



**HAL**  
open science

# Stabilité et stabilisation de systèmes linéaires à l'aide d'inégalités matricielles linéaires

Matthieu Barreau

► **To cite this version:**

Matthieu Barreau. Stabilité et stabilisation de systèmes linéaires à l'aide d'inégalités matricielles linéaires. *Quadrature*, 2019, 113. hal-02111784

**HAL Id: hal-02111784**

**<https://laas.hal.science/hal-02111784>**

Submitted on 26 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Stabilité et stabilisation de systèmes linéaires à l'aide d'inégalités matricielles linéaires

Matthieu Barreau

April 19, 2019

**Abstract** - Cet article étudie la stabilité de systèmes modélisés par une équation différentielle potentiellement non-linéaire. Après des définitions générales, le cas particulier des systèmes linéaires invariants dans le temps est étudié beaucoup plus précisément et des conditions algébriques sont énoncées pour établir sa stabilité asymptotique. L'analyse de stabilité est aussi statué via le théorème de Lyapunov, utilisant alors des algorithmes venant de la programmation semi-définie. Tous les résultats sont rigoureusement démontrés dans les cas généraux et un exemple d'application sur la stabilité d'une nacelle est proposé et enrichi au cours de l'exposé.

## 1 Introduction et notation

L'automatique est une branche des mathématiques appliquées qui étudie les *systèmes*. Une approche abordable et précise des définitions essentielles et de quelques techniques est proposée dans [3]. C'est donc une matière à mi-chemin entre les mathématiques et la physique. En effet, les systèmes sont généralement des modèles physiques qui servent à décrire l'évolution d'un phénomène. Ce système s'exprime généralement sous la forme d'une équation différentielle, généralement non-linéaire. Les propriétés que nous recherchons sont variées: analyse de stabilité, performance, robustesse vis à vis incertitudes, influence d'un bruit sur le comportement asymptotique des trajectoires...

Les outils utilisés pour analyser le comportement du système sont très variées et peuvent reposer aussi bien sur de l'algèbre linéaire que de l'analyse fonctionnelle. Dans des cas simples (i. e. systèmes linéaires invariants dans le temps), il est possible de lier les propriétés algébriques de l'équation différentielle à des tests numériques fiables. Ces tests numériques prouvent la robustesse ou la stabilité du système et en ce sens font écho à l'article [5] qui étudiait les preuves d'instabilité.

Dans un premier temps, nous allons définir quelques notions parmi celles évoquées précédemment. Ces propriétés seront énoncées dans le cadre plus restreint d'une certaine classe de système linéaire. Enfin, nous proposons une étude de stabilité reposant sur la théorie de Lyapunov. Enfin, nous terminerons par la synthèse de contrôleur, qui est un problème complexe encore beaucoup étudié aujourd'hui. Comme fil rouge de cet exposé, il est proposé

d'étudier le problème du pendule avec des applications concrètes.

**Notation :** L'espace des matrices réelles de taille  $n \times m$  se dénote  $\mathbb{R}^{n \times m}$  et une matrice réelle carrée symétrique de taille  $n$  appartient alors à l'ensemble  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n \times n$ . Le sous-espace de  $\mathbb{S}^n$  des matrices positives se note  $\mathbb{S}_+^n$  et  $\mathbb{S}_{++}^n$  pour les matrices définies positives. On définit sur l'espace  $\mathbb{S}^n$  la relation d'ordre  $\preceq$  par :  $A, B \in \mathbb{S}^n$ ,  $A \preceq B \Leftrightarrow -A + B \in \mathbb{S}_+^n$ . L'inégalité stricte  $\prec$  impose de plus le caractère défini de  $-A + B$ . De la même façon, on a :  $A \succeq B \Leftrightarrow -A \preceq -B$ .  $GL_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

On munit l'espace  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique dénoté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme induite  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$ . On définira alors la norme subordonnée d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  par  $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$ . L'opération transpose se note pour une matrice  $A$  de taille quelconque comme  $A^\top$ .

On note par  $\Re$  la partie réelle d'un nombre complexe et  $\Im$  sa partie imaginaire. Pour  $x$  une fonction dérivable de  $\mathbb{R}^+$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , sa dérivée temporelle se note  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ .

## 2 Définition et analyse de systèmes

Parmi les nombreuses performances étudiées en automatique, l'une des plus importante et sans aucun doute la *stabilité* d'un système. Avant d'expliquer ce qu'est la stabilité et comment on peut la prouver en pratique à l'aide d'ordinateur, nous allons préciser un peu plus ce que nous entendons par "système". Un exemple va être abordé et il nous suivra tout au long de l'article.

### 2.1 Un système, qu'est ce que c'est ?

Un système est souvent un objet physique, parfois complexe, qui possède une dynamique. Comme écrit dans [2], un système est un concept qu'il vaut mieux expliquer physiquement que rigoureusement. D'un point de vue purement mathématique, un système dynamique reçoit un signal d'entrée  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , peut être soumis à des perturbations  $w(t) \in \mathbb{R}^n$  et délivre un signal de sortie  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  avec  $m, n, q \in \mathbb{N}$ . Mis en équation, nous obtenons pour

tout  $t > 0$  la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) + w(t), \\ y(t) = h(x, u), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

Le système précédent est une représentation d'état du système et l'état s'appelle ici  $x$ .  $x$  est comme une étape intermédiaire entre l'entrée  $w$  et la sortie  $y$ . Cet état est une collection de propriétés qui définit entièrement le système. Physiquement parlant, ce sera la position et la vitesse d'un corps en mécanique, ou bien la température et la taille d'un objet en thermodynamique... Dans les exemples, l'état se construit souvent à partir d'équations physiques. Il arrive que la sortie soit la totalité de l'état (ce que nous faisons dans cet article), cela signifie que  $y = x$  et par conséquent, la sortie du système le caractérise entièrement. Il est possible par exemple de n'avoir accès en sortie qu'à une partie de l'information du système dépendant physiquement des capteurs que nous avons à notre disposition. Par exemple dans un système mécanique dont l'état  $x$  représente la vitesse et la position, si nous n'avons pas de capteur de vitesse, alors la sortie est uniquement la position. Cela sera souligné dans l'exemple qui suit.

Revenons à la définition mathématique. La première équation représente la dynamique du système. Cela permet de prévoir l'évolution du système temporellement. Il est possible de définir des systèmes temps-discret dont l'évolution n'est pas définie par une équation différentielle mais par une suite récurrente dont l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  se définit comme une fonction de son passé. La plupart des résultats obtenus ici se généralise au cas discret.

Voici un exemple de construction d'un système continu.

**Exemple 1.** Prenons un pendule avec une tige rigide de longueur  $\ell$  au bout de laquelle une masselotte de masse  $m$  est attachée. Nous supposons que de l'autre côté de la tige il y a un moteur produisant un couple  $t \mapsto \Gamma(t)$ . Des frottements visqueux avec un coefficient  $k > 0$  s'appliquent à la liaison moteur / pendule. Le couple  $\Gamma$  est l'entrée de notre système. En utilisant le théorème du moment cinétique, la dynamique du système peut s'écrire comme suit pour  $t > 0$  :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \theta(t) - \frac{k}{m} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{m\ell^2} \Gamma(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \end{cases}$$

avec pour condition initiale  $(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2$ .  $\theta$  représente l'angle entre la verticale et le pendule. Comme il y a deux conditions initiales, nous en déduisons que c'est un système d'ordre  $n = 2$ . Il peut se mettre sous la forme de (1) en notant  $x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^\top$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) - \frac{k}{m} \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{pmatrix} \Gamma(t), \\ y(t) = x(t), \\ x(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix}^\top. \end{cases} \quad (2)$$

On suppose ici que la sortie est la totalité de l'état, mais si nous n'observons que la position de notre pendule, la sortie  $y_2$  serait définie par :

$$y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

**Remarque 1.** Un système peut aussi être représenté directement par une relation entrée / sortie. Cela signifie que l'état  $x$  n'est plus considéré. Cela n'est pas discuté dans cet article.

## 2.2 Stabilité d'un système

La stabilité du système (1) peut se diviser en deux composantes. On peut étudier la stabilité d'un système par rapport à des entrées  $u$  ou bien regarder l'influence des conditions initiales sur la solution. Lorsque le système est linéaire, la trajectoire finale est la somme de la réponse à une entrée et du comportement transitoire dû aux conditions initiales. Dans un premier temps, nous étudierons uniquement le second aspect, donc  $u \equiv 0$  et  $w \equiv 0$ . La notion de stabilité demande la connaissance d'un point d'équilibre du système, ce point se définit comme suit.

**Définition 1.** On appelle un point d'équilibre de (1) une trajectoire constante dans le temps. Si  $x_e$  est un point d'équilibre de (1) avec  $u \equiv 0$  alors :

$$f(x_e, 0) = 0.$$

Si  $f(\cdot, 0)$  est une application inversible, il y a unicité du point d'équilibre et si  $f$  est linéaire, 0 est un point d'équilibre. La notion de stabilité du système (1) permet de mieux caractériser sur le comportement transitoire.

**Définition 2.** Soit un point d'équilibre  $x_e \in \mathbb{R}^n$  de (1).  $x_e$  est **stable au sens de Lyapunov** si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta(\varepsilon)$  tel que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{D}, \|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t) - x_e\| < \varepsilon,$$

pour  $x$  la trajectoire du système (1) de condition initiale  $x_0$  et  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  alors le point d'équilibre est stable globalement.

On dit d'un point d'équilibre qu'il est **instable** s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

La définition précédente veut dire que si l'on démarre notre système dans une position initiale assez proche de  $x_e$  alors la trajectoire est bornée autour de  $x_e$ . Autrement dit, nous avons l'assurance qu'une petite variation des conditions initiales n'entraînera pas une différence importante dans le comportement asymptotique.

Naturellement, nous aurions envie d'ajouter la propriété d'attractivité, c'est-à-dire que les solutions tendent vers le point d'équilibre  $x_e$ . Cela mène à la définition de la stabilité asymptotique du point d'équilibre  $x_e$ .

**Définition 3.** Un point d'équilibre  $x_e \in \mathbb{R}^n$  de (1) est **asymptotiquement stable** s'il est stable et de plus :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0,$$

pour tout  $x_0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ .

Le point d'équilibre  $x_e$  est **globalement asymptotiquement stable** s'il est asymptotiquement stable avec  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ .

La stabilité asymptotique d'un point d'équilibre montre que pour certaines conditions initiales, la trajectoire est bornée et converge vers le-dit point d'équilibre, mais nous n'avons aucune information sur la vitesse de convergence du système. Pour corriger ce problème, un autre type de stabilité est défini.

**Définition 4.** Un point d'équilibre  $x_e$  du système (1) est **exponentiellement stable** si l'inégalité suivante est respectée pour  $\gamma \in \mathbb{R}^+, \alpha > 0$  :

$$\forall x_0 \in \mathcal{D}, \forall t \geq 0, \quad \|x(t) - x_e\| \leq \gamma \|x_0 - x_e\| e^{-\alpha t}. \quad (3)$$

$\alpha$  s'appelle alors le **taux de décroissance** du système.

Il faut bien remarquer que la stabilité au sens de Lyapunov n'implique pas l'attractivité ni même l'inverse. Le fait de converger vers un point d'équilibre ne garantit pas qu'une petite perturbation sur les conditions initiales entraîne la convergence vers ce même point d'équilibre. Ceci sera en effet discuté dans le prochain exemple.

**Exemple 2.** Nous allons prendre ici deux exemples pour illustrer les différences entre les différentes notions de stabilité que nous avons évoquées ci-dessus.

1. Le système  $\dot{x}(t) = -x^3(t)$  pour  $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$  admet une unique solution qui est  $x(t) = \frac{\text{signe}(x_0)}{\sqrt{x_0^{-2} + 2t}}$ . On peut montrer que le système est stable au sens de Lyapunov en prenant  $\delta = \varepsilon$  et en constatant que pour  $t \geq 0$ ,  $|x(t)| \leq |x_0|$ . On a aussi  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  et donc la stabilité globale asymptotique.

2. Soit le système  $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$  avec  $x_0 = (a \ b)^\top \in \mathbb{R}^2$ . La solution est pour  $t \geq 0$  :

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) - b \sin(t) \\ a \sin(t) + b \cos(t) \end{pmatrix}.$$

On a quelque soit  $t \geq 0$ ,  $\|x(t)\| \leq \|x_0\|$ . Le système est donc stable pour tout  $\varepsilon > 0$  en prenant  $\delta = \varepsilon$ . Par contre, à moins que  $a = b = 0$ , il n'y a pas de limite. Le système n'est pas asymptotiquement stable.

### 2.3 Cas particulier : les systèmes LTI

Nous nous intéressons principalement dans cet article aux systèmes dynamiques LTI (Linéaires Invariants dans le Temps) de dimension finie qui ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0, \\ y(t) = Cx(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4)$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ .  $x_0$  est la condition initiale. Il n'y a ici aucune perturbation  $w$  influençant le système. Ces systèmes sont très courants en

pratique car ils proviennent de la linéarisation autour d'un point d'équilibre du système beaucoup plus complexe (1). L'exemple suivant présente la linéarisation du système (2).

**Exemple 3.**  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  est bien sûr un point d'équilibre du système pour  $\Gamma = 0$ . Au voisinage de 0, nous pouvons faire le développement limité à l'ordre 1 dans (2) et nous obtenons le système suivant (avec l'abus que  $x$  est l'état linéarisé) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}}_A x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{pmatrix} \Gamma(t), \\ y(t) = x(t), \\ x(0) = (\theta_0 \ \dot{\theta}_0)^\top. \end{cases} \quad (5)$$

Tout d'abord, le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution  $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ . Sachant qu'il existe une solution et connaissant sa régularité, on se pose des questions quant à son comportement asymptotique.

Nous pouvons naturellement définir les points d'équilibre du système (4) comme un point  $x_e \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ax_e = 0$ . Nous supposons ici que  $A$  est inversible, il n'y a donc qu'un seul point d'équilibre :  $x_e = 0$ .

Passons maintenant au cas particulier de la stabilité des systèmes LTI définis par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & t \geq 0, \\ y(t) = Cx(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (6)$$

Pour ce type de systèmes, il existe une équivalence entre les deux dernières notions de stabilité.

**Lemme 1.** Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Le système (6) est asymptotiquement stable;
2. Les valeurs propres de  $A$  sont toutes à partie réelle strictement négative;
3. Le système (6) est exponentiellement stable.

**Preuve.**

• Supposons que le système (6) soit asymptotiquement stable. Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$ . Soit  $w$  un vecteur propre associé.

L'application  $t \mapsto e^{tA} \cdot w$  est une solution complexe de  $\dot{x} = Ax$ . Donc  $x_1 : t \mapsto \Re(e^{tA} \cdot w)$  et  $x_2 : t \mapsto \Im(e^{tA} \cdot w)$  sont des solutions réelles de  $\dot{x} = Ax$ . Posons alors :  $w = u + iv$  avec  $(u, v)$  vecteurs réels.

On a :  $x_1 : t \mapsto e^{\Re(\lambda)t} \cdot (\cos(\Im(\lambda)t)u - \sin(\Im(\lambda)t)v)$

et  $x_2 : t \mapsto e^{\Re(\lambda)t} \cdot (\cos(\Im(\lambda)t)v + \sin(\Im(\lambda)t)u)$

$x_1$  et  $x_2$  tendent vers 0 en  $+\infty$ . C'est donc aussi le cas de  $(\cos(\Im(\lambda)t)x_1 + \sin(\Im(\lambda)t)x_2)$  et de  $(-\sin(\Im(\lambda)t)x_1 + \cos(\Im(\lambda)t)x_2)$ .

Par conséquent  $e^{\Re(\lambda)t}u$  et  $e^{\Re(\lambda)t}v$  tendent vers 0. Or l'un des vecteurs  $u$  ou  $v$  est non nul. Donc  $\Re(\lambda) < 0$ .

• Notons  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec leur multiplicité et telles que  $\Re(\lambda_1) \geq \Re(\lambda_2) \geq \dots \geq \Re(\lambda_n)$ . En utilisant la décomposition de Dunford, il existe  $U \in GL_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = U^{-1}(D+N)U$  avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $N$  une matrice nilpotente d'indice de nilpotence au plus  $n$  et telles que  $D$  et  $N$  commutent. Supposons maintenant que  $\Re(\lambda_1) < 0$ . Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Re(\lambda_1 + \varepsilon) < 0$ . Ainsi pour tout  $t \geq 0$ ,  $x(t) = Ue^{(D+\varepsilon I_n)t}e^{Nt}e^{-\varepsilon t}U^{-1}x_0$ . En utilisant la norme subordonnée, on trouve  $\|x(t)\| \leq \gamma e^{\|D+\varepsilon I_n\|t}\|x_0\|$  avec  $\gamma = \gamma_1(U) \max_{t \in [0, +\infty[} e^{Nt}e^{-\varepsilon t}$  qui existe car la fonction  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{Nt}e^{-\varepsilon t}$  est continue et converge vers 0, elle est par conséquent bornée. Nous avons alors:

$$\exists \delta > 0, \forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| \leq \gamma e^{\delta(\Re(\lambda_1) + \varepsilon)t}\|x_0\|.$$

Le système (6) est donc exponentiellement stable.

• Supposons la stabilité exponentielle, alors (3) est vérifiée. Par passage à la limite, on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on a également  $\|x(t)\| \leq \gamma\|x_0\|$ , donc si on choisit  $\varepsilon > 0$  et  $\delta = \varepsilon\gamma^{-1}$ , alors on a bien la stabilité au sens de Lyapunov. Cela prouve la stabilité asymptotique.  $\square$

**Remarque 2.** Comme cela le laisse supposer, nous pouvons montrer que le taux de décroissance maximal  $\alpha$  de (4) est en fait  $\alpha = -\Re(\lambda_1)$  mais cela demande d'autres outils plus complexes [3].

Ce que l'on suppose avec cette preuve et qui se confirme en pratique c'est que  $\gamma$  dans la définition (3) augmente fortement quand  $\varepsilon$  dans la deuxième partie de la preuve se rapproche de 0. c'est-à-dire qu'au prix d'une estimation plus précise du taux de convergence, l'enveloppe est moins précise autour de la trajectoire.

Dernière remarque, la condition 2 implique que 0 ne peut pas être une valeur propre de  $A$ , entraînant donc l'unicité du point d'équilibre.

**Exemple 4.** Reprenons l'exemple du pendule linéarisé en (5).

$$\Re(\lambda_1) < \frac{-k+|k|}{2m}, \quad \text{si } k^2 \geq \frac{4gm^2}{\ell},$$

$$\Re(\lambda_1) = -\frac{k}{2m} \quad \text{sinon,}$$

Ainsi, le système n'a que des valeurs propres avec une partie réelle strictement négative et le système est donc exponentiellement stable.

L'étude réalisée dans l'exemple précédent montre comment il est fastidieux d'étudier la matrice  $A$  pour en déduire le signe de la partie réelle des valeurs propres. Cela se complique encore plus quand la dimension de  $A$  augmente. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser un autre outil qui permet de résoudre ce genre de problème algorithmiquement grâce à des solveurs informatiques efficaces.

## 3 Analyse de stabilité linéaire avec une fonction de Lyapunov

### 3.1 Théorème de Lyapunov

Dans le cas du système (6), nous avons une caractérisation matricielle de la stabilité exponentielle. Ce résultat est un cas particulier d'un résultat plus général de Lyapunov [4].

**Théorème 1.** Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

1. le système (6) est exponentiellement stable.
2. il existe  $P \in \mathbb{S}_{++}^n$  tels que

$$A^\top P + PA \prec 0. \quad (7)$$

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin d'un résultat intermédiaire.

**Lemme 2.** Soit l'équation matricielle suivante :

$$EX + XF = D \quad (8)$$

avec  $E, F, D, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Pour  $E, F$  et  $D$  donnés, si  $E$  et  $-F$  n'ont aucune valeur propre en commun alors l'équation matricielle (8) a une unique solution  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

La preuve de ce lemme est disponible en appendice A.

**Preuve du Théorème 1.**

• Montrons que (2) implique (1). Comme  $P \succ 0$ , dénotons par  $\lambda_2 > 0$  sa plus grande valeur propre et par  $\lambda_1 > 0$  sa plus petite. Soit  $V(x) = x^\top Px$  (appelée fonction de Lyapunov) cela implique l'inégalité suivante pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ :

$$\lambda_1 \|u\|^2 \leq V(u) \leq \lambda_2 \|u\|^2. \quad (9)$$

2) du Théorème 1 implique l'égalité suivante pour tout  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [V(x(t))] &= \dot{x}^\top(t)Px(t) + x^\top(t)P\dot{x}(t) \\ &= x^\top(t) (A^\top P + PA) x(t). \end{aligned}$$

Notons par  $\delta$  la valeur propre minimale de  $-(A^\top P + PA)$ . Grâce à (7), on a  $\delta > 0$ . On a donc en utilisant (9) :

$$\frac{d}{dt} [V(x(t))] \leq -\delta \|x(t)\|^2 \leq -\frac{\delta}{\lambda_2} V(x(t)),$$

ce qui donne  $\frac{d}{dt} (V(x(t))e^{\frac{\delta}{\lambda_2}t}) \leq 0$ . Comme la dérivée est négative pour tout  $t \geq 0$ , on a nécessairement avec  $\alpha^* = \frac{\delta}{2\lambda_2}$  :

$$\lambda_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-2\alpha^*t} \leq \lambda_2 \|x_0\|^2 e^{-2\alpha^*t}.$$

On retrouve bien la stabilité exponentielle.

• Supposons maintenant que le système (6) est exponentiellement stable. Le système analogue avec  $A^\top$  l'est donc

aussi grâce au Lemme 1 car  $A$  et  $A^\top$  ont même spectre. Ainsi, en utilisant le Lemme 1,  $A$  a donc des valeurs propres avec une partie réelle strictement négative donc  $A$  et  $-A$  ne partagent aucune valeur propre en commun. Soit une matrice  $Q \in \mathbb{S}_{++}^n$ , le Lemme 2 garantit donc l'existence d'une unique solution à l'équation  $A^\top P + PA = -Q$  avec  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Comme  $A^\top M + MA = 0$  implique  $M = 0$ , on obtient nécessairement que  $P \in \mathbb{S}^n$ . Montrons que  $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ . Pour tout  $t \geq 0$ , avec  $x$  la solution de (6) de condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\dot{x}^\top(t)Px(t) + x^\top(t)P\dot{x}(t) = -x_0^\top e^{A^\top t} Q e^{At} x_0. \quad (10)$$

Le système (6) étant exponentiellement stable, l'inégalité (3) est valide et on a donc pour tout  $t \geq 0$  et  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :  $\|e^{At}y\| \leq \gamma\|y\|e^{\alpha t}$ . On récupère l'inégalité suivante sur la norme de l'exponentielle de matrice :

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{aligned} \|e^{At}\| &\leq \gamma_1 e^{-\alpha t}, \\ \|e^{A^\top t}\| &\leq \gamma_2 e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

On a donc :  $\exists k > 0, \forall t \geq 0, \|e^{A^\top t} Q e^{At}\| \leq k e^{-2\alpha t}$ . Cette dernière inégalité justifie l'intégration de (10) entre 0 et  $+\infty$  :

$$-x_0^\top P x_0 = -x_0^\top \left( \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt \right) x_0.$$

On a donc  $P = \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt \succ 0$ .  $\square$

**Remarque 3.** On peut mesurer le taux de décroissance  $\alpha$  en assurant l'inégalité suivante :

$$\Psi_\alpha(A) = A^\top P + PA + 2\alpha P \prec 0. \quad (11)$$

En utilisant le Lemme 1, il semble plus "facile" d'étudier le spectre de  $A$  pour constater la stabilité exponentielle du système (4) que de trouver la matrice  $P$ . Néanmoins, pour des systèmes de dimension plus élevée, le calcul du spectre d'une matrice est fastidieux et numériquement peu précis. La théorie de Lyapunov, quant à elle, demande la résolution d'un problème SDP (SemiDefinite Programming) ce qui est réalisable rapidement par ordinateur. Un autre avantage, étudié plus loin, est l'étude de robustesse par rapport à des paramètres "incertains". Cette dernière propriété est un indéniable avantage pour des applications pratiques.

Pour garder les idées claires sur les précédents concepts, la Figure 1 résume les relations entre les diverses stabilités.

## 3.2 Résolution d'inégalités matricielles linéaires

Commençons d'abord par quelques définitions. Une *Inégalité Matricielle Linéaire* est souvent abrégée LMI pour Linear Matrix Inequality, sa définition est la suivante [1, 6] :

**Définition 5.** Une LMI se définit par  $F_0, F_1, \dots, F_m \in \mathbb{S}^n$  et  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  par l'inégalité suivante :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \prec 0. \quad (12)$$

Le vecteur  $x$  est le vecteur des variables de décision. L'ensemble de faisabilité de la LMI est l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^m$  tel que l'inégalité (12) est vérifiée, on le note dans cet article  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \prec 0\}$ .

L'expression développée avec les  $F_i$  est néanmoins peu utilisée par souci de place et de simplicité, on préférera écrire en général directement  $F(x) \prec 0$ . Ce types d'inégalité est très utilisé pour deux cas :

1. **Sa faisabilité** : on cherche alors une estimations de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Il s'agit généralement de montrer que  $\mathcal{S}$  est non-vide, et qu'il existe donc bien une solution au problème. Il peut parfois être aussi utile d'avoir une approximation de cet ensemble;
2. **Son optimalité** : On cherche à résoudre un problème d'optimisation de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{tel que} \quad & F(x) \prec 0, H(x) = 0, \end{aligned}$$

où  $f$  est dite fonction de coût.

Dans le cas d'une fonction de coût  $f$  linéaire en  $x$ , il est possible de résoudre numériquement et efficacement le second problème. Mais ici, nous nous intéressons principalement à montrer que l'ensemble de faisabilité est non vide. Les quelques propriétés qui suivent servent à construire un algorithme de résolution efficace. Tout d'abord, l'ensemble  $\mathcal{S}$  est convexe tout comme  $F$  l'est également. En effet, soit  $\alpha \in (0, 1)$  et  $(x, y) \in \mathcal{S}^2$ , alors :

$$F(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y) \prec 0.$$

Cette propriété est utile car elle induit naturellement la proposition suivante.

**Proposition 1.** Soit  $x_*$  un minimum local de  $F$  définie en (12) dans le sens de  $\preceq$ . Alors  $x_*$  est un minimum global de  $F$ .

**Preuve.** Soit  $x_* \in \mathbb{R}^n$  un minimum local de  $F$ . Cela signifie qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\|y - x_*\| < \varepsilon$  alors  $F(x_*) \preceq F(y)$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\alpha \in [0, 1]$  suffisamment petit de sorte que  $\|\alpha(x - x_*)\| < \varepsilon$ . Ainsi,  $F(x_*) \preceq F(x_* + \alpha(x - x_*))$ . Ceci mène à :

$$F((1 - \alpha)x_* + \alpha x) - F(x_*) = \alpha(F(x) - F(x_*)) \succeq 0.$$

Ceci entraîne alors que  $F(x_*) \preceq F(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$  d'où  $x_*$  est un minimum global.  $\square$

La propriété précédente est d'un grand intérêt car cela signifie qu'il "suffit" de rechercher un minimum local de  $F$  pour trouver son minimum global. Les algorithmes

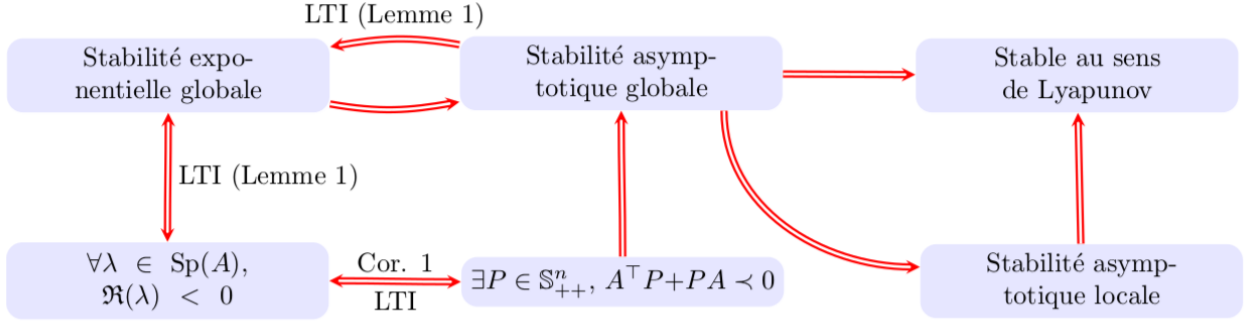


Figure 1: Relations entre les différentes notions de stabilité pour un système linéaire.

pour trouver les minimum globaux souffrent en général d'un problème d'initialisation. Il faut bien initialiser l'algorithme pour espérer qu'il converge, par contre, ils convergent en général très rapidement vers un minimum local. Ainsi, en exploitant la propriété de convexité, on obtient des algorithmes peu gourmands en ressources qui convergent rapidement vers un minimum global de  $F$ .

**Exemple 5.** Reprenons l'exemple du pendule linéarisé autour de 0 avec comme paramètre :  $\ell = 7$ ,  $k = 100$  et  $g = 9.81$  et  $m = 500$ . Pour  $\alpha = 0$ , on doit résoudre  $\Psi_0(A) \prec 0$ , on trouve<sup>1</sup> qu'il existe bien une solution avec  $P \succ 0$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $P$  sont environ 0.97 et 1.43 et celle de  $A^T P + PA$  sont approximativement  $-0.29$  et  $-0.19$ . Si on demande un taux de décroissance d'au moins  $\alpha = 0.09$ , on trouve que la précédente matrice est également solution de  $\Psi_{0.09}(A) \prec 0$  avec  $\gamma = \sqrt{\lambda_2 \lambda_1^{-1}} = \sqrt{1.43/0.97} \simeq 1.22$  dans l'équation (3).

Maintenant que l'on sait qu'il existe des algorithmes efficaces, on peut s'intéresser à la stabilité robuste du système (4).

### 3.3 Introduction à la robustesse

La robustesse du système (4) consiste à savoir si le système est stable malgré des incertitudes sur la matrice  $A$ . Ici, nous allons nous intéresser à des incertitudes de type polynôme, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$A \in \text{Co}_{i \in [1, N]}(A_i) = \left\{ M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i, \right. \\ \left. \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\}.$$

L'ensemble précédent est donc la combinaison convexe d'un ensemble de matrice  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pour  $i \in [1, N]$ .

<sup>1</sup>Pour générer algorithmiquement des solutions aux LMIs, on utilise le solveur "sedumi" tout au long de l'article.

Finalement,  $A$  est à l'intérieur d'un polygone dont les sommets sont les matrices  $A_i$ . Nous pouvons montrer le corollaire suivant.

**Corollaire 1.** Soit le système incertain (4) avec  $A \in \text{Co}_{i \in [1, N]}(A_i)$ . Ce système incertain est exponentiellement stable avec un taux de décroissance d'au moins  $\alpha$  si les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\forall i \in [1, N], \quad \Psi_\alpha(A_i) \prec 0,$$

avec  $\Psi_\alpha$  définie dans (11).

**Preuve.** Il suffit de constater l'égalité suivante :

$$\Psi_\alpha(A) = \Psi_\alpha \left( \sum_{i=1}^N \xi_i A_i \right) = \sum_{i=1}^N \xi_i \Psi_\alpha(A_i) \prec 0,$$

avec  $\xi_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ . Ainsi, toutes les matrices  $A \in \text{Co}_{i \in [1, N]}(A_i)$  partagent la même fonction  $P$  dans leur fonction de Lyapunov et ont donc au moins le même taux de décroissance  $\alpha$ .  $\square$

Cette propriété est très intéressante dans des cas concrets comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 6.** Supposons que notre pendule linéarisé est en fait une attraction de fête foraine et que la masselotte est une nacelle. Cela veut dire qu'elle peut accueillir des personnes de masses variables. On aimerait s'assurer que l'on reste stable pour  $m = m_0 + \delta_m$  avec  $m_0 = 200$  et  $\delta_m \in [0, 400]$ . On sait que le signe des valeurs propres est indépendant de  $m$  mais si l'on veut certifier au moins le même taux de décroissance quelque soit la masse  $m$  comprise dans l'intervalle précédent, on peut construire les matrices  $A_1 = A(m = m_0)$  et  $A_2 = A(m = m_0 + 400)$ . On cherche alors  $\alpha_{max} = \max_{\Psi_\alpha(A_1) \prec 0, \Psi_\alpha(A_2) \prec 0} \alpha$ . Une recherche manuelle avec les mêmes valeurs numériques que précédemment montre que  $\alpha_{max} \geq 0.08$ .

## 4 Synthèse de contrôleur

Considérons encore pour le moment le système (6) exponentiellement stable avec un taux de décroissance de

$\alpha$ . Il existe des applications où l'on aimerait accélérer le système, c'est-à-dire que l'on aimerait que sa dynamique soit plus rapide. C'est ce qui se passe quand on a des systèmes en cascade par exemple et que l'on souhaite que certains soient beaucoup plus rapides que les autres pour ne pas les impacter. Comme la dynamique du système se détermine uniquement par la matrice  $A$ , il va falloir la modifier en utilisant le signal  $u$ . Pour se faire, on peut utiliser une structure de rétroaction comme expliqué par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \geq 0, \\ y(t) = Cx(t), & t \geq 0, \\ u(t) = Ky(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (13)$$

$K$  s'appelle alors le gain du système. Il s'agit du même système (4) mais où  $u$  est défini comme une fonction de  $y$ . Nous allons considérer dans cette partie uniquement le cas  $C = I_n$ . Il s'agit donc de trouver la matrice  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que notre nouveau système ait le taux de décroissance  $\alpha$  souhaité.

**Remarque 4.** *Il est aussi possible que le système (4) soit instable et que l'on cherche  $K$  rendant le système en boucle fermée stable.*

Lorsque  $n$  est petit et  $m = 1$ , il est possible manuellement de trouver une valeur pour  $K$ . Ceci se complique beaucoup lorsque  $m > 1$ . Heureusement, il est possible de modifier notre formulation LMI pour résoudre ce problème. En utilisant le Corollaire 1, on trouve que le système bouclé (13) est asymptotiquement stable si et seulement si la LMI suivante a une solution pour  $P \in \mathbb{S}_{++}^n$  :

$$(A + BK)^\top P + P(A + BK) \prec 0, \quad (14)$$

avec cette fois  $K$  une variable de décision du problème. Il apparaît alors que l'équation précédente n'est pas une LMI, mais une BMI (pour *Inégalité Matricielle Bilineaire*). Ce genre de problème est beaucoup plus difficile à résoudre.

**Lemme 3.** *Soit l'inégalité matricielle suivante :  $F \prec 0$  pour  $F \in \mathbb{S}^n$ . Elle est équivalente avec  $U^\top F U \prec 0$  si  $U \in GL_n(\mathbb{R})$ .*

**Preuve.** La preuve est simple. Pour que  $F \prec 0$ , cela signifie que pour  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , alors  $x^\top F x < 0$ . Or  $U$  représente une application bijective donc pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $x$  tel que  $x = Uy$  et on a  $y^\top U^\top F U y < 0$  donc  $U^\top F U \prec 0$ . Une congruence par une application inversible conserve donc le caractère défini positif.  $\square$

Soit  $P \succ 0$  une solution du problème BMI (14). Alors notons  $U = P^{-1} \in \mathbb{S}_{++}^n$  son inverse. Grâce au Lemme 3, l'inégalité (14) est alors équivalente à :

$$U^\top A^\top + AU + \tilde{K}^\top B^\top + B\tilde{K} \prec 0$$

avec  $\tilde{K} = KU$ . Ce nouveau problème est un problème LMI avec pour variables de décision  $U$  et  $\tilde{K}$ . Cela mène donc au corollaire suivant que l'on a étendu aux systèmes incertains.

**Corollaire 2.** *Soit le système incertain en boucle fermée (13) tel que  $(A, B) \in \text{Co}_{i \in [1, N]}(A_i, B_i)$ .  $K$  est un gain tel que (13) est exponentiellement stable avec un taux de décroissance d'au moins  $\alpha$  s'il existe  $U \in \mathbb{S}_{++}^n$  tel que les LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\forall i \in [1, N], \quad \Phi_\alpha(A_i, B_i) \prec 0,$$

avec  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et

$$\Phi_\alpha(A_i, B_i) = UA_i^\top + A_iU + \tilde{K}^\top B_i^\top + B_i\tilde{K} + 2\alpha U,$$

et  $K = \tilde{K}U^{-1}$ .

Supposons que nous avons choisi  $K$  tel que le système soit exponentiellement stable avec le taux de décroissance souhaité. Nous voulons que le point d'équilibre soit une valeur bien définie  $x_e \neq 0$ . Le signal d'entrée est de la forme  $u(\cdot) = u_e + Kx(\cdot)$ , à l'équilibre nous avons donc  $(A + BK)x_e + Bu_e = 0$ , ceci implique :

$$x_e = -(A + BK)^{-1}Bu_e. \quad (15)$$

Nous pouvons ainsi construire le signal d'entrée qui nous permettra d'atteindre la valeur souhaitée à l'équilibre. Le prochain exemple montre comment y parvenir.

**Exemple 7.** *On peut maintenant essayer de contrôler l'attraction de fête foraine pour que la nacelle atteigne un angle  $\theta_r \in \mathbb{R}$  avec un taux de décroissance d'au moins  $\alpha = 0.5$ . Ainsi, on cherche  $K$  qui nous permette d'atteindre le taux de décroissance voulu. La masse est toujours incertaine :  $m = m_0 + \delta_m$  avec  $\delta_m \in [0, 400]$  et  $m_0 = 200$ . Les données physiques sont :  $\ell = 7$ ,  $k = 100$  et  $g = 9.81$ . En appliquant le corollaire précédent, on trouve :*

$$\begin{aligned} P &= U^{-1} = \begin{pmatrix} 129750 & -55060 \\ -55060 & 80360 \end{pmatrix}, \\ \tilde{K} &= \begin{pmatrix} 0 & -0.122 \end{pmatrix}, \\ K &= \begin{pmatrix} 6714 & -9800 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant, cherchons le signal d'entrée qui nous permette d'atteindre la valeur de consigne  $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \theta_r$  et  $\dot{\theta}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  avec  $u(\cdot) = u_e + Kx(\cdot)$ . En utilisant (15), on trouve :

$$\begin{pmatrix} \theta_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4818 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix} u_e,$$

donc  $u_e = 20756$ .

Le résultat de la simulation est en Figure 2 avec comme condition initiale un pendule au repos, donc  $\theta_0 = 0$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$  et un angle de consigne de  $\theta_r = 0.17$  (environ 10 degrés, ce qui respecte notre condition des petits angles pour la linéarisation) et une masse  $m = 400$ . On note que le système en boucle fermée est beaucoup moins oscillant que le précédent. On constate aussi qu'il dépasse moins de la valeur de consigne que le précédent. Cela veut dire que la loi de contrôle est efficace.



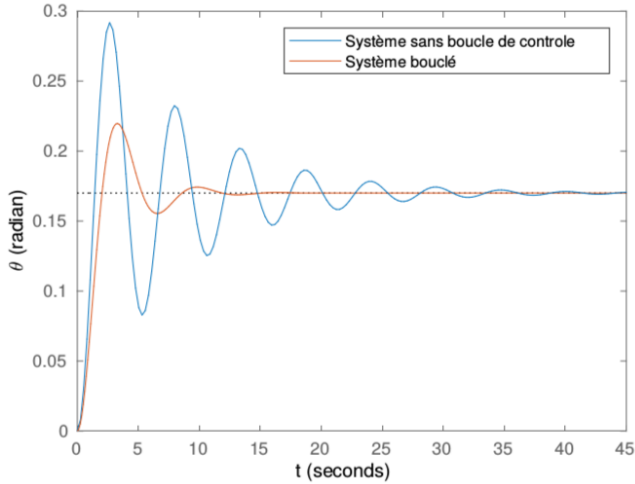


Figure 2: Résultat de la simulation pour le système avec une masse donnée et comme valeur de consigne  $\theta_r = 0.17$ . La réponse du système sans contrôle (4) est représentée par la courbe bleue, la rouge est la réponse du système en boucle fermée (13).

## 5 Conclusion

Nous avons donc vu que les Inégalités Matricielles Linéaires jouent un grand rôle en automatique. Elles sont utiles car elles apparaissent naturellement pour prouver la stabilité de systèmes linéaires. La fiabilité et la rapidité de résolution de problèmes LMI en font un outil très utilisé en pratique. De plus, il est possible d'optimiser certains paramètres, parfois sous contraintes et aussi d'étudier des systèmes plus complexes : non-linéaires, de dimension infinie...

## References

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, June 1994.
- [2] C. G. Cassandras and S. Lafortune. *Introduction to discrete event systems*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [3] T. Glad and L. Ljung. *Control Theory*. Control Engineering. Taylor & Francis, 2000.
- [4] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 55(3):531–534, 1992.
- [5] J.-F. Rameau. Une preuve complète du théorème d'instabilité linéaire. *Quadrature*, 65:20, 09 2007.
- [6] C. Scherer and S. Weiland. Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 3, 2000.

## A Preuve du Lemme 2

Supposons que les spectres complexes de  $E$  et de  $-F$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  soient disjoints et dénotons par  $\chi_E$  le polynôme caractéristique de  $E$  et par  $\chi_{-F}$  celui de  $-F$ . Soit  $f : X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto EX + XF$ .  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Prouver l'existence d'une solution à (8), c'est montrer que  $f$  est inversible, donc que son noyau est uniquement  $\{0\}$ . Si  $X$  est dans le noyau de  $f$  alors  $EX = -XF$  et donc  $E^2X = -EXF = X(-F)^2$  et par une récurrence immédiate  $E^kX = X(-F)^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . En particulier, pour tout polynôme  $p \in \mathbb{R}[X]$ , on a  $p(E)X = Xp(-F)$ .

Si les deux spectres sont disjoints, cela veut dire que  $\chi_E$  et  $\chi_{-F}$  sont premiers entre eux. En utilisant l'identité de Bézout, il existe deux polynômes  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $u\chi_E + v\chi_{-F} = 1$ . D'après Cayley-Hamilton, on sait que  $\chi_E$  est un polynôme annulateur de  $E$  donc  $v(E)\chi_{-F}(E) = 1$ . Ainsi, on a  $v(E)\chi_{-F}(E)X = X$ , et pour tout  $X$  dans le noyau de  $f$ , on a  $X = v(E)\chi_{-F}(E)X = v(E)X\chi_{-F}(-F) = 0$ . L'application  $f$  est donc inversible et il n'existe qu'une seule solution à l'équation (8).