots, x_k)$ et $X' \triangleq (x'_1, \ldots, x'_k)$. Pour $i, j = 1, \ldots, k$ soient :

$\Delta_{ij}(X, X') \triangleq \frac{f_i(x'_1, \ldots, x'_{j-1}, x_j, \ldots, x_k) - f_i(x'_1, \ldots, x'_j, x_{j+1}, \ldots, x_k)}{x_j - x'_j}$.

Alors $f_i(X) - f_i(X') = \sum_{j=1}^{k} \Delta_{ij}(X, X')\,(x_j - x'_j)$.

Soit $\Delta(X, X') \triangleq \det\,(\Delta_{ij}(X, X'))_{1 \leqslant i, j \leqslant k} = \sum_{|\gamma| \leqslant t_k} \Delta_\gamma(X)\, X'^{\gamma}$
$= \sum_{|\lambda| \leqslant t_k} \Delta_\lambda(X')\, X^\lambda$.

On a pour $m = 0, \ldots, t_k$: $\sum_{|\gamma| = t_k - m} \Delta_\gamma(X)\, X'^{\gamma} = \sum_{|\lambda| = m} \Delta_\lambda(X')\, X^\lambda$ [14] [29].

28. p. 21 éq. (27)
29. p. 6

En particulier si $m = r \triangleq E(\frac{t_k}{2})$:

• si $t_k = 2\,r$ (i.e. si t_k est pair) :

$\sum_{|\gamma|=r} \Delta_\gamma(X)\, X'^{\gamma} = \sum_{|\lambda|=r} \Delta_\lambda(X')\, X^\lambda$ et

• si $t_k = 2\,r + 1$ (i.e. si t_k est impair) :

$\sum_{|\gamma|=r+1} \Delta_\gamma(X)\, X'^{\gamma} = \sum_{|\lambda|=r} \Delta_\lambda(X')\, X^\lambda$.

Définition des applications linéaires $\psi_{1,\,m}(X)$ et $\psi_{1,\,t_k-m}(X')$

Soient, pour $m = 0, \ldots, t_k$:

• $\underset{T_\gamma}{(S^{t_k-m}\,\mathbb{C}^k)^*} \overset{\psi_{1,\,m}(X)}{\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}} \underset{\Delta_\gamma(X)}{S^m\,\mathbb{C}^k}$ et soit $\Delta_m(X)$ la matrice de $\psi_{1,\,m}(X)$; elle est de dimensions $\frac{(m+k-1)!}{m!\,(k-1)!} \times \frac{(t_k-m+k-1)!}{(t_k-m)!\,(k-1)!}$ et :

• $\underset{T_\lambda}{(S^{m}\,\mathbb{C}^k)^*} \overset{\psi_{1,\,t_k-m}(X')}{\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}} \underset{\Delta_\lambda(X')}{S^{t_k-m}\,\mathbb{C}^k}$ et soit $\Delta_{t_k-m}(X')$ la matrice de $\psi_{1,\,t_k-m}(X')$; elle est de dimensions $\frac{(t_k-m+k-1)!}{(t_k-m)!\,(k-1)!} \times \frac{(m+k-1)!}{m!\,(k-1)!}$.

En particulier si $m = r = E(\frac{t_k}{2})$:

• si $t_k = 2\,r$ (i.e. si t_k est pair) :

◇ $\underset{T_\gamma}{(S^{r}\,\mathbb{C}^k)^*} \overset{\psi_{1,\,r}(X)}{\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}} \underset{\Delta_\gamma(X)}{S^r\,\mathbb{C}^k}$ et $\Delta_r(X)$ la matrice de $\psi_{1,\,r}(X)$ est carrée d'ordre $\frac{(r+k-1)!}{r!\,(k-1)!}$ et :

◇ $\underset{T_\lambda}{(S^{r}\,\mathbb{C}^k)^*} \overset{\psi_{1,\,r}(X')}{\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}} \underset{\Delta_\lambda(X)}{S^r\,\mathbb{C}^k}$ et $\Delta_r(X')$ la matrice de $\psi_{1,\,r}(X')$ est carrée d'ordre $\frac{(r+k-1)!}{r!\,(k-1)!}$. Et on a $\Delta_r(X') = \Delta_r^T(X)$.

• si $t_k = 2\,r + 1$ (i.e. si t_k est impair) :

◇ $\underset{T_\gamma}{(S^{r+1}\,\mathbb{C}^k)^*} \overset{\psi_{1,\,r}(X)}{\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}} \underset{\Delta_\gamma(X)}{S^r\,\mathbb{C}^k}$ et $\Delta_r(X)$ la matrice de $\psi_{1,\,r}(X)$ est de dimensions $\frac{(r+k-1)!}{r!\,(k-1)!} \times \frac{(r+1+k-1)!}{(r+1)!\,(k-1)!}$ et :

◇ $\underset{T_\lambda}{(S^{r}\,\mathbb{C}^k)^*} \overset{\psi_{1,\,r+1}(X')}{\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}} \underset{\Delta_\lambda(X')}{S^{r+1}\,\mathbb{C}^k}$ et $\Delta_{r+1}(X')$ la matrice de $\psi_{1,\,r+1}(X')$ est de dimensions $\frac{(r+1+k-1)!}{(r+1)!\,(k-1)!} \times \frac{(r+k-1)!}{r!\,(k-1)!}$. Et on a $\Delta_{r+1}(X') = \Delta_r^T(X)$.

Définition de $S^{m,j}$ et de l'application linéaire de Sylvester $\psi_{2,\,m}$ [14] [30]

30. pp. 6-8 § 2

Soient pour $m = 0, \ldots, t_k$ et $j = 1, \ldots, k$:

$S^{m,j} \triangleq \{X^\gamma, |\gamma| = m - d_j, \gamma_1 < d_1, \ldots, \gamma_{j-1} < d_{j-1}\} \subseteq S^{m-d_j}\,\mathbb{C}^k$. On a $S^{m,1} = S^{m-d_j}\,\mathbb{C}^k$ [14] [31].

Soit $\underset{g_1}{S^{m,1}} \oplus \underset{\ldots}{\ldots} \oplus \underset{g_k}{S^{m,k}} \overset{\psi_{2,m}}{\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}} \underset{\sum_{i=1}^k g_i f_i}{S^m\,\mathbb{C}^k}$ et soit D_m la matrice de $\psi_{2,m}$.

Définition de E_m sous-matrice carrée de D_m

Soient pour $m = 0, \ldots, t_k$ et $j = 1, \ldots, k$:

$E^{m,j} \triangleq \{X^\gamma \in S^{m,j}$, il existe $i \neq j : \gamma_i \geqslant d_i\} \subseteq S^{m,j}$. On a $E^{m,k} = \emptyset$ [14] [32].

Soit E_m la sous-matrice carrée de D_m dont les colonnes sont indexées par les monômes de $E^{m,1} \cup E^{m,2} \ldots \cup E^{m,k-1}$ et les lignes par les monômes X^γ de $S^m\,\mathbb{C}^k$ pour lesquels il existe 2 indices différents i et j tels que $\gamma_i \geqslant d_i$ et $\gamma_j \geqslant d_j$. Plusieurs exemples sont indiqués ci-après.

• Si $t_k = 2\,r$ soit D_r la matrice de $\psi_{2,r}$ et E_r la sous-matrice carrée de D_r ainsi définie,

• si $t_k = 2\,r + 1$ soient D_r la matrice de $\psi_{2,r}$ et E_r la sous-matrice carrée de D_r ainsi définie et D_{r+1} la matrice de $\psi_{2,r+1}$ et E_{r+1} la sous-matrice carrée de D_{r+1} ainsi définie.

Définition des matrices $M_r(X)$ et $M_r(X')$ si $t_k = 2\,r$ et $M_r(X)$ et $M_{r+1}(X')$ si $t_k = 2\,r + 1$

• Si $t_k = 2\,r$ soient :

$M_r(X) = \begin{bmatrix} \Delta_r(X) & D_r \\ D_r^T & 0 \end{bmatrix}$ et $M_r(X') = \begin{bmatrix} \Delta_r(X') & D_r \\ D_r^T & 0 \end{bmatrix}$, d'ordres $\rho(r)$.

Étant donné que $\Delta_r(X') = \Delta_r^T(X)$ on a $M_r(X') = M_r^T(X)$.

• Si $t_k = 2\,r + 1$ soient :

$M_r(X) = \begin{bmatrix} \Delta_r(X) & D_r \\ D_{r+1}^T & 0 \end{bmatrix}$ et $M_{r+1}(X') = \begin{bmatrix} \Delta_{r+1}(X') & D_{r+1} \\ D_r^T & 0 \end{bmatrix}$, d'ordres $\rho(r) = \rho(r+1)$.

Étant donné que $\Delta_{r+1}(X') = \Delta_r^T(X)$ on a $M_{r+1}(X') = M_r^T(X)$.

31. p. 6
32. p. 6

6.1 Cas de k formes à k variables telles que : $d_1 = \ldots = d_{k-1} = 1$ et d_k quelconque

On a $t_k = d_k - 1$, $D = (k-1)\, d_k + 1$.

6.1.1 Méthode de Lang

Cette méthode est proposée à titre d'exercice dans [48] et elle est exposée dans [37] [33].

On note :

$f_1 = a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + a_{1,3}\, x_3 + \ \ldots\ + a_{1,k-1}\, x_{k-1} + a_{1,k}\, x_k,$
$f_2 = a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + a_{2,3}\, x_3 + \ \ldots\ + a_{2,k-1}\, x_{k-1} + a_{2,k}\, x_k,$
$\vdots$
$f_{k-1} = a_{k-1,1}\, x_1 + a_{k-1,2}\, x_2 + a_{k-1,3}\, x_3 + \ \ldots\ + a_{k-1,k-1}\, x_{k-1} + a_{k-1,k}\, x_k,$
$f_k(x_1, \ldots, x_k)$ de degré d_k.

Soient les mineurs :

$$\Delta_1 = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,k} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots & a_{k-1,k} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = (-1)^{k-2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,3} & \ldots & a_{k-1,k} \end{vmatrix},$$

$\vdots$

$$\Delta_k = (-1)^{k-k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k-1} \end{vmatrix}.$$

Alors $R(f_1, \ldots, f_k) = f_k(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)$

Nous traitons en détails ci-après plusieurs cas selon le nombre k de variables et le degré d_k .

33. pp. 401-402 théorème 3.17

6.2 Cas de 2 formes

6.2.1 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 2$

On a $t_2 = 1$, $D = d_2 + d_1 = 3$.

On note :

$f_1 = a\,x + b\,y$,
$f_2 = a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2$.

$R(f_1,\, f_2)$ est de degré $d_2 = 2$ en les coefficients de f_1 et de degré $d_1 = 1$ en les coefficients de f_2.

Méthode de Lang

On trouve : $\Delta_1 = -b$, $\Delta_2 = a$ et $R(f_1,\, f_2) = f_2(-b,\, a) = a^2\,c' - a\,b\,b' + b^2\,a'$ [14] [34] [37] [35].

On remarque que ce résultant est invariant par les permutuations $a \leftrightarrow b$, $a' \leftrightarrow c'$, $b' \leftrightarrow b'$.

Autre méthode

Pour calculer le résultant $R(f_1,\, f_2)$, sans utiliser la méthode de Lang, il suffit d'exprimer les 3 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, f_2, de degrés 2, sur la base, à 3 éléments, $\{x^2,\, x\,y,\, y^2\}$. $R(f_1,\, f_2)$ est le déterminant des coefficients de ces formes sur cette base :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & a' \\ b & a & b' \\ 0 & b & c' \end{vmatrix}.$$

Pour information : fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X^2)}{(1-X)^2} = 1 + X$. Donc $H_{(1,\,2)}(0) = 1$, $H_{(1,\,2)}(1) = 1$ et $H_{(1,\,2)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 2$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Pour information : fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(1) = 1$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 2$, $\rho(1) = 2$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

34. p. 26
35. pp. 401-402 théorème 3.17

6.2.2 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 3$

On a $t_2 = 2$, $D = d_2 + d_1 = 4$.

On note :

$f_1 = a\,x + b\,y$,
$f_2 = a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3$.

$R(f_1,\, f_2)$ est de degré $d_2 = 3$ en les coefficients de f_1 et de degré $d_1 = 1$ en les coefficients de f_2.

Méthode de Lang

On trouve : $\Delta_1 = -b$, $\Delta_2 = a$ et
$R(f_1,\, f_2) = f_2(-b,\, a) = a^3\,d' - a^2\,b\,c' + a\,b^2\,b' - b^3\,a'$ [14] [36] [37] [37].

On remarque que ce résultant est invariant par les permutations $a \leftrightarrow b$, $a' \leftrightarrow d'$, $b' \leftrightarrow c'$.

Autre méthode

Pour calculer le résultant $R(f_1,\, f_2)$, sans utiliser la méthode de Lang, il suffit d'exprimer les 4 formes $x^2\,f_1$, $x\,y\,f_1$, $y^2\,f_1$, f_2, de degrés 3, sur la base, à 4 éléments, $\{x^3,\, x^2\,y,\, x\,y^2,\, y^3\}$. $R(f_1,\, f_2)$ est le déterminant des coefficients de ces formes sur cette base :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & a' \\ b & a & 0 & b' \\ 0 & b & a & c' \\ 0 & 0 & b & d' \end{vmatrix}.$$

Pour information : fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X^3)}{(1-X)^2} = 1+X+X^2$. Donc $H_{(1,\,3)}(0) = 1$, $H_{(1,\,3)}(1) = 1$, $H_{(1,\,3)}(2) = 1$ et $H_{(1,\,2)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 3$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Pour information : fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(2) = 2$, $i(1) = 1$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 3$, $\rho(1) = 3$, $\rho(2) = 3$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

36. p. 26
37. pp. 401-402 théorème 3.17

6.2.3 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 4$

On a $t_2 = 3$, $D = d_2 + d_1 = 5$.

On note :

$f_1 = a\,x + b\,y$,
$f_2 = a'\,x^4 + b'\,x^3\,y + c'\,x^2\,y^2 + d'\,x\,y^3 + e'\,y^4$.

$R(f_1,\, f_2)$ est de degré $d_2 = 4$ en les coefficients de f_1 et de degré $d_1 = 1$ en les coefficients de f_2.

Méthode de Lang

On trouve : $\Delta_1 = -b$, $\Delta_2 = a$ et
$R(f_1,\, f_2) = f_2(-b,\, a) = a^4\,e' - a^3\,b\,d' + a^2\,b^2\,c' - a\,b^3\,b' + b^4\,a'$ [14] [38] [37] [39].

On remarque que ce résultant est invariant par les permutations $a \leftrightarrow b$, $a' \leftrightarrow e'$, $b' \leftrightarrow d'$, $c' \leftrightarrow c'$.

Autre méthode

Pour calculer le résultant $R(f_1,\, f_2)$, sans utiliser la méthode de Lang, il suffit d'exprimer les 5 formes $x^3\,f_1$, $x^2\,y\,f_1$, $x\,y^2\,f_1$, $y^3\,f_1$, f_2, de degrés 4, sur la base, à 5 éléments, $\{x^4,\, x^3\,y,\, x^2\,y^2,\, x\,y^3,\, y^4\}$. $R(f_1,\, f_2)$ est le déterminant des coefficients de ces formes sur cette base :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a' \\ b & a & 0 & 0 & b' \\ 0 & b & a & 0 & c' \\ 0 & 0 & b & a & d' \\ 0 & 0 & 0 & b & e' \end{vmatrix}.$$

Pour information : fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X^4)}{(1-X)^2} = 1 + X + X^2 + X^3$. Donc $H_{(1,\,4)}(0) = 1$, $H_{(1,\,4)}(1) = 1$, $H_{(1,\,4)}(2) = 1$, $H_{(1,\,4)}(3) = 1$ et $H_{(1,\,2)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 4$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Pour information : fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(3) = 3$, $i(2) = 2$, $i(1) = 1$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 4$, $\rho(1) = 4$, $\rho(2) = 4$, $\rho(3) = 4$. On vérifie la propriété
$\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

38. p. 26
39. pp. 401-402 théorème 3.17

6.2.4 Cas pour lequel $d_1 = 2$, $d_2 = 3$

On a $t_2 = 3$, $D = d_2 + d_1 = 5$.

On note :

$f_1 = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$,
$f_2 = a'\,x^3 + b'\,x^2\,y + c'\,x\,y^2 + d'\,y^3$.

$R(f_1,\, f_2)$ est de degré $d_2 = 3$ en les coefficients de f_1 et de degré $d_1 = 2$ en les coefficients de f_2.

Méthode de calcul du résultant

Pour calculer le résultant $R(f_1,\, f_2)$ il suffit d'exprimer les 5 formes $x^2\,f_1$, $x\,y\,f_1$, $y^2\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$, de degrés 4, sur la base, à 5 éléments, $\{x^4,\, x^3\,y,\, x^2\,y^2,\, x\,y^3,\, y^4\}$. $R(f_1,\, f_2)$ est le déterminant des coefficients de ces formes sur cette base :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & a' & 0 \\ b & a & 0 & b' & a' \\ c & b & a & c' & b' \\ 0 & c & b & d' & c' \\ 0 & 0 & c & 0 & d' \end{vmatrix}$$

$= a^3\,d'^2 - a^2\,b\,c'\,d' + a^2\,c\,(c'^2 - 2\,b'\,d') + a\,b^2\,b'\,d'$
$+\, a\;c\,(3\;a'\,d' - b'\,c') + a\,c^2\,(b'^2 - 2\,a'\,c') - b^3\,a'\,d' - b^2\,c\,a'\,c' - b\,c^2\,a'\,b' + c^3\,a'^2$.

On remarque que ce résultant est invariant par les permutations $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow b$, $a' \leftrightarrow d'$, $b' \leftrightarrow c'$.

Pour information : fonction de Hilbert

$\frac{(1-X^2)\,(1-X^3)}{(1-X)^2} = 1 + 2\,X + 2\,X^2 + X^3$. Donc $H_{(2,\,3)}(0) = 1$, $H_{(2,\,3)}(1) = 2$, $H_{(2,\,3)}(2) = 2$, $H_{(2,\,3)}(3) = 1$, et $H_{(2,\,3)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 4$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Pour information : fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(3) = 3$, $i(2) = 1$, $i(1) = 0$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 4$, $\rho(1) = 3$, $\rho(2) = 3$, $\rho(3) = 4$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

6.2.5 Cas pour lequel $d_1 = 2$, $d_2 = 4$

On a $t_2 = 4$, $D = d_2 + d_1 = 6$.

On note :

$f_1 = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$,
$f_2 = a'\,x^4 + b'\,x^3\,y + c'\,x^2\,y^2 + d'\,x\,y^3 + e'\,y^4$.

$R(f_1,\, f_2)$ est de degré $d_2 = 4$ en les coefficients de f_1 et de degré $d_1 = 2$ en les coefficients de f_2.

Méthode de calcul du résultant

Pour calculer le résultant $R(f_1,\, f_2)$ il suffit d'exprimer les 6 formes $x^3\,f_1$, $x^2\,y\,f_1$, $x\,y^2\,f_1$, $y^3\,f_1$, $x\,f_2$, $y\,f_2$, de degrés 5, sur la base, à 6 éléments, $\{x^5,\, x^4\,y,\, x^3\,y^2,\, x^2\,y^3,\, x\,y^4,\, y^5\}$. $R(f_1,\, f_2)$ est le déterminant des coefficients de ces formes sur cette base :

$$R(f_1,\, f_2) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a' & 0 \\ b & a & 0 & 0 & b' & a' \\ c & b & a & 0 & c' & b' \\ 0 & c & b & a & d' & c' \\ 0 & 0 & c & b & e' & d' \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & e' \end{vmatrix}$$

$$= a^4\,e'^2 - a^3\,b\,d'\,e' + a^3\,c\,(d'^2 - 2\,c'\,e') + a^2\,b^2\,c'\,e' + a^2\,b\,c\,(3\,b'e' - c'd')$$
$$+ a^2\,c^2\,(c'^2 - 2\,b'\,d' + 2\,a'\,e') - a\,b^3\,b'\,e'$$
$$+ a\,b^2\,c\,(b'\,d' - 4\,a'\,e') + a\,b\,c^2\,(3\,a'\,d' - b'\,c')$$
$$+ a\,c^3\,(b'^2 - 2\,a'\,c') + b^4\,a'\,e' - b^3\,c\,a'\,d' + b^2\,c^2\,a'\,c' - b\,c^3\,a'\,b' + c^4\,a'^2.$$

On remarque que ce résultant est invariant par les permutations $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow b$, $a' \leftrightarrow e'$ $b' \leftrightarrow d'$, $c' \leftrightarrow c'$.

Pour information : fonction de Hilbert

$\frac{(1-X^2)\,(1-X^4)}{(1-X)^2} = 1 + 2\,X + 2\,X^2 + 2\,X^3 + X^4$. Donc $H_{(2,\,4)}(0) = 1$, $H_{(2,\,4)}(1) = 2$, $H_{(2,\,4)}(2) = 2$, $H_{(2,\,4)}(3) = 2$, $H_{(2,\,4)}(4) = 1$ et $H_{(2,\,4)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 5$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Pour information : fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(4) = 4$, $i(3) = 2$, $i(2) = 1$, $i(1) = 0$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 5$, $\rho(1) = 4$, $\rho(2) = 4$, $\rho(3) = 4$, $\rho(4) = 5$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

6.2.6 etc.

6.3 Cas de 3 formes

Donc $k = 3$. Ssi $d_1 = d_2 = 1$ et d_3 quelconque on peut utiliser la méthode de Lang [37]. Sinon on va utiliser soit la méthode de Macaulay [39] [45] (cf. ci-après) qui exprime le résultant comme un rapport de 2 déterminants soit la méthode utilisant les bezoutiens [34] [14] (cf. ci-devant), plus simple, qui exprime le résultant sous forme d'un déterminant ou d'un rapport de déterminants.

Méthode de Macaulay [39] [45]

On associe une variable à une forme ; par exemple (le plus simple et ce que nous allons faire) : x à f_1, y à f_2 et z à f_3.

On définit les puissances des variables grandes ou petites : x^i est grande (G) ssi $i \geqslant d_1$; sinon elle est petite (P), y^j est grande (G) ssi $j \geqslant d_2$; sinon elle est petite (P), z^k est grande (G) ssi $k \geqslant d_3$; sinon elle est petite (P).

Pour chaque monôme, en x, y, z, d'une base la variable *marquée* est la première qui apparaît avec (G).

À chaque monôme on associe une forme égale au produit de ce monôme par la forme associée a la variable *marquée* et divisé par cette variable *marquée* élevée au degré de la forme associée.

Un monôme est dit *réduit* ssi une seule de ses variables est (G).

Une premiere matrice carrée A, d'ordre $\frac{(t_3+3)\,(t_2+2)}{2}$, exprime les coefficients des formes obtenues sur la base considérée.

Une seconde matrice carrée B, sous-matrice de la matrice A, d'ordre $\frac{(t_3+3)\,(t_2+2)}{2} - D$, exprime les formes qui correspondent à un monôme *non réduit* sur le sous-ensemble constitué des monômes *non réduits*.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm \frac{\det A}{\det B}$.

Divers exemples sont donnés qui correspondent aux cas traités ci-après.

6.3.1 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$

On a $t_3 = 1$, $D = d_2\, d_3 + d_1\, d_3 + d_1\, d_2 = 5$. $r = E(\frac{t_3}{2}) = 0$.

On note :

$f_1 = a\, x + b\, y + c\, z,$
$f_2 = a^{'}\, x + b^{'}\, y + c^{'}\, z,$
$f_3 = a^{''}\, x^2 + b^{''}\, x\, y + c^{''}\, x\, z + d^{''}\, y^2 + e^{''}\, y\, z + f^{''}\, z^2.$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est de degré $d_2\, d_3 = 2$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\, d_3 = 2$ en les coefficients de f_2 et de degré $d_1\, d_2 = 1$ en les coefficients de f_3.

Méthode de Lang

On trouve : $\Delta_1 = b\,c' - c\,b'$, $\Delta_2 = c\,a' - a\,c'$, $\Delta_3 = a\,b' - b\,a'$ et
$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = f_3(b\,c' - c\,b',\, c\,a' - a\,c',\, a\,b' - b\,a')$
$= (b\,c' - c\,b')^2\, a'' + (b\,c' - c\,b')\,(c\,a' - a\,c')\, b'' + (a\,b' - b\,a')\,(b\,c' - c\,b')\, c''$
$+ (c\,a' - a\,c')^2\, d'' + (c\,a' - a\,c')\,(a\,b' - b\,a')\, e'' + (a\,b' - b\,a')^2\, f''$ [37] [40].

On remarque que ce résultant est invariant par les permutations
$a \to b \to c \to a$, $a' \to b' \to c' \to a'$, $a'' \to d'' \to f'' \to a''$, $b'' \to e'' \to c'' \to b''$.

Méthode de Macaulay

ligne	monôme	x	y	z	réduit ?	var. *marquée*	forme associée
1	x^2	G	P	P	oui	x	$\frac{x^2 f_1}{x} = x\, f_1$
2	$x\,y$	G	G	P	non	x	$\frac{x\,y\, f_1}{x} = y\, f_1$
3	$x\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x\,z\, f_1}{x} = z\, f_1$
4	y^2	P	G	P	oui	y	$\frac{y^2 f_2}{y} = y\, f_2$
5	$y\,z$	P	G	P	oui	y	$\frac{y\,z\, f_2}{y} = z\, f_2$
6	y^2	P	P	G	oui	z	$\frac{z^2 f_3}{z^2} = f_3$

La matrice A est celle des coefficients des 6 formes $x\, f_1$, $y\, f_1$, $z\, f_1$, $y\, f_2$, $z\, f_2$, f_3 sur la base, à 6 éléments, $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, y^2,\, y\,z,\, z^2\}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & a'' \\ b & a & 0 & a' & 0 & b'' \\ c & 0 & a & 0 & a' & c'' \\ 0 & b & 0 & b' & 0 & d'' \\ 0 & c & b & c' & b' & e'' \\ 0 & 0 & c & 0 & c' & f'' \end{bmatrix}.$$

La matrice B est la sous-matrice, d'ordre 1, de la matrice A constituée de la ligne $x\,y$ et de la colonne $y\, f_1$:

$B = (a)$. Soit det $B = a$.

En développant det A selon la dernière colonne on trouve, bien évidemment le même résultant qu'avec la méthode proposée par [37] en utilisant $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = -\frac{\det A}{\det B}$.

40. pp. 401-402 théorème 3.17

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 - 3 = -1 < d_1 + d_2 - 1 = 1$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3 - 3 = -1 < m < d_1 + d_2 = 2$ i.e. pour $m = 0,\, 1$.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X)\,(1-X^2)}{(1-X)^3} = 1 + X$. Donc $H_{(1,\,1,\,2)}(0) = 1$, $H_{(1,\,1,\,2)}(1) = 1$ et $H_{(1,\,1,\,2)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 2$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(1) = 2$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 3$, $\rho(1) = 3$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X') = a$, $\Delta_{12}(X,\, X') = b$, $\Delta_{13}(X,\, X') = c$,

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'$, $\Delta_{22}(X,\, X') = b'$, $\Delta_{23}(X,\, X') = c'$,

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''\,(x + x') + b''\,y + c''\,z$,
$\Delta_{32}(X,\, X') = b''\,x' + d''\,(y + y') + e''\,z$,
$\Delta_{33}(X,\, X') = c''\,x' + e''\,y' + f''\,(z + z')$.

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a''\,(x+x') + b''\,y + c''\,z & b''\,x' + d''\,(y+y') + e''\,z & c''\,x' + e''\,y' + f''\,(z+z') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X) + [\Delta^{000}_{100}(X)\,x' + \Delta^{000}_{010}(X)\,y' + \Delta^{000}_{001}(X)\,z']$, avec :

$\Delta_{000}(X)$ de degré 1, $\Delta^{000}_{100}(X)$, $\Delta^{000}_{010}(X)$, $\Delta^{000}_{001}(X)$ de degrés 0 (donc constants). On a :

$\Delta^{000}_{100}(X) = (b\,c' - c\,b')\,a'' - (a\,c' - c\,a')\,b'' + (a\,b' - b\,a')\,c''$,
$\Delta^{000}_{010}(X) = -(a\,c' - c\,a')\,d'' + (a\,b' - b\,a')\,e''$,
$\Delta^{000}_{001}(X) = (a\,b' - b\,a')\,f''$.

Soit $\Delta_0(X)$ la matrice, de dimensions 1×3 :

$\Delta_0(X) = \left[\ \Delta^{000}_{100}(X) \quad \Delta^{000}_{010}(X) \quad \Delta^{000}_{001}(X)\ \right]$.

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X') + [\Delta^{000}_{100}(X')\, x + \Delta^{000}_{010}(X')\, y + \Delta^{000}_{001}(X')\, z]$, avec :

$\Delta_{000}(X')$ de degré 1, $\Delta^{000}_{100}(X')$, $\Delta^{000}_{010}(X')$, $\Delta^{000}_{001}(X')$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$\Delta_{000}(X') = \Delta^{100}_{000}(X')\, x' + \Delta^{010}_{000}(X')\, y' + \Delta^{001}_{000}(X')\, z'$. On a :

$\Delta^{100}_{000}(X') = (b\, c' - c\, b')\, a'' - (a\, c' - c\, a')\, b'' + (a\, b' - b\, a')\, c'' = \Delta^{000}_{100}(X)$,
$\Delta^{010}_{000}(X') = -(a\, c' - c\, a')\, d'' + (a\, b' - b\, a')\, e'' = \Delta^{000}_{010}(X)$,
$\Delta^{001}_{000}(X') = (a\, b' - b\, a')\, f'' = \Delta^{000}_{001}(X)$.

Soit $\Delta_1(X')$ la matrice, de dimensions 3×1 : $\Delta_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta^{100}_{000}(X') \\ \Delta^{010}_{000}(X') \\ \Delta^{001}_{000}(X') \end{bmatrix}$.
Elle est telle que $\Delta_1(X') = \Delta^T_0(X)$.

On a $S^{0,\,1} = \emptyset$ et dim $S^{0,\,1} = 0$, $S^{0,\,2} = \emptyset$ et dim $S^{0,\,2} = 0$, $S^{0,\,3} = \emptyset$ et dim $S^{0,\,3} = 0$. Par conséquent D_0, la matrice de $\psi_{2,\,0}$, n'existe pas.

On a $S^{1,\,1} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,1} = 1$, $S^{1,\,2} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,2} = 1$, $S^{1,\,3} = \emptyset$ et dim $S^{1,\,3} = 0$.

D_1, la matrice de $\psi_{2,\,1}$, est alors la matrice, de dimensions 3×2, des coefficients des 2 formes f_1, f_2, de degrés 1, sur la base, à 3 éléments, $\{x,\, y,\, z\}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_0(X)$, d'ordre 3, est telle que :

$$M_0(X) = \begin{bmatrix} \Delta_0(X) \\ D^T_1 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1(X')$, d'ordre 3, est telle que :

$M_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta_1(X') & D_1 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_1(X') = M^T_0(X)$.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm$ det $M_0(X) = \pm$ det $M_1(X')$.

6.3.2 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 2$

On a $t_3 = 2$, $D = d_2\, d_3 + d_1\, d_3 + d_1\, d_2 = 8$. $r = E(\frac{t_3}{2}) = 1$.

On note :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z,$
$f_2 = a^{'}\,x^2 + b^{'}\,x\,y + c^{'}\,x\,z + d^{'}\,y^2 + e^{'}\,y\,z + f^{'}\,z^2,$
$f_3 = a^{''}\,x^2 + b^{''}\,x\,y + c^{''}\,x\,z + d^{''}\,y^2 + e^{''}\,y\,z + f^{''}\,z^2.$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est de degré $d_2\,d_3 = 4$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\,d_3 = 2$ en les coefficients de f_2 et de degré $d_1\,d_2 = 2$ en les coefficients de f_3.

Méthode de Macaulay

ligne	monôme	x	y	z	réduit ?	var. marquée	forme
1	x^3	G	P	P	oui	x	$\frac{x^3\,f_1}{x} = x^2\,f_1$
2	$x^2\,y$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^2\,y\,f_1}{x} = x\,y\,f_1$
3	$x^2\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^2\,z\,f_1}{x} = x\,z\,f_1$
4	$x\,y^2$	G	G	P	non	x	$\frac{x\,y^2\,f_1}{x} = y^2\,f_1$
5	$x\,y\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x\,y\,z\,f_1}{x} = y\,z\,f_1$
6	$x\,z^2$	G	P	G	non	x	$\frac{x\,z^2\,f_1}{x} = z^2\,f_1$
7	y^3	P	G	P	oui	y	$\frac{y^3\,f_3}{y^2} = y\,f_2$
8	$y^2\,z$	P	G	P	oui	y	$\frac{y^2\,z\,f_2}{y^2} = z\,f_2$
9	$y\,z^2$	P	P	G	oui	z	$\frac{y\,z^2\,f_3}{z^2} = y\,f_3$
10	z^3	P	P	G	oui	z	$\frac{z^3\,f_3}{z^2} = z\,f_3$

La matrice A est celle des coefficients des 10 formes
$x^2\,f_1,\, x\,y\,f_1,\, x\,z\,f_1,\, y^2\,f_1,\, y\,z\,f_1,\, z^2\,f_1,\, y\,f_2,\, z\,f_2,\, y\,f_3,\, z\,f_3$ sur la base,
à 10 éléments, $\{x^3,\, x^2\,y,\, x^2\,z,\, x\,y^2,\, x\,y\,z,\, x\,z^2,\, y^3,\, y^2\,z,\, y\,z^2,\, z^3\}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{'} & 0 & a^{''} & 0 \\ c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{'} & 0 & a^{''} \\ 0 & b & 0 & a & 0 & 0 & b^{'} & 0 & b^{''} & 0 \\ 0 & c & b & 0 & a & 0 & c^{'} & b^{'} & c^{''} & b^{''} \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & a & 0 & c^{'} & 0 & c^{''} \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & d^{'} & 0 & d^{''} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & e^{'} & d^{'} & e^{''} & d^{''} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & f^{'} & e^{'} & f^{''} & e^{''} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & f^{'} & 0 & f^{''} \end{bmatrix}.$$

Soit $\det A = a^6\,d^{'2}\,f^{''2} + \ldots$.

La matrice B est la sous-matrice, d'ordre 2, de la matrice A constituée des lignes $x\,y^2$, $x\,z^2$ et des colonnes $y^2\,f_1$, $z^2\,f_1$:

$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Soit det $B = a^2$. Alors :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \frac{\det A}{\det B} = \frac{1}{a^2} \det A = \frac{1}{a^2}\,(a^6\, d'^2\, f''^2 + \ldots) = a^4\, d'^2\, f''^2 + \ldots$, de degré 8. $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ possède, dans le cas général, 234 monômes.

Autre méthode proposée

$\diamond$ On élimine une variable (ou plutôt un multiple de cette variable) grâce à l'équation $f_1 = 0$; par exemple $c\,z = -(a\,x + b\,y)$.

$\diamond$ On reporte ce multiple d'une variable dans les 2 autres équations (ou plutôt dans des multiples de ces équations) ; par exemple dans les 2 équations $c^2\, f_2 = 0$ et $c^2\, f_3 = 0$. On obtient :

$c^2\, f_2 = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2$ et
$c^2\, f_3 = A'\,x^2 + B'\,x\,y + C'\,y^2$; avec :

$A = c^2\, a' - a\,c\,c' + a^2\, f'$ et $A' = c^2\, a'' - a\,c\,c'' + a^2\, f''$,
$B = c^2\, b' - b\,c\,c' - a\,c\,e' + 2\,a\,b\,f'$ et $B' = c^2\, b'' - b\,c\,c'' - a\,c\,e'' + 2\,a\,b\,f''$,
$C = c^2\, d' - b\,c\,e' + b^2\, f'$ et $C' = c^2\, d'' - b\,c\,e'' + b^2\, f''$

On est alors ramené au cas b2, mais il faut diviser le résultant fourni par c^4, du fait de l'utilisation des multiples précédents. Finalement on obtient :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = -\frac{1}{c^4}\,[(A\,C' - C\,A')^2 - (A\,B' - B\,A')\,(B\,C' - C\,B')]$.

Le calcul peut s'effectuer grâce à un logiciel de calcul formel (par exemple Maple). Il confirme l'intervention de 234 monômes.

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 - 3 = -1 < d_1 + d_2 - 1 = 2$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3 - 3 = -1 < m < d_1 + d_2 = 3$ i.e. pour $m = 0,\, 1,\, 2$. $m = 1$ sera la valeur la plus intéressante.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X^2)\,(1-X^2)}{(1-X)^3} = 1 + 2\,X + X^2$. Donc $H_{(1,\,2,\,2)}(0) = 1$, $H_{(1,\,2,\,2)}(1) = 2$, $H_{(1,\,2,\,2)}(2) = 1$ et $H_{(1,\,2,\,2)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 3$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(2) = 5$, $i(1) = 1$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 6$, $\rho(1) = 4$, $\rho(2) = 6$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X') = a,\ \Delta_{12}(X,\, X') = b,\ \Delta_{13}(X,\, X') = c,$

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'\,(x + x') + b'\,y + c'\,z,$
$\Delta_{22}(X,\, X') = b'\,x' + d'\,(y + y') + e'\,z,$
$\Delta_{23}(X,\, X') = c'\,x' + e'\,y' + f'\,(z + z').$

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''\,(x + x') + b''\,y + c''\,z,$
$\Delta_{32}(X,\, X') = b''\,x' + d''\,(y + y') + e''\,z,$
$\Delta_{33}(X,\, X') = c''\,x' + e''\,y' + f''\,(z + z').$

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'\,(x+x') + b'\,y + c'\,z & b'\,x' + d'\,(y+y') + e'\,z & c'\,x' + e'\,y' + f'\,(z+z') \\ a''\,(x+x') + b''\,y + c''\,z & b''\,x' + d''\,(y+y') + e''\,z & c''\,x' + e''\,y' + f''\,(z+z') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X) + [\Delta_{100}(X)\,x' + \Delta_{010}(X)\,y' + \Delta_{001}(X)\,z']$
$+ [\Delta^{000}_{200}(X)\,x'^2 + \Delta^{000}_{110}(X)\,x'\,y' + \Delta^{000}_{101}(X)\,x'\,z' + \Delta^{000}_{020}(X)\,y'^2 + \Delta^{000}_{011}(X)\,y'\,z'$
$+ \Delta^{000}_{002}(X)\,z'^2]$.

$\Delta_{000}(X)$ de degré 2, $\Delta_{100}(X), \Delta_{010}(X), \Delta_{001}(X)$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{200}(X),\, \ldots\, , \Delta^{000}_{002}(X)$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$\Delta_{100}(X) = \Delta^{100}_{100}(X)\,x + \Delta^{010}_{100}(X)\,y + \Delta^{001}_{100}(X)\,z$
$\Delta_{010}(X) = \Delta^{100}_{010}(X)\,x + \Delta^{010}_{010}(X)\,y + \Delta^{001}_{010}(X)\,z$
$\Delta_{001}(X) = \Delta^{100}_{001}(X)\,x + \Delta^{010}_{001}(X)\,y + \Delta^{001}_{001}(X)\,z$

On a alors :

$\Delta^{100}_{100}(X) = (b\,c' - c\,b')\,a'' + c\,a'\,b'' - b\,a'\,c''$
$\Delta^{010}_{100}(X) = -c\,d'\,a'' + b\,c'\,b'' + (a\,d' - b\,b')\,c'' - (a\,c' - c\,a')\,d''$
$\Delta^{001}_{100}(X) = (b\,f' - c\,e')\,a'' - (a\,f' - c\,c')\,b'' + (a\,e' - c\,b')\,c'' - (a\,c' - c\,a')\,e''$
$+ (a\,b' - b\,a')\,f''$

$\Delta^{100}_{010}(X) = (b\,e' - c\,d')\,a'' + c\,a'\,d'' - b\,a'\,e''$
$\Delta^{010}_{010}(X) = (b\,e' - c\,d')\,b'' + (c\,b' - a\,e')\,d'' + (a\,d' - b\,b')\,e''$
$\Delta^{001}_{010}(X) = (b\,e' - c\,d')\,c'' - (a\,f' - c\,c')\,d'' - b\,c'\,e'' + a\,d'\,f''$

$\Delta^{100}_{001}(X) = b\,f'\,a'' - b\,a'\,f''$
$\Delta^{010}_{001}(X) = b\,f'\,b'' - a\,f'\,d'' + (a\,d' - b\,b')\,f''$
$\Delta^{001}_{001}(X) = b\,f'\,c'' - a\,f'\,e'' + (a\,e' - b\,c')\,f''$

Soit $\Delta_1(X)$ la matrice d'ordre 3 :

$$\Delta_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta^{100}_{100}(X) & \Delta^{100}_{010}(X) & \Delta^{100}_{001}(X) \\ \Delta^{010}_{100}(X) & \Delta^{010}_{010}(X) & \Delta^{010}_{001}(X) \\ \Delta^{001}_{100}(X) & \Delta^{001}_{010}(X) & \Delta^{001}_{001}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X') + [\Delta_{100}(X')\, x + \Delta_{010}(X')\, y + \Delta_{001}(X')\, z]$
$+ [\Delta^{000}_{200}(X')\, x^2 + \Delta^{000}_{110}(X')\, x\, y + \Delta^{000}_{101}(X')\, x\, z + \Delta^{000}_{020}(X')\, y^2 + \Delta^{000}_{011}(X')\, y\, z$
$+ \Delta^{000}_{002}(X')\, z^2]$.

$\Delta_{000}(X')$ de degré 2, $\Delta_{100}(X'), \Delta_{010}(X'), \Delta_{001}(X')$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{200}(X'), \ldots, \Delta^{000}_{002}(X')$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\Delta_{100}(X') = \Delta^{100}_{100}(X')\, x' + \Delta^{010}_{100}(X')\, y' + \Delta^{001}_{100}(X')\, z'$$
$$\Delta_{010}(X') = \Delta^{100}_{010}(X')\, x' + \Delta^{010}_{010}(X')\, y' + \Delta^{001}_{010}(X')\, z'$$
$$\Delta_{001}(X') = \Delta^{100}_{001}(X')\, x' + \Delta^{010}_{001}(X')\, y' + \Delta^{001}_{001}(X')\, z'$$

On a alors :

$$\Delta^{100}_{100}(X') = (b\, c' - c\, b')\, a'' + c\, a'\, b'' - b\, a'\, c'' = \Delta^{100}_{100}(X)$$
$$\Delta^{100}_{010}(X') = -c\, d'\, a'' + b\, c'\, b'' + (a\, d' - b\, b')\, c'' - (a\, c' - c\, a')\, d'' = \Delta^{010}_{100}(X)$$
$$\Delta^{100}_{001}(X') = (b\, f' - c\, e')\, a'' - (a\, f' - c\, c')\, b'' + (a\, e' - c\, b')\, c'' - (a\, c' - c\, a')\, e''$$
$$+ (a\, b' - b\, a')\, f'' = \Delta^{001}_{100}(X)$$

$$\Delta^{010}_{100}(X') = (b\, e' - c\, d')\, a'' + c\, a'\, d'' - b\, a'\, e'' = \Delta^{100}_{010}(X)$$
$$\Delta^{010}_{010}(X') = (b\, e' - c\, d')\, b'' + (c\, b' - a\, e')\, d'' + (a\, d' - b\, b')\, e'' = \Delta^{010}_{010}(X)$$
$$\Delta^{010}_{001}(X') = (b\, e' - c\, d')\, c'' - (a\, f' - c\, c')\, d'' - b\, c'\, e'' + a\, d'\, f'' = \Delta^{001}_{010}(X)$$

$$\Delta^{001}_{100}(X') = b\, f'\, a'' - b\, a'\, f'' = \Delta^{100}_{001}(X)$$
$$\Delta^{001}_{010}(X') = b\, f'\, b'' - a\, f'\, d'' + (a\, d' - b\, b')\, f'' = \Delta^{010}_{001}(X)$$
$$\Delta^{001}_{001}(X') = b\, f'\, c'' - a\, f'\, e'' + (a\, e' - b\, c')\, f'' = \Delta^{001}_{001}(X)$$

Soit $\Delta_1(X')$ la matrice d'ordre 3 :

$$\Delta_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta^{100}_{100}(X') & \Delta^{100}_{010}(X') & \Delta^{100}_{001}(X') \\ \Delta^{010}_{100}(X') & \Delta^{010}_{010}(X') & \Delta^{010}_{001}(X') \\ \Delta^{001}_{100}(X') & \Delta^{001}_{010}(X') & \Delta^{001}_{001}(X') \end{bmatrix}. \text{ Et on a } \Delta_1(X') = \Delta_1^T(X).$$

On a $S^{1,\,1} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,1} = 1$, $S^{1,\,2} = \emptyset$ et dim $S^{1,\,2} = 0$, $S^{1,\,3} = \emptyset$ et dim $S^{1,\,3} = 0$.

D_1, la matrice de $\psi_{2,\,1}$, est alors la matrice, de dimensions 3×1, des coefficients de la forme f_1, de degré 1, sur la base, à 3 éléments, $\{x,\, y,\, z\}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1(X)$, d'ordre 4, est telle que :

$$M_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta_1(X) & D_1 \\ D_1^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1(X')$, d'ordre 4, est telle que :

$M_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta_1(X') & D_1 \\ D_1^T & 0 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_1(X') = M_1^T(X)$.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm \det M_1(X) = \pm \det M_1(X')$.

Exemple 1 :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z$,
$f_2 = a^{'}\,x^2 + f^{'}\,z^2$,
$f_3 = d^{''}\,y^2 + f^{''}\,z^2$. On obtient :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm\,[c^4\,a^{'2}\,d^{''2} + 2\,c^2\,a^{'}\,d^{''}\,(a^2\,f^{'}\,d^{''} + b^2\,a^{'}\,f^{''}) + (a^2\,f^{'}\,d^{''} - b^2\,a^{'}\,f^{''})^2]$.

On remarque que ce résultant est invariant par les permutations $a \leftrightarrow b$, $a' \leftrightarrow d''$, $f' \leftrightarrow f''$.

Exemple 2 :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z$,
$f_2 = a^{'}\,x^2 + e^{'}\,y\,z$,
$f_3 = c^{''}\,x\,z + d^{''}\,y^2$. On obtient :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm\,c\,[c^3\,a^{'2}\,d^{''2} - 3\,a\,b\,c\,a^{'}\,e^{'}\,c^{''}\,d^{''} - (a^3\,e^{'}\,d^{''} + b^3\,a^{'}\,c^{''})\,e^{'}\,c^{''}]$.

On remarque que ce résultant est invariant par les permutations $a \leftrightarrow b$, $a' \leftrightarrow d''$, $e' \leftrightarrow c''$.

6.3.3 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$

On a $t_3 = 3$, $D = d_2\,d_3 + d_1\,d_3 + d_1\,d_2 = 11$. $r = E(\frac{t_3}{2}) = 1$.

On note :

$f_1 = a\,x + b\,y + c\,z$,
$f_2 = a^{'}\,x^2 + b^{'}\,x\,y + c^{'}\,x\,z + d^{'}\,y^2 + e^{'}\,y\,z + f^{'}\,z^2$,
$f_3 = a^{''}\,x^3 + b^{''}\,x^2\,y + c^{''}\,x^2\,z + d^{''}\,x\,y^2 + e^{''}\,x\,y\,z + f^{''}\,x\,z^2 + g^{''}\,y^3 + h^{''}\,y^2\,z + i^{''}\,y\,z^2 + j^{''}\,z^3$.

$R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est de degré $d_2\,d_3 = 6$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\,d_3 = 3$ en les coefficients de f_2 et de degré $d_1\,d_2 = 2$ en les coefficients de f_3.

Méthode de Macaulay

ligne	monôme	x	y	z	réduit ?	var. marquée	forme
1	x^4	G	P	P	oui	x	$\frac{x^4 f_1}{x} = x^3 f_1$
2	$x^3 y$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^3 y f_1}{x} = x^2 y f_1$
3	$x^3 z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^3 z f_1}{x} = x^2 z f_1$
4	$x^2 y^2$	G	G	P	non	x	$\frac{x^2 y^2 f_1}{x} = x y^2 f_1$
5	$x^2 y z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^2 y z f_1}{x} = x y z f_1$
6	$x^2 z^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^2 z^2 f_1}{x} = x z^2 f_1$
7	$x y^3$	G	G	P	non	x	$\frac{x y^3 f_1}{x} = y^3 f_1$
8	$x y^2 z$	G	G	P	non	x	$\frac{x y^2 z f_1}{x} = y^2 z f_1$
9	$x y z^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x y z^2 f_1}{x} = y z^2 f_1$
10	$x z^3$	G	P	G	non	x	$\frac{x z^3 f_1}{x} = z^3 f_1$
11	y^4	P	G	P	oui	y	$\frac{y^4 f_2}{y^2} = y^2 f_2$
12	$y^3 z$	P	G	P	oui	y	$\frac{y^3 z f_2}{y^2} = y z f_2$
13	$y^2 z^2$	P	G	P	oui	y	$\frac{y^2 z^2 f_2}{y^2} = z^2 f_2$
14	$y z^3$	P	P	G	oui	z	$\frac{y z^3 f_3}{z^3} = y f_3$
15	z^4	P	P	G	oui	z	$\frac{z^4 f_3}{z^3} = z f_3$

La matrice A est celle des coefficients des 15 formes $x^3 f_1$, $x^2 y f_1$, $x^2 z f_1$, $x y^2 f_1$, $x y z f_1$, $x z^2 f_1$, $y^3 f_1$, $y^2 z f_1$, $y z^2 f_1$, $z^3 f_1$, $y^2 f_2$, $y z f_2$, $z^2 f_2$, $y f_3$, $z f_3$ sur la base, à 15 éléments, $\{x^4, x^3 y, x^3 z, x^2 y^2, x^2 y z, x^2 z^2, x y^3, x y^2 z, x y z^2, x z^3, y^4, y^3 z, y^2 z^2, y z^3, z^4\}$:

$$A = \begin{bmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'' & 0 \\
c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'' \\
0 & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' & 0 & 0 & b'' & 0 \\
0 & c & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' & 0 & c'' & b'' \\
0 & 0 & c & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a' & 0 & c'' \\
0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & d'' & 0 \\
0 & 0 & 0 & c & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c' & b' & 0 & e'' & d'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c' & b' & f'' & e'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c' & 0 & f'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & d' & 0 & 0 & g'' & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & 0 & e' & d' & 0 & h'' & g'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & f' & e' & d' & i'' & h'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & f' & e' & j'' & i'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & f' & 0 & j''
\end{bmatrix}.$$

La matrice B est la sous-matrice, d'ordre 4, de la matrice A constituée des lignes $x^2\,y^2$, $x\,y^3$, $x\,y^2\,z$, $x\,z^3$ et des colonnes $x\,y^2\,f_1$, $y^3\,f_1$, $y^2\,z\,f_1$, $z^3\,f_1$:

$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Soit det $B = a^4$. Alors :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \frac{1}{a^4}$ det $A = \frac{1}{a^2}\,(a^{10}\,d'^3\,j''^2 + \ldots) = a^6\,d'^3\,j''^2 + \ldots$, de degré 11.

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 - 3 = 0 < d_1 + d_2 - 1 = 2$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3 - 3 = 0 < m < d_1 + d_2 = 3$ i.e. pour $m = 1,\, 2$.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X^2)\,(1-X^3)}{(1-X)^3} = 1 + 2\,X + 2\,X^2 + X^3$. Donc $H_{(1,\,2,\,3)}(0) = 1$, $H_{(1,\,2,\,3)}(1) = 2$, $H_{(1,\,2,\,3)}(2) = 2$, $H_{(1,\,2,\,3)}(3) = 1$ et $H_{(1,\,2,\,3)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 4$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(3) = 9$, $i(2) = 4$, $i(1) = 1$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 10$, $\rho(1) = 7$, $\rho(2) = 7$, $\rho(3) = 10$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X') = a$, $\Delta_{12}(X,\, X') = b$, $\Delta_{13}(X,\, X') = c$,

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'\,(x + x') + b'\,y + c'\,z$,
$\Delta_{22}(X,\, X') = b'\,x' + d'\,(y + y') + e'\,z$,
$\Delta_{23}(X,\, X') = c'\,x' + e'\,y' + f'\,(z + z')$.

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''\,(x^2 + x\,x' + x'^2) + b''\,(x + x')\,y + c''\,(x + x')\,z + d''\,y^2 + e''\,y\,z + f''\,z^2$,
$\Delta_{32}(X,\, X') = b''\,x'^2 + d''\,x'\,(y + y') + e''\,x'\,z + g''\,(y^2 + y\,y' + y'^2) + h''\,(y + y')\,z + i''\,z^2$,
$\Delta_{33}(X,\, X') = c''\,x'^2 + e''\,x'\,y' + f''\,x'\,(z + z') + h''\,y'^2 + i''\,y'\,(z + z') + j''\,(z^2 + z\,z' + z'^2)$.

$$\Delta(X,\, X')$$
$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'\,(x+x') + b'\,y + c'\,z & b'\,x' + d'\,(y+y') + e'\,z & c'\,x' + e'\,y' + f'\,(z+z') \\ \Delta_{31}(X,\, X') & \Delta_{32}(X,\, X') & \Delta_{33}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X) + [\Delta_{100}(X)\,x' + \Delta_{010}(X)\,y' + \Delta_{001}(X)\,z']$
$+ [\Delta_{200}(X)\,x'^2 + \Delta_{110}(X)\,x'\,y' + \ldots + \Delta_{002}(X)\,z'^2]$
$+ [\Delta^{000}_{300}(X)\,x'^3 + \Delta^{000}_{210}(X)\,x'^2\,y' + \ldots + \Delta^{000}_{003}(X)\,z'^3]$.

$\Delta_{000}(X)$ de degré 3, $\Delta_{100}(X), \Delta_{010}(X), \Delta_{001}(X)$ de degrés 2, $\Delta_{200}(X), \ldots, \Delta_{002}(X)$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{300}(X), \ldots, \Delta^{000}_{003}(X)$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\Delta_{200}(X) = \Delta^{100}_{200}(X)\,x + \Delta^{010}_{200}(X)\,y + \ldots + \Delta^{001}_{200}(X)\,z$$
$$\Delta_{110}(X) = \Delta^{100}_{110}(X)\,x + \Delta^{010}_{110}(X)\,y + \ldots + \Delta^{001}_{110}(X)\,z$$
$$\vdots$$
$$\Delta_{002}(X) = \Delta^{100}_{002}(X)\,x + \Delta^{010}_{002}(X)\,y + \ldots + \Delta^{001}_{002}(X)\,z$$

Soit $\Delta_1(X)$ la matrice, de dimensions 3×6 :

$$\Delta_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta^{100}_{200}(X) & \Delta^{100}_{110}(X) & \ldots & \Delta^{100}_{002}(X) \\ \Delta^{010}_{200}(X) & \Delta^{010}_{110}(X) & \ldots & \Delta^{010}_{002}(X) \\ \Delta^{001}_{200}(X) & \Delta^{001}_{110}(X) & \ldots & \Delta^{001}_{002}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X') + [\Delta_{100}(X')\,x + \Delta_{010}(X')\,y + \Delta_{001}(X')\,z]$
$+ [\Delta_{200}(X')\,x^2 + \Delta_{110}(X')\,x\,y + \ldots + \Delta_{002}(X')\,z^2]$
$+ [\Delta^{000}_{300}(X')\,x^3 + \Delta^{000}_{210}(X')\,x^2\,y + \ldots + \Delta^{000}_{003}(X')\,z^3]$.

$\Delta_{000}(X')$ de degré 3, $\Delta_{100}(X'), \Delta_{010}(X'), \Delta_{001}(X')$ de degrés 2, $\Delta_{200}(X'), \ldots, \Delta_{002}(X')$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{300}(X'), \ldots, \Delta^{000}_{003}(X')$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\Delta_{100}(X') = \Delta^{200}_{100}(X')\,x'^2 + \Delta^{110}_{100}(X')\,x'\,y' + \ldots + \Delta^{002}_{100}(X')\,z'^2$$
$$\Delta_{010}(X') = \Delta^{200}_{010}(X')\,x'^2 + \Delta^{110}_{010}(X')\,x'\,y' + \ldots + \Delta^{002}_{010}(X')\,z'^2$$
$$\vdots$$
$$\Delta_{001}(X') = \Delta^{200}_{001}(X')\,x'^2 + \Delta^{110}_{001}(X')\,x'\,y' + \ldots + \Delta^{002}_{001}(X')\,z'^2$$

Soit $\Delta_2(X')$ la matrice, de dimensions 6×3 :

$$\Delta_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_{100}^{200}(X') & \Delta_{010}^{200}(X') & \Delta_{001}^{200}(X') \\ \Delta_{100}^{110}(X') & \Delta_{010}^{110}(X') & \Delta_{001}^{110}(X') \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{100}^{002}(X') & \Delta_{010}^{002}(X') & \Delta_{001}^{002}(X') \end{bmatrix} = \Delta_1^T(X).$$

On a $S^{1,1} = \{1\}$ et dim $S^{1,1} = 1$, $S^{1,2} = \emptyset$ et dim $S^{1,2} = 0$, $S^{1,3} = \emptyset$ et dim $S^{1,3} = 0$.

D_1, la matrice de $\psi_{2,1}$, est alors la matrice, de dimensions 3×1, des coefficients de la forme f_1, de degré 1, sur la base, à 3 éléments, $\{x, y, z\}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

On a $S^{2,1} = \{x, y, z\}$ et dim $S^{2,1} = 3$, $S^{2,2} = \{1\}$ et dim $S^{2,2} = 1$, $S^{2,3} = \emptyset$ et dim $S^{2,3} = 0$.

D_2, la matrice de $\psi_{2,2}$, est alors la matrice, de dimensions 6×4, des coefficients des 4 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $z\,f_1$, f_2, de degrés 2, sur la base, à 6 éléments, $\{x^2, x\,y, x\,z, y^2, y\,z, z^2\}$:

$$D_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & a' \\ b & a & 0 & b' \\ c & 0 & a & c' \\ 0 & b & 0 & d' \\ 0 & c & b & e' \\ 0 & 0 & c & f' \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1(X)$, d'ordre 7, est telle que :

$$M_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta_1(X) & D_1 \\ D_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_2(X')$, d'ordre 7, est telle que :

$$M_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_2(X') & D_2 \\ D_1^T & 0 \end{bmatrix}.$$ Elle est telle que $M_2(X') = M_1^T(X)$.

Alors $R(f_1, f_2, f_3) = \pm$ det $M_2(X) = \pm$ det $M_1(X')$.

Exemple

$f_1 = a\,x + b\,y$
$f_2 = b'\,x\,y + f'\,z^2$
$f_3 = e''\,x\,y\,z + g''\,y^3.$

Méthode de Macaulay

On a $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & e'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b' & 0 & e'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & f' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f' & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Et :

$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Soit det $B = a^4$. Alors :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \frac{1}{a^4}$ det $A = a^3\, f'^2\, (a^3\, f'\, g''^2 - b^3\, b'\, e''^2)$, de degré 11.

Méthode utilisant les bezoutiens

On obtient $M_2(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 0 & b' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a\, f'\, g'' & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & -a\, f'\, g'' & b\, f'\, e'' & 0 & 0 & b & 0 \\ -a\, f'\, e'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f' \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Et on vérifie que $M_1(X') = M_2^T(X)$. Alors :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm\, a^3\, f'^2\, (a^3\, f'\, g''^2 - b^3\, b'\, e''^2)$.

6.3.4 Cas pour lequel $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$

On a $t_3 = 4$, $D = d_2\, d_3 + d_1\, d_3 + d_1\, d_2 = 16$. $r = E(\frac{t_3}{2}) = 2$.

On note :

$f_1 = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,x\,z + d\,y^2 + e\,y\,z + f\,z^2$,
$f_2 = a^{'}\,x^2 + b^{'}\,x\,y + c^{'}\,x\,z + d^{'}\,y^2 + e^{'}\,y\,z + f^{'}\,z^2$,
$f_3 = a^{''}\,x^3 + b^{''}\,x^2\,y + c^{''}\,x^2\,z + d^{''}\,x\,y^2 + e^{''}\,x\,y\,z + f^{''}\,x\,z^2 + g^{''}\,y^3 + h^{''}\,y^2\,z + i^{''}\,y\,z^2 + j^{''}\,z^3$.

$R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est de degré $d_2\,d_3 = 6$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\,d_3 = 6$ en les coefficients de f_2 et de degré $d_1\,d_2 = 4$ en les coefficients de f_3.

Méthode de Macaulay

ligne	monôme	x	y	z	réduit ?	var. marquée	forme
1	x^5	G	P	P	oui	x	$\frac{x^5\,f_1}{x^2} = x^3\,f_1$
2	$x^4\,y$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^4\,y\,f_1}{x^2} = x^2\,y\,f_1$
3	$x^4\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^4\,z\,f_1}{x^2} = x^2\,z\,f_1$
4	$x^3\,y^2$	G	G	P	non	x	$\frac{x^3\,y^2\,f_1}{x^2} = x\,y^2\,f_1$
5	$x^3\,y\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^3\,y\,z\,f_1}{x^2} = x\,y\,z\,f_1$
6	$x^3\,z^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^3 z^2\,f_1}{x^2} = x\,z^2\,f_1$
7	$x^2\,y^3$	G	G	P	non	x	$\frac{x^2\,y^3\,f_1}{x^2} = y^3\,f_1$
8	$x^2\,y^2\,z$	G	G	P	non	x	$\frac{x^2\,y^2\,z\,f_1}{x^2} = y^2\,z\,f_1$
9	$x^2\,y\,z^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^2\,y\,z^2\,f_1}{x^2} = y\,z^2\,f_1$
10	$x^2\,z^3$	G	P	G	non	x	$\frac{x^2\,z^3\,f_1}{x^2} = z^3\,f_1$
11	$x\,y^4$	P	G	P	oui	y	$\frac{x\,y^4\,f_2}{y^2} = x\,y^2\,f_2$
12	$x\,y^3\,z$	P	G	P	oui	y	$\frac{x\,y^3\,z\,f_2}{y^2} = x\,y\,z\,f_2$
13	$x\,y^2\,z^2$	P	G	P	oui	y	$\frac{x\,y^2\,z^2\,f_2}{y^2} = x\,z^2\,f_2$
14	$x\,y\,z^3$	P	P	G	oui	z	$\frac{x\,y\,z^3\,f_3}{z^3} = x\,y\,f_3$
15	$x\,z^4$	P	P	G	oui	z	$\frac{x\,z^4\,f_3}{z^3} = x\,z\,f_3$
16	y^5	P	G	P	oui	y	$\frac{y^5\,f_2}{y^2} = y^3\,f_2$
17	$y^4\,z$	P	G	P	oui	y	$\frac{y^4\,z\,f_2}{y^2} = y^2\,z\,f_2$
18	$y^3\,z^2$	P	G	P	oui	y	$\frac{y^3\,z^2\,f_2}{y^2} = y\,z^2\,f_2$
19	$y^2\,z^3$	P	G	G	non	y	$\frac{y^2\,z^3\,f_2}{y^2} = z^3\,f_2$
20	$y\,z^4$	P	P	G	oui	z	$\frac{y\,z^4\,f_3}{z^3} = y\,z\,f_3$
21	z^5	P	P	G	oui	z	$\frac{z^5\,f_3}{z^3} = z^2\,f_3$

La matrice A est celle des coefficients des 21 formes
$x^3\,f_1,\, x^2\,y\,f_1,\, x^2\,z\,f_1,\, x\,y^2\,f_1,\, x\,y\,z\,f_1,\, x\,z^2\,f_1,\, y^3\,f_1,\, y^2\,z\,f_1,\, y\,z^2\,f_1,\, z^3\,f_1,$
$x\,y^2\,f_2,\, x\,y\,z\,f_2,\, x\,z^2\,f_2,\, x\,y\,f_3,\, x\,z\,f_3,\, y^3\,f_2,\, y^2\,z\,f_2,\, y\,z^2\,f_2,\, z^3\,f_2,\, y\,z\,f_3,$
$z^2\,f_3$ sur la base, à 21 éléments,
$\{x^5,\, x^4\,y,\, x^4\,z,\, x^3\,y^2,\, x^3\,y\,z,\, x^3\,z^2,\, x^2\,y^3,\, x^2\,y^2\,z,\, x^2\,y\,z^2,\, x^2\,z^3,$
$x\,y^4,\, x\,y^3\,z,\, x\,y^2\,z^2,\, x\,y\,z^3,\, x\,z^4,\, y^5,\, y^4\,z,\, y^3\,z^2,\, y^2\,z^3,\, y\,z^4,\, z^5\}$:

La matrice B est la sous-matrice, d'ordre 5, de la matrice A constituée des lignes $x^3\,y^2$, $x^2\,y^3$, $x^2\,y^2\,z$, $x^2\,z^3$, $y^2\,z^3$ et des colonnes $x\,y^2\,f_1$, $y^3\,f_1$, $y^2\,z\,f_1$, $z^3\,f_1$, $z^3\,f_2$.

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm\,\frac{\det A}{\det B}$, de degré 16.

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 - 3 = 0 < d_1 + d_2 - 1 = 3$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3 - 3 = 0 < m < d_1 + d_2 = 4$ i.e. pour $m = 1,\, 2,\, 3$. $m = 2$ sera la valeur la plus intéressante.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X^2)\,(1-X^2)\,(1-X^3)}{(1-X)^3} = 1 + 3\,X + 4\,X^2 + 3\,X^3 + X^4$. Donc $H_{(2,\,2,\,3)}(0) = 1$, $H_{(2,\,2,\,3)}(1) = 3$, $H_{(2,\,2,\,3)}(2) = 3$, $H_{(2,\,2,\,3)}(3) = 3$, $H_{(2,\,2,\,3)}(4) = 1$ et $H_{(2,\,2,\,3)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 5$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(4) = 14$, $i(3) = 7$, $i(2) = 2$, $i(1) = 0$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 15$, $\rho(1) = 10$, $\rho(2) = 8$, $\rho(3) = 10$, $\rho(4) = 15$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X') = a\,(x + x') + b\,y + c\,z,$
$\Delta_{12}(X,\, X') = b\,x' + d\,(y + y') + e\,z,$
$\Delta_{13}(X,\, X') = c\,x' + e\,y' + f\,(z + z'),$

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'\,(x + x') + b'\,y + c'\,z,$
$\Delta_{22}(X,\, X') = b'\,x' + d'\,(y + y') + e'\,z,$
$\Delta_{23}(X,\, X') = c'\,x' + e'\,y' + f'\,(z + z').$

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''\,(x^2 + x\,x' + x'^2) + b''\,(x + x')\,y + c''\,(x + x')\,z + d''\,y^2 + e''\,y\,z + f''\,z^2,$
$\Delta_{32}(X,\, X') = b''\,x'^2 + d''\,x'\,(y + y') + e''\,x'\,z + g''\,(y^2 + y\,y' + y'^2) + h''\,(y + y')\,z + i''\,z^2,$
$\Delta_{33}(X,\, X') = c''\,x'^2 + e''\,x'\,y' + f''\,x'\,(z + z') + h''\,y'^2 + i''\,y'\,(z + z') + j''\,(z^2 + z\,z' + z'^2).$

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} \Delta_{11}(X,\, X') & \Delta_{12}(X,\, X') & \Delta_{13}(X,\, X') \\ \Delta_{21}(X,\, X') & \Delta(X,\, X') & \Delta_{23}(X,\, X') \\ \Delta_{31}(X,\, X') & \Delta_{32}(X,\, X') & \Delta_{33}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X) + [\Delta_{100}(X)\, x' + \Delta_{010}(X)\, y' + \Delta_{001}(X)\, z']$
$+ [\Delta_{200}(X)\, x'^2 + \Delta_{110}(X)\, x'\, y' + \ldots + \Delta_{002}(X)\, z'^2]$
$+ [\Delta_{300}(X)\, x'^3 + \Delta_{210}(X)\, x'^2\, y' + \ldots + \Delta_{003}(X)\, z'^3]$
$+ [\Delta^{000}_{400}(X)\, x'^4 + \Delta^{000}_{310}(X)\, x'^3\, y' + \ldots + \Delta^{000}_{004}(X)\, z'^4]$.

$\Delta_{000}(X)$ de degré 4, $\Delta_{100}(X), \Delta_{010}(X), \Delta_{001}(X)$ de degrés 3, $\Delta_{200}(X), \ldots, \Delta_{002}(X)$ de degrés 2, $\Delta_{300}(X), \ldots, \Delta_{003}(X)$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{400}(X), \ldots, \Delta^{000}_{004}(X)$ de degrés 1 (donc constants).

On pose :

$$\begin{aligned} &\Delta_{200}(X) = \Delta^{200}_{200}(X)\, x^2 + \Delta^{110}_{200}(X)\, x\, y + \ldots + \Delta^{002}_{200}(X)\, z^2 \\ &\Delta_{110}(X) = \Delta^{200}_{110}(X)\, x^2 + \Delta^{110}_{110}(X)\, x\, y + \ldots + \Delta^{002}_{110}(X)\, z^2 \\ &\vdots \\ &\Delta_{002}(X) = \Delta^{200}_{002}(X)\, x^2 + \Delta^{110}_{002}(X)\, x\, y + \ldots + \Delta^{002}_{002}(X)\, z^2 \end{aligned}$$

Soit $\Delta_2(X)$ la matrice, d'ordre 6 :

$$\Delta_2(X) = \begin{bmatrix} \Delta^{200}_{200}(X) & \Delta^{200}_{110}(X) & \ldots & \Delta^{200}_{002}(X) \\ \Delta^{110}_{200}(X) & \Delta^{110}_{110}(X) & \ldots & \Delta^{110}_{002}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{002}_{200}(X) & \Delta^{002}_{110}(X) & \ldots & \Delta^{002}_{002}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X') + [\Delta_{100}(X')\, x + \Delta_{010}(X')\, y + \Delta_{001}(X')\, z]$
$+ [\Delta_{200}(X')\, x^2 + \Delta_{110}(X')\, x\, y + \ldots + \Delta_{002}(X')\, z^2]$
$+ [\Delta_{300}(X')\, x^3 + \Delta_{210}(X')\, x^2\, y + \ldots + \Delta_{003}(X')\, z^3]$
$+ [\Delta^{000}_{400}(X')\, x^4 + \Delta^{000}_{310}(X')\, x^3\, y + \ldots + \Delta^{000}_{004}(X')\, z^4]$.

$\Delta_{000}(X')$ de degré 4, $\Delta_{100}(X'), \Delta_{010}(X'), \Delta_{001}(X')$ de degrés 3, $\Delta_{200}(X'), \ldots, \Delta_{002}(X')$ de degrés 2, $\Delta_{300}(X'), \ldots, \Delta_{003}(X')$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{400}(X'), \ldots, \Delta^{000}_{004}(X')$ de degrés 1 (donc constants).

On pose :

$$\begin{aligned} &\Delta_{200}(X') = \Delta^{200}_{200}(X')\, x'^2 + \Delta^{110}_{200}(X')\, x'\, y' + \ldots + \Delta^{002}_{200}(X')\, z'^2 \\ &\Delta_{110}(X') = \Delta^{200}_{110}(X')\, x'^2 + \Delta^{110}_{110}(X')\, x'\, y' + \ldots + \Delta^{002}_{110}(X')\, z'^2 \\ &\vdots \\ &\Delta_{002}(X') = \Delta^{200}_{002}(X')\, x'^2 + \Delta^{110}_{002}(X')\, x'\, y' + \ldots + \Delta^{002}_{002}(X')\, z'^2 \end{aligned}$$

Soit $\Delta_2(X')$ la matrice, d'ordre 6 :

$$\Delta_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_{200}^{200}(X') & \Delta_{110}^{200}(X') & \dots & \Delta_{002}^{200}(X') \\ \Delta_{200}^{110}(X') & \Delta_{110}^{110}(X') & \dots & \Delta_{002}^{110}(X') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{200}^{002}(X') & \Delta_{110}^{002}(X') & \dots & \Delta_{002}^{002}(X') \end{bmatrix} = \Delta_2^T(X).$$

On a $S^{2,1} = \{1\}$ et dim $S^{2,1} = 1$, $S^{2,2} = \{1\}$ et dim $S^{2,2} = 1$, $S^{2,3} = \emptyset$ et dim $S^{2,3} = 0$.

D_2, la matrice de $\psi_{2,2}$, est alors la matrice, de dimensions 6×2, des coefficients des 2 formes f_1, f_2, de degrés 2, sur la base, à 6 éléments, $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, y^2,\, y\,z,\, z^2\}$:

$$D_2 = \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \\ d & d' \\ e & e' \\ f & f' \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_2(X)$, d'ordre 8, est telle que :

$$M_2(X) = \begin{bmatrix} \Delta_2(X) & D_2 \\ D_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_2(X')$, d'ordre 8, est telle que :

$$M_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_2(X') & D_2 \\ D_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$ Elle est telle que $M_2(X') = M_2^T(X)$.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm$ det $M_2(X) = \pm$ det $M_2(X')$.

Exemple

$f_1 = a\,x^2 + e\,y\,z$
$f_2 = c'\,x\,z + d'\,y^2$
$f_3 = e''\,x\,y\,z + j''z^3.$

Méthode de Macaulay

On trouve det $A = a^7\,d'^4\,j''\,(a\,d'\,j'' + e\,c'\,e'')^3$ et det $B = a^4\,d'$; par conséquent : $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = a^3\,d'^3\,j''\,(a\,d'\,j'' + e\,c'\,e'')^3$.

Méthode utilisant les bezoutiens

On obtient :

$$M_2(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a\,d'\,e'' & 0 & 0 & 0 & a\,d'\,j'' & 0 & 0 \\ -a\,c'\,e'' & 0 & 0 & 0 & a\,d'\,j'' & 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & a\,d'\,j'' & -e\,d'\,e'' & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & a\,d'\,j'' & 0 & 0 & 0 & -e\,c'\,j'' & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & d' & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et on vérifie que $M_2(X') = M_2^T(X)$. Alors :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \det\, M_2(X) = a^3\, d'^3\, j''\, (a\, d'\, j'' + e\, c'\, e'')^3$.

6.3.5 Cas pour lequel $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$

Il s'agit du cas c3 précédemment traité, mais bien évidemment les résultats de cette section s'appliquent.

On a $t_3 = 6$, $D = d_2\, d_3 + d_1\, d_3 + d_1\, d_2 = 27$. $r = E(\frac{t_3}{2}) = 3$.

Les fonctions f_1, f_2, f_3 ont été notées précédemment.

$R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ est de degré $d_2\, d_3 = 9$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\, d_3 = 9$ en les coefficients de f_2 et de degré $d_1\, d_2 = 9$ en les coefficients de f_3.

Méthode de Macaulay

ligne	monôme	x	y	z	réduit ?	var. marquée	forme
1	x^7	G	P	P	oui	x	$\frac{x^7\,f_1}{x^3} = x^4\,f_1$
2	$x^6\,y$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^6\,y\,f_1}{x^3} = x^3\,y\,f_1$
3	$x^6\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^6\,z\,f_1}{x^3} = x^3\,z\,f_1$
4	$x^5\,y^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^5\,y^2\,f_1}{x^3} = x^2\,y^2\,f_1$
5	$x^5\,y\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^5\,y\,z\,f_1}{x^3} = x^2\,y\,z\,f_1$
6	$x^5\,z^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^5\,z^2\,f_1}{x^3} = x^2\,z^2\,f_1$
7	$x^4\,y^3$	G	G	P	non	x	$\frac{x^4\,y^3\,f_1}{x^3} = x\,y^3\,f_1$
8	$x^4\,y^2\,z$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^4\,y^2\,z\,f_1}{x^3} = x\,y^2\,z\,f_1$
9	$x^4\,y\,z^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^4\,y\,z^2\,f_1}{x^3} = x\,y\,z^2\,f_1$
10	$x^4\,z^3$	G	P	G	non	x	$\frac{x^4\,z^3\,f_1}{x^3} = x\,z^3\,f_1$
11	$x^3\,y^4$	G	G	P	non	x	$\frac{x^3\,y^4\,f_1}{x^3} = y^4\,f_1$
12	$x^3\,y^3\,z$	G	G	P	non	x	$\frac{x^3\,y^3\,z\,f_1}{x^3} = y^3\,z\,f_1$
13	$x^3\,y^2\,z^2$	G	P	P	oui	x	$\frac{x^3\,y^2\,z^2\,f_1}{x^3} = y^2\,z^2\,f_1$
14	$x^3\,y\,z^3$	G	P	G	non	x	$\frac{x^3\,y\,z^3\,f_1}{x^3} = y\,z^3\,f_1$
15	$x^3\,z^4$	G	P	G	non	x	$\frac{x^3\,z^4\,f_1}{x^3} = z^4\,f_1$
16	$x^2\,y^5$	P	G	P	oui	y	$\frac{x^2\,y^5\,f_2}{y^3} = x^2\,y^2\,f_2$
17	$x^2\,y^4\,z$	P	G	P	oui	y	$\frac{x^2\,y^4\,z\,f_2}{y^3} = x^2\,y\,z\,f_2$
18	$x^2\,y^3\,z^2$	P	G	P	oui	y	$\frac{x^2\,y^3\,z^2\,f_2}{y^3} = x^2\,z^2\,f_2$
19	$x^2\,y^2\,z^3$	P	P	G	oui	z	$\frac{x^2\,y^2\,z^3\,f_3}{z^3} = x^2\,y^2\,f_3$
20	$x^2\,y\,z^4$	P	P	G	oui	z	$\frac{x^2\,y\,z^4\,f_3}{z^3} = x^2\,y\,z\,f_3$
21	$x^2\,z^5$	P	P	G	oui	z	$\frac{x^2\,z^5\,f_3}{z^3} = x^2\,z^2\,f_3$
22	$x\,y^6$	P	G	P	oui	y	$\frac{x\,y^6\,f_2}{y^3} = x\,y^3\,f_2$
23	$x\,y^5\,z$	P	G	P	oui	y	$\frac{x\,y^5\,z\,f_2}{y^3} = x\,y^2\,z\,f_2$
24	$x\,y^4\,z^2$	P	G	P	oui	y	$\frac{x\,y^4\,z^2\,f_2}{y^3} = x\,y\,z^2\,f_2$
25	$x\,y^3\,z^3$	P	G	G	non	y	$\frac{x\,y^3\,z^3\,f_2}{y^3} = x\,z^3\,f_2$
26	$x\,y^2\,z^4$	P	P	G	oui	z	$\frac{x\,y^2\,z^4\,f_3}{z^3} = x\,y^2\,z\,f_3$
27	$x\,y\,z^5$	P	P	G	oui	z	$\frac{x\,y\,z^5\,f_3}{z^3} = x\,y\,z^2\,f_3$
28	$x\,z^6$	P	P	G	oui	z	$\frac{x\,z^6\,f_3}{z^3} = x\,z^3\,f_3$
29	y^7	P	G	P	oui	y	$\frac{y^7\,f_2}{y^3} = y^4\,f_2$
30	$y^6\,z$	P	G	P	oui	y	$\frac{y^6\,z\,f_2}{y^3} = y^3\,z\,f_2$
31	$y^5\,z^2$	P	G	P	oui	y	$\frac{y^5\,z^2\,f_2}{y^3} = y^2\,z^2\,f_2$
32	$y^4\,z^3$	P	G	G	non	y	$\frac{y^4\,z^3\,f_2}{y^3} = y\,z^3\,f_2$
33	$y^3\,z^4$	P	G	G	non	y	$\frac{y^3\,z^4\,f_2}{y^3} = z^4\,f_2$
34	$y^2\,z^5$	P	P	G	oui	z	$\frac{y^2\,z^5\,f_3}{z^3} = y^2\,z^2\,f_3$
35	$y\,z^6$	P	P	G	oui	z	$\frac{y\,z^6\,f_3}{z^3} = y\,z^3\,f_3$
36	z^7	P	P	G	oui	z	$\frac{z^7\,f_3}{z^3} = z^4\,f_3$

La matrice A est celle des coefficients des 36 formes
$x^4\,f_1$, $x^3\,y\,f_1$, $x^3\,z\,f_1$, $x^2\,y^2\,f_1$, $x^2\,y\,z\,f_1$, $x^2\,z^2\,f_1$, $x\,y^3\,f_1$, $x\,y^2\,z\,f_1$, $x\,y\,z^2\,f_1$,
$x\,z^3\,f_1$, $y^4\,f_1$, $y^3\,z\,f_1$, $y^2\,z^2\,f_1$, $y\,z^3\,f_1$, $z^4\,f_1$, $x^2\,y^2\,f_2$, $x^2\,y\,z\,f_2$, $x^2\,z^2\,f_2$,
$x^2\,y^2\,f_3$, $x^2\,y\,z\,f_3$, $x^2\,z^2\,f_3$, $x\,y^3\,f_2$, $x\,y^2\,z\,f_2$, $x\,y\,z^2\,f_2$, $x\,z^3\,f_2$, $x\,y^2\,z\,f_3$, $x\,y\,z^2\,f_3$,
$x\,z^3\,f_3$, $y^4\,f_2$, $y^3\,z\,f_2$, $y^2\,z^2\,f_2$, $y\,z^3\,f_2$, $z^4\,f_2$, $y^2\,z^2\,f_3$, $y\,z^3\,f_3$, $z^4\,f_3$
sur la base, à 36 éléments, $\{x^7, \ldots, z^7\}$.

La matrice B est la sous-matrice, d'ordre 9, de la matrice A constituée des lignes $\{x^4\,y^3,\ x^4\,z^3,\ x^3\,y^4,\ x^3\,y^3\,z,\ x^3\,y\,z^3,\ x^3\,z^4,\ x\,y^3\,z^3,\ y^4\,z^3,\ y^3\,z^4,\ \}$ et des colonnes $\{x\,y^3\,f_1,\ x\,z^3\,f_1,\ y^4\,f_1,\ y^3\,z\,f_1,\ y\,z^3\,f_1,\ z^4\,f_1,\ x\,z^3\,f_2,\ y\,z^3\,f_2,\ z^4\,f_2\}$.

$R(f_1,\ f_2,\ f_3) = \pm\,\frac{\det A}{\det B}$, de degré 27.

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 - 3 = 0 < d_1 + d_2 - 1 = 5$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3 - 3 = 0 < m < d_1 + d_2 = 6$ i.e. pour $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$; c'est bien ce que nous avons vu précédemment. $m = 3$ sera la valeur la plus intéressante.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X^3)\,(1-X^3)\,(1-X^3)}{(1-X)^3} = 1 + 3\,X + 6\,X^2 + 7\,X^3 + 6\,X^4 + 3\,X^5 + X^6$. Donc
$H_{(3,3,3)}(0) = 1$, $H_{(3,3,3)}(1) = 3$, $H_{(3,3,3)}(2) = 6$, $H_{(3,3,3)}(3) = 7$,
$H_{(3,3,3)}(4) = 6$, $H_{(3,3,3)}(5) = 3$, $H_{(3,3,3)}(6) = 1$ et $H_{(3,3,3)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 7$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(6) = 27$, $i(5) = 18$, $i(4) = 9$, $i(3) = 3$, $i(2) = 0$, $i(1) = 0$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 28$, $\rho(1) = 21$, $\rho(2) = 15$, $\rho(3) = 13$, $\rho(4) = 15$, $\rho(5) = 21$, $\rho(6) = 28$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\ X') = a\,(x^2 + x\,x' + x'^2) + b\,(x + x')\,y + c\,(x + x')\,z + d\,y^2$
$+\ e\,y\,z + f\,z^2$,
$\Delta_{12}(X,\ X') = b\,x'^2 + d\,x'\,(y + y') + e\,x'\,z + g\,(y^2 + y\,y' + y'^2)$
$+\ h\,(y + y')\,z + i\,z^2$,
$\Delta_{13}(X,\ X') = c\,x'^2 + e\,x'\,y' + f\,x'\,(z + z') + h\,y'^2 + i\,y'\,(z + z')$
$+\ j\,(z^2 + z\,z' + z'^2)$.

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'\,(x^2 + x\,x' + x'^2) + b'\,(x + x')\,y + c'\,(x + x')\,z + d'\,y^2$
$+\, e'\,y\,z + f'\,z^2,$

$\Delta_{22}(X,\, X') = b'\,x'^2 + d'\,x'\,(y + y') + e'\,x'\,z + g'\,(y^2 + y\,y' + y'^2)$
$+\, h'\,(y + y')\,z + i'\,z^2,$

$\Delta_{23}(X,\, X') = c'\,x'^2 + e'\,x'\,y' + f'\,x'\,(z + z') + h'\,y'^2 + i'\,y'\,(z + z')$
$+\, j'\,(z^2 + z\,z' + z'^2).$

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''\,(x^2 + x\,x' + x'^2) + b''\,(x + x')\,y + c''\,(x + x')\,z + d''\,y^2$
$+\, e''\,y\,z + f''\,z^2,$

$\Delta_{32}(X,\, X') = b''\,x'^2 + d''\,x'\,(y + y') + e''\,x'\,z + g''\,(y^2 + y\,y' + y'^2)$
$+\, h''\,(y + y')\,z + i''\,z^2,$

$\Delta_{33}(X,\, X') = c''\,x'^2 + e''\,x'\,y' + f''\,x'\,(z + z') + h''\,y'^2 + i''\,y'\,(z + z')$
$+\, j''\,(z^2 + z\,z' + z'^2).$

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} \Delta_{11}(X,\, X') & \Delta_{12}(X,\, X') & \Delta_{13}(X,\, X') \\ \Delta_{21}(X,\, X') & \Delta(X,\, X') & \Delta_{23}(X,\, X') \\ \Delta_{31}(X,\, X') & \Delta_{32}(X,\, X') & \Delta_{33}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X) + [\Delta_{100}(X)\,x' + \Delta_{010}(X)\,y' + \Delta_{001}(X)\,z']$
$+\, [\Delta_{200}(X)\,x'^2 + \Delta_{110}(X)\,x'\,y' + \,\ldots\, + \Delta_{002}(X)\,z'^2]$
$+\, [\Delta_{300}(X)\,x'^3 + \Delta_{210}(X)\,x'^2\,y' + \,\ldots\, + \Delta_{003}(X)\,z'^3]$
$+\, [\Delta_{400}(X)\,x'^4 + \Delta_{310}(X)\,x'^3\,y' + \,\ldots\, + \Delta_{004}(X)\,z'^4]$
$+\, [\Delta_{500}(X)\,x'^5 + \Delta_{410}(X)\,x'^4\,y' + \,\ldots\, + \Delta_{005}(X)\,z'^5]$
$+\, [\Delta^{000}_{600}(X)\,x'^6 + \Delta^{000}_{510}(X)\,x'^5\,y' + \,\ldots\, + \Delta^{000}_{006}(X)\,z'^6].$

$\Delta_{000}(X)$ de degré 6, $\Delta_{100}(X), \Delta_{010}(X), \Delta_{001}(X)$ de degrés 5, $\Delta_{200}(X),\, \ldots\, , \Delta_{002}(X)$ de degrés 4, $\Delta_{300}(X),\, \ldots\, , \Delta_{003}(X)$ de degrés 3, $\Delta_{400}(X),\, \ldots\, , \Delta_{004}(X)$ de degrés 2, $\Delta_{500}(X),\, \ldots\, , \Delta_{005}(X)$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{600}(X),\, \ldots\, , \Delta^{000}_{006}(X)$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\begin{aligned} &\Delta_{300}(X) = \Delta^{300}_{300}(X)\,x^3 + \Delta^{210}_{300}(X)\,x^2\,y + \,\ldots\, + \Delta^{003}_{300}(X)\,z^3 \\ &\Delta_{210}(X) = \Delta^{300}_{210}(X)\,x^3 + \Delta^{210}_{210}(X)\,x^2\,y + \,\ldots\, + \Delta^{003}_{210}(X)\,z^3 \\ &\vdots \\ &\Delta_{003}(X) = \Delta^{300}_{003}(X)\,x^3 + \Delta^{210}_{003}(X)\,x^2\,y + \,\ldots\, + \Delta^{003}_{003}(X)\,z^3 \end{aligned}$$

Soit $\Delta_3(X)$ la matrice, d'ordre 10 :

$$\Delta_3(X) = \begin{bmatrix} \Delta^{300}_{300}(X) & \Delta^{300}_{210}(X) & \ldots & \Delta^{300}_{003}(X) \\ \Delta^{210}_{300}(X) & \Delta^{210}_{210}(X) & \ldots & \Delta^{210}_{003}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{003}_{300}(X) & \Delta^{003}_{210}(X) & \ldots & \Delta^{003}_{003}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{000}(X') + [\Delta_{100}(X')\, x + \Delta_{010}(X')\, y + \Delta_{001}(X')\, z]$
$+ [\Delta_{200}(X')\, x^2 + \Delta_{110}(X')\, x\, y + \ldots + \Delta_{002}(X')\, z^2]$
$+ [\Delta_{300}(X')\, x^3 + \Delta_{210}(X')\, x^2\, y + \ldots + \Delta_{003}(X')\, z^3]$
$+ [\Delta_{400}(X')\, x^4 + \Delta_{310}(X')\, x^3\, y + \ldots + \Delta_{004}(X')\, z^4]$
$+ [\Delta_{500}(X')\, x^5 + \Delta_{410}(X')\, x^4\, y + \ldots + \Delta_{005}(X')\, z^5]$
$+ [\Delta^{000}_{600}(X')\, x^6 + \Delta^{000}_{510}(X')\, x^5\, y + \ldots + \Delta^{000}_{006}(X')\, z^6]$.

$\Delta_{000}(X')$ de degré 6, $\Delta_{100}(X'), \Delta_{010}(X'), \Delta_{001}(X')$ de degrés 5, $\Delta_{200}(X'), \ldots, \Delta_{002}(X')$ de degrés 4, $\Delta_{300}(X'), \ldots, \Delta_{003}(X')$ de degrés 3, $\Delta_{400}(X'), \ldots, \Delta_{004}(X')$ de degrés 2, $\Delta_{500}(X'), \ldots, \Delta_{005}(X')$ de degrés 1, $\Delta^{000}_{600}(X'), \ldots, \Delta^{000}_{006}(X')$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\begin{aligned}
&\Delta_{300}(X') = \Delta^{300}_{300}(X')\, x'^3 + \Delta^{210}_{300}(X')\, x'^2\, y' + \ldots + \Delta^{003}_{300}(X')\, z'^3\\
&\Delta_{210}(X') = \Delta^{300}_{210}(X')\, x'^3 + \Delta^{210}_{210}(X')\, x'^2\, y' + \ldots + \Delta^{003}_{210}(X')\, z'^3\\
&\vdots\\
&\Delta_{003}(X') = \Delta^{300}_{003}(X')\, x'^3 + \Delta^{210}_{003}(X')\, x'^2\, y' + \ldots + \Delta^{003}_{003}(X')\, z'^3
\end{aligned}$$

Soit $\Delta_3(X')$ la matrice, d'ordre 10 :

$$\Delta_3(X') = \begin{bmatrix} \Delta^{300}_{300}(X') & \Delta^{300}_{210}(X') & \ldots & \Delta^{300}_{003}(X') \\ \Delta^{210}_{300}(X') & \Delta^{210}_{210}(X') & \ldots & \Delta^{210}_{003}(X') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{003}_{300}(X') & \Delta^{003}_{210}(X') & \ldots & \Delta^{003}_{003}(X') \end{bmatrix} = \Delta_3^T(X).$$

On a $S^{3,1} = \{1\}$ et dim $S^{3,1} = 1$, $S^{3,2} = \{1\}$ et dim $S^{3,2} = 1$, $S^{3,3} = \{1\}$ et dim $S^{3,3} = 1$.

D_3, la matrice de $\psi_{2,3}$, est alors la matrice, de dimensions 10×3, des coefficients des 3 formes f_1, f_2, f_3, de degrés 3, sur la base, à 10 éléments, $\{x^3,\, x^2\, y,\, x^2\, z,\, x\, y^2,\, x\, y\, z,\, x\, z^2,\, y^3,\, y^2\, z,\, y\, z^2,\, z^3\}$:

$$D_3 = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ d & d' & d'' \\ e & e' & e'' \\ f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ h & h' & h'' \\ i & i' & i'' \\ j & j' & j'' \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_3(X)$, d'ordre 13, est telle que :

$M_3(X) = \begin{bmatrix} \Delta_3(X) & D_3 \\ D_3^T & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice $M_3(X')$, d'ordre 13, est telle que :

$M_3(X') = \begin{bmatrix} \Delta_3(X') & D_3 \\ D_3^T & 0 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_3(X') = M_3^T(X)$.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm \det M_3(X) = \pm \det M_3(X')$.

Exemple

$f = A\,x + E\,x\,y\,z + G\,y^3 + J\,z^3$, avec $A = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} e \\ e' \\ e'' \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ g' \\ 0 \end{bmatrix}$,

$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j'' \end{bmatrix}$. On retrouve $R(f_1,\, f_2,\, f_3) = a^6\, g'^6\, j''^6\, (a\, g'\, j'' + e\, e'\, e'')^3$.

Méthode utilisant les bezoutiens

On obtient :

$$M_3(X) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a\,g'\,e'' & 0 & 0 & 0 & 0 & a\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\,e'\,j'' & 0 & a\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a\,g'\,e'' & 0 & 0 & 0 & a\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & e' & e'' \\
0 & 0 & a\,e'\,j'' & a\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g' & 0 \\
0 & 0 & a\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e\,g'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a\,e'\,j'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j'' \\
a & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e' & 0 & g' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e'' & 0 & 0 & 0 & 0 & j'' & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Et on vérifie que $M_3(X') = M_3^T(X)$. Alors :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = a^6\, g'^6\, j''^6\, (a\, g'\, j'' + e\, e'\, e'')^3$.

6.4 Cas de 4 formes

Donc $k = 4$. Ssi $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ et d_4 quelconque on peut utiliser la méthode de Lang [37]. Sinon on va utiliser soit la méthode de Macaulay [39] [45] (cf. ci-après) qui exprime le résultant comme un rapport de 2 déterminants soit la méthode utilisant les bezoutiens [34] [14] (cf. ci-devant), plus simple, qui exprime le résultant sous forme d'un déterminant ou d'un rapport de déterminants.

Méthode de Macaulay [39] [45]

On adapte la méthode de Macaulay présentée pour 3 formes ($k = 3$) au cas de 4 formes ($k = 4$). La matrice A est maintenant d'ordre $\frac{(t_4+4)\,(t_4+3)\,(t_4+2)}{6}$ et la matrice B d'ordre $\frac{(t_4+4)\,(t_4+3)\,(t_4+2)}{6} - D$.

6.4.1 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$, $d_4 = 2$

On a $t_4 = 1$, $D = d_2\,d_3\,d_4 + d_1\,d_3\,d_4 + d_1\,d_2\,d_4 + d_1\,d_2\,d_3 = 7$. $r = E(\frac{t_4}{2}) = 0$.

On note :

$f_1 = a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z + a_4\,t$
$f_2 = a'_1\,x + a'_2\,y + a'_3\,z + a'_4\,t$
$f_3 = a''_1\,x + a''_2\,y + a''_3\,z + a''_4\,t$
$f_4 = a'''_1\,x^2 + a'''_2\,x\,y + a'''_3\,x\,z + a'''_4\,x\,t + a'''_5\,y^2 + a'''_6\,y\,z + a'''_7\,y\,t + a'''_8\,z^2 + a'''_9\,z\,t + a'''_{10}\,t^2$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est de degré $d_2\,d_3\,d_4 = 2$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\,d_3\,d_4 = 2$ en les coefficients de f_2, de degré $d_1\,d_2\,d_4 = 2$ en les coefficients de f_3 et de degré $d_1\,d_2\,d_3 = 1$ en les coefficients de f_4.

Méthode de Lang

On trouve : $\Delta_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_2 & a''_3 & a''_4 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_3 & a''_4 \end{vmatrix}$,
$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_4 \end{vmatrix}$, $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix}$ et
$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = f_4(\Delta_1,\, \Delta_2,\, \Delta_3,\, \Delta_4)$ [37] [41].

41. pp. 401-402 théorème 3.17

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3+d_4-4=-1<d_1+d_2-1=1$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3+d_4-4=-1<m<d_1+d_2=2$ i.e. pour $m=0,\, 1$.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X)\,(1-X)\,(1-X^2)}{(1-X)^4}=1+X$. Donc $H_{(1,\,1,\,1,\,2)}(0)=1$, $H_{(1,\,1,\,1,\,2)}(1)=1$ et $H_{(1,\,1,\,1,\,2)}(m)=0$ ssi $m\geqslant 2$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(1)=3$, $i(0)=0$ et $\rho(0)=4$, $\rho(1)=4$. On vérifie la propriété $\rho(m)=\rho(t_k-m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X')=a_1$, $\Delta_{12}(X,\, X')=a_2$, $\Delta_{13}(X,\, X')=a_3$, $\Delta_{14}(X,\, X')=a_4$

$\Delta_{21}(X,\, X')=a'_1$, $\Delta_{22}(X,\, X')=a'_2$, $\Delta_{23}(X,\, X')=a'_3$, $\Delta_{24}(X,\, X')=a'_4$

$\Delta_{31}(X,\, X')=a''_1$, $\Delta_{32}(X,\, X')=a''_2$, $\Delta_{33}(X,\, X')=a''_3$, $\Delta_{34}(X,\, X')=a''_4$

$\Delta_{41}(X,\, X')=a'''_1\,(x+x')+a'''_2\,y+a'''_3\,z+a'''_4\,t,$
$\Delta_{42}(X,\, X')=a'''_2\,x'+a'''_5\,(y+y')+a'''_6\,z+a'''_7\,t,$
$\Delta_{43}(X,\, X')=a'''_3\,x'+a'''_6\,y'+a'''_8\,(z+z')+a'''_9\,t.$
$\Delta_{44}(X,\, X')=a'''_4\,x'+a'''_7\,y'+a'''_9\,z'+a'''_{10}\,(t+t')$

$$\Delta(X,\, X')=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 \\ \Delta_{41}(X,\, X') & \Delta_{42}(X,\, X') & \Delta_{43}(X,\, X') & \Delta_{44}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X')=\Delta_{0000}(X)$
$+\,[\Delta^{0000}_{1000}(X)\,x'+\Delta^{0000}_{0100}(X)\,y'+\Delta^{0000}_{0010}(X)\,z'+\Delta^{0000}_{0001}(X)\,t']$, avec :

$\Delta_{0000}(X)$ de degré 1, $\Delta^{0000}_{1000}(X)$, $\Delta^{0000}_{0100}(X)$, $\Delta^{0000}_{0010}(X)$, $\Delta^{0000}_{0001}(X)$ de degrés 0 (donc constants).

Soit $\Delta_0(X)$ la matrice, de dimensions 1×4 :

$\Delta_0(X)=\left[\ \Delta^{0000}_{1000}(X)\quad \Delta^{0000}_{0100}(X)\quad \Delta^{0000}_{0010}(X)\quad \Delta^{0000}_{0001}(X)\ \right]$.

• $\Delta(X',\, X)=\Delta(X,\, X')=\Delta_{0000}(X')$
$+\,[\Delta^{0000}_{1000}(X')\,x+\Delta^{0000}_{0100}(X')\,y+\Delta^{0000}_{0010}(X')\,z+\Delta^{0000}_{0001}(X')\,t]$, avec :

$\Delta_{0000}(X')$ de degré 1, $\Delta^{0000}_{1000}(X')$, $\Delta^{0000}_{0100}(X')$, $\Delta^{0000}_{0010}(X')$, $\Delta^{0000}_{0001}(X')$ de degrés 0 (donc constants).

Soit $\Delta_1(X')$ la matrice, de dimensions 4×1 : $\Delta_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta^{1000}_{0000}(X') \\ \Delta^{0100}_{0000}(X') \\ \Delta^{0010}_{0000}(X') \\ \Delta^{0001}_{0000}(X') \end{bmatrix}$.

Elle est telle que $\Delta_1(X') = \Delta_0^T(X)$.

On a $S^{0,1} = \emptyset$ et dim $S^{0,1} = 0$, $S^{0,2} = \emptyset$ et dim $S^{0,2} = 0$, $S^{0,3} = \emptyset$ et dim $S^{0,3} = 0$, $S^{0,4} = \emptyset$ et dim $S^{0,4} = 0$. Par conséquent D_0, la matrice de $\psi_{2,0}$, n'existe pas.

On a $S^{1,1} = \{1\}$ et dim $S^{1,1} = 1$, $S^{1,2} = \{1\}$ et dim $S^{1,2} = 1$, $S^{1,3} = \{1\}$ et dim $S^{1,3} = 1$, $S^{1,4} = \emptyset$ et dim $S^{1,4} = 0$.

D_1, la matrice de $\psi_{2,1}$, est alors la matrice, de dimensions 4×3, des coefficients des 3 formes f_1, f_2, f_3, de degrés 1, sur la base, à 3 éléments, $\{x, y, z, t\}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a'_1 & a''_1 \\ a_2 & a'_2 & a''_2 \\ a_3 & a'_3 & a''_3 \\ a_4 & a'_4 & a''_4 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_0(X)$, d'ordre 4, est telle que :

$$M_0(X) = \begin{bmatrix} \Delta_0(X) \\ D_1^T \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1(X')$, d'ordre 4, est telle que :

$M_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta_1(X') & D_1 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_1(X') = M_0^T(X)$.

Alors $R(f_1, f_2, f_3, f_4) = \pm \det M_0(X) = \pm \det M_1(X')$.

Exemple (très simple)

$f_1 = a_1\, x$
$f_2 = a'_2\, y$
$f_3 = a''_3\, z$
$f_4 = a'''_{10}\, t^2$. Posons $\lambda \triangleq a_1\, a'_2\, a''_3\, a'''_{10}$.

Méthode de Lang

On trouve $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = a_1\, a'_2\, a''_3$ et $R(f_1, f_2, f_3, f_4) = a_1^2\, a_2'^2\, a_3''^2\, a'''_{10}$.

Méthode utilisant les bezoutiens

On trouve $M_0(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_3 & 0 \end{bmatrix}$ et
$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = -\det\, M_0(X) = \lambda\, a_1\, a'_2\, a''_3 = a_1^2\, a_2'^2\, a_3''^2\, a'''_{10}$.

6.4.2 Cas pour lequel $d_1 = 1,\, d_2 = 1,\, d_3 = 1,\, d_4 = 3$

On a $t_4 = 2$, $D = d_2\, d_3\, d_4 + d_1\, d_3\, d_4 + d_1\, d_2\, d_4 + d_1\, d_2\, d_3 = 10$. $r = E(\frac{t_4}{2}) = 1$.

On note :

$f_1 = a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4\, t$
$f_2 = a'_1\, x + a'_2\, y + a'_3\, z + a'_4\, t$
$f_3 = a''_1\, x + a''_2\, y + a''_3\, z + a''_4\, t$
$f_4 = a'''_1\, x^3 + a'''_2\, x^2\, y + a'''_3\, x^2\, z + a'''_4\, x^2\, t + a'''_5\, x\, y^2 + a'''_6\, x\, y\, z + a'''_7\, x\, y\, t$
$+ a'''_8\, x\, z^2 + a'''_9\, x\, z\, t + a'''_{10}\, x\, t^2 + a'''_{11}\, y^3 + a'''_{12}\, y^2\, z + a'''_{13}\, y^2\, t + a'''_{14}\, y\, z^2 + a'''_{15}\, y\, z\, t$
$+ a'''_{16}\, y\, t^2 + a'''_{17}\, z^3 + a'''_{18}\, z^2\, t + a'''_{19}\, z\, t^2 + a'''_{20}\, t^3$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est de degré $d_2\, d_3\, d_4 = 3$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\, d_3\, d_4 = 3$ en les coefficients de f_2, de degré $d_1\, d_2\, d_4 = 3$ en les coefficients de f_3 et de degré $d_1\, d_2\, d_3 = 1$ en les coefficients de f_4.

Méthode de Lang

On trouve : $\Delta_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_2 & a''_3 & a''_4 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_3 & a''_4 \end{vmatrix}$,
$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_4 \end{vmatrix}$, $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix}$ et
$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = f_4(\Delta_1,\, \Delta_2,\, \Delta_3,\, \Delta_4)$ [37] [42].

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 + d_4 - 4 = 0 < d_1 + d_2 - 1 = 1$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3 + d_4 - 4 = 0 < m < d_1 + d_2 = 2$ i.e. pour $m = 1$.

42. pp. 401-402 théorème 3.17

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X)\,(1-X)\,(1-X^3)}{(1-X)^4} = 1 + X + X^2$. Donc $H_{(1,1,1,3)}(0) = 1$, $H_{(1,1,1,3)}(1) = 1$,$H_{(1,1,1,3)}(2) = 1$ et $H_{(1,1,1,3)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 3$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(2) = 9$, $i(1) = 3$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 10$, $\rho(1) = 7$, $\rho(2) = 10$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X') = a_1$, $\Delta_{12}(X,\, X') = a_2$, $\Delta_{13}(X,\, X') = a_3$, $\Delta_{14}(X,\, X') = a_4$

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'_1$, $\Delta_{22}(X,\, X') = a'_2$, $\Delta_{23}(X,\, X') = a'_3$, $\Delta_{24}(X,\, X') = a'_4$

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''_1$, $\Delta_{32}(X,\, X') = a''_2$, $\Delta_{33}(X,\, X') = a''_3$, $\Delta_{34}(X,\, X') = a''_4$

$\Delta_{41}(X,\, X') = a'''_1\,(x^2+x\,x'+x'^2)+a'''_2\,(x+x')\,y+a'''_3\,(x+x')\,z+a'''_4\,(x+x')\,t$
$+\, a'''_5\,y^2 + a'''_6\,y\,z + a'''_7\,y\,t + a'''_8\,z^2 + a'''_9\,z\,t + a'''_{10}\,t^2$

$\Delta_{42}(X,\, X') = a'''_2\,x'^2+a'''_5\,x'\,(y+y')+a'''_6\,x'\,z+a'''_7\,x'\,t+a'''_{11}\,(y^2+y\,y'+y'^2)$
$+\, a'''_{12}\,(y+y')\,z + a'''_{13}\,(y+y')\,t + a'''_{14}\,z^2 + a'''_{15}\,z\,t + a'''_{16}\,t^2$

$\Delta_{43}(X,\, X') = a'''_3\,x'^2 + a'''_6\,x'\,y' + a'''_8\,x'\,(z+z') + a'''_9\,x'\,t + a'''_{12}\,y'^2$
$+\, a'''_{14}\,y'\,(z+z') + a'''_{15}\,y'\,t + a'''_{17}\,(z^2 + z\,z' + z'^2) + a'''_{18}\,(z+z')\,t + a'''_{19}\,t^2$

$\Delta_{44}(X,\, X') = a'''_4\,x'^2 + a'''_7\,x'\,y' + a'''_9\,x'\,z' + a'''_{10}\,x'\,(t+t') + a'''_{13}\,y'^2$
$+\, a'''_{15}\,y'\,z' + a'''_{16}\,y'\,(t+t') + a'''_{18}\,z'^2 + a'''_{19}\,z'\,(t+t') + a'''_{20}\,(t^2 + t\,t' + t'^2)$.

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 \\ \Delta_{41}(X,\, X') & \Delta_{42}(X,\, X') & \Delta_{43}(X,\, X') & \Delta_{44}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X)$
$+\, [\Delta_{1000}(X)\,x' + \Delta_{0100}(X)\,y' + \Delta_{0010}(X)\,z' + \Delta_{0001}(X)\,t']$
$+\, [\Delta^{0000}_{2000}(X)\,x'^2 + \Delta^{0000}_{1100}(X)\,x'\,y' + \,\ldots\, + \Delta^{0000}_{0002}(X)\,t'^2]$, avec :

$\Delta_{0000}(X)$ de degré 2, $\Delta_{1000}(X)$, $\Delta_{0100}(X)$, $\Delta_{0010}(X)$, $\Delta_{0001}(X)$ de degrés 1, $\Delta^{0000}_{2000}(X)$, $\Delta^{0000}_{1100}(X)$, $\ldots$, $\Delta^{0000}_{0002}(X)$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$\Delta_{1000}(X) = \Delta^{1000}_{1000}(X)\,x + \Delta^{0100}_{1000}(X)\,y + \Delta^{0010}_{1000}(X)\,z + \Delta^{0001}_{1000}(X)\,t$
$\Delta_{0100}(X) = \Delta^{1000}_{0100}(X)\,x + \Delta^{0100}_{0100}(X)\,y + \Delta^{0010}_{0100}(X)\,z + \Delta^{0001}_{0100}(X)\,t$
$\Delta_{0010}(X) = \Delta^{1000}_{0010}(X)\,x + \Delta^{0100}_{0010}(X)\,y + \Delta^{0010}_{0010}(X)\,z + \Delta^{0001}_{0010}(X)\,t$
$\Delta_{0001}(X) = \Delta^{1000}_{0001}(X)\,x + \Delta^{0100}_{0001}(X)\,y + \Delta^{0010}_{0001}(X)\,z + \Delta^{0001}_{0001}(X)\,t$

Soit $\Delta_1(X)$ la matrice, d' ordre 4 :

$$\Delta_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta_{1000}^{1000}(X) & \Delta_{0100}^{1000}(X) & \Delta_{0010}^{1000}(X) & \Delta_{0001}^{1000}(X) \\ \Delta_{1000}^{0100}(X) & \Delta_{0100}^{0100}(X) & \Delta_{0010}^{0100}(X) & \Delta_{0001}^{0100}(X) \\ \Delta_{1000}^{0010}(X) & \Delta_{0100}^{0010}(X) & \Delta_{0010}^{0010}(X) & \Delta_{0001}^{0010}(X) \\ \Delta_{1000}^{0001}(X) & \Delta_{0100}^{0001}(X) & \Delta_{0010}^{0001}(X) & \Delta_{0001}^{0001}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X')$
$+ [\Delta_{1000}(X')\, x + \Delta_{0100}(X')\, y + \Delta_{0010}(X')\, z + \Delta_{0001}(X')\, t]$
$+ [\Delta_{2000}^{0000}(X')\, x^2 + \Delta_{1100}^{0000}(X')\, x\, y + \ldots + \Delta_{0002}^{0000}(X')\, t^2]$, avec :

$\Delta_{0000}(X')$ de degré 2, $\Delta_{1000}(X')$, $\Delta_{0100}(X')$, $\Delta_{0010}(X')$, $\Delta_{0001}(X')$ de degrés 1, $\Delta_{2000}^{0000}(X')$, $\Delta_{1100}^{0000}(X')$, $\ldots$, $\Delta_{0002}^{0000}(X')$ de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\begin{aligned} \Delta_{1000}(X') &= \Delta_{1000}^{1000}(X')\, x' + \Delta_{1000}^{0100}(X')\, y' + \Delta_{1000}^{0010}(X')\, z' + \Delta_{1000}^{0001}(X')\, t' \\ \Delta_{0100}(X') &= \Delta_{0100}^{1000}(X')\, x' + \Delta_{0100}^{0100}(X')\, y' + \Delta_{0100}^{0010}(X')\, z' + \Delta_{0100}^{0001}(X')\, t' \\ \Delta_{0010}(X') &= \Delta_{0010}^{1000}(X')\, x' + \Delta_{0010}^{0100}(X')\, y' + \Delta_{0010}^{0010}(X')\, z' + \Delta_{0010}^{0001}(X')\, t' \\ \Delta_{0001}(X') &= \Delta_{0001}^{1000}(X')\, x' + \Delta_{0001}^{0100}(X')\, y' + \Delta_{0001}^{0010}(X')\, z' + \Delta_{0001}^{0001}(X')\, t' \end{aligned}$$

Soit $\Delta_1(X')$ la matrice, d'ordre 4 :

$$\Delta_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta_{1000}^{1000}(X') & \Delta_{0100}^{1000}(X') & \Delta_{0010}^{1000}(X') & \Delta_{0001}^{1000}(X') \\ \Delta_{1000}^{0100}(X') & \Delta_{0100}^{0100}(X') & \Delta_{0010}^{0100}(X') & \Delta_{0001}^{0100}(X') \\ \Delta_{1000}^{0010}(X') & \Delta_{0100}^{0010}(X') & \Delta_{0010}^{0010}(X') & \Delta_{0001}^{0010}(X') \\ \Delta_{1000}^{0001}(X') & \Delta_{0100}^{0001}(X') & \Delta_{0010}^{0001}(X') & \Delta_{0001}^{0001}(X') \end{bmatrix}.$$ Elle est telle que $\Delta_1(X') = \Delta_1^T(X)$.

On a $S^{1,\,1} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,1} = 1$, $S^{1,\,2} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,2} = 1$, $S^{1,\,3} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,3} = 1$, $S^{1,\,4} = \emptyset$ et dim $S^{1,\,4} = 0$.

D_1, la matrice de $\psi_{2,\,1}$, est alors la matrice, de dimensions 4×3, des coefficients des 3 formes f_1, f_2, f_3, de degrés 1, sur la base, à 3 éléments, $\{x,\, y,\, z,\, t\}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_1' & a_1'' \\ a_2 & a_2' & a_2'' \\ a_3 & a_3' & a_3'' \\ a_4 & a_4' & a_4'' \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1(X)$, d'ordre 7, est telle que :

$$M_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta_1(X) & D_1 \\ D_1^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_1(X')$, d'ordre 7, est telle que :

$M_1(X') = \begin{bmatrix} \Delta_1(X') & D_1 \\ D_1^T & 0 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_1(X') = M_1^T(X)$.

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \pm \det M_1(X) = \pm \det M_1(X')$.

Exemple (très simple)

$f_1 = a_1\, x$
$f_2 = a'_2\, y$
$f_3 = a''_3\, z$
$f_4 = a'''_{20}\, t^3$. Posons $\lambda \triangleq a_1\, a'_2\, a''_3\, a'''_{20}$.

Méthode de Lang

On trouve $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = a_1\, a'_2\, a''_3$ et
$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = a_1^3\, a_2'^3\, a_3''^3\, a'''_{20}$.

Méthode utilisant les bezoutiens

On trouve $M_1(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et
$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = -\det M_0(X) = \lambda\, a_1^2\, a_2'^2\, a_3''^2 = a_1^3\, a_2'^3\, a_3''^3\, a'''_{20}$.

6.4.3 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$, $d_4 = 4$

On a $t_4 = 3$, $D = d_2\, d_3\, d_4 + d_1\, d_3\, d_4 + d_1\, d_2\, d_4 + d_1\, d_2\, d_3 = 13$. $r = E(\frac{t_4}{2}) = 1$.

On note :

$f_1 = a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4\, t$
$f_2 = a'_1\, x + a'_2\, y + a'_3\, z + a'_4\, t$
$f_3 = a''_1\, x + a''_2\, y + a''_3\, z + a''_4\, t$
$f_4 = a'''_1\, x^4 + a'''_2\, x^3\, y + a'''_3\, x^3\, z + a'''_4\, x^3\, t + a'''_5\, x^2\, y^2 + a'''_6\, x^2\, y\, z + a'''_7\, x^2\, y\, t$
$+ a'''_8\, x^2\, z^2 + a'''_9\, x^2\, z\, t + a'''_{10}\, x^2\, t^2 + a'''_{11}\, x\, y^3 + a'''_{12}\, x\, y^2\, z + a'''_{13}\, x\, y^2\, t + a'''_{14}\, x\, y\, z^2$
$+ a'''_{15}\, x\, y\, z\, t + a'''_{16}\, x\, y\, t^2 + a'''_{17}\, x\, z^3 + a'''_{18}\, x\, z^2\, t + a'''_{19}\, x\, z\, t^2 + a'''_{20}\, x\, t^3 + a'''_{21}\, y^4$
$+ a'''_{22}\, y^3\, z + a'''_{23}\, y^3\, t + a'''_{24}\, y^2\, z^2 + a'''_{25}\, y^2\, z\, t + a'''_{26}\, y^2\, t^2 + a'''_{27}\, y\, z^3 + a'''_{28}\, y\, z^2\, t$
$+ a'''_{29}\, y\, z\, t^2 + a'''_{30}\, y\, t^3 + a'''_{31}\, z^4 + a'''_{32}\, z^3\, t + a'''_{33}\, z^2\, t^2 + a'''_{34}\, z\, t^3 + a'''_{35}\, t^4$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est de degré $d_2\, d_3\, d_4 = 4$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\, d_3\, d_4 = 4$ en les coefficients de f_2, de degré $d_1\, d_2\, d_4 = 4$ en les coefficients de f_3 et de degré $d_1\, d_2\, d_3 = 1$ en les coefficients de f_4.

Méthode de Lang

On trouve : $\Delta_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_2 & a''_3 & a''_4 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_3 & a''_4 \end{vmatrix}$,
$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_4 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix}$ et
$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = f_4(\Delta_1,\, \Delta_2,\, \Delta_3,\, \Delta_4)$ [37] [43].

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 + d_4 - 4 = 1 = d_1 + d_2 - 1 = 1$; donc le résultat général précédent ne s'applique pas et on ne peut pas exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ sous forme d'un déterminant. Mais on peut le faire sous forme d'un rapport de 2 déterminants.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X)\,(1-X)\,(1-X^4)}{(1-X)^4} = 1 + X + X^2 + X^3$. Donc $H_{(1,\,1,\,1,\,4)}(0) = 1$, $H_{(1,\,1,\,1,\,4)}(1) = 1$, $H_{(1,\,1,\,1,\,4)}(2) = 1$, $H_{(1,\,1,\,1,\,4)}(3) = 1$ et
$H_{(1,\,1,\,1,\,4)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 4$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(3) = 19$, $i(2) = 9$, $i(1) = 3$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 20$, $\rho(1) = 13$, $\rho(2) = 13$, $\rho(3) = 20$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$$\Delta_{11}(X,\, X') = a_1, \Delta_{12}(X,\, X') = a_2,\ \Delta_{13}(X,\, X') = a_3, \Delta_{14}(X,\, X') = a_4$$

$$\Delta_{21}(X,\, X') = a'_1, \Delta_{22}(X,\, X') = a'_2,\ \Delta_{23}(X,\, X') = a'_3, \Delta_{24}(X,\, X') = a'_4$$

$$\Delta_{31}(X,\, X') = a''_1, \Delta_{32}(X,\, X') = a''_2,\ \Delta_{33}(X,\, X') = a''_3, \Delta_{34}(X,\, X') = a''_4$$

$\Delta_{41}(X,\, X') = a'''_1\,(x^3 + x^2\,x' + x\,x'^2 + x'^3) + a'''_2\,(x^2 + x\,x' + x'^2)\,y$
$+ a'''_3\,(x^2 + x\,x' + x'^2)\,z + a'''_4\,(x^2 + x\,x' + x'^2)\,t + a'''_5\,(x + x')\,y^2 + a'''_6\,(x + x')\,y\,z$
$+ a'''_7\,(x + x')\,y\,t + a'''_8\,(x + x')\,z^2 + a'''_9\,(x + x')\,z\,t + a'''_{10}\,(x + x')\,t^2 + a'''_{11}\,y^3 + a'''_{12}\,y^2\,z$
$+ a'''_{13}\,y^2\,t + a'''_{14}\,y\,z^2 + a'''_{15}\,y\,z\,t + a'''_{16}\,y\,t^2 + a'''_{17}\,z^3 + a'''_{18}\,z^2\,t + a'''_{19}\,z\,t^2 + a'''_{20}\,t^3$

43. pp. 401-402 théorème 3.17

$$\Delta_{42}(X,\, X') = a_2'''\, x'^3 + a_5'''\, x'^2\, (y+y') + a_6'''\, x'^2\, z + a_7'''\, x'^2\, t$$
$$+ a_{11}'''\, x'\, (y^2 + y\, y' + y'^2) + a_{12}'''\, x'\, (y+y')\, z + a_{13}'''\, x'\, (y+y')\, t + a_{14}'''\, x'\, z^2 + a_{15}'''\, x'\, z\, t$$
$$+ a_{16}'''\, x'\, t^2 + a_{21}'''\, (y^3 + y^2\, y' + y\, y'^2 + y'^3) + a_{22}'''\, (y^2 + y\, y' + y'^2)\, z + a_{23}'''\, (y^2 + y\, y' + y'^2)\, t$$
$$+ a_{24}'''\, (y+y')\, z^2 + a_{25}'''\, (y+y')\, z\, t + a_{26}'''\, (y+y')\, t^2 + a_{27}'''\, z^3 + a_{28}'''\, z^2\, t + a_{29}'''\, z\, t^2 + a_{30}'''\, t^3$$

$$\Delta_{43}(X,\, X') = a_3'''\, x'^3 + a_6'''\, x'^2\, y' + a_8'''\, x'^2\, (z+z') + a_9'''\, x'^2\, t + a_{12}'''\, x'\, y'^2$$
$$+ a_{14}'''\, x'\, y'\, (z+z') + a_{15}'''\, x'\, y'\, t + a_{17}'''\, x'\, (z^2 + z\, z' + z'^2) + a_{18}'''\, x'\, (z+z')\, t + a_{19}'''\, x'\, t^2$$
$$+ a_{22}'''\, y'^3 + a_{24}'''\, y'^2\, (z+z') + a_{25}'''\, y'^2\, t + a_{27}'''\, y'\, (z^2 + z\, z' + z'^2) + a_{28}'''\, y'\, (z+z')\, t$$
$$+ a_{29}'''\, y'\, t^2 + a_{31}'''\, (z^3 + z^2\, z' + z\, z'^2 + z'^3) + a_{32}'''\, (z^2 + z\, z' + z'^2)\, t + a_{33}'''\, (z+z')\, t^2 + a_{34}'''\, t^3$$

$$\Delta_{44}(X,\, X') = a_4'''\, x'^3 + a_7'''\, x'^2\, y' + a_9'''\, x'^2\, z' + a_{10}'''\, x'^2\, (t+t') + a_{13}'''\, x'\, y'^2$$
$$+ a_{15}'''\, x'\, y'\, z' + a_{16}'''\, x'\, y'\, (t+t') + a_{18}'''\, x'\, z'^2 + a_{19}'''\, x'\, z'\, (t+t') + a_{20}'''\, x'\, (t^2 + t\, t' + t'^2)$$
$$+ a_{23}'''\, y'^3 + a_{25}'''\, y'^2\, z' + a_{26}'''\, y'^2\, (t+t') + a_{28}'''\, y'\, z'^2 + a_{29}'''\, y'\, z'\, (t+t')$$
$$+ a_{30}'''\, y'\, (t^2 + t\, t' + t'^2) + a_{32}'''\, z'^3 + a_{33}'''\, z'^2\, (t+t') + a_{34}'''\, z'\, (t^2 + t\, t' + t'^2)$$
$$+ a_{35}'''\, (t^3 + t^2\, t' + t\, t'^2 + t'^3)$$

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & a_4'' \\ \Delta_{41}(X,\, X') & \Delta_{42}(X,\, X') & \Delta_{43}(X,\, X') & \Delta_{44}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X)$
$$+ [\Delta_{1000}(X)\, x' + \Delta_{0100}(X)\, y' + \Delta_{0010}(X)\, z' + \Delta_{0001}(X)\, t']$$
$$+ [\Delta_{2000}(X)\, x'^2 + \Delta_{1100}(X)\, x'\, y' + \ldots + \Delta_{0002}(X)\, t'^2]$$
$$+ [\Delta_{3000}^{0000}(X)\, x'^3 + \Delta_{2100}^{0000}(X)\, x'^2\, y' + \ldots + \Delta_{0003}^{0000}(X)\, z'^3]$$

$\Delta_{0000}(X)$ de degré 3, $\Delta_{1000}(X)$, $\Delta_{0100}(X)$, $\Delta_{0010}(X)$, $\Delta_{0001}(X)$ de degrés 2, $\Delta_{2000}(X)$, $\ldots$, $\Delta_{0002}(X)$ de degrés 1, $\Delta_{3000}^{0000}(X)$, $\ldots$, $\Delta_{0003}^{0000}(X)$ de degrés 0 (donc constants). On pose :

$$\Delta_{2000}(X) = \Delta_{2000}^{1000}(X)\, x + \Delta_{2000}^{0100}(X)\, y + \Delta_{2000}^{0010}(X)\, z + \Delta_{2000}^{0001}(X)\, t$$
$$\Delta_{1100}(X) = \Delta_{1100}^{1000}(X)\, x + \Delta_{1100}^{0100}(X)\, y + \Delta_{1100}^{0010}(X)\, z + \Delta_{1100}^{0001}(X)\, t$$
$$\vdots$$
$$\Delta_{0002}(X) = \Delta_{0002}^{1000}(X)\, x + \Delta_{0002}^{0100}(X)\, y + \Delta_{0002}^{0010}(X)\, z + \Delta_{0002}^{0001}(X)\, t$$

Soit $\Delta_1(X)$ la matrice, de dimensions 4×10 :

$$\Delta_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta_{2000}^{1000}(X) & \Delta_{1100}^{1000}(X) & \ldots & \Delta_{0002}^{1000}(X) \\ \Delta_{2000}^{0100}(X) & \Delta_{1100}^{0100}(X) & \ldots & \Delta_{0002}^{0100}(X) \\ \Delta_{2000}^{0010}(X) & \Delta_{1100}^{0010}(X) & \ldots & \Delta_{0002}^{0010}(X) \\ \Delta_{2000}^{0001}(X) & \Delta_{1100}^{0001}(X) & \ldots & \Delta_{0002}^{0001}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X')$
$+ \, [\Delta_{1000}(X')\, x + \Delta_{0100}(X')\, y + \Delta_{0010}(X')\, z + \Delta_{0001}(X')\, t]$
$+ \, [\Delta_{2000}(X')\, x^2 + \Delta_{1100}(X')\, x\, y + \, \ldots \, + \Delta_{0002}(X')\, t^2]$
$+ \, [\Delta^{0000}_{3000}(X')\, x^3 + \Delta^{0000}_{2100}(X')\, x^2\, y + \, \ldots \, + \Delta^{0000}_{0003}(X')\, z^3]$

$\Delta_{0000}(X')$ de degré 3, $\Delta_{1000}(X')$, $\Delta_{0100}(X')$, $\Delta_{0010}(X')$, $\Delta_{0001}(X')$ de degrés 2, $\Delta_{2000}(X')$, $\ldots$, $\Delta_{0002}(X')$ de degrés 1, $\Delta^{0000}_{3000}(X')$, $\ldots$, $\Delta^{0000}_{0003}(X')$ de degrés 0 (donc constants). On pose :

$$\begin{aligned}
\Delta_{1000}(X') &= \Delta^{2000}_{1000}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{1000}(X')\, x'\, y' + \, \ldots \, + \Delta^{0002}_{1000}(X')\, t'^2 \\
\Delta_{0100}(X') &= \Delta^{2000}_{0100}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{0100}(X')\, x'\, y' + \, \ldots \, + \Delta^{0002}_{0100}(X')\, t'^2 \\
\Delta_{0010}(X') &= \Delta^{2000}_{0010}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{0010}(X')\, x'\, y' + \, \ldots \, + \Delta^{0002}_{0010}(X')\, t'^2 \\
\Delta_{0001}(X') &= \Delta^{2000}_{0001}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{0001}(X')\, x'\, y' + \, \ldots \, + \Delta^{0002}_{0001}(X')\, t'^2
\end{aligned}$$

Soit $\Delta_2(X')$ la matrice, de dimensions 10×4 :

$$\Delta_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta^{2000}_{1000}(X') & \Delta^{2000}_{0100}(X') & \Delta^{2000}_{0010}(X') & \Delta^{2000}_{0001}(X') \\ \Delta^{1100}_{1000}(X') & \Delta^{1100}_{0100}(X') & \Delta^{1100}_{0010}(X') & \Delta^{1100}_{0001}(X') \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^{0002}_{1000}(X') & \Delta^{0002}_{0100}(X') & \Delta^{0002}_{0010}(X') & \Delta^{0002}_{0001}(X') \end{bmatrix} = \Delta^T_1(X).$$

On a $S^{1,\,1} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,1} = 1$, $S^{1,\,2} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,2} = 1$, $S^{1,\,3} = \{1\}$ et dim $S^{1,\,3} = 1$, $S^{1,\,4} = \emptyset$ et dim $S^{1,\,4} = 0$.

D_1, la matrice de $\psi_{2,\,1}$, est alors la matrice, de dimensions 4×3, des coefficients des 3 formes f_1, f_2, f_3, de degrés 1, sur la base, à 4 éléments, $\{x,\, y,\, z,\, t\}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a'_1 & a''_1 \\ a_2 & a'_2 & a''_2 \\ a_3 & a'_3 & a''_3 \\ a_4 & a'_4 & a''_4 \end{bmatrix}.$$

On a $E^{1,\,1} = \emptyset$ et dim $E^{1,\,1} = 0$, $E^{1,\,2} = \emptyset$ et dim $E^{1,\,2} = 0$, $E^{1,\,3} = \emptyset$ et dim $E^{1,\,3} = 0$, $E^{1,\,4} = \emptyset$ [44] et dim $E^{1,\,4} = 0$.

$E^{1,\,1} \cup E^{1,\,2} \cup E^{1,\,3} = \emptyset$ et il n'y a pas de monômes $X^\gamma \in S^1\, \mathbb{C}^4 = \{x,\, y,\, z,\, t\}$ avec 2 indices i et j différents tels que $\gamma_i \geqslant d_i$ et $\gamma_j \geqslant d_j$. Par conséquent il n'y a ni colonne ni ligne à extraire de la matrice D_1 et la sous-matrice E_1, de la matrice D_1 n'existe pas.

On a $S^{2,\,1} = \{x,\, y,\, z,\, t\}$ et dim $S^{2,\,1} = 4$, $S^{2,\,2} = \{y,\, z,\, t\}$ et dim $S^{2,\,2} = 3$, $S^{2,\,3} = \{z,\, t\}$ et dim $S^{2,\,3} = 2$, $S^{2,\,4} = \emptyset$ et dim $S^{2,\,4} = 0$.

44. on a toujours $E^{1,\,k} = \emptyset$ comme l'indique [14] p. 6

D_2, la matrice de $\psi_{2,2}$, est alors la matrice, de dimensions 10×9, des coefficients des 9 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $z\,f_1$, $t\,f_1$, $y\,f_2$, $z\,f_2$, $t\,f_2$, $z\,f_3$, $t\,f_3$, de degrés 2, sur la base, à 10 éléments, $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, x\,t,\, y^2,\, y\,z,\, y\,t,\, z^2,\, z\,t,\, t^2\}$:

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & a'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a'_1 & 0 & a''_1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a'_1 & 0 & a''_1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & a'_3 & a'_2 & 0 & a''_2 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & a_2 & a'_4 & 0 & a'_2 & 0 & a''_2 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a'_3 & 0 & a''_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & 0 & a'_4 & a'_3 & a''_4 & a''_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a'_4 & 0 & a''_4 \end{bmatrix}.$$

On a $E^{2,1} = \{y,\, z\}$ et dim $E^{2,1} = 2$, $E^{2,2} = \{z\}$ et dim $E^{2,2} = 1$, $E^{2,3} = \emptyset$ et dim $E^{2,3} = 0$, $E^{2,4} = \emptyset$ [45] et dim $E^{2,4} = 0$.

$E^{2,1} \cup E^{2,2} \cup E^{2,3} = \{y,\, z\}$ et il y a 3 monômes $X^\gamma \in S^2\,\mathbb{C}^4 = \{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, x\,t,\, y^2,\, y\,z,\, y\,t,\, z^2,\, z\,t,\, t^2\}$ avec 2 indices i et j différents tels que $\gamma_i \geqslant d_i$ et $\gamma_j \geqslant d_j$: il s'agit de $x\,y$, $x\,z$, yz. Par conséquent il faut extraire les colonnes $y\,f_1$, $z\,f_1$, $z\,f_2$ et la lignex $x\,y$, $x\,z$, $y\,z$ de la matrice D_2 pour constituer la sous-matrice E_2 : soit

$$E_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a'_1 \\ a_3 & a_2 & a'_2 \end{bmatrix} \text{ et } \det\, E_2 = a_1^2\, a'_2.$$

La matrice $M_1(X)$, d'ordre 13, est telle que : $M_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta_1(X) & D_1 \\ D_2^T & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice $M_2(X')$, d'ordre 13, est telle que : $M_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_2(X') & D_2 \\ D_1^T & 0 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_2(X') = M_1^T(X)$.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \pm\, \frac{\det\, M_1(X)}{\det\, E_2} = \pm\, \frac{1}{a_1^2\, a'_2}\, \det\, M_1(X)$ ou $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \pm\, \frac{\det\, M_2(X')}{\det\, E_2} = \pm\, \frac{1}{a_1^2\, a'_2}\, \det\, M_2(X')$.

Exemple (très simple)

$f_1 = a_1\, x$
$f_2 = a'_2\, y$
$f_3 = a''_3\, z$
$f_4 = a'''_{35}\, t^4$. Posons $\lambda \triangleq a_1\, a'_2\, a''_3\, a'''_{35}$.

45. on a toujours $E^{2,k} = \emptyset$ comme l'indique [14] p. 6

Méthode de Lang

On trouve $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = a_1\, a'_2\, a''_3$ et $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = a_1^4\, a_2'^4\, a_3''^4\, a'''_{35}$.

Méthode utilisant les bezoutiens

$$\text{On trouve } M_1(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et det $M_1(X) = -\lambda\, a_1^5\, a_2'^4\, a_3''^3 = -a_1^6\, a_2'^5\, a_3''^4\, a'''_{35}$ et on a toujours det $E_2 = a_1^2\, a'_2$. Par conséquent : $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = -\frac{\det\, M_1(X)}{\det\, E_2} = a_1^4\, a_2'^4\, a_3''^4\, a'''_{35}$.

6.4.4 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$

On pourra consulter [14].

On a $t_4 = 3$, $D = d_2\, d_3\, d_4 + d_1\, d_3\, d_4 + d_1\, d_2\, d_4 + d_1\, d_2\, d_3 = 17$. $r = E(\frac{t_4}{2}) = 1$.

On note :

$f_1 = a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4\, t$
$f_2 = a'_1\, x + a'_2\, y + a'_3\, z + a'_4\, t$
$f_3 = a''_1\, x^2 + a''_2\, x\, y + a''_3\, x\, z + a''_4\, x\, t + a''_5\, y^2 + a''_6\, y\, z + a''_7\, y\, t + a''_8\, z^2 + a''_9\, z\, t + a''_{10}\, t^2$
$f_4 = a'''_1\, x^3 + a'''_2\, x^2\, y + a'''_3\, x^2\, z + a'''_4\, x^2\, t + a'''_5\, x\, y^2 + a'''_6\, x\, y\, z + a'''_7\, x\, y\, t$
$+ a'''_8\, x\, z^2 + a'''_9\, x\, z\, t + a'''_{10}\, x\, t^2 + a'''_{11}\, y^3 + a'''_{12}\, y^2\, z + a'''_{13}\, y^2\, t + a'''_{14}\, y\, z^2 + a'''_{15}\, y\, z\, t$
$+ a'''_{16}\, y\, t^2 + a'''_{17}\, z^3 + a'''_{18}\, z^2\, t + a'''_{19}\, z\, t^2 + a'''_{20}\, t^3$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est de degré $d_2\, d_3\, d_4 = 6$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\, d_3\, d_4 = 6$ en les coefficients de f_2, de degré $d_1\, d_2\, d_4 = 3$ en les coefficients de f_3 et de degré $d_1\, d_2\, d_3 = 2$ en les coefficients de f_4.

Méthode de Macaulay

ligne	monôme	x	y	z	t	réduit ?	var. marquée	forme
1	x^4	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^4 f_1}{x} = x^3 f_1$
2	$x^3 y$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^3 y f_1}{x} = x^2 y f_1$
3	$x^3 z$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^3 z f_1}{x} = x^2 z f_1$
4	$x^3 t$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^3 t f_1}{x} = x^2 t f_1$
5	$x^2 y^2$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^2 y^2 f_1}{x} = x y^2 f_1$
6	$x^2 y z$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^2 y z f_1}{x} = x y z f_1$
7	$x^2 y t$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^2 y t f_1}{x} = x y t f_1$
8	$x^2 z^2$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x^2 z^2 f_1}{x} = x z^2 f_1$
9	$x^2 z t$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^2 z t f_1}{x} = x z t f_1$
10	$x^2 t^2$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^2 t^2 f_1}{x} = x t^2 f_1$
11	$x y^3$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x y^3 f_1}{x} = y^3 f_1$
12	$x y^2 z$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x y^2 z f_1}{x} = y^2 z f_1$
13	$x y^2 t$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x y^2 t f_1}{x} = y^2 t f_1$
14	$x y z^2$	G	G	G	P	non	x	$\frac{x y z^2 f_1}{x} = y z^2 f_1$
15	$x y z t$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x y z t f_1}{x} = y z t f_1$
16	$x y t^2$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x y t^2 f_1}{x} = y t^2 f_1$
17	$x z^3$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x z^3 f_1}{x} = z^3 f_1$
18	$x z^2 t$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x z^2 t f_1}{x} = z^2 t f_1$
19	$x z t^2$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x z t^2 f_1}{x} = z t^2 f_1$
20	$x t^3$	G	P	P	G	non	x	$\frac{x t^3 f_1}{x} = t^3 f_1$
21	y^4	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^4 f_2}{y} = y^3 f_2$
22	$y^3 z$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^3 z f_2}{y} = y^2 z f_2$
23	$y^3 t$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^3 t f_2}{y} = y^2 t f_2$
24	$y^2 z^2$	P	G	G	P	non	y	$\frac{y^2 z^2 f_2}{y} = y z^2 f_2$
25	$y^2 z t$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^2 z t f_2}{y} = y z t f_2$
26	$y^2 t^2$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^2 t^2 f_2}{y} = y t^2 f_2$
27	$y z^3$	P	G	G	P	non	y	$\frac{y z^3 f_2}{y} = z^3 f_2$
28	$y z^2 t$	P	G	G	P	non	y	$\frac{y z^2 t f_2}{y} = z^2 t f_2$
29	$y z t^2$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y z t^2 f_2}{y} = z t^2 f_2$
30	$y t^3$	P	G	P	G	non	y	$\frac{y t^3 f_2}{y} = t^3 f_2$
31	z^4	P	P	G	P	oui	z	$\frac{z^4 f_3}{z^2} = z^2 f_3$
32	$z^3 t$	P	P	G	P	oui	z	$\frac{z^3 t f_3}{z^2} = z t f_3$
33	$z^2 t^2$	P	P	G	P	oui	z	$\frac{z^2 t^2 f_3}{z^2} = t^2 f_3$
34	$z t^3$	P	P	P	G	oui	t	$\frac{z t^3 f_4}{t^3} = z f_4$
35	t^4	P	P	P	G	oui	t	$\frac{t^4 f_4}{t^3} = t f_4$

La matrice A est celle des coefficients des 35 formes
$x^3\, f_1,\, x^2\, y\, f_1,\, \ldots\, ,\, t\, f_4$, qui figurent dans la colonne de droite du tableau précédent, sur la base, à 35 éléments, $\{x^4,\, x^3\, y,\, \ldots\, ,\, t^4\}$:

La matrice B est la sous-matrice, d'ordre 18, de la matrice A constituée des 18 lignes et colonnes 2, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15 , 16, 17, 18, 20, 24, 27 28, 30, qui correspondent aux monômes non réduits du tableau précédent.

$R(f_1,\, f_2,\, f_3) = \pm\, \frac{\det A}{\det B}$, de degré 17.

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 + d_4 - 4 = 1 = d_1 + d_2 - 1 = 1$; donc le résultat général précédent ne s'applique pas et on ne peut pas exprimer le résultant $R(f_1,\, f_2,\, f_3)$ sous forme d'un déterminant. Mais on peut le faire sous la forme d'un rapport de 2 déterminants.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X)\,(1-X^2)\,(1-X^3)}{(1-X)^4} = 1 + 2\,X + 2\,X^2 + X^3$. Donc $H_{(1,\,1,\,2,\,3)}(0) = 1$, $H_{(1,\,1,\,2,\,3)}(1) = 2$, $H_{(1,\,1,\,2,\,3)}(2) = 2$, $H_{(1,\,1,\,2,\,3)}(3) = 1$ et $H_{(1,\,1,\,2,\,3)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 4$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(3) = 19$, $i(2) = 8$, $i(1) = 2$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 20$, $\rho(1) = 12$, $\rho(2) = 12$, $\rho(3) = 20$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X') = a_1$, $\Delta_{12}(X,\, X') = a_2$, $\Delta_{13}(X,\, X') = a_3$, $\Delta_{14}(X,\, X') = a_4$,

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'_1$, $\Delta_{22}(X,\, X') = a'_2$, $\Delta_{23}(X,\, X') = a'_3$, $\Delta_{24}(X,\, X') = a'_4$,

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''_1\,(x + x') + a''_2\, y + a''_3\, z + a''_4\, t$,
$\Delta_{32}(X,\, X') = a''_2\, x' + a''_5\,(y + y') + a''_6\, z + a''_7\, t$,
$\Delta_{33}(X,\, X') = a''_3\, x' + a''_6\, y' + a''_8\,(z + z') + a''_9\, t$,
$\Delta_{34}(X,\, X') = a''_4\, x' + a''_7\, y' + a''_9\, z' + a''_{10}\,(t + t')$,

$\Delta_{41}(X,\, X') = a'''_1\,(x^2 + x\, x' + x'^2) + a'''_2\,(x + x')\, y + a'''_3\,(x + x')\, z + a'''_4\,(x + x')\, t + a'''_5\, y^2 + a'''_6\, y\, z + a'''_7\, y\, t + a'''_8\, z^2 + a'''_9\, z\, t + a'''_{10}\, t^2$

$\Delta_{42}(X,\, X') = a'''_2\, x'^2 + a'''_5\, x'\,(y + y') + a'''_6\, x'\, z + a'''_7\, x'\, t + a'''_{11}\,(y^2 + y\, y' + y'^2) + a'''_{12}\,(y + y')\, z + a'''_{13}\,(y + y')\, t + a'''_{14}\, z^2 + a'''_{15}\, z\, t + a'''_{16}\, t^2$

$\Delta_{43}(X,\, X') = a'''_3\, x'^2 + a'''_6\, x'\, y' + a'''_8\, x'\, (z + z') + a'''_9\, x'\, t + a'''_{12}\, y'^2$
$+ a'''_{14}\, y'\, (z + z') + a'''_{15}\, y'\, t + a'''_{17}\, (z^2 + z\, z' + z'^2) + a'''_{18}\, (z + z')\, t + a'''_{19}\, t^2$
$\Delta_{44}(X,\, X') = a'''_4\, x'^2 + a'''_7\, x'\, y' + a'''_9\, x'\, z' + a'''_{10}\, x'\, (t + t') + a'''_{13}\, y'^2$
$+ a'''_{15}\, y'\, z' + a'''_{16}\, y'\, (t + t') + a'''_{18}\, z'^2 + a'''_{19}\, z'\, (t + t') + a'''_{20}\, (t^2 + t\, t' + t'^2).$

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} \Delta_{11}(X,\, X') & \Delta_{12}(X,\, X') & \Delta_{13}(X,\, X') & \Delta_{14}(X,\, X') \\ \Delta_{21}(X,\, X') & \Delta_{22}(X,\, X') & \Delta_{23}(X,\, X') & \Delta_{24}(X,\, X') \\ \Delta_{31}(X,\, X') & \Delta_{32}(X,\, X') & \Delta_{33}(X,\, X') & \Delta_{34}(X,\, X') \\ \Delta_{41}(X,\, X') & \Delta_{42}(X,\, X') & \Delta_{43}(X,\, X') & \Delta_{44}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X)$
$+ [\Delta_{1000}(X)\, x' + \Delta_{0100}(X)\, y' + \Delta_{0010}(X)\, z' + \Delta_{0001}(X)\, t']$
$+ [\Delta_{2000}(X)\, x'^2 + \Delta_{1100}(X)\, x'\, y' + \ldots + \Delta_{0002}(X)\, t'^2]$
$+ [\Delta^{0000}_{3000}(X)\, x'^3 + \Delta^{0000}_{2100}(X)\, x'^2\, y' + \ldots + \Delta^{0000}_{0003}(X)\, t'^3]$, avec :

$\Delta_{0000}(X)$ de degré 3, $\Delta_{1000}(X)$, $\Delta_{0100}(X)$, ... de degrés 2, $\Delta_{2000}(X)$, $\Delta_{1100}(X)$, ... de degrés 1, $\Delta^{0000}_{3000}(X)$, $\Delta^{0000}_{2100}(X)$, ... de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$\Delta_{2000}(X) = \Delta^{1000}_{2000}(X)\, x + \Delta^{0100}_{2000}(X)\, y + \Delta^{0010}_{2000}(X)\, z + \Delta^{0001}_{2000}(X)\, t,$
$\Delta_{1100}(X) = \Delta^{1000}_{1100}(X)\, x + \Delta^{0100}_{1100}(X)\, y + \Delta^{0010}_{1100}(X)\, z + \Delta^{0001}_{1100}(X)\, t,$
$\vdots$
$\Delta_{0002}(X) = \Delta^{1000}_{0002}(X)\, x + \Delta^{0100}_{0002}(X)\, y + \Delta^{0010}_{0002}(X)\, z + \Delta^{0001}_{0002}(X)\, t.$

$\Delta^{1}_{2000}(X), \ldots, \Delta^{4}_{0002}(X)$ de degrés 0 (donc constants).

Soit $\Delta_1(X)$ la matrice, de dimensions 4×10 :

$$\Delta_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta^{1000}_{2000}(X) & \Delta^{1000}_{1100}(X) & \ldots & \Delta^{1000}_{0002}(X) \\ \Delta^{0100}_{2000}(X) & \Delta^{0100}_{1100}(X) & \ldots & \Delta^{0100}_{0002}(X) \\ \Delta^{0010}_{2000}(X) & \Delta^{0010}_{1100}(X) & \ldots & \Delta^{0010}_{0002}(X) \\ \Delta^{0001}_{2000}(X) & \Delta^{0001}_{1100}(X) & \ldots & \Delta^{0001}_{0002}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X')$
$+ [\Delta_{1000}(X')\, x + \Delta_{0100}(X')\, y + \Delta_{0010}(X')\, z + \Delta_{0001}(X')\, t]$
$+ [\Delta_{2000}(X')\, x^2 + \Delta_{1100}(X')\, x\, y + \ldots + \Delta_{0002}(X')\, t^2]$
$+ [\Delta^{0000}_{3000}(X')\, x^3 + \Delta^{0000}_{2100}(X')\, x^2\, y + \ldots + \Delta^{0000}_{0003}(X')\, t^3]$, avec :

$\Delta_{0000}(X')$ de degré 3, $\Delta_{1000}(X')$, $\Delta_{0100}(X')$, ... de degrés 2, $\Delta_{2000}(X')$, $\Delta_{1100}(X')$, ... de degrés 1, $\Delta^{0000}_{3000}(X')$, $\Delta^{0000}_{2100}(X')$, ... de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\begin{array}{l}
\Delta_{1000}(X') = \Delta^{2000}_{1000}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{1000}(X')\, x'\, y' + \ \ldots\ + \Delta^{0002}_{1000}(X')\, t'^2 \\
\Delta_{0100}(X') = \Delta^{2000}_{0100}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{0100}(X')\, x'\, y' + \ \ldots\ + \Delta^{0002}_{0100}(X')\, t'^2 \\
\Delta_{0010}(X') = \Delta^{2000}_{0010}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{0010}(X')\, x'\, y' + \ \ldots\ + \Delta^{0002}_{0010}(X')\, t'^2 \\
\Delta_{0001}(X') = \Delta^{2000}_{0001}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{0001}(X')\, x'\, y' + \ \ldots\ + \Delta^{0002}_{0001}(X')\, t'^2
\end{array}$$

Soit $\Delta_2(X')$ la matrice de dimensions 10×4 :

$$\Delta_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta^{2000}_{1000}(X') & \Delta^{2000}_{0100}(X') & \Delta^{2000}_{0010}(X') & \Delta^{2000}_{0001}(X') \\ \Delta^{1100}_{1000}(X') & \Delta^{1100}_{0100}(X') & \Delta^{1100}_{0010}(X') & \Delta^{1100}_{0001}(X') \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \Delta^{0002}_{1000}(X') & \Delta^{0002}_{0100}(X') & \Delta^{0002}_{0010}(X') & \Delta^{0002}_{0001}(X') \end{bmatrix} = \Delta_1^T(X).$$

• On a $S^{1,1} = \{1\}$ et dim $S^{1,1} = 1$, $S^{1,2} = \{1\}$ et dim $S^{1,2} = 1$, $S^{1,3} = \emptyset$ et dim $S^{1,3} = 0$, $S^{1,4} = \emptyset$ et dim $S^{1,4} = 0$.

D_1, la matrice de $\psi_{2,1}$, est alors la matrice, de dimensions 4×2, des coefficients des 2 formes $f_1,\ f_2$, de degrés 1, sur la base, à 4 éléments, $\{x,\ y,\ z,\ t\}$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a'_1 \\ a_2 & a'_2 \\ a_3 & a'_3 \\ a_4 & a'_4 \end{bmatrix}.$$

On a $E^{1,1} = \emptyset$ et dim $E^{1,1} = 0$, $E^{1,2} = \emptyset$ et dim $E^{1,2} = 0$, $E^{1,3} = \emptyset$ et dim $E^{1,3} = 0$, $E^{1,4} = \emptyset$ [46] et dim $E^{1,4} = 0$.

$E^{1,1} \cup E^{1,2} \cup E^{1,3} = \emptyset$ et il n'y a pas de monômes $X^\gamma \in S^1\,\mathbb{C}^4 = \{x,\ y,\ z,\ t\}$ avec 2 indices i et j différents tels que $\gamma_i \geqslant d_i$ et $\gamma_j \geqslant d_j$. Par conséquent il n'y a ni colonne ni ligne à extraire de la matrice D_1 et la sous-matrice E_1, de la matrice D_1 n'existe pas.

• On a $S^{2,1} = \{x,\ y,\ z,\ t\}$ et dim $S^{2,1} = 4$, $S^{2,2} = \{y,\ z,\ t\}$ et dim $S^{2,2} = 3$, $S^{2,3} = \{1\}$ et dim $S^{2,3} = 1$, $S^{2,4} = \emptyset$ et dim $S^{2,4} = 0$.

D_2, la matrice de $\psi_{2,2}$, est alors la matrice, de dimensions 10×8, des coefficients des 8 formes $x\,f_1,\ y\,f_1,\ z\,f_1,\ t\,f_1,\ y\,f_2,\ z\,f_2,\ t\,f_2,\ f_3$, de degrés 2, sur la base, à 10 éléments, $\{x^2,\ x\,y,\ x\,z,\ x\,t,\ y^2,\ y\,z,\ y\,t,\ z^2,\ z\,t,\ t^2\}$:

46. on a toujours $E^{1,k} = \emptyset$ comme l'indique [14] p. 6

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_1 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & a'_1 & 0 & 0 & a''_2 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a'_1 & 0 & a''_3 \\ a_4 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a'_1 & a''_4 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & a''_5 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & a'_3 & a'_2 & 0 & a''_6 \\ 0 & a_4 & 0 & a_2 & a'_4 & 0 & a'_2 & a''_7 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a'_3 & 0 & a''_8 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & 0 & a'_4 & a'_3 & a''_9 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a'_4 & a''_{10} \end{bmatrix}.$$

On a $E^{2,1} = \{y\}$ et dim $E^{2,1} = 1$, $E^{2,2} = \emptyset$ et dim $E^{2,2} = 0$, $E^{2,3} = \emptyset$ et dim $E^{2,3} = 0$, $E^{2,4} = \emptyset$ [47] et dim $E^{2,4} = 0$.

$E^{2,1} \cup E^{2,2} \cup E^{2,3} = \{y\}$ et il y a 1 monôme $X^\gamma \in S^2\,\mathbb{C}^4 = \{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, x\,t,\, y^2,\, y\,z,\, y\,t,\, z^2,\, z\,t,\, t^2\}$ avec 2 indices i et j différents tels que $\gamma_i \geqslant d_i$ et $\gamma_j \geqslant d_j$: il s'agit de $x\,y$. Par conséquent il faut extraire la colonne $y\,f_1$ et la ligne $x\,y$ de la matrice D_2 pour constituer la sous-matrice E_2 : soit $E_2 = [a_1]$.

La matrice $M_1(X)$, d'ordre 12, est telle que :

$$M_1(X) = \begin{bmatrix} \Delta_1(X) & D_1 \\ D_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_2(X')$, d'ordre 12, est telle que :

$M_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_2(X') & D_2 \\ D_1^T & 0 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_2(X') = M_1^T(X)$.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \pm \frac{\det\, M_1(X)}{\det\, E_2} = \pm \frac{1}{a_1} \det\, M_1(X)$ ou :

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \pm \frac{\det\, M_2(X')}{\det\, E_2} = \pm \frac{1}{a_1} \det\, M_2(X')$.

Exemple (très simple) :

$f_1 = a_1\, x$
$f_2 = a'_2\, y$
$f_3 = a''_8\, z^2$
$f_4 = a'''_{20}\, t^3$. Posons $\lambda \triangleq a_1\, a'_2\, a''_8\, a'''_{20}$.

Méthode utilisant les bezoutiens

On trouve :

47. on a toujours $E^{2,k} = \emptyset$ comme l'indique [14] p. 6

$$M_1(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & a'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

det $M_1(X) = -a_1^7\, a_2^{'6}\, a_8^{''3}\, a_{20}^{'''2}$ et $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = -\frac{1}{a_1}$ det $M_1(X)$ $= a_1^6\, a_2^{'6}\, a_8^{''3}\, a_{20}^{'''2}$.

6.4.5 Cas pour lequel $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$

On a $t_4 = 4$, $D = d_2\, d_3\, d_4 + d_1\, d_3\, d_4 + d_1\, d_2\, d_4 + d_1\, d_2\, d_3 = 28$. $r = E(\frac{t_4}{2}) = 2$.

On note :

$f_1 = a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4\, t$
$f_2 = a'_1\, x^2 + a'_2\, x\, y + a'_3\, x\, z + a'_4\, x\, t + a'_5\, y^2 + a'_6\, y\, z + a'_7\, y\, t + a'_8\, z^2 + a'_9\, z\, t + a'_{10}\, t^2$
$f_3 = a''_1\, x^2 + a''_2\, x\, y + a''_3\, x\, z + a''_4\, x\, t + a''_5\, y^2 + a''_6\, y\, z + a''_7\, y\, t + a''_8\, z^2 + a''_9\, z\, t + a''_{10}\, t^2$
$f_4 = a'''_1\, x^3 + a'''_2\, x^2\, y + a'''_3\, x^2\, z + a'''_4\, x^2\, t + a'''_5\, x\, y^2 + a'''_6\, x\, y\, z + a'''_7\, x\, y\, t$
$+ a'''_8\, x\, z^2 + a'''_9\, x\, z\, t + a'''_{10}\, x\, t^2 + a'''_{11}\, y^3 + a'''_{12}\, y^2\, z + a'''_{13}\, y^2\, t + a'''_{14}\, y\, z^2 + a'''_{15}\, y\, z\, t$
$+ a'''_{16}\, y\, t^2 + a'''_{17}\, z^3 + a'''_{18}\, z^2\, t + a'''_{19}\, z\, t^2 + a'''_{20}\, t^3$

$R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4)$ est de degré $d_2\, d_3\, d_4 = 12$ en les coefficients de f_1, de degré $d_1\, d_3\, d_4 = 6$ en les coefficients de f_2, de degré $d_1\, d_2\, d_4 = 6$ en les coefficients de f_3 et de degré $d_1\, d_2\, d_3 = 4$ en les coefficients de f_4.

Méthode de Macaulay

ligne	monôme	x	y	z	t	réduit ?	var. marquée	forme
1	x^5	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^5\,f_1}{x} = x^4\,f_1$
2	$x^4\,y$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^4\,y\,f_1}{x} = x^3\,y\,f_1$
3	$x^4\,z$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^4\,z\,f_1}{x} = x^3\,z\,f_1$
4	$x^4\,t$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^4\,t\,f_1}{x} = x^3\,t\,f_1$
5	$x^3\,y^2$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^3\,y^2\,f_1}{x} = x^2\,y^2\,f_1$
6	$x^3\,y\,z$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^3\,y\,z\,f_1}{x} = x^2\,y\,z\,f_1$
7	$x^3\,y\,t$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^3\,y\,t\,f_1}{x} = x^2\,y\,t\,f_1$
8	$x^3\,z^2$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x^3\,z^2\,f_1}{x} = x^2\,z^2\,f_1$
9	$x^3\,z\,t$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^3\,z\,t\,f_1}{x} = x^2\,z\,t\,f_1$
10	$x^3\,t^2$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^3\,t^2\,f_1}{x} = x^2\,t^2\,f_1$
11	$x^2\,y^3$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^2\,y^3\,f_1}{x} = x\,y^3\,f_1$
12	$x^2\,y^2\,z$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^2\,y^2\,z\,f_1}{x} = x\,y^2\,z\,f_1$
13	$x^2\,y^2\,t$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x^2\,y^2\,t\,f_1}{x} = x\,y^2\,t\,f_1$
14	$x^2\,y\,z^2$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x^2\,y\,z^2\,f_1}{x} = x\,y\,z^2\,f_1$
15	$x^2\,y\,z\,t$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^2\,y\,z\,t\,f_1}{x} = x\,y\,z\,t\,f_1$
16	$x^2\,y\,t^2$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^2\,y\,t^2\,f_1}{x} = x\,y\,t^2\,f_1$
17	$x^2\,z^3$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x^2\,z^3\,f_1}{x} = x\,z^3\,f_1$
18	$x^2\,z^2\,t$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x^2\,z^2\,t\,f_1}{x} = x\,z^2\,t\,f_1$
19	$x^2\,z\,t^2$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x^2\,z\,t^2\,f_1}{x} = x\,z\,t^2\,f_1$
20	$x^2\,t^3$	G	P	P	G	non	x	$\frac{x^2\,t^3\,f_1}{x} = x\,t^3\,f_1$
21	$x\,y^4$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x\,y^4\,f_1}{x} = y^4\,f_1$
22	$x\,y^3\,z$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x\,y^3\,z\,f_1}{x} = y^3\,z\,f_1$
23	$x\,y^3\,t$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x\,y^3\,t\,f_1}{x} = y^3\,t\,f_1$
24	$x\,y^2\,z^2$	G	G	G	P	non	x	$\frac{x\,y^2\,z^2\,f_1}{x} = y^2\,z^2\,f_1$
25	$x\,y^2\,z\,t$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x\,y^2\,z\,t\,f_1}{x} = y^2\,z\,t\,f_1$
26	$x\,y^2\,t^2$	G	G	P	P	non	x	$\frac{x\,y^2\,t^2\,f_1}{x} = y^2\,t^2\,f_1$
27	$x\,y\,z^3$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x\,y\,z^3\,f_1}{x} = y\,z^3\,f_1$
28	$x\,y\,z^2\,t$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x\,y\,z^2\,t\,f_1}{x} = y\,z^2\,t\,f_1$
29	$x\,y\,z\,t^2$	G	P	P	P	oui	x	$\frac{x\,y\,z\,t^2\,f_1}{x} = y\,z\,t^2\,f_1$
30	$x\,y\,t^3$	G	P	P	G	non	x	$\frac{x\,y\,t^3\,f_1}{x} = y\,t^3\,f_1$
31	$x\,z^4$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x\,z^4\,f_1}{x} = z^4\,f_1$
32	$x\,z^3\,t$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x\,z^3\,t\,f_1}{x} = z^3\,t\,f_1$
33	$x\,z^2\,t^2$	G	P	G	P	non	x	$\frac{x\,z^2\,t^2\,f_1}{x} = z^2\,t^2\,f_1$
34	$x\,z\,t^3$	G	P	P	G	non	x	$\frac{x\,z\,t^3\,f_1}{x} = z\,t^3\,f_1$
35	$x\,t^4$	G	P	P	G	non	x	$\frac{x\,t^4\,f_1}{x} = t^4\,f_1$

ligne	monôme	x	y	z	t	réduit ?	var. marquée	forme
36	y^5	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^5\,f_2}{y^2} = y^3\,f_2$
37	$y^4\,z$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^4\,z\,f_2}{y^2} = y^2\,z\,f_2$
38	$y^4\,t$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^4\,t\,f_2}{y^2} = y^2\,t\,f_2$
39	$y^3\,z^2$	P	G	G	P	non	y	$\frac{y^3\,z^2\,f_2}{y^2} = y\,z^2\,f_2$
40	$y^3\,z\,t$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^3\,z\,t\,f_2}{y^2} = y\,z\,t\,f_2$
41	$y^3\,t^2$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^3\,t^2\,f_2}{y^2} = y\,t^2\,f_2$
42	$y^2\,z^3$	P	G	G	P	non	y	$\frac{y^2\,z^3\,f_2}{y^2} = z^3\,f_2$
43	$y^2\,z^2\,t$	P	G	G	P	non	y	$\frac{y^2\,z^2\,t\,f_2}{y^2} = z^2\,t\,f_2$
44	$y^2\,z\,t^2$	P	G	P	P	oui	y	$\frac{y^2\,z\,t^2\,f_2}{y^2} = z\,t^2\,f_2$
45	$y^2\,t^3$	P	G	P	G	non	y	$\frac{y^2\,t^3\,f_2}{y^2} = t^3\,f_2$
46	$y\,z^4$	P	P	G	P	oui	z	$\frac{y\,z^4\,f_3}{z^2} = y\,z^2\,f_3$
47	$y\,z^3\,t$	P	P	G	P	oui	z	$\frac{y\,z^3\,t\,f_3}{z^2} = y\,z\,t\,f_3$
48	$y\,z^2\,t^2$	P	P	G	P	oui	z	$\frac{y\,z^2\,t^2\,f_3}{z^2} = y\,t^2\,f_3$
49	$y\,z\,t^3$	P	P	P	G	oui	t	$\frac{y\,z\,t^3\,f_4}{t^3} = y\,z\,f_4$
50	$y\,t^4$	P	P	P	G	oui	t	$\frac{y\,t^4\,f_4}{t^3} = y\,t\,f_4$
51	z^5	P	P	G	P	oui	z	$\frac{z^5\,f_3}{z^2} = z^3\,f_3$
52	$z^4\,t$	P	P	G	P	oui	z	$\frac{z^4\,t\,f_3}{z^2} = z^2\,t\,f_3$
53	$z^3\,t^2$	P	P	G	P	oui	z	$\frac{z^3\,t^2\,f_3}{z^2} = z\,t^2\,f_3$
54	$z^2\,t^3$	P	P	G	G	non	z	$\frac{z^2\,t^3\,f_3}{z^2} = t^3\,f_3$
55	$z\,t^4$	P	P	P	G	oui	t	$\frac{z\,t^4\,f_4}{t^3} = z\,t\,f_4$
56	t^5	P	P	P	G	oui	t	$\frac{t^5\,f_4}{t^3} = t^2\,f_4$

La matrice A est celle des coefficients des 56 formes $x^4\,f_1,\ x^3\,y\,f_1,\ \ldots,\ t^2\,f_4$, qui figurent dans la colonne de droite du tableau des 2 pages précédentes, sur la base, à 56 éléments, $\{x,\ x^4\,y,\ \ldots,\ t^5\}$:

La matrice B est la sous-matrice, d'ordre 28, de la matrice A constituée des 28 lignes et colonnes 5, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 42, 43, 45, 54 qui correspondent aux monômes non réduits du tableau précédent.

$R(f_1,\ f_2,\ f_3) = \pm\,\frac{\det A}{\det B}$, de degré 28.

Méthode utilisant les bezoutiens

On a $d_3 + d_4 - 4 = 1 = d_1 + d_2 - 1 = 2$; donc le résultat général précédent s'applique et on peut exprimer le résultant $R(f_1,\ f_2,\ f_3)$ sous forme d'un déterminant et ceci pour m tel que $d_3 + d_4 - 4 = 1 < m < d_1 + d_2 = 3$ i.e. pour $m = 2$.

Fonction de Hilbert

$\frac{(1-X)\,(1-X^2)\,(1-X^2)\,(1-X^3)}{(1-X)^4} = 1 + 3\,X + 4\,X^2 + 3\,X^3 + X^4.$
Donc $H_{(1,2,2,3)}(0) = 1$, $H_{(1,2,2,3)}(1) = 3$, $H_{(1,2,2,3)}(2) = 4$, $H_{(1,2,2,3)}(3) = 3$, $H_{(1,2,2,3)}(4) = 1$ et $H_{(1,2,2,3)}(m) = 0$ ssi $m \geqslant 5$.

On vérifie donc la propriété annoncée de cette fonction.

Fonctions i et ρ

Seules valeurs a priori non nulles : $i(4) = 34$, $i(3) = 17$, $i(2) = 6$, $i(1) = 1$, $i(0) = 0$ et $\rho(0) = 35$, $\rho(1) = 21$, $\rho(2) = 16$, $\rho(3) = 21$, $\rho(4) = 35$. On vérifie la propriété $\rho(m) = \rho(t_k - m)$.

Calcul des bezoutiens

On trouve :

$\Delta_{11}(X,\, X') = a_1$, $\Delta_{12}(X,\, X') = a_2$, $\Delta_{13}(X,\, X') = a_3$, $\Delta_{14}(X,\, X') = a_4$,

$\Delta_{21}(X,\, X') = a'_1\,(x + x') + a'_2\,y + a'_3\,z + a'_4\,t,$
$\Delta_{22}(X,\, X') = a'_2\,x' + a'_5\,(y + y') + a'_6\,z + a'_7\,t,$
$\Delta_{23}(X,\, X') = a'_3\,x' + a'_6\,y' + a'_8\,(z + z') + a'_9\,t,$
$\Delta_{24}(X,\, X') = a'_4\,x' + a'_7\,y' + a'_9\,z' + a'_{10}\,(t + t'),$

$\Delta_{31}(X,\, X') = a''_1\,(x + x') + a''_2\,y + a''_3\,z + a''_4\,t,$
$\Delta_{32}(X,\, X') = a''_2\,x' + a''_5\,(y + y') + a''_6\,z + a''_7\,t,$
$\Delta_{33}(X,\, X') = a''_3\,x' + a''_6\,y' + a''_8\,(z + z') + a''_9\,t,$
$\Delta_{34}(X,\, X') = a''_4\,x' + a''_7\,y' + a''_9\,z' + a''_{10}\,(t + t'),$

$\Delta_{41}(X,\, X') = a'''_1\,(x^2 + x\,x' + x'^2) + a'''_2\,(x + x')\,y + a'''_3\,(x + x')\,z + a'''_4\,(x + x')\,t$
$+ a'''_5\,y^2 + a'''_6\,y\,z + a'''_7\,y\,t + a'''_8\,z^2 + a'''_9\,z\,t + a'''_{10}\,t^2$
$\Delta_{42}(X,\, X') = a'''_2\,x'^2 + a'''_5\,x'\,(y + y') + a'''_6\,x'\,z + a'''_7\,x'\,t + a'''_{11}\,(y^2 + y\,y' + y'^2)$
$+ a'''_{12}\,(y + y')\,z + a'''_{13}\,(y + y')\,t + a'''_{14}\,z^2 + a'''_{15}\,z\,t + a'''_{16}\,t^2$
$\Delta_{43}(X,\, X') = a'''_3\,x'^2 + a'''_6\,x'\,y' + a'''_8\,x'\,(z + z') + a'''_9\,x'\,t + a'''_{12}\,y'^2$
$+ a'''_{14}\,y'\,(z + z') + a'''_{15}\,y'\,t + a'''_{17}\,(z^2 + z\,z' + z'^2) + a'''_{18}\,(z + z')\,t + a'''_{19}\,t^2$
$\Delta_{44}(X,\, X') = a'''_4\,x'^2 + a'''_7\,x'\,y' + a'''_9\,x'\,z' + a'''_{10}\,x'\,(t + t') + a'''_{13}\,y'^2$
$+ a'''_{15}\,y'\,z' + a'''_{16}\,y'\,(t + t') + a'''_{18}\,z'^2 + a'''_{19}\,z'\,(t + t') + a'''_{20}\,(t^2 + t\,t' + t'^2).$

$$\Delta(X,\, X') = \begin{vmatrix} \Delta_{11}(X,\, X') & \Delta_{12}(X,\, X') & \Delta_{13}(X,\, X') & \Delta_{14}(X,\, X') \\ \Delta_{21}(X,\, X') & \Delta_{22}(X,\, X') & \Delta_{23}(X,\, X') & \Delta_{24}(X,\, X') \\ \Delta_{31}(X,\, X') & \Delta_{32}(X,\, X') & \Delta_{33}(X,\, X') & \Delta_{34}(X,\, X') \\ \Delta_{41}(X,\, X') & \Delta_{42}(X,\, X') & \Delta_{43}(X,\, X') & \Delta_{44}(X,\, X') \end{vmatrix}$$

• $\Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X)$
$+ [\Delta_{1000}(X)\, x' + \Delta_{0100}(X)\, y' + \Delta_{0010}(X)\, z' + \Delta_{0001}(X)\, t']$
$+ [\Delta_{2000}(X)\, x'^2 + \Delta_{1100}(X)\, x'\, y' + \ldots + \Delta_{0002}(X)\, t'^2]$
$+ [\Delta_{3000}(X)\, x'^3 + \Delta_{2100}(X)\, x'^2\, y' + \ldots + \Delta_{0003}(X)\, t'^3]$
$+ [\Delta^{0000}_{4000}(X)\, x'^4 + \Delta^{0000}_{3100}(X)\, x'^3\, y' + \ldots + \Delta^{0000}_{0004}(X)\, t'^4]$, avec :

$\Delta_{0000}(X)$ de degré 4, $\Delta_{1000}(X)$, $\Delta_{0100}(X)$, ... de degrés 3, $\Delta_{2000}(X)$, $\Delta_{1100}(X)$, ... de degrés 2, $\Delta_{3000}(X)$, $\Delta_{2100}(X)$, ... de degrés 1, $\Delta^{0000}_{4000}(X)$, $\Delta^{0000}_{3100}(X)$, ... de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\begin{aligned}
&\Delta_{2000}(X) = \Delta^{2000}_{2000}(X)\, x^2 + \Delta^{1100}_{2000}(X)\, x\, y + \ldots + \Delta^{0002}_{2000}(X)\, t^2,\\
&\Delta_{1100}(X) = \Delta^{2000}_{1100}(X)\, x^2 + \Delta^{1100}_{1100}(X)\, x\, y + \ldots + \Delta^{0002}_{1100}(X)\, t^2,\\
&\vdots\\
&\Delta_{0002}(X) = \Delta^{2000}_{0002}(X)\, x^2 + \Delta^{1100}_{0002}(X)\, x\, y + \ldots + \Delta^{0002}_{0002}(X)\, t^2,
\end{aligned}$$

Soit $\Delta_2(X)$ la matrice, d'ordre 10 :

$$\Delta_2(X) = \begin{bmatrix} \Delta^{2000}_{2000}(X) & \Delta^{2000}_{1100}(X) & \ldots & \Delta^{2000}_{0002}(X) \\ \Delta^{1100}_{2000}(X) & \Delta^{1100}_{1100}(X) & \ldots & \Delta^{1100}_{0002}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{0002}_{2000}(X) & \Delta^{0002}_{1100}(X) & \ldots & \Delta^{0002}_{0002}(X) \end{bmatrix}.$$

• $\Delta(X',\, X) = \Delta(X,\, X') = \Delta_{0000}(X')$
$+ [\Delta_{1000}(X')\, x + \Delta_{0100}(X')\, y + \Delta_{0010}(X')\, z + \Delta_{0001}(X')\, t]$
$+ [\Delta_{2000}(X')\, x^2 + \Delta_{1100}(X')\, x\, y + \ldots + \Delta_{0002}(X')\, t^2]$
$+ [\Delta_{3000}(X')\, x^3 + \Delta_{2100}(X')\, x^2\, y + \ldots + \Delta_{0003}(X')\, t^3]$
$+ [\Delta^{0000}_{4000}(X')\, x^4 + \Delta^{0000}_{3100}(X')\, x^3\, y + \ldots + \Delta^{0000}_{0004}(X')\, t^4]$, avec :

$\Delta_{0000}(X')$ de degré 4, $\Delta_{1000}(X')$, $\Delta_{0100}(X')$, ... de degrés 3, $\Delta_{2000}(X')$, $\Delta_{1100}(X')$, ... de degrés 2, $\Delta_{3000}(X')$, $\Delta_{2100}(X')$, ... de degrés 1, $\Delta^{0000}_{4000}(X')$, $\Delta^{0000}_{3100}(X')$, ... de degrés 0 (donc constants).

On pose :

$$\begin{aligned}
&\Delta_{2000}(X') = \Delta^{2000}_{2000}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{2000}(X')\, x'\, y' + \ldots + \Delta^{0002}_{2000}(X')\, t'^2\\
&\Delta_{1100}(X') = \Delta^{2000}_{1100}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{1100}(X')\, x'\, y' + \ldots + \Delta^{0002}_{1100}(X')\, t'^2\\
&\vdots\\
&\Delta_{0002}(X') = \Delta^{2000}_{0002}(X')\, x'^2 + \Delta^{1100}_{0002}(X')\, x'\, y' + \ldots + \Delta^{0002}_{0002}(X')\, t'^2
\end{aligned}$$

Soit $\Delta_2(X')$ la matrice d'ordre 10 :

$$\Delta_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_{2000}^{2000}(X') & \Delta_{1100}^{2000}(X') & \dots & \Delta_{0002}^{2000}(X') \\ \Delta_{2000}^{1100}(X') & \Delta_{1100}^{1100}(X') & \dots & \Delta_{0002}^{1100}(X') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{2000}^{0002}(X') & \Delta_{1100}^{0002}(X') & \dots & \Delta_{0002}^{0002}(X') \end{bmatrix} = \Delta_2^T(X).$$

• On a $S^{2,1} = \{x,\, y,\, z,\, t\}$ et dim $S^{2,1} = 4$, $S^{2,2} = \{1\}$ et dim $S^{2,2} = 1$, $S^{2,3} = \{1\}$ et dim $S^{2,3} = 1$, $S^{2,4} = \emptyset$ et dim $S^{2,4} = 0$.

D_2, la matrice de $\psi_{2,2}$, est alors la matrice, de dimensions 10×6, des coefficients des 6 formes $x\,f_1$, $y\,f_1$, $z\,f_1$, $t\,f_1$, f_2, f_3, de degrés 2, sur la base, à 10 éléments, $\{x^2,\, x\,y,\, x\,z,\, x\,t,\, y^2,\, y\,z,\, y\,t,\, z^2,\, z\,t,\, t^2\}$:

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & a'_1 & a''_1 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & a'_2 & a''_2 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 & a'_3 & a''_3 \\ a_4 & 0 & 0 & a_1 & a'_4 & a''_4 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & a'_5 & a''_5 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & a'_6 & a''_6 \\ 0 & a_4 & 0 & a_2 & a'_7 & a''_7 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & a'_8 & a''_8 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a'_9 & a''_9 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a'_{10} & a''_{10} \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_2(X)$, d'ordre 16, est telle que :

$$M_2(X) = \begin{bmatrix} \Delta_2(X) & D_2 \\ D_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_2(X')$, d'ordre 16, est telle que :

$M_2(X') = \begin{bmatrix} \Delta_2(X') & D_2 \\ D_2^T & 0 \end{bmatrix}$. Elle est telle que $M_2(X') = M_2^T(X)$.

Alors $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = \pm \det M_2(X) = \pm \det M_2(X')$.

Exemple (très simple) :

$f_1 = a_1\, x$
$f_2 = a'_5\, y^2$
$f_3 = a''_8\, z^2$
$f_4 = a'''_{20}\, t^3$. Posons $\lambda \triangleq a_1\, a'_5\, a''_8\, a'''_{20}$.

Méthode utilisant les bezoutiens

On trouve :

$$M_2(X) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a'_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a''_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Et $R(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4) = -\det\, M_2(X) = a_1^{12}\, a_5^{'6}\, a_8^{''6}\, a_{20}^{'''4}$.

Références

[1] S. Barnett. *A note on the Bezoution matrix.* SIAM Journal of Applied Mathematics. Vol. 22. No. 1. pp. 84-86. Janvier 1972.

[2] N. Botbol. *Introducción a la teoría de eliminación.* 1999 Mathematics Subject Classification 13P15, 13D02, 13D45, 14Q10. 1 juillet 2012.

[3] A. Bouvier et M. George sous la direction de F ; Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques.* PUF. 1979.

[4] L. Busé. *Étude du résultant sur une variété algébrique.* Thèse de Docteur en Sciences. Mathématiques. Université de Nice-Sophia antipolis. Faculté des sciences. Laboratoire J. A. Dieudonné. UMR du CNRS No 6621. 19 décembre 2001.

[5] J. Canny. *Generalised characteristic polynomials.* J. symbolic computation. Vol. 9. pp. 241-250. 1990.

[6] J. Canny et I. Emiris *A subdivision-based algorithm for the sparse resultant.* 20 avril 1999.

[7] F. Catanese. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants by I. M. Gelfand,M.M. Kapranov and A. V. Zelevinsky. Birkhâuser. Boston. 1994.* Bulletin (New Series) of the american mathematical society. Vol. 27. No. 2. pp. 183-198. 21 décembre 1999.

[8] E. Cattani, A. Dickenstein et B. Sturmfels. *Residues and resultants.* Journal of Math. Sciences. The university of Tokyo 5. pp. 119-148. 1998.

[9] A. Cayley. *On the theory of elimination.* Cambridge and Dublin Math, Journal, 3. pp. 116-120. 1848.

[10] M. Chardin. *The resultant via a Koszul complex.* In. F. Eyssette and A. Galigo editors. Computational Algebraic Geometry, Vol. 109 of Progress in Mathematics, pp. 29-39. Birkhäuser, Boston. 1993.

[11] M. Chardin. *Formules à la Macaulay pour les sous-résultants en plusieurs variables.* CRAS. Tome. 319. Serie 1, pp. 433-436. 1994.

[12] M. Chardin. *Multivariates subresultants.* J. Pure and Appl. Alg. 101. pp. 129-138. 1995.

[13] E. A. Coutsias, C. Seok, M. J. Wester et K. A. Dill. *Resultants and loop closure.* University of California. Posprints. Paper 1523. 2006.

[14] C. D'Andréa et A. Dickenstein. *Explicit formulas for the multivariate resultant.* arXiv : math/0007036v1.mathAG. 6 juillet 2000.

[15] M. Demazure. *Une définition constructive du résultant.* ATP "Méthodes numériques Performantes" du CNRS. AMS subject classification 14MOS, 13D25. Mai 1984.

[16] J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique. Tome 1.* PUF. 1974.

[17] J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique. Tome 2.* PUF. 1974.

[18] N. Dimic. *Polynômes symétriques, résultant et discriminant.* Communication personnelle. 14 p.. 1 mars 2012.

[19] A. L. Dixon. *The eliminant of three quantics in two independent variables.* Proc. London Math. Soc. 6. pp. 49-69. 1908.

[20] J. A. Eagon. *Partially split double complexes with and associated Wall complex and application to ideals generated by polynomials.* Journal of algebra 135. pp. 344-362. 1990.

[21] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Springer-Verlag New York, Inc. 1995.

[22] M. Elkadi et B. Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux.* Mathématiques & Applications 59. Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2007.

[23] D. Eisenbud, F-O. Schreyer et J. Weyman. *Resultants and Chow forms via exterior syzygies.* Journal of american mathematical society. Vol 16. No. 3 ; pp ; 537-579. 27 février 2003.

[24] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants.* Birkhäuser Boston. 1994.

[25] P. Gordan. *Le résultant de trois formes quadratiques.* Journal de mathématiques pures et appliquées. 5è série. Tome 3. pp. 195-202. 1897.

[26] B. Grenet. *Difficulté du résultant et des grands déterminants.* Rapport de recherche RRLIP2009-32. ENS Lyon-CNRS-UCBL-INRIA. 12 novembre 2009.

[27] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag New York, Inc. 1977.

[28] G. Heining et K. Rost. *Bezoutians* Communication personnelle. 82 p..

[29] U. Helmke et P.A. Fuhrmann. *Bezoutians.* Linear Algebra and its Applications 122/123/124. pp. 1039-1097. Elsevier Science Publishing Co., Inc. 1989.

[30] P.J. Hilton et U. Stammbach. *A couse in homological algebra. Second edition.* Springer-Verlag New York, Inc. 1997.

[31] A. Hurwitz. *Über Trägheitsformen.* Ann. di. Mat. 3a Serie. Vol 20. 1913.

[32] J-P. Jouanolou. *Le formalisme du résultant.* Adv. in Maths 90. No. 2. pp. 117-263. 1991.

[33] J-P. Jouanolou. *Résultant anisotrope. Compléments et applications.* The electronic journal of combinatorics 3(2). 1996.

[34] J-P. Jouanolou. *Formes d'inertie et résultant : un formulaire.* Advances in Mathematics 126. pp. 119-250. No AI961609. 1997.

[35] A. Khetan. *Determinantal formula for the Chow form of a toric surface.* ISSAC 2002. Lille. France. 7-10 juillet 2002.

[36] A. Khetan. *The resultant of an unmixed bivariate system.* arXiv : math/0209115 vi [math.AG]. 11 septembre 2002.

[37] S. Lang. *Algebra. Third edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1993.

[38] A. Lascoux et P. Pragacz. *Bezoutians, Euclidian algorithm, and orthogonal polynomials.* Communication personnelle. 22 p..

[39] F. S. Macaulay. *Some formulae in elimination.* Proc. London Math. Soc. 1 33. pp. 3-27. 1902.

[40] F. S. Macaulay. *The algebraic theory of modular sustems.* Stechhert-Hafner Service Agency, Inc. New York et Londres. 1964.

[41] A. Mantzaflaris. *Multihomogeneous resultant matrices for systems with scaled support.* ISSAC'09. Séoul. 2009.

[42] J.-P. Merlet. *Résolution de système d'équations polynomiales.* Communication personnelle. 14 p..

[43] J. Rambau. *Polyhedral subdivisions and projections of polytopes.* Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik. Berlin (ZIB). 20 mars 1998.

[44] G. Salmon. *Leçons d'algèbre supérieure* Gauthier-Villars et fils. Paris. 1890.

[45] P. F. Stiller. *An introduction to the theory of resultants.* Date ?

[46] B. Sturmfels et A. Zelevinsky. *Multigraded resultants of the Sylvester type.* Journal of algebra 163. pp. 115-127. 1994.

[47] B. Sturmfels. *Solving systems of polynomial equations.* Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). AMS. Providence. Rhode Island. No. 2002.

[48] B.L. van der Waerden. *Algebra. Volume 2.* Septième édition. Springer-Verlag. New York Inc. 1991.

[49] J. Weyman. *Calculating discriminants by higher direct images.* Transactions of the american mathematical society. Vol. 43. No. 1. Mai 1994.

[50] J. Weyman et A. Zelevinsky. *Determinantal formulas for multigraded resultants.* J. algebraic geometry 3. pp. 569-597. 1994.

[51] Wikipedia. *Bezout matrix*. 3 p..

Remarque : Les deux premières éditions "*d'Algebra*" de van der Waerden présentent la théorie de l'élimination en 17 pages dans leur chapite XI.