



**HAL**  
open science

# Considérations sur les polynômes et les formes : symétrie, alternance, polarisation, invariance

Marc Renaud

► **To cite this version:**

Marc Renaud. Considérations sur les polynômes et les formes : symétrie, alternance, polarisation, invariance. 2019. hal-02160238

**HAL Id: hal-02160238**

**<https://laas.hal.science/hal-02160238>**

Submitted on 19 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Considérations sur les polynômes et les formes : symétrie, alternance, polarisation, invariance ...

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche  
31077 Toulouse Cedex 4 - France  
e-mail : renaud@laas.fr

## 1 Introduction

Le but de ce rapport est de présenter diverses considérations, que l'on trouve éparpillées dans la littérature, concernant les polynômes et les formes à plusieurs indéterminées (les formes sont des polynômes homogènes). Nous avons eu le souci d'une présentation avec des *notations unifiées* tout au long du rapport, ce qui est rarement le cas dans la littérature.

Pour ne pas trop allourdir la présentation nous avons du cependant faire les inévitables abus de notation classiques.

Après avoir présenté nos notations et définitions nous traitons des polynômes à plusieurs indéterminées (ordre des monômes, bézoutiens en particulier) puis nous examinons plus en détails les polynômes à une seule indéterminée (différence symétrique, bézoutiens, discriminants). Nous traitons ensuite des formes à plusieurs indéterminées (formes canoniques en particulier) puis des polynômes à plusieurs indéterminées symétriques (de Schur et de Newton en particulier) et alternants (comme le discriminant dans le cas d'une seule indéterminée). Nous examinons la polarisation d'une fonction polynomiale quelconque puis nous présentons les invariants des formes à plusieurs indéterminées. Nous terminons par l'étude des transvectants et des pfaffiens et présentons un glossaire de termes utilisés pour les polynômes et les formes.

## 2 Notations - Définitions

Soit  $k$  un corps infini, algébriquement clos (par exemple  $k = \mathbb{C}$ ).

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $k$ , de dimension finie  $n$ .

Une fonction  $V \xrightarrow{f} k$  est dite *polynomiale* si elle est donnée par un polynôme en les coordonnées, dans une base de  $V$ , du vecteur  $v \in V$ . Soit  $k[V]$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $V$  il s'agit d'une  $k$ -algèbre. En effet si  $f, g \in k[V]$  soit  $f + g$  telle que  $(f + g)(v) \triangleq f(v) + g(v); \forall v \in V$ ; alors  $f + g \in k[V]$  et si  $\lambda \in k$  soit  $\lambda f$  telle que  $(\lambda f)(v) \triangleq \lambda f(v); \forall v \in V$ ; alors  $\lambda f \in k[V]$  et  $k[V]$  est un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $f g$  telle que :  $(f g)(v) \triangleq f(v) g(v); \forall v \in V$ ; alors  $k[V]$  est un anneau et est bien une  $k$ -algèbre.

La  $k$ -algèbre  $k[V]$  est appelée *anneau des coordonnées de  $V$*  ou *anneau des fonctions régulières sur  $V$*  ou *anneau des fonctions polynomiales sur  $V$* .

Soit, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{V} = V^p$ . Une fonction  $\mathbf{V} \xrightarrow{\mathbf{f}} k$  est dite *polynomiale* si elle est donnée par un polynôme en les coordonnées, dans une base de  $\mathbf{V}$ , du vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Soit  $k[\mathbf{V}]$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $\mathbf{V}$  il s'agit également d'une  $k$ -algèbre.

Si  $\{e^1, \dots, e^n\}$  est une base de  $V$  et  $\{x_1, \dots, x_n\}$  la base duale de  $V^*$ , dual de  $V$ , i.e. telle que  $x_j(e^i) = \delta_j^i$  (symbole de Kronecker);  $i, j = 1, \dots, n$  et si  $k[x_1, \dots, x_n]$  est l'anneau des polynômes en les indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  on a  $k[V] \cong k[x_1, \dots, x_n]$ , car  $k$  est infini [33]<sup>1</sup> et [51]<sup>2</sup>.

Si  $\{e^1, \dots, e^N\}$  ( $N = np$ ) est une base de  $\mathbf{V}$  et  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  la base duale de  $\mathbf{V}^*$ , dual de  $\mathbf{V}$ , i.e. telle que  $\mathbf{x}_J(e^I) = \delta_J^I$ ;  $I, J = 1, \dots, N$  et si  $k[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$  est l'anneau des polynômes en les indéterminées  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  on a  $k[\mathbf{V}] \cong k[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$ , car  $k$  est infini.

Une fonction polynomiale  $f \in k[V]$  est dite *homogène de degré  $d$*  ssi  $f(tv) = t^d f(v); \forall t \in k; \forall v \in V$ . Alors si  $k[V]_d$  désigne le sous-espace des fonctions polynomiales homogènes de degré  $d$  et si  $k[x_1, \dots, x_n]_d$  désigne le sous espace des polynômes homogènes de degré  $d$  on a :

$$\begin{aligned} k[V]_d &\cong k[x_1, \dots, x_n]_d \\ k[V] &= \bigoplus_d k[V]_d \text{ et } k[V] \text{ est une } k\text{-algèbre graduée.} \\ k[x_1, \dots, x_n] &= \bigoplus_d k[x_1, \dots, x_n]_d \text{ et } k[x_1, \dots, x_n] \text{ est une } k\text{-algèbre graduée.} \end{aligned}$$

On peut remarquer que  $k[V]_1 = V^*$ .

---

1. pp. 365-367 § 3 "Cas d'un corps infini"  
2. p. 1 Exercice 1

Une fonction  $\mathbf{V} \xrightarrow{\mathbf{f}} k$  est dite *polynomiale* si elle est donnée par un polynôme en les coordonnées, dans une base de  $\mathbf{V}$ , du vecteur  $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbf{V}$ . Soit  $k[\mathbf{V}]$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $V$  il s'agit également d'une  $k$ -algèbre.

Une fonction polynomiale  $\mathbf{f} \in k[\mathbf{V}]$  est dite multi-homogène de degrés  $(d_1, \dots, d_p)$  ssi  $\mathbf{f}(t_1 v^1, \dots, t_p v^p) = t_1^{d_1} \dots t_p^{d_p} \mathbf{f}(v^1, \dots, v^p)$  ;  $\forall (t_1, \dots, t_p) \in k^p$  ;  $\forall (v^1, \dots, v^p) \in \mathbf{V}$ . Alors si  $k[\mathbf{V}]_{(d_1, \dots, d_p)}$  désigne le sous espace des fonctions polynomiales multi-homogènes de degrés  $(d_1, \dots, d_p)$  et si  $k[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]_d$  désigne le sous espace des polynômes homogènes de degrés  $(d_1, \dots, d_p)$  on a :

$k[\mathbf{V}]_{(d_1, \dots, d_p)} \cong k[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]_{(d_1, \dots, d_p)}$   
 $k[\mathbf{V}] = \bigoplus_{(d_1, \dots, d_p)} k[\mathbf{V}]_{(d_1, \dots, d_p)}$  et  $k[\mathbf{V}]$  est une  $k$ -algèbre graduée.  
 $k[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N] = \bigoplus_{(d_1, \dots, d_p)} k[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]_{(d_1, \dots, d_p)}$  et  $k[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$  est une  $k$ -algèbre graduée.

Soit  $M(n, k)$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$ , à éléments dans  $k$ .

Soit  $GL(W)$  le groupe des automorphismes de  $W$  [5]<sup>3</sup>.

Alors  $GL(n, k) \triangleq GL(k^n)$  est le groupe (général) linéaire sur  $k^n$ . C'est aussi le groupe des matrices d'ordre  $n$ , à éléments dans  $k$ , inversibles [5]<sup>4</sup>, [18]<sup>5</sup> et [51]<sup>6</sup>. On a  $GL(n, k) \subset M(n, k)$ .

$SL(n, k) \subset GL(n, k)$  groupe spécial linéaire des matrices d'ordre  $n$ , à éléments dans  $k$ , inversibles et à déterminants égaux à 1.

Soit  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  d'ordre  $n!$  dit groupe symétrique [5]<sup>7</sup> et [33]<sup>8</sup>. C'est aussi le groupe des *matrices de permutation*, d'ordre  $n$  [18]<sup>9</sup>.

Soit  $k[V]^{\mathfrak{S}_n}$  le sous espace des fonctions polynomiales homogènes symétriques et  $k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  le sous espace des polynômes homogènes de symétriques. On a  $k[V]^{\mathfrak{S}_n} \cong k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ .

Soit  $k[V]_d^{\mathfrak{S}_n}$  le sous espace des fonctions polynomiales homogènes de degré  $d$  symétriques et  $k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{S}_n}$  le sous espace des polynômes homogènes de degré  $d$  symétriques. On a  $k[V]_d^{\mathfrak{S}_n} \cong k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{S}_n}$ .

---

3. p. 443  
4. p. 443  
5. p. 321 p. 410 p. 418 p. 498  
6. p. 2  
7. p. 724  
8. p. 124  
9. p. 322 Exemple 4

Soit  $\mathfrak{A}_n$  ( $n \geq 2$ ) le groupe alterné des permutations paires de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  d'ordre  $\frac{n!}{2}$  [5]<sup>10</sup>.

Soit  $k[V]^{\mathfrak{A}_n}$  le sous espace des fonctions polynomiales homogènes alternantes et  $k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{A}_n}$  le sous espace des polynômes homogènes alternants. On a  $k[V]^{\mathfrak{A}_n} \cong k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{A}_n}$ .

Soit  $k[V]_d^{\mathfrak{A}_n}$  le sous espace des fonctions polynomiales homogènes de degré  $d$  alternantes et  $k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{A}_n}$  le sous espace des polynômes homogènes de degré  $d$  alternants. On a  $k[V]_d^{\mathfrak{A}_n} \cong k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{A}_n}$ .

Soit  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \dots (n-p+1)$  le nombre d'arrangements de  $n$  objets  $p$  à  $p$  [5]<sup>11</sup> et

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} \text{ le nombre de combinaisons de } n \text{ objets } p \text{ à } p \text{ [5]}^{12}.$$

Soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  deux multi-indices ou multi-exposants d'entiers positifs.

$$\beta \leq \alpha \iff \beta_i \leq \alpha_i ; 1 \leq i \leq n.$$

$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  est la longueur ou le module du multi-indice ou multi-exposant  $\alpha$ .

$$\alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots C_{\alpha_n}^{\beta_n}.$$

Pour  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  :

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Généralisation de la formule du binôme de Newton :

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \mathbf{x}^{\alpha-\beta} \mathbf{y}^\beta.$$

$\cong$  signifie : *isomorphe*.

ssi signifie : *si et seulement si*.

Une multitude d'exemples sont présentés.

---

10. p. 28

11. p. 57

12. p. 140

### 3 Polynômes à $n$ indéterminées

Soit  $k[x_1, \dots, x_n]$  l'anneau des polynômes à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  sur le corps  $k$ . Il s'agit d'une algèbre.

Soit  $f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  un polynôme à  $n$  indéterminées de degré  $d$ .

#### Décomposition en série de Taylor (finie) au "point" $\mathbf{x}$

On pourra consulter [70]<sup>13</sup> et [72]<sup>14</sup>.

Soient  $\mathbf{x} \triangleq (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} \triangleq (y_1, \dots, y_n)$ .

Avec le multi-exposant  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  on peut écrire (cf. Notations-Définitions) :

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq d} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x}) (\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

#### Calcul de la différence $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$

Posons  $\mathbf{x} \triangleq \mathbf{x}_{(0)} \triangleq (x_1, \dots, x_n), \dots, \mathbf{x}_{(j)} \triangleq (y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n), \dots, \mathbf{x}_{(n)} \triangleq \mathbf{y} \triangleq (y_1, \dots, y_n); 0 \leq j \leq n$ . Et :

$$\theta_j(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \frac{f(\mathbf{x}_{(j)}) - f(\mathbf{x}_{(j-1)})}{y_j - x_j}; 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \text{ [8]}^{15} \text{ et [28]}^{16}.$$

On constate aisément que :

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \theta_j(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (y_j - x_j).$$

Cependant il existe de nombreuses collections de polynômes  $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}); 1 \leq j \leq n$  telles que :

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (y_j - x_j). \text{ Par exemple :}$$

Avec utilisation d'une intégrale :

$$h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y_1 + t(x_1 - y_1), \dots, y_n + t(x_n - y_n)) \text{ [47]}^{17} \text{ ou :}$$

avec utilisation de la série de Taylor :

$$h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq d; \alpha_1 = \dots = \alpha_{j-1} = 0; \alpha_j \neq 0} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x}) (\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\varepsilon}_j}$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  le 1 étant à la place  $j$  [47]<sup>18</sup>.

13. pp. 231-233 § 116 Extension de la formule de Taylor, due à Lagrange et Cauchy. Théorèmes d'Euler sur les fonctions homogènes (pour  $n = 3$ )

14. pp. 1790-1791 Taylor series

15. p. 29

16. p. 129

17. p. 175

18. p. 175

**Exemple d'un polynôme à  $n = 2$  indéterminées d'ordre  $d = 3$  (ou moins).**

$f(x_1, x_2) = c_{30}x_1^3 + 3c_{21}x_1^2x_2 + 3c_{12}x_1x_2^2 + c_{03}x_2^3 + c_{20}x_1^2 + 2c_{11}x_1x_2 + c_{02}x_2^2 + c_{10}x_1 + c_{01}x_2 + c_{00}$ . On trouve :

$$\theta_1(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_{30}(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) + 3c_{21}(x_1 + y_1)x_2 + 3c_{12}x_2^2 + c_{20}(x_1 + y_1) + 2c_{11}x_2 + c_{10}$$

$$\theta_2(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_{03}(x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2) + 3c_{12}(x_2 + y_2)y_1 + 3c_{21}y_1^2 + c_{02}(x_2 + y_2) + 2c_{11}y_1 + c_{01}$$

Et avec la formule ci-devant qui utilise l'intégrale :

$$h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_{30}(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) + c_{21}(2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2) + c_{12}(x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2) + c_{20}(x_1 + y_1) + c_{11}(x_2 + y_2) + c_{10} \neq \theta_1(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$h_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_{03}(x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2) + c_{12}(2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2) + c_{21}(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) + c_{02}(x_2 + y_2) + c_{11}(x_1 + y_1) + c_{01} \neq \theta_2(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Et avec la formule ci-devant qui utilise la série de Taylor :

$$h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_{30}(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) + 3c_{21}(x_1 + y_1)y_2 + 3c_{12}y_2^2 + c_{20}(x_1 + y_1) + 2c_{11}y_2 + c_{10} \neq \theta_1(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$h_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_{03}(x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2) + 3c_{12}(x_2 + y_2)x_1 + 3c_{21}x_1^2 + c_{02}(x_2 + y_2) + 2c_{11}x_1 + c_{01} \neq \theta_2(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

### 3.1 Ordres de classement des monômes

On pourra consulter [1]<sup>19</sup>, [18]<sup>20</sup> et [69]<sup>21</sup>.

On suppose que l'on classe les monômes de degré 1 de la sorte :  
 $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$ .

#### 3.1.1 Ordre lexicographique

On pourra consulter [1]<sup>22</sup> et [18]<sup>23</sup>. En anglais cet ordre est dénommé : "lexicographic order" (lex).

$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} \prec x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$  ssi les premiers exposants (en partant de la gauche, i.e. de  $i = 1$ )  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  qui sont différents sont tels que  $\alpha_i < \beta_i$  (voir exemple ci-après).

---

19. pp. 18-25 Term orders

20. pp. 52-59 § 2 Orderings on the monomials in  $k[x_1, \dots, x_n]$

21. p. 3

22. p. 19 définition 1.4.2

23. p. 54 définition 3

### 3.1.2 Ordre lexicographique par degré

On pourra consulter [1]<sup>24</sup>, [18]<sup>25</sup> et [69]<sup>26</sup>. Cet ordre est également appelé ordre du degré lexicographique. En anglais cet ordre est dénommé : “degree lexicographic order” (deglex) ou “graded lex order” (grlex).

$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \prec x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$  ssi  $\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$  ou si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ , mais de telle manière que la première différence (en partant de la gauche, i.e. de  $i = 1$ )  $\alpha_i - \beta_i$  non nulle est négative (voir exemple ci-après).

### 3.1.3 Ordre lexicographique inverse par degré

On pourra consulter [1]<sup>27</sup> et [18]<sup>28</sup>. Cet ordre est également appelé ordre du degré lexicographique inverse. En anglais cet ordre est dénommé : “degree reverse lexicographic order” (degrevlex) ou “graded reverse lex order” (grevlex).

$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \prec x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$  ssi  $\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$  ou si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ , mais de telle manière que la première différence (en partant de la droite, i.e. de  $i = n$ )  $\alpha_i - \beta_i$  non nulle est positive (voir exemple ci-après).

### 3.1.4 Commentaires, exemple

- Si  $n = 2$  “degrevlex”  $\equiv$  “degrevlex”. Si  $n > 2$  ce n’est plus le cas.

*Exemple, avec  $n = 3$ , de 2 monômes de même degré 4 :*

$x_1 x_2^3 \prec x_1^2 x_2 x_3$ ; avec “lex”.

$x_1 x_2^3 \prec x_1^2 x_2 x_3$ ; avec “deglex”.

$x_1^2 x_2 x_3 \prec x_1 x_2^3$ ; avec “degrevlex”.

### 3.1.5 Ordre choisi dans ce rapport

Sauf avis contraire Nous classons les monômes de  $f$  selon l’ordre lexicographique (“lex”).

---

24. p. 19 définition 1.4.3

25. pp. 55-56 définition 5

26. p. 3

27. p. 19 définition 1.4.4

28. p. 56 définition 6



### 3.2 Bézoutien de $n + 1$ polynômes à $n$ indéterminées

On pourra consulter [8]<sup>29</sup> et [28]<sup>30</sup>.

Soient  $f_0(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n], \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$   $n + 1$  polynômes à  $n$  indéterminées, de degrés respectifs  $d_0, \dots, d_n$ .

Le bézoutien des  $n + 1$  polynômes  $f_0(x_1, \dots, x_n), f_n(x_1, \dots, x_n)$  à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  est, par définition (cf. ci-devant) :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \begin{vmatrix} f_0(\mathbf{x}) & \theta_1(f_0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \theta_n(f_0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(\mathbf{x}) & \theta_1(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \theta_n(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} \quad [8]^{31} \text{ et } [28]^{32}.$$

Alors on a :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\begin{vmatrix} f_0(\mathbf{x}_{(0)}) & f_0(\mathbf{x}_{(1)}) & \dots & f_0(\mathbf{x}_{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(\mathbf{x}_{(0)}) & f_n(\mathbf{x}_{(1)}) & \dots & f_n(\mathbf{x}_{(n)}) \end{vmatrix}}{\prod_{j=1}^n (y_j - x_j)} \quad [28]^{33}.$$

**Remarque :** cette définition générale du bézoutien conduit lorsque  $n = 1$ , i.e. pour le bézoutien de deux polynômes à une indéterminée à un signe opposé à celui communément utilisé dans la littérature, y compris par [28]<sup>34</sup> (cf. ci-après).

Le bézoutien  $\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta_{f_0, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  est un polynôme à  $2n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  de degré au plus égal à :

$$\sum_{i=0}^n d_i - n \quad [28]^{35}.$$

On a :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_0(\mathbf{x}) \Theta_{1, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_1(\mathbf{x}) \Theta_{f_0, 1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots + f_n(\mathbf{x}) \Theta_{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, 1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad [28]^{36}.$$

---

29. p. 29

30. p. 129

31. p. 29

32. p. 129

33. p. 129

34. p. 109

35. p. 129

36. p. 131 Proposition 5.45

### 3.2.1 Exemple

cf. [28]<sup>37</sup>.

$n = 2$ ,  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 2$ .

$f_0(x_1, x_2) = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2$ ,  $f_1(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - 2$ ,  
 $f_2(x_1, x_2) = 6x_1 x_2 - 1$ . On trouve :

$\Theta_{f_0, f_1, f_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = [(12u_1 + 9u_2)y_1 - 4u_1 y_2 + 54u_0 y_1^2]$   
 $+ (9u_2 + 54u_0 y_1 + 54u_1 y_1^2)x_1 + [-(4u_1 + 12u_2) - 24u_0 y_2 + 54u_2 y_1^2]x_2$   
 $- (24u_0 + 24u_1 y_1 + 24u_2 y_2)x_2^2$  de degré 3.

### 3.3 Bézoutien de $n$ polynômes à $n$ indéterminées

On pourra consulter [28]<sup>38</sup>.

Soient  $f_1(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n], \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$   
 $n$  polynômes à  $n$  indéterminées, de degrés respectifs  $d_1, \dots, d_n$ .

Le bézoutien des  $n$  polynômes  $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$  à  $n$   
indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  est, par définition :  $\Theta_{1, f_1, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  [28]<sup>39</sup>. Par

conséquent il s'agit de :  $\Theta_{1, f_1, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \theta_1(f_1)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \theta_n(f_1)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_1(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \theta_n(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}$ .

Le bézoutien  $\Theta_{1, f_1, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta_{1, f_1, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$   
est un polynôme à  $2n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  de degré au plus  
égal à  $\sum_{i=1}^n d_i - n$ .

#### 3.3.1 Exemple

$n = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$ .

$f_1(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - 2$ ,  $f_2(x_1, x_2) = 6x_1 x_2 - 1$ . On trouve :

$\Theta_{1, f_1, f_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = 6(9x_1 y_1 - 4x_2^2 - 4x_2 y_2 + 9y_1^2)$  de degré 2.

## 4 Polynômes à une indéterminée

Bien entendu les polynômes à une indéterminée sont un cas particulier  
des polynômes à  $n$  indéterminées.

---

37. pp. 129-130

38. p. 261

39. p. 261

On pose  $x = x_1$  et soit  $f(x) \in k[x]$  un polynôme à une indéterminée  $x$ . Dans le but de simplifier par la suite certaines sommes de coefficients nous posons, comme D. Hilbert [43], G. Salmon [64] et beaucoup d'autres auteurs à la suite de A. Cayley :

$f(x) \triangleq a_0 x^d + C_d^1 a_1 x^{d-1} + C_d^2 a_2 x^{d-2} + \dots + C_d^{d-1} a_{d-1} x + a_d$ ; avec  $a_0 \neq 0$ , polynôme à une indéterminée de degré  $d$ .

Soient  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$ , les  $d$  racines, distinctes ou non, de l'équation polynomiale  $f(x) = 0$ <sup>40</sup>. Il s'agit des  $d$  zéros du polynôme  $f$ ; alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 (x - \omega_1) (x - \omega_2) \dots (x - \omega_d) \\ &= a_0 [x^d - S_1(\omega_1, \dots, \omega_d) x^{d-1} + S_2(\omega_1, \dots, \omega_d) x^{d-2} + \dots \\ &+ (-1)^{d-1} S_{d-1}(\omega_1, \dots, \omega_d) x + (-1)^d S_d(\omega_1, \dots, \omega_d)]; \text{ avec :} \\ S_1 &\triangleq S_1(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq \sum_{1 \leq i \leq d} \omega_i = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_d = -\frac{C_d^1 a_1}{a_0}, \\ S_2 &\triangleq S_2(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq \sum_{1 \leq i < j \leq d} \omega_i \omega_j = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \dots + \omega_{d-1} \omega_d \\ &= \frac{C_d^2 a_2}{a_0}, \\ S_3 &\triangleq S_3(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq \sum_{1 \leq i < j < k \leq d} \omega_i \omega_j \omega_k = \omega_1 \omega_2 \omega_3 + \dots + \omega_{d-2} \omega_{d-1} \omega_d \\ &= -\frac{C_d^3 a_3}{a_0}, \\ &\vdots \\ S_i &\triangleq S_i(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq d} \omega_{j_1} \omega_{j_2} \dots \omega_{j_i} \\ &= \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i + \dots = (-1)^i \frac{C_d^i a_i}{a_0}, \\ &\vdots \\ S_{d-1} &\triangleq S_{d-1}(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq \prod_{1 \leq i \leq d} \omega_1 \dots \widehat{\omega}_i \dots \omega_d \\ &= \omega_2 \omega_3 \dots \omega_d + \dots + \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{d-1} = (-1)^{d-1} \frac{C_d^{d-1} a_{d-1}}{a_0} (\widehat{\omega}_i \text{ terme omis}), \\ S_d &\triangleq S_d(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq \prod_{1 \leq i \leq d} \omega_i = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_d = (-1)^d \frac{a_d}{a_0}. \end{aligned}$$

Inversement on a :

$$a_1 = -\frac{a_0 S_1}{C_d^1}, a_2 = \frac{a_0 S_2}{C_d^2}, \dots, a_{d-1} = (-1)^{d-1} \frac{a_0 S_{d-1}}{C_d^{d-1}}, a_d = (-1)^d a_0 S_d.$$

Les  $S_i$  ( $1 \leq i \leq d$ ) sont les fonctions symétriques élémentaires des racines  $\omega_1, \dots, \omega_d$  de l'équation polynomiale  $f(x) = 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial a_0} &= C_d^1 \frac{a_1}{a_0^2}, \frac{\partial S_2}{\partial a_0} = -C_d^2 \frac{a_2}{a_0^2}, \dots, \frac{\partial S_{d-1}}{\partial a_0} = -(-1)^{d-1} C_d^{d-1} \frac{a_{d-1}}{a_0^2}, \\ \frac{\partial S_d}{\partial a_0} &= -(-1)^d \frac{a_d}{a_0^2} \text{ et :} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial a_1} = -C_d^1 \frac{1}{a_0}, \frac{\partial S_2}{\partial a_2} = C_d^2 \frac{1}{a_0}, \dots, \frac{\partial S_{d-1}}{\partial a_{d-1}} = (-1)^{d-1} C_d^{d-1} \frac{1}{a_0}, \frac{\partial S_d}{\partial a_d} = (-1)^d \frac{1}{a_0}.$$

---

40. rappel : le corps  $k$  est algébriquement clos

## 4.1 Différence symétrique

La différence symétrique du polynôme  $f(x) \in k[x]$ , à une indéterminée  $x$ , est le polynôme  $Bf(x, y) \in k[x, y]$ , à deux indéterminées  $x$  et  $y$  tel que<sup>41</sup> :

$Bf(x, y) \triangleq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$  [47]<sup>42</sup>. On constate que  $Bf(x, y) = \Theta_{1,f}(x, y)$  (cf. ci-devant et ci-après). Alors :

$$\begin{aligned} Bf(x, y) &= a_0 (x^{d-1} + x^{d-2} y + \dots + x y^{d-2} + y^{d-1}) \\ &+ C_d^1 a_1 (x^{d-2} + x^{d-3} y + \dots + x y^{d-3} + y^{d-2}) \\ &+ C_d^2 a_2 (x^{d-3} + x^{d-4} y + \dots + x y^{d-4} + y^{d-3}) + \dots + C_d^{d-1} a_{d-1} \text{ et donc} \\ Bf(y, x) &= Bf(x, y). \end{aligned}$$

**Remarque** : soit  $f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  un polynôme à  $n$  indéterminées et  $g(t) = f(y_1, \dots, y_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) \in k[t]$  le polynôme à une indéterminée obtenu en fixant une valeur aux  $n - 1$  indéterminées

$y_1, \dots, y_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ . On constate que :

$$\begin{aligned} f(x_{(j)}) &= g(y_j) \text{ et } f(x_{(j-1)}) = g(x_j) \text{ et par conséquent :} \\ \theta_j(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{g(y_j)-g(x_j)}{y_j-x_j} = Bg(x_j, y_j). \end{aligned}$$

### 4.1.1 Exemples

- $d = 1$  ;  $Bf(x, y) = a_0$ ,
- $d = 2$  ;  $Bf(x, y) = a_0 (x + y) + 2 a_1$ ,
- $d = 3$  ;  $Bf(x, y) = a_0 (x^2 + x y + y^2) + 3 a_1 (x + y) + 3 a_2$ ,
- etc.

## 4.2 Bézoutien de deux polynômes à une indéterminée

On pose  $x = x_1$  et  $y = y_1$ . Le bézoutien des polynômes  $f_0(x)$  et  $f_1(x)$  à une indéterminée  $x$  est, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \Theta_{f_0, f_1}(x, y) &= \begin{vmatrix} f_0(x) & \theta_1(f_0)(x, y) \\ f_1(x) & \theta_1(f_1)(x, y) \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} f_0(x) & f_0(y) \\ f_1(x) & f_1(y) \end{vmatrix}}{y-x} \\ &= \frac{f_0(x) f_1(y) - f_1(x) f_0(y)}{y-x}. \end{aligned}$$

**Remarque** : comme indiqué il s'agit du signe opposé à celui communément utilisé dans la littérature, y compris par [28]<sup>43</sup>.

41. certains auteurs notent  $\Delta$  à la place de  $B$

42. p. 175

43. p. 109

### 4.2.1 Exemples

- $d_0 = d_1 = 1$ .

$f_0(x) = a_0 x + a_1$ ,  $f_1(x) = a'_0 x + a'_1$ . Alors :

$\Theta_{f_0, f_1}(x, y) = a_1 a'_0 - a_0 a'_1$  de degré 0.

- $d_0 = 1$  et  $d_1 = 2$ .

$f_0(x) = a_0 x + a_1$ ,  $f_1(x) = a'_0 x^2 + 2 a'_1 x + a'_2$ . Alors :

$\Theta_{f_0, f_1}(x, y) = a_0 a'_0 x y + a_1 a'_0 x + a_1 a'_0 y + 2 a_1 a'_1 - a_0 a'_2$  de degré 2.

### 4.3 Discriminants des polynômes à une indéterminée

On pourra consulter [5]<sup>44</sup>, [32]<sup>45</sup>, [54]<sup>46</sup>, [64]<sup>47</sup> et [72]<sup>48</sup>.

La définition du discriminant d'un polynôme à une indéterminée varie quelque peu selon les auteurs et, en particulier, en ce qui concerne le signe.

$$\text{Soit } D(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq \begin{vmatrix} \omega_1^{d-1} & \omega_2^{d-1} & \dots & \omega_d^{d-1} \\ \omega_1^{d-2} & \omega_2^{d-2} & \dots & \omega_d^{d-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\omega_i - \omega_j),$$

appelé déterminant de Vandermonde et soit :

$$F(\omega_1, \dots, \omega_d) \triangleq D^2(\omega_1, \dots, \omega_d).$$

Alors le discriminant du polynôme  $f(x)$  est, par définition :

$$D \triangleq a_0^{2(d-1)} F(\omega_1, \dots, \omega_d) \text{ [32]}^{49}.$$

On a également :

$$D = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0^{d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} f'(\omega_i) \text{ [33]}^{50} \text{ et [61]}^{51}.$$

44. pp. 233-234

45. pp. 397-425 Chapter 12. Discriminants and Resultants for Polynomials in One Variable

46. pp. 192-193 et p. 204

47. pp. 143-156 Onzième leçon. Discriminants

48. pp. 467-468 ; avec  $a_n = 1$

49. p. 403 éq. (1.23) mais avec une définition légèrement différente du discriminant

50. p. 609

51. p. 206

### Démonstration

$f(x) = a_0 (x - \omega_1) (x - \omega_2) \dots (x - \omega_d)$ ; donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_0 [\widehat{(x - \omega_1)} (x - \omega_2) \dots (x - \omega_d) \\ &+ (x - \omega_1) \widehat{(x - \omega_2)} \dots (x - \omega_d) + \dots \\ &+ (x - \omega_1) (x - \omega_2) \dots \widehat{(x - \omega_d)}] [\widehat{(x - \omega_i)} \text{ terme omis}] \text{ et par conséquent :} \end{aligned}$$

$$f'(\omega_1) = a_0 (\omega_1 - \omega_2) \dots (\omega_1 - \omega_d),$$

$$f'(\omega_2) = a_0 (\omega_2 - \omega_1) \dots (\omega_2 - \omega_d),$$

$\vdots$ ,

$$f'(\omega_d) = a_0 (\omega_d - \omega_1) \dots (\omega_d - \omega_{d-1}) \text{ soit :}$$

$$\prod_{1 \leq i \leq d} f'(\omega_i) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0^d \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\omega_i - \omega_j)^2 \text{ [61]}^{52}. \text{ Et donc :}$$

$$\prod_{1 \leq i \leq d} f'(\omega_i) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0^d \frac{D}{a_0^{2d-2}} \text{ soit}$$

$$D = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0^{d-2} \prod_{1 \leq i \leq d} f'(\omega_i) \text{ QED.}$$

$F(\omega_1, \dots, \omega_d) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\omega_i - \omega_j)^2 = \omega_1^{2(d-1)} \omega_2^{2(d-2)} \dots \omega_{d-1}^2 + \dots$   
est un polynôme symétrique (cf. ci-après), donc une forme (cf. ci-après), des racines  $\omega_1, \dots, \omega_d$ , de degré  $\delta = d(d-1)$  et la plus grande puissance de chacune des racines est  $\alpha = 2(d-1)$ .

Par conséquent on montre [33]<sup>53</sup>, [54]<sup>54</sup> et [61]<sup>55</sup> qu'il existe un polynôme :

$$P(S_1, \dots, S_d) \triangleq F(\omega_1, \dots, \omega_d),$$

de degré  $\alpha$ , dont tous les monômes  $S_1^{r_1} S_2^{r_2} \dots S_d^{r_d}$  sont de poids  $\delta$  i.e. tels que :

$$r_1 + 2r_2 + \dots + dr_d = \delta = d(d-1) \text{ et } r_1 + r_2 + \dots + r_d \leq \alpha = 2(d-1).$$

### Propriétés du polynôme $P$

• Comme  $F(\omega_1, \dots, \omega_d)$  est un polynôme symétrique en la différence des racines on a :

$$d \frac{\partial P}{\partial S_1} + (d-1) S_1 \frac{\partial P}{\partial S_2} + \dots + S_{d-1} \frac{\partial P}{\partial S_d} = 0.$$

---

52. p. 206

53. p. 607 Exercice 13

54. pp. 191-192 Théorème 6.1

55. pp. 36-39

**Démonstration** : cf. [64]<sup>56</sup>.

• On a également :

$$S_1 [2(d-1)P(S_1, \dots, S_d) - S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} - S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - \dots - S_{d-1} \frac{\partial P}{\partial S_{d-1}} - S_d \frac{\partial P}{\partial S_d}] + 2S_2 \frac{\partial P}{\partial S_1} + \dots + dS_d \frac{\partial P}{\partial S_{d-1}} = 0$$

**Définition de la forme  $\varphi$**

La notion de forme est définie ci-après.

Soit  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_d) \triangleq D \triangleq a_0^{2(d-1)} P[-\frac{C_d^1 a_1}{a_0}, \frac{C_d^2 a_2}{a_0}, \dots, (-1)^d \frac{a_d}{a_0}]$ .

Alors  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_d)$  est une forme à  $d+1$  indéterminées  $a_0, a_1, \dots, a_d$ , de degré  $\alpha = 2(d-1)$ , dont tous les monômes  $a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_d^{\nu_d}$  ont le même poids  $\delta = d(d-1)$ . Par conséquent :

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + d\nu_d = \delta = d(d-1) \text{ et } \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_d = \alpha = 2(d-1).$$

**Propriétés de la forme  $\varphi$**

• La somme des coefficients de  $\varphi$  est nulle.

**Démonstration**

On a  $0 = F(-1, \dots, -1) = P(-C_d^1, C_d^2, \dots, (-1)^d) = \varphi(1, \dots, 1)$ . Or  $\varphi(1, \dots, 1)$  est la somme des coefficients de  $\varphi$  QED.

•  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_d)$  est un *invariant* en un sens défini par la suite.

Si l'on définit les deux opérateurs aux dérivées partielles :

$$\mathbf{D} \triangleq a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \dots + da_{d-1} \frac{\partial}{\partial a_d} \text{ [43]}^{57} \text{ et [64]}^{58} \text{ et :}$$

$$\mathbf{\Delta} \triangleq da_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (d-1)a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (d-2)a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + a_d \frac{\partial}{\partial a_{d-1}} \text{ [43]}^{59} \text{ et [64]}^{60} \text{ on a :}$$

•  $\mathbf{D}\varphi = 0$  et  $\mathbf{\Delta}\varphi = 0$ .

Cette forme  $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_d)$  satisfait également à la condition de quasi-homogénéité :

$$\varphi(\lambda^d a_0, \lambda^{d-1} a_1, \dots, \lambda^0 a_d) = \lambda^{2(d-1)} \varphi(a_0, a_1, \dots, a_d) \text{ [32]}^{61}.$$

Et alors on a :

---

56. pp. 88-89

57. p. 27

58. p. 92

59. p. 30

60. p. 92

61. p. 404 éq. 1.24 mais avec des notations différentes

- $\sum_{i=0}^d a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 2(d-1) \varphi$  [32]<sup>62</sup> et  $\sum_{i=1}^d i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = d(d-1) \varphi$  [32]<sup>63</sup>.

#### 4.3.1 Discriminant d'un polynôme de degré $d = 2$

$$f(x) = a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 \text{ et } D(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 - \omega_2.$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = D^2(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 - \omega_2)^2 = \omega_1^2 + \dots = P(S_1, S_2), \text{ avec :}$$

$$S_1 = S_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = -\frac{2a_1}{a_0},$$

$$S_2 = S_2(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \omega_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

$P(S_1, S_2)$  a des monômes  $S_1^{r_1} S_2^{r_2}$  tels que :

$$r_1 + 2 r_2 = \delta = d(d-1) = 2 \text{ et } r_1 + r_2 \leq \alpha = 2(d-1) = 2.$$

Ce qui donne  $(r_1, r_2) = (2, 0)$  et  $(r_1, r_2) = (0, 1)$  et, par conséquent  $P(S_1, S_2) = A S_1^2 + B S_2$ .

L'équation aux dérivées partielles  $2 \frac{\partial P}{\partial S_1} + S_1 \frac{\partial P}{\partial S_2} = 4 A S_1 + B S_1 = 0$  conduit à  $B = -4 A$  et l'équation  $1 = F(2, 1) = P(3, 2)$  conduit à  $9 A + 2 B = 1$ . Soit  $A = 1$  et  $B = -4$  et, par conséquent :

$$P(S_1, S_2) = S_1^2 - 4 S_2.$$

On vérifie que  $S_1 [2 P(S_1, S_2) - S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} - S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}] + 2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_1} = 0$ , car :

$$S_1 [2 P(S_1, S_2) - S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} - S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2}] = -2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_1} = -4 S_1 S_2.$$

$\varphi(a_0, a_1, a_2) = D = a_0^2 P(-\frac{2a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}) = -4(a_0 a_2 - a_1^2)$ , forme de degré  $\alpha = 2(d-1) = 2$  et de poids  $\delta = d(d-1) = 2$ .

On vérifie que la somme des coefficients  $\varphi(1, 1, 1)$  est nulle.

$$\text{On a } \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = -4 a_2, \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 8 a_1, \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = -4 a_0.$$

$$\text{Avec } \mathbf{D} = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} \text{ et } \mathbf{\Delta} = 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1},$$

on a bien  $\mathbf{D} \varphi = 0$  et  $\mathbf{\Delta} \varphi = 0$ .

$$\text{De plus } a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 2 \varphi \text{ et } a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 2 \varphi.$$

#### 4.3.2 Discriminant d'un polynôme de degré $d = 3$

$$f(x) = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 \text{ et}$$

$$D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3)$$

$$= \omega_1^2 \omega_2 - \omega_1^2 \omega_3 - \omega_1 \omega_2^2 + \omega_1 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3 - \omega_2 \omega_3^2.$$

62. p. 404 éq. 1.25 mais avec des notations différentes

63. p. 404 éq. 1.25 mais avec des notations différentes



$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = D^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_1 - \omega_2)^2 (\omega_1 - \omega_3)^2 (\omega_2 - \omega_3)^3 \\ = \omega_1^4 \omega_2^2 + \dots = P(S_1, S_2, S_3), \text{ avec :}$$

$$S_1 = S_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = -\frac{3a_1}{a_0}, \\ S_2 = S_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 = \frac{3a_2}{a_0}. \\ S_3 = S_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 \omega_2 \omega_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

$P(S_1, S_2, S_3)$  a des monômes  $S_1^{r_1} S_2^{r_2} S_3^{r_3}$  tels que :

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = \delta = d(d-1) = 6 \text{ et } r_1 + r_2 + r_3 \leq \alpha = 2(d-1) = 4.$$

Ce qui donne  $(r_1, r_2, r_3) = (3, 0, 1)$ ,  $(r_1, r_2, r_3) = (2, 2, 0)$ ,  
 $(r_1, r_2, r_3) = (1, 1, 1)$ ,  $(r_1, r_2, r_3) = (0, 3, 0)$  et  $(r_1, r_2, r_3) = (0, 0, 2)$  et,  
par conséquent

$$P(S_1, S_2, S_3) = A S_1^3 S_3 + B S_1^2 S_2^2 + C S_1 S_2 S_3 + D S_2^3 + E S_3^2 \text{ }^{64}.$$

L'équation aux dérivées partielles :

$$3 \frac{\partial P}{\partial S_1} + 2 S_1 \frac{\partial P}{\partial S_2} + S_2 \frac{\partial P}{\partial S_3} = (A + 4B) S_1^3 S_2 + (9A + 2C) S_1^3 S_3 \\ + (6B + C + 6D) S_1 S_2^2 + (3C + 2E) S_2 S_3 = 0 \text{ conduit à}$$

$$A = -4B, C = 18B, D = -4B, E = -27B.$$

et l'équation  $4 = F(3, 2, 1) = P(6, 11, 6)$  conduit à  $B = 1$  et, par conséquent :

$$P(S_1, S_2, S_3) = -4 S_1^3 S_3 + S_1^2 S_2^2 + 18 S_1 S_2 S_3 - 4 S_2^3 - 27 S_3^2.$$

On vérifie que :

$$S_1 [4P(S_1, S_2, S_3) - S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} - S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - S_3 \frac{\partial P}{\partial S_3}] + 2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_1} + 3 S_3 \frac{\partial P}{\partial S_2} = 0, \text{ car :}$$

$$S_1 [4P(S_1, S_2, S_3) - S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} - S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - S_3 \frac{\partial P}{\partial S_3}] = -(2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_1} + 3 S_3 \frac{\partial P}{\partial S_2}) \\ = 18 S_1^2 S_2 S_3 - 4 S_1 S_2^3 - 54 S_1 S_3^2$$

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, a_3) = D = a_0^4 P(-\frac{3a_1}{a_0}, \frac{3a_2}{a_0}, -\frac{a_3}{a_0}) \\ = -27(a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2), \text{ forme de degré} \\ \alpha = 2(d-1) = 4 \text{ et de poids } \delta = d(d-1) = 6.$$

On vérifie que la somme des coefficients  $\varphi(1, 1, 1, 1)$  est nulle. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = -27(2 a_0 a_3^2 - 6 a_1 a_2 a_3 + 4 a_2^3), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = -27(-6 a_0 a_2 a_3 + 12 a_1^2 a_3 - 6 a_1 a_2^2), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = -27(-6 a_0 a_1 a_3 + 12 a_0 a_2^2 - 6 a_1^2 a_2), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = -27(2 a_0^2 a_3 - 6 a_0 a_1 a_2 + 4 a_1^3).$$

$$\text{Avec } \mathbf{D} = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} \text{ et } \mathbf{\Delta} = 3 a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_2},$$

on a bien  $\mathbf{D} \varphi = 0$  et  $\mathbf{\Delta} \varphi = 0$ .

---

64. bien entendu le coefficient  $D$  qui apparaît n'a rien à voir avec le discriminant  $D$ !

De plus  $a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = 2(d-1)\varphi = 4\varphi$  et  
 $a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = d(d-1)\varphi = 6\varphi$ .

### 4.3.3 Discriminant d'un polynôme de degré $d = 4$

$f(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$  et  
 $D(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)(\omega_3 - \omega_4)$ .

$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = D^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$   
 $= (\omega_1 - \omega_2)^2 (\omega_1 - \omega_3)^2 (\omega_1 - \omega_4)^2 (\omega_2 - \omega_3)^2 (\omega_2 - \omega_4)^2 (\omega_3 - \omega_4)^2$   
 $= \omega_1^6 \omega_2^4 \omega_3^2 + \dots = P(S_1, S_2, S_3, S_4)$ , avec :

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = -\frac{4a_1}{a_0}, \\ S_2 &= S_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_4 + \omega_2 \omega_3 + \omega_2 \omega_4 + \omega_3 \omega_4 \\ &= \frac{6a_2}{a_0}, \\ S_3 &= S_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \omega_2 \omega_3 \omega_4 + \omega_1 \omega_3 \omega_4 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 = -\frac{4a_3}{a_0}, \\ S_4 &= S_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 = \frac{a_4}{a_0}. \end{aligned}$$

$P(S_1, S_2, S_3, S_4)$  a des monômes  $S_1^{r_1} S_2^{r_2} S_3^{r_3} S_4^{r_4}$  tels que :

$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 = \delta = d(d-1) = 12$  et  
 $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq \alpha = 2(d-1) = 6$ . Par conséquent et en se servant, en particulier, de l'équation aux dérivées partielles :

$4 \frac{\partial P}{\partial S_1} + 3 S_1 \frac{\partial P}{\partial S_2} + 2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_3} + S_3 \frac{\partial P}{\partial S_4} = 0$ , on trouve, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} P(S_1, S_2, S_3, S_4) &= -27 S_1^4 S_4^2 + 18 S_1^3 S_2 S_3 S_4 - 4 S_1^3 S_3^2 - 4 S_1^2 S_2^3 S_4 \\ &+ S_1^2 S_2^2 S_3^2 + 144 S_1^2 S_2 S_4^2 - 6 S_1^2 S_3^2 S_4 - 80 S_1 S_2^2 S_3 S_4 + 18 S_1 S_2 S_3^3 \\ &- 192 S_1 S_3 S_4^2 - 128 S_2^2 S_4^2 + 16 S_2^4 S_4 - 4 S_2^3 S_3^2 + 144 S_2 S_3^2 S_4 - 27 S_3^4 + 256 S_4^3. \end{aligned}$$

On vérifie que  $S_1 [6 P(S_1, S_2, S_3, S_4) - S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} - S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - S_3 \frac{\partial P}{\partial S_3} - S_4 \frac{\partial P}{\partial S_4}]$   
 $+ 2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_1} + 3 S_3 \frac{\partial P}{\partial S_2} + 4 S_4 \frac{\partial P}{\partial S_3} = 0$ , car :

$$\begin{aligned} &S_1 [6 P(S_1, S_2, S_3, S_4) - S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} - S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - S_3 \frac{\partial P}{\partial S_3} - S_4 \frac{\partial P}{\partial S_4}] \\ &= -(2 S_2 \frac{\partial P}{\partial S_1} + 3 S_3 \frac{\partial P}{\partial S_2} + 4 S_4 \frac{\partial P}{\partial S_3}) \\ &= 144 S_1^3 S_2 S_4^2 - 6 S_1^3 S_3^2 S_4 - 80 S_1^2 S_2^2 S_3 S_4 + 18 S_1^2 S_2 S_3^3 - 384 S_1^2 S_3 S_4^2 \\ &+ 16 S_1 S_2^4 S_4 - 4 S_1 S_2^3 S_3^2 - 256 S_1 S_2^2 S_4^2 + 288 S_1 S_2 S_3^2 S_4 - 54 S_1 S_3^4 + 768 S_1 S_4^3. \end{aligned}$$

$\varphi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = D = a_0^6 P(-\frac{4a_1}{a_0}, \frac{6a_2}{a_0}, -\frac{4a_3}{a_0}, \frac{a_4}{a_0})$   
 $256 (a_0^3 a_4^3 - 12 a_0^2 a_1 a_3 a_4^2 - 18 a_0^2 a_2^2 a_4^2 + 54 a_0^2 a_2 a_3^2 a_4$   
 $- 27 a_0^2 a_3^4 + 54 a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 - 6 a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 - 180 a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 + 108 a_0 a_1 a_2 a_3^3$   
 $+ 81 a_0 a_2^4 a_4 - 54 a_0 a_2^3 a_3^2 - 27 a_1^4 a_4^2 + 108 a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 64 a_1^3 a_3^3 - 54 a_1^2 a_2^3 a_4$   
 $+ 36 a_1^2 a_2^2 a_3^2)$ , forme de degré  $\alpha = 2(d-1)$  et de poids  $\delta = d(d-1)$  [64]<sup>65</sup>  
et [72]<sup>66</sup>.

65. p. 502 ; avec  $a_4 = a, a_3 = b, a_2 = c, a_1 = d, a_0 = e$

66. Discriminant (Polynomial) p. 468 éq (13) ; avec  $a_4 = 1$  et avec un signe du premier

On vérifie que la somme des coefficients  $\varphi(1, 1, 1, 1, 1)$  est nulle.

$$\text{Avec } \mathbf{D} = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + 4 a_3 \frac{\partial}{\partial a_4} \text{ et}$$

$$\mathbf{\Delta} = 4 a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 3 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + a_4 \frac{\partial}{\partial a_3},$$

on a bien  $\mathbf{D} \varphi = 0$  et  $\mathbf{\Delta} \varphi = 0$ .

$$\text{De plus } a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + a_4 \frac{\partial \varphi}{\partial a_4} = 2(d-1) \varphi = 6 \varphi \text{ et}$$

$$a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + 4 a_4 \frac{\partial \varphi}{\partial a_4} = d(d-1) \varphi = 12 \varphi.$$

#### 4.3.4 Discriminant d'un polynôme de degré $d = 5$

$$f(x) = a_0 x^5 + 5 a_1 x^4 + 10 a_2 x^3 + 10 a_3 x^2 + 5 a_4 x + a_5 \text{ et}$$

$$D(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)(\omega_1 - \omega_5)(\omega_2 - \omega_3)$$

$$(\omega_2 - \omega_4)(\omega_2 - \omega_5)(\omega_3 - \omega_4)(\omega_3 - \omega_5)(\omega_4 - \omega_5).$$

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) = D^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$$

$$= (\omega_1 - \omega_2)^2 (\omega_1 - \omega_3)^2 (\omega_1 - \omega_4)^2 (\omega_1 - \omega_5)^2 (\omega_2 - \omega_3)^2 (\omega_2 - \omega_4)^2 (\omega_2 - \omega_5)^2$$

$$(\omega_3 - \omega_4)^2 (\omega_3 - \omega_5)^2 (\omega_4 - \omega_5)^2 = \omega_1^8 \omega_2^6 \omega_3^4 \omega_4^2 + \dots$$

Le calcul du discriminant est donné par [32]<sup>67</sup> et par [64]<sup>68</sup>. Il y a 59 monômes.

#### 4.3.5 Exemples de discriminants de polynômes particuliers

• Le discriminant du polynôme  $f(x) = a_0 x^d + p x^e + a_d$ , avec  $d > e > 0$  et  $d$  et  $e$  relativement premiers est :

$$D = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} d^d a_0^{d-1} a_d^{d-1} + (-1)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2}} e^e (d-e)^{d-e} a_0^{d-e-1} p^d a_d^{e-1} [32]^{69}.$$

◇ Par exemple avec  $a_0 = 1$ ,  $e = 1$  et  $a_d = q$  le discriminant du polynôme  $f(x) = x^d + p x + q$ ;  $d \geq 2$  est :

$$D = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} d^d q^{d-1} + (-1)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2}} (d-1)^{d-1} p^d [33]^{70} \text{ et } [65]^{71}. \text{ En particulier :}$$

$$* d = 2 : D = -4q + p^2,$$

$$* d = 3 : D = -27q^2 - 4p^3,$$

terme du discriminant erroné

67. p. 406 mais avec les notations des auteurs et une erreur dans un monôme qui est de mauvais poids

68. p. 331 avec nos notations à condition de poser  $a = a_0$ ,  $b = a_1$ ,  $c = a_2$ ,  $d = a_3$ ,  $e = a_4$ ,  $f = a_5$

69. p. 406 éq. (1.38) en adaptant les notations

70. p. 609

71. p. 49

\*  $d = 4 : D = 256 q^3 - 27 p^4$ ,

\* etc.

◇ Par exemple avec  $p = 0$  le discriminant du polynôme  $f(x) = a_0 x^d + a_d$  est :

$$D = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} d^d a_0^{d-1} a_d^{d-1} [32]^{72}. \text{ En particulier :}$$

\*  $d = 2$  : on retrouve (cf. Discriminant d'un polynôme de degré  $d = 2$ )  
 $D = -4 a_0 a_2$ ,

\*  $d = 3$  : on retrouve (cf. Discriminant d'un polynôme de degré  $d = 3$ )  
 $D = -27 a_0^2 a_3^2$ ,

\*  $d = 4$  : on retrouve (cf. Discriminant d'un polynôme de degré  $d = 4$ )  
 $D = 256 a_0^3 a_4^3$ ,

\* etc.

• Le discriminant du polynôme  $f(x) = \frac{x^d}{d!} + \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \dots + \frac{x}{1!} + 1$ ;  $d \geq 2$  est :

$$D = \frac{(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}}{(d!)^{d-2}} [33]^{73}. \text{ Par exemple :}$$

◇  $d = 2 : D = -1$ , ◇  $d = 3 : D = -\frac{1}{6}$ , ◇  $d = 4 : D = \frac{1}{576}$ , ◇ etc.

• Soit  $\phi$  la fonction indicatrice ou fonction totient ou indicateur d'Euler [5]<sup>74</sup> et [38] :

$\phi(d) = d \prod_{p|d} (1 - \frac{1}{p})$ , le produit étant étendu à tous les nombres premiers  $p$  divisant le nombre entier  $d$ .

Soit le polynôme cyclotomique  $\Phi_d(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_d)$ , où  $\xi_1, \dots, \xi_d$  sont les racines *primitives d'èmes* de l'unité et, en particulier,  $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1$  ( $p$  premier.) [33]<sup>75</sup> et [72]<sup>76</sup>.

Le discriminant du polynôme cyclotomique  $\Phi_d(x)$ ;  $d \geq 3$  est :

$$D = (-1)^{\frac{\phi(d)}{2}} \frac{d^{\phi(d)}}{\prod_{p|d} p^{\frac{\phi(d)}{p-1}}} [33]^{77} \text{ et, en particulier, celui de } \Phi_p(x) \text{ (} p \text{ premier ; } p \geq 3) \text{ est :}$$

72. p. 406 éq. (1.37) en adaptant les notations

73. p. 609; mais avec une définition du discriminant différente de la notre

74. p. 280 et p. 389

75. p. 604

76. Cyclotomic Polynomial pp. 388-389

77. p. 609

$D = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$ . En particulier :

◇  $d = 1 : \Phi_1(x) = x - 1,$

◇  $d = 2 : \Phi_2(x) = x + 1,$

◇  $d = 3 : \Phi_3(x) = x^2 + x + 1$  et  $D = -3,$

◇  $d = 4 : \Phi_4(x) = x^2 + 1$  et  $D = -2^2 = -4,$

◇  $d = 5 : \Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  et  $D = 5^3 = 125,$

◇  $d = 6 : \Phi_6(x) = x^2 - x + 1$  et  $D = -3,$

◇  $d = 7 : \Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  et  $D = -7^5,$

◇  $d = 8 : \Phi_8(x) = x^4 + 1$  et  $D = 2^8,$

◇  $d = 9 : \Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$  et  $D = -3^9,$

◇  $d = 10 : \Phi_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$  et  $D = 5^3,$

◇  $d = 11 : \Phi_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  et  $D = -11^9,$

◇  $d = 12 : \Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$  et  $D = 2^4 3^2 = 144,$

◇ etc.

• Le discriminant du polynôme hypergéométrique, de degré  $d$  :

$$f(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) \triangleq 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots, \text{ avec } \alpha = -d$$

est :

$$D = d^d \frac{1\cdot2^2\cdot\dots\cdot(d-1)^{d-1}(\beta+d-2)(\beta+d-3)^2\dots\beta^{d-1}(\beta-\gamma-d+2)(\beta-\gamma-d+3)^2\dots(\beta-\gamma)^{d-1}}{(\gamma+d-1)^{d-1}(\gamma+d-2)^d\dots\gamma^{2d-2}} \quad [32]^{78}$$

et [42]<sup>79</sup>.

◇  $d = 2 : D = 2^2 \frac{\beta(\beta-\gamma)}{(\gamma+1)\gamma^2}$

◇  $d = 3 : D = 3^3 \frac{4(\beta+1)\beta^2(\beta-\gamma-1)(\beta-\gamma)^2}{(\gamma+2)^2(\gamma+1)^3\gamma^4}$

◇  $d = 4 : D = 4^4 \frac{108(\beta+2)(\beta+1)^2\beta^3(\beta-\gamma-2)(\beta-\gamma-1)^2(\beta-\gamma)^3}{(\gamma+3)^3(\gamma+2)^4(\gamma+1)^5\gamma^6}$ .

◇ etc.

---

78. pp. 407-408 éq. (1.42)

79. p. 341

## 5 Formes $n$ -aires ou polynômes homogènes à $n$ indéterminées

Une forme  $n$ -aire, de degré  $d$ , est un polynôme *homogène*  $f(x_1, \dots, x_n)$ , à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$ , de degré  $d$ , i.e. tel que :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n); \forall \lambda \in k. [43]^{80}.$$

On note alors  $f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]_d$  [51]<sup>81</sup>.

**Remarque** : ce qui a été dit précédemment pour les polynômes à  $n$  indéterminées est, bien entendu, toujours valable, mais pour les formes  $n$ -aires de nouvelles propriétés apparaissent.

### 5.1 Notation des formes $n$ -aires, de degré $d$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n=d} \frac{d!}{\nu_1!\nu_2!\dots\nu_n!} c_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$  [18]<sup>82</sup>, [31]<sup>83</sup>, [50]<sup>84</sup>, [69]<sup>85</sup> et [73]<sup>86</sup> et le nombre maximal de monômes et de coefficients est  $C_{n+d-1}^d$  [43]<sup>87</sup>. De plus :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = d f [43]^{88}.$$

Soit  $V_d = k[x_1, \dots, x_n]_d = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid c_{d0\dots0}, \dots, c_{00\dots0d} \in k\}$  l'espace vectoriel des formes  $n$ -aires, de degré  $d$ . Alors :

$V_d \cong k^{C_{n+d-1}^d}$  [23]<sup>89</sup> et [31]<sup>90</sup>. De plus :

$k[V_d] = k[c_{d0\dots0}, \dots, c_{00\dots0d}]$  est l'espace vectoriel des polynômes à  $C_{n+d-1}^d$  indéterminées  $c_{d0\dots0}, \dots, c_{00\dots0d}$  sur  $k$ .

Certaines formes peuvent être écrites d'une autre façon que cette *forme classique*; cette façon est dite *forme canonique*; elle est générale car elle utilise le même nombre de coefficients que la forme classique [64]<sup>91</sup>. Nous en indiquons quelques exemples ci-après.

80. p. 4 qui utilise *ordre* et non *degré*

81. p. 1

82. p. 336 Exercice 4

83. p. 25

84. p. 854

85. p. 161 éq. (4.4.1)

86. p. 21 éq (4.6) p. 239 éq (1.1)

87. p. 5 éq (III)

88. p. 4 éq (II)

89. pp. 65-66 pour  $n = 2$  et p. 69 pur  $n = 3$

90. p. 5

91. pp. 215-229 Quinzième leçon. Formes canoniques p. 495 Formes canoniques

## 5.2 Formes unaires, de degré $d$

Elles correspondent à  $n = 1$  et sont donc notées ; avec  $x = x_1$  :

$f(x) = c_d x^d$ . Elles ont 1 monôme.

## 5.3 Formes binaires, de degré $d$

Elles correspondent à  $n = 2$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2) = c_{d0} x_1^d + C_d^1 c_{(d-1)1} x_1^{d-1} x_2 + C_d^2 c_{(d-2)2} x_1^{d-2} x_2^2 + \dots$   
 $+ C_d^{d-1} c_{1(d-1)} x_1 x_2^{d-1} + c_{0d} x_2^d$  [43]<sup>92</sup>. Elles ont  $d + 1$  monômes.

Soit  $V_d = k[x_1, x_2]_d = \{f(x_1, x_2) \mid c_{d0}, \dots, c_{0d} \in k\}$  l'espace vectoriel des formes binaires, de degré  $d$  [51]<sup>93</sup>.

On posera parfois, pour simplifier les notations :  $x = x_1, y = x_2$   
 $a_0 = c_{d0}, a_1 = c_{(d-1)1}, a_2 = c_{(d-2)2}, \dots, a_{d-1} = c_{1(d-1)}, a_d = c_{0d}$ .

On constate alors que :

$f(x) \triangleq f(x, 1) = a_0 x^d + C_d^1 a_1 x^{d-1} + C_d^2 a_2 x^{d-1} + \dots + C_d^{d-1} a_{d-1} x + a_d$   
est un polynôme à une indéterminée  $x$  de degré  $d$ .

### 5.3.1 Formes binaires linéaires

On pourra consulter [43]<sup>94</sup>. Elles correspondent à  $d = 1$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2) = c_{10} x_1 + c_{01} x_2$ . Elles ont 2 monômes.

### 5.3.2 Formes binaires quadratiques

On pourra consulter [43]<sup>95</sup>. Elles correspondent à  $d = 2$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2) = c_{20} x_1^2 + 2 c_{11} x_1 x_2 + c_{02} x_2^2$ . Elles ont 3 monômes.

---

92. p. 17 mais les coefficients sont notés différemment

93. p. 6

94. pp. 38-39

95. p. 39 et pp. 54-55

### 5.3.3 Formes binaires cubiques

On pourra consulter [43]<sup>96</sup>. Elles correspondent à  $d = 3$  et sont donc notées :

$$f(x_1, x_2) = c_{30} x_1^3 + 3 c_{21} x_1^2 x_2 + 3 c_{12} x_1 x_2^2 + c_{03} x_2^3. \text{ Elles ont 4 monômes.}$$

*Forme canonique*

$$f(x_1, x_2) = (l x_1 + m x_2)^3 + (l' x_1 + m' x_2)^3, \text{ qui dépend de 4 coefficients [64]}^{97}.$$

### 5.3.4 Formes binaires biquadratiques

On pourra consulter [43]<sup>98</sup>. Elles correspondent à  $d = 4$  et sont donc notées :

$$f(x_1, x_2) = c_{40} x_1^4 + 4 c_{31} x_1^3 x_2 + 6 c_{22} x_1^2 x_2^2 + 4 c_{13} x_1 x_2^3 + c_{04} x_2^4. \text{ Elles ont 5 monômes.}$$

*Forme canonique*

$$f(x_1, x_2) = (l x_1 + m x_2)^4 + (l' x_1 + m' x_2)^4 + 6 \lambda [(l x_1 + m x_2)(l' x_1 + m' x_2)]^2, \text{ qui dépend de 5 coefficients [64]}^{99}.$$

### 5.3.5 Formes binaires quintiques

On pourra consulter [43]<sup>100</sup> et [64]<sup>101</sup>. Elles correspondent à  $d = 5$  et sont donc notées :

$$f(x_1, x_2) = c_{50} x_1^5 + 5 c_{41} x_1^4 x_2 + 10 c_{32} x_1^3 x_2^2 + 10 c_{23} x_1^2 x_2^3 + 5 c_{14} x_1 x_2^4 + c_{05} x_2^5. \text{ Elles ont 6 monômes.}$$

Elles ont été étudiées par Sylvester.

*Forme canonique*

$$f(x_1, x_2) = (l x_1 + m x_2)^5 + (l' x_1 + m' x_2)^5 + (l'' x_1 + m'' x_2)^5, \text{ qui dépend de 6 coefficients [64]}^{102}.$$

---

96. pp. 45-46, pp. 55-56 et pp. 68-71

97. pp. 215-216 no. 164

98. pp. 39-41, p. 52, pp. 56-58 et pp. 71-78

99. pp. 224-226 no. 172

100. pp. 58-59

101. pp. 327-373 nos. 224 à 251, pp. 557-567 I. Sur les invariants des formes du cinquième degré. Note de M. Hermite

102. pp. 220-226 no. 168-169



### 5.3.6 Formes binaires de degrés 6

On pourra consulter [64]<sup>103</sup>. Elles correspondent à  $d = 6$  et ont 7 monômes.

*Forme canonique*

$f(x_1, x_2) = (l x_1 + m x_2)^6 + (l' x_1 + m' x_2)^6 + (l'' x_1 + m'' x_2)^6$   
 $+ V [(l x_1 + m x_2)(l' x_1 + m' x_2)(l'' x_1 + m'' x_2)]^2$ , qui dépend de 7 coefficients [64]<sup>104</sup>.

### 5.3.7 Formes binaires de degrés 8

Elles correspondent à  $d = 8$  et ont 9 monômes.

*Forme canonique*

$f(x_1, x_2) = (l x_1 + m x_2)^8 + (l' x_1 + m' x_2)^8 + (l'' x_1 + m'' x_2)^8 + (l''' x_1 + m''' x_2)^8$   
 $+ \lambda [(l x_1 + m x_2)(l' x_1 + m' x_2)(l'' x_1 + m'' x_2)(l''' x_1 + m''' x_2)]^2$ , qui dépend de 9 coefficients [64]<sup>105</sup>.

## 5.4 Formes ternaires, de degré $d$

Elles correspondent à  $n = 3$  et sont donc notées :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = d} \frac{d!}{\nu_1! \nu_2! \nu_3!} c_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3}.$$

Elles ont  $\frac{(d+2)(d+1)}{2}$  monômes.

Soit  $V_d = k[x_1, x_2, x_3]_d = \{f(x_1, x_2, x_3) \mid c_{d00}, \dots, c_{00d} \in k\}$  l'espace vectoriel des formes ternaires, de degré  $d$ .

On pose parfois, pour simplifier les notations :  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ .

### 5.4.1 Formes ternaires linéaires

Elles correspondent à  $d = 1$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3) = c_{100} x_1 + c_{010} x_2 + c_{001} x_3$ . Elles ont 3 monômes.

---

103. pp. 373-407 nos. 252 à 266, p. 568 II. Sur l'invariant gauche des formes du sixième degré. Note de M. Hermite

104. pp. 227-229 no. 174

105. p. 229 no. 175

### 5.4.2 Formes ternaires quadratiques

On pourra consulter [64]<sup>106</sup>. Elles correspondent à  $d = 2$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3) = c_{200} x_1^2 + 2 c_{110} x_1 x_2 + 2 c_{101} x_1 x_3 + c_{020} x_2^2 + 2 c_{011} x_2 x_3 + c_{002} x_3^2$ .  
Elles ont 6 monômes.

### 5.4.3 Formes ternaires cubiques

On pourra consulter [64]<sup>107</sup>. Elles correspondent à  $d = 3$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3) = c_{300} x_1^3 + 3 c_{210} x_1^2 x_2 + 3 c_{201} x_1^2 x_3 + 3 c_{120} x_1 x_2^2 + 6 c_{111} x_1 x_2 x_3 + 3 c_{102} x_1 x_3^2 + c_{030} x_2^3 + 3 c_{021} x_2^2 x_3 + 3 c_{012} x_2 x_3^2 + c_{003} x_3^3$ . Elles ont 10 monômes.

*Forme canonique de Hesse* [64]<sup>108</sup>

$f(x_1, x_2, x_3) = (l x_1 + m x_2 + n x_3)^3 + (l' x_1 + m' x_2 + n' x_3)^3 + (l'' x_1 + m'' x_2 + n'' x_3)^3 + 6 M (l x_1 + m x_2 + n x_3) (l' x_1 + m' x_2 + n' x_3) (l'' x_1 + m'' x_2 + n'' x_3)$  qui dépend de 10 coefficients

### 5.4.4 Formes ternaires biquadratiques

Elles correspondent à  $d = 4$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3) = c_{400} x_1^4 + 4 c_{310} x_1^3 x_2 + 4 c_{301} x_1^3 x_3 + 6 c_{220} x_1^2 x_2^2 + 12 c_{211} x_1^2 x_2 x_3 + 6 c_{202} x_1^2 x_3^2 + 12 c_{121} x_1 x_2^2 x_3 + 12 c_{112} x_1 x_2 x_3^2 + 4 c_{103} x_1 x_3^3 + c_{040} x_2^4 + 4 c_{031} x_2^3 x_3 + 6 c_{022} x_2^2 x_3^2 + 4 c_{013} x_2 x_3^3 + c_{004} x_3^4$ .  
Elles ont 15 monômes.

### 5.4.5 Formes ternaires quintiques

Elles correspondent à  $d = 5$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3) = c_{500} x_1^5 + 5 c_{410} x_1^4 x_2 + 5 c_{401} x_1^4 x_3 + 10 c_{320} x_1^3 x_2^2 + 20 c_{311} x_1^3 x_2 x_3 + 10 c_{302} x_1^3 x_3^2 + 10 c_{230} x_1^2 x_2^3 + 30 c_{221} x_1^2 x_2^2 x_3 + 30 c_{212} x_1^2 x_2 x_3^2 + 10 c_{203} x_1^2 x_3^3 + 5 c_{140} x_1 x_2^4 + 20 c_{131} x_1 x_2^3 x_3 + 30 c_{122} x_1 x_2^2 x_3^2 + 20 c_{113} x_1 x_2 x_3^3 + 5 c_{104} x_1 x_3^4 + c_{050} x_2^5 + 5 c_{041} x_2^4 x_3 + 10 c_{032} x_2^3 x_3^2 + 10 c_{023} x_2^2 x_3^3 + 5 c_{014} x_2 x_3^4 + c_{005} x_3^5$ .  
Elles ont 21 monômes.

106. pp. 517-526. I à IX : note de M. Bazin

107. pp. 526-537. X à XVI : note de M. Bazin

108. p. 216 et p. 229 no. 175

## 5.5 Formes quaternaires, de degré $d$

Elles correspondent à  $n = 4$  et sont donc notées :

$$f(x_1, x_1, x_3, x_4) = \sum_{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=d} \frac{d!}{\nu_1! \nu_2! \nu_3! \nu_4!} c_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3} x_4^{\nu_4}.$$

Elles ont  $\frac{(d+3)(d+2)(d+1)}{6}$  monômes.

Soit  $V_d = k[x_1, x_2, x_3, x_4]_d = \{f(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid c_{d000}, \dots, c_{000d} \in k\}$  l'espace vectoriel des formes quaternaires, de degré  $d$ .

On pose parfois, pour simplifier les notations :  $x = x_1, y = x_2, z = x_3, t = x_4$ .

### 5.5.1 Formes quaternaires linéaires

Elles correspondent à  $d = 1$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_{1000} x_1 + c_{0100} x_2 + c_{0010} x_3 + c_{0001} x_4$ . Elles ont 4 monômes.

### 5.5.2 Formes quaternaires quadratiques

On pourra consulter [64]<sup>109</sup>. Elles correspondent à  $d = 2$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_{2000} x_1^2 + 2 c_{1100} x_1 x_2 + 2 c_{1010} x_1 x_3 + 2 c_{1001} x_1 x_4 + c_{0200} x_2^2 + 2 c_{0110} x_2 x_3 + 2 c_{0101} x_2 x_4 + c_{0020} x_3^2 + 2 c_{0001} x_3 x_4 + c_{0002} x_4^2$ . Elles ont 10 monômes.

### 5.5.3 Formes quaternaires cubiques

Elles correspondent à  $d = 3$  et sont donc notées :

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_{3000} x_1^3 + 3 c_{2100} x_1^2 x_2 + 3 c_{2010} x_1^2 x_3 + 3 c_{2001} x_1^2 x_4 + 3 c_{1200} x_1 x_2^2 + 6 c_{1110} x_1 x_2 x_3 + 6 c_{1101} x_1 x_2 x_4 + 3 c_{1020} x_1 x_3^2 + 6 c_{1011} x_1 x_3 x_4 + 3 c_{1002} x_1 x_4^2 + c_{0300} x_2^3 + 3 c_{0210} x_2^2 x_3 + 3 c_{0201} x_2^2 x_4 + 3 c_{0120} x_2 x_3^2 + 6 c_{0111} x_2 x_3 x_4 + 3 c_{0102} x_2 x_4^2 + c_{0030} x_3^3 + 3 c_{0021} x_3^2 x_4 + 3 c_{0012} x_3 x_4^2 + c_{0003} x_4^3$ . Elles ont 20 monômes.

*Forme canonique de Sylvester*

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (l x_1 + m x_2 + n x_3 + p x_4)^3 + (l' x_1 + m' x_2 + n' x_3 + p' x_4)^3 + (l'' x_1 + m'' x_2 + n'' x_3 + p'' x_4)^3 + (l''' x_1 + m''' x_2 + n''' x_3 + p''' x_4)^3 + (l'''' x_1 + m'''' x_2 + n'''' x_3 + p'''' x_4)^3$  qui dépend de 20 coefficients [64]<sup>110</sup>.

109. pp. 538-555. XVI à XXXII : note de M. Bazin

110. p. 229

#### 5.5.4 Formes quaternaires biquadratiques

Elles correspondent à  $d = 4$  et ont 35 monômes.

#### 5.5.5 Formes quaternaires quintiques

Elles correspondent à  $d = 5$  et ont 56 monômes.

### 5.6 Formes quinaires, de degré $d$

Elles correspondent à  $n = 5$  et sont donc notées :

$$f(x_1, x_1, x_3, x_4, x_5) \\ = \sum_{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=d} \frac{d!}{\nu_1! \nu_2! \nu_3! \nu_4! \nu_5!} c_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3} x_4^{\nu_4} x_5^{\nu_5}. \text{ Elles ont} \\ \frac{(d+4)(d+3)(d+2)(d+1)}{24} \text{ monômes.}$$

Soit  $V_d = k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_d$   
 $= \{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid c_{d0000}, \dots, c_{0000d} \in k\}$  l'espace vectoriel des formes quinaires, de degré  $d$ .

On pose parfois, pour simplifier les notations :  $x = x_1, y = x_2, z = x_3,$   
 $t = x_4, u = x_5$ .

### 5.7 Formes sénaires, de degré $d$

Elles correspondent à  $n = 6$  et sont donc notées :

$$f(x_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ = \sum_{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5+\nu_6=d} \frac{d!}{\nu_1! \nu_2! \nu_3! \nu_4! \nu_5! \nu_6!} c_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3} x_4^{\nu_4} x_5^{\nu_5} x_6^{\nu_6}. \\ \text{Elles ont } \frac{(d+5)(d+4)(d+3)(d+2)(d+1)}{120} \text{ monômes.}$$

Soit  $V_d = k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]_d$   
 $= \{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid c_{d00000}, \dots, c_{00000d} \in k\}$  l'espace vectoriel des formes sénaires, de degré  $d$ .

On pose parfois, pour simplifier les notations :  $x = x_1, y = x_2, z = x_3,$   
 $t = x_4, u = x_5, v = x_6$ .

### 5.8 Bézoutien de $n + 1$ formes $n$ -aires

Il s'agit d'un cas particulier du bézoutien de  $n+1$  polynômes à  $n$  indéterminées.

Le bézoutien  $\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta_{f_0, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  est un polynôme homogène à  $2n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  de degré au plus égal à :  $\sum_{i=0}^n d_i - n$  [28]<sup>111</sup>.

**Exemple :**

$$n = 1$$

$f_0(x) = c_{d_0} x^{d_0}$ , de degré  $d_0$  et  $f_1(x) = c'_{d_1} x^{d_1}$ , de degré  $d_1$ ; avec  $d_0 \leq d_1$ .  
Alors :

$\Theta_{f_0, f_1}(x, y) = c_{d_0} c'_{d_1} x^{d_0} y^{d_0} (y^{d_1-d_0-1} + x y^{d_1-d_0-2} + \dots + x^{d_1-d_0-1})$ ; si  $d_0 < d_1$  et  $\Theta_{f_0, f_1}(x, y) = 0$  si  $d_0 = d_1$ .

*Cas particuliers*

◇  $d_0 = 1$  et  $d_1 = 2$ ; alors  $\Theta_{f_0, f_1}(x, y) = c_1 c'_2 x y$ , de degré 2.

◇  $d_0 = 1$  et  $d_1 = 3$ ; alors  $\Theta_{f_0, f_1}(x, y) = c_1 c'_3 x y (y + x)$ , de degré 3.

◇  $d_0 = 1$  et  $d_1 = 4$ ; alors  $\Theta_{f_0, f_1}(x, y) = c_1 c'_4 x y (y^2 + x y + x^2)$ , de degré 4.

## 5.9 Bézoutien de $n$ formes $n$ -aires

Il s'agit d'un cas particulier du bézoutien de  $n$  polynômes à  $n$  indéterminées.

Le bézoutien  $\Theta_{1, f_1, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta_{1, f_1, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  est un polynôme homogène à  $2n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  de degré au plus égal à  $t_n = \sum_{i=1}^n d_i - n$ . [19]<sup>112</sup>.

### 5.9.1 Exemples

• Si  $n = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 1$  on a :

$f_1 = c_{10} x_1 + c_{01} x_2$  et  $f_2 = c'_{10} x_1 + c'_{01} x_2$ ; alors :

$\Theta_{1, f_1, f_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = c_{10} c'_{01} - c_{01} c'_{10}$ , de degré  $t_2 = 0$

• Si  $n = 2$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$  on a :

$f_1 = c_{10} x_1 + c_{01} x_2$  et  $f_2 = c'_{20} x_1^2 + 2 c'_{11} x_1 x_2 + c'_{02} x_2^2$ ; alors :

$\Theta_{1, f_1, f_2}(x_1, x_2, y_1, y_2)$   
 $= -c_{01} c'_{20} x_1 + (c_{10} c'_{02} - 2 c_{01} c'_{11}) x_2 + (2 c_{10} c'_{11} - c_{01} c'_{20}) y_1 + c_{10} c'_{02} y_2$ , de degré  $t_2 = 1$ .

111. p. 129

112. pp. 2-3 qui parle de degré *critique*

- Si  $n = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  on a :

$f_1 = c_{20} x_1^2 + 2 c_{11} x_1 x_2 + c_{02} x_2^2$  et  $f = c'_{20} x_1^2 + 2 c'_{11} x_1 x_2 + c'_{02} x_2^2$ ; alors :

$$\begin{aligned} \Theta_{1, f_1, f_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= (c_{20} c'_{02} - c_{02} c'_{20}) x_1 x_2 + 2 (c_{20} c'_{11} - c_{11} c'_{20}) x_1 y_1 \\ &+ (c_{20} c'_{02} - c_{02} c'_{20}) x_1 y_2 + 2 (c_{11} c'_{02} - c_{02} c'_{11}) x_2^2 \\ &+ (c_{20} c'_{02} - c_{02} c'_{20}) x_2 y_1 + 2 (c_{11} c'_{02} - c_{02} c'_{11}) x_2 y_2 \\ &+ 2 (c_{20} c'_{11} - c_{11} c'_{20}) y_1^2 + (c_{20} c'_{02} - c_{02} c'_{20}) y_1 y_2, \text{ de degré } t_2 = 2. \end{aligned}$$

## 5.10 Polynômes à $n$ indéterminées symétriques

On dit qu'un polynôme  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  est symétrique ssi l'on a  $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$  pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  [54]<sup>113</sup> et [59]<sup>114</sup>. Et alors  $f \in k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ .

### 5.10.1 Polynômes à $n$ indéterminées symétriques élémentaires ou fondamentaux

On pourra consulter [32]<sup>115</sup>, [33]<sup>116</sup>, [56]<sup>117</sup>, [59]<sup>118</sup>, [61]<sup>119</sup>, [64]<sup>120</sup>, [69]<sup>121</sup> et [72]<sup>122</sup>. Soient les polynômes symétriques :

$$\begin{aligned} s_0 &= s_0(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{1 \leq i \leq n} 1 = n, \text{ de degré } 0, \\ s_1 &= s_1(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n, \text{ de degré } 1, \\ s_2 &= s_2(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \text{ de degré } 2, \\ s_3 &= s_3(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k = x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \text{ de degré } 3, \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= s_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \triangleq \prod_{1 \leq i \leq n} x_1 \dots \widehat{x}_i \dots x_n \\ &= x_2 x_3 \dots x_n + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n-1}, \text{ de degré } n-1 \text{ } (\widehat{x}_i \text{ terme omis}), \\ s_n &= s_n(x_1, \dots, x_n) \triangleq \prod_{1 \leq i \leq n} x_i = x_1 x_2 \dots x_n. \text{ de degré } n. \end{aligned}$$

113. pp. 190-194 § 6 Symmetric polynomials

114. pp. 1-178 Chapitre I "Symmetric functions" pp. 305-387 Chapitre VI "Symmetric functions with two parameters"

115. p. 133 éq (2.2); notés  $e_i$

116. p. 607; notés  $s_i$

117. p. 264; notés  $p_i$

118. pp. 19-21 notés  $e_i$

119. p. 34; notés  $\sigma_i$

120. p. 83; notés  $p_i$

121. p. 2; notés  $\sigma_i$

122. Elementary Symmetric Function pp. 516-517; notés  $\Pi_i$  et Newton's Relations p. 1232; notés  $s_i$

Les  $s_j = s_j(x_1, \dots, x_n)$ ;  $0 \leq j \leq n$  sont les polynômes à  $n$  indéterminées symétriques élémentaires ou fondamentaux.

Alors  $s_j$  est homogène de degré  $j$  [54]<sup>123</sup> donc est une forme.

### 5.10.2 Sommes de Newton à $n$ indéterminées

Soient les polynômes à  $n$  indéterminées symétriques :

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^k, \text{ de degré } k,$$

Les  $\sigma_k$ ;  $0 \leq k$  sont les sommes de Newton à  $n$  indéterminées [32]<sup>124</sup>, [33]<sup>125</sup>, [56]<sup>126</sup>, [59]<sup>127</sup>, [61]<sup>128</sup>, [64]<sup>129</sup> et [69]<sup>130</sup>.

Alors  $\sigma_k$  est homogène de degré  $k$  donc est une forme.

### 5.10.3 Relations entre les polynômes symétriques élémentaires et les sommes de Newton

**Formules de Newton** [51]<sup>131</sup>

$$\sigma_k - s_1 \sigma_{k-1} + s_2 \sigma_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} s_{k-1} \sigma_1 + (-1)^k k s_k = 0; 1 \leq k \leq n,$$

$$\sigma_k - s_1 \sigma_{k-1} + s_2 \sigma_{k-2} + \dots + (-1)^n s_n \sigma_{k-n} = 0; k \geq n.$$

**Remarque** : les 2 formules sont donc valables si  $k = n$ .

[33]<sup>132</sup>, [56]<sup>133</sup> et [61]<sup>134</sup>.

**Formule de Girard**

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n) = p_k(s_1, \dots, s_k)$$

$$\triangleq (-1)^k k \sum_{i_1+2i_2+\dots+ni_n=k} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} \frac{(i_1+i_2+\dots+i_n-1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n} \text{ [32] }^{135}.$$

---

123. p. 190

124. pp. 140-141; notés  $p_k$

125. p. 608; notés  $\sigma_k$

126. p. 265; notés  $s_k$

127. pp. 23-25; notés  $p_k$

128. p. 37; notés  $S_k$

129. p. 83; notés  $s_k$

130. p. 4; notés  $p_k$

131. pp. 5-8 Exercice 8

132. p. 608, attention la première des formules précédentes est erronée

133. p. 269

134. p. 43 Exercice 5

135. p. 141 éq (2.17)

En particulier [56]<sup>136</sup> et [72]<sup>137</sup> :

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= p_0 \triangleq n, \\
\sigma_1 &= p_1(s_1) \triangleq s_1, \\
\sigma_2 &= p_2(s_1, s_2) \triangleq s_1^2 - 2s_2, \\
\sigma_3 &= p_3(s_1, s_2, s_3) \triangleq s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3, \\
\sigma_4 &= p_4(s_1, s_2, s_3, s_4) \triangleq s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_1s_3 + 2s_2^2 - 4s_4, \\
\sigma_5 &= p_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \triangleq s_1^5 - 5s_1^3s_2 + 5s_1^2s_3 + 5s_1s_2^2 - 5s_1s_4 - 5s_2s_3 \\
&+ 5s_5, \\
\sigma_6 &= p_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) \triangleq s_1^6 - 6s_1^4s_2 + 6s_1^3s_3 + 9s_1^2s_2^2 - 6s_1^2s_4 \\
&- 12s_1s_2s_3 + 6s_1s_5 - 2s_2^3 + 6s_2s_4 + 3s_3^2 - 6s_6, \\
&\vdots \\
\sigma_k &= p_k(s_1, \dots, s_k) = s_1^k + \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On constate que dans chaque ligne la somme des coefficients est égale à  $\pm 1$ .

D'après [56]<sup>138</sup> :

$$\begin{aligned}
s_0 &= q_0 \triangleq \frac{1}{0!} \sigma_0 = n, \\
s_1 &= q_1(\sigma_1) \triangleq \frac{1}{1!} \sigma_1, \\
s_2 &= q_2(\sigma_1, \sigma_2) \triangleq \frac{1}{2!} (\sigma_1^2 - \sigma_2), \\
s_3 &= q_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \triangleq \frac{1}{3!} (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3), \\
s_4 &= q_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \triangleq \frac{1}{4!} (\sigma_1^4 - 6\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3 + 3\sigma_2^2 - 6\sigma_4), \\
s_5 &= q_5(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \triangleq \frac{1}{5!} (\sigma_1^5 - 10\sigma_1^3\sigma_2 + 20\sigma_1^2\sigma_3 + 15\sigma_1\sigma_2^2 \\
&- 30\sigma_1\sigma_4 - 20\sigma_2\sigma_3 + 24\sigma_5), \\
s_6 &= q_6(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) \triangleq \frac{1}{6!} (\sigma_1^6 - 15\sigma_1^4\sigma_2 + 40\sigma_1^3\sigma_3 + 45\sigma_1^2\sigma_2^2 \\
&- 90\sigma_1^2\sigma_4 - 120\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 144\sigma_1\sigma_5 - 15\sigma_2^3 + 90\sigma_2\sigma_4 + 40\sigma_3^2 - 120\sigma_6), \\
&\vdots \\
s_j &= q_j(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j). \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On constate que dans chaque ligne la somme des coefficients est égale à 0.

On a également :

---

136. p. 265 éq. (2)

137. Elementary Symmetric Function pp. 516-517

138. p. 266 éq. (3)



$$s_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \dots & \sigma_1 & k-1 \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} \quad [69]^{139}.$$

#### 5.10.4 Anneau des polynômes à $n$ indéterminées symétriques

$k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  est l'anneau des polynômes à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  symétriques [51]<sup>140</sup>, [59]<sup>141</sup> et [69]<sup>142</sup>. Et on a  $k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[s_1, \dots, s_n] = k[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$  [51]<sup>143</sup> et [69]<sup>144</sup>

Un polynôme homogène à  $n$  indéterminées symétrique est alors une forme  $n$ -aire symétrique d'un certain degré  $d$  et on note :

$k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{S}_n}$  l'espace vectoriel des formes  $n$ -aires symétriques, de degré  $d$  [69]<sup>145</sup>.

#### 5.10.5 Expression des formes $n$ -aires symétriques

Soit  $f(x_1, \dots, x_n)$  une forme  $n$ -aire symétrique, de degré  $d$  et soit  $a$  ( $a \leq d$ ) la plus grande puissance de chacune des indéterminées<sup>146</sup>.

Le nombre maximal de coefficients a priori différents de  $f$  est donné dans le tableau suivant, pour les petites valeurs de  $n$  et  $d$  :

$d \downarrow n \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	1	2	2	2	2	2	2	...
3	1	2	3	3	3	3	3	...
4	1	3	4	5	5	5	5	...
5	1	3	5	6	7	7	7	...
6	1	4	7	9	10	11	11	...
7	1	4	7	10	11	12	13	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

139. p. 7 exercice 5

140. p. 4

141. pp. 17-39

142. p. 4 qui considère  $\mathbb{C}$  et non  $k$  Corollaire 1.1.4

143. p. 4 pour la première égalité et démonstration p. 5

144. p. 4 Proposition 1.1.2

145. p. 6 qui considère  $\mathbb{C}$  et non  $k$

146. on pourrait, comme certains auteurs, noter  $f^{(d)}(x_1, \dots, x_n)$  cette forme, mais nous ne le faisons pas pour ne pas alourdir les écritures futures

Il s'agit du nombre  $p_n(d)$  de *partitions* de  $d$  en au plus  $n$  parties (cf. ci-après).

$$\text{On a } 1 + \sum_{d=1}^{\infty} p_n(d) t^d = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^n)} \quad [38]^{147}.$$

Alors il existe un *unique* polynôme  $p$  et un *unique* polynôme  $q$ , qui bien entendu dépendent de  $f$ , à coefficients appartenant à  $k$ , tels que :

$$f(x_1, \dots, x_n) = p(s_1, \dots, s_n) = q(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

$$\text{On a } p(s_1, \dots, s_n) = p[q_1(\sigma_1), q_2(\sigma_1, \sigma_2), \dots, q_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] \text{ et} \\ q(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = q[p_1(s_1), p_2(s_1, s_2), \dots, p_n(s_1, \dots, s_n)].$$

Le polynôme  $p = \sum s_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$  est de degré  $a$  et tous ses monômes sont de même poids  $d$ . Par conséquent tous les monômes  $s_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$  de  $p$  sont tels que :

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = d \text{ et } r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq a \quad [33]^{148}.$$

Par exemple les sommes de Newton à  $n$  indéterminées sont des formes  $n$ -aires symétriques et s'expriment bien comme polynômes en  $s_1, \dots, s_n$ , à coefficients dans  $k$ . Plus précisément la somme de Newton à  $n$  indéterminées  $\sigma_d$  est de degré  $d$  et est telle  $a = d$ . On a vu que :

$\sigma_d(x_1, \dots, x_n) = p_d(s_1, \dots, s_n)$  et tous les monômes  $s_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$  de  $p_d$  sont tels que :

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = d \text{ et } r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq d.$$

**Remarque :**

G. Salmon [64]<sup>149</sup> donne des tables de formes  $n$ -aires symétriques, avec les notations suivantes :

$$\alpha = x_i, \beta = x_j, \gamma = x_k, \delta = x_l, \varepsilon = x_m, \zeta = x_n, \eta = x_o, \theta = x_p \text{ et :}$$

$$b = -s_1, c = s_2, d = -s_3, e = s_4, f = -s_5, g = s_6, h = -s_7, i = s_8, \\ j = -s_9, k = s_{10}.$$

**Exemples :**

Considérons des nombres entiers  $a, b$  et  $c$ ;  $a \geq b \geq c \geq 0$ .

- *Exemple 1.* Pour  $n \geq 2$  soit  $f(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum x_i^a x_j^b = x_1^a x_2^b + \dots$   
 $a$  est bien la plus grande puissance de chacune des indéterminées.

---

147. p. 275 éq. (19.3.2)

148. p. 607

149. pp 503-514

◇ Si  $a > b$   $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^a x_j^b = \sigma_a \sigma_b - \sigma_{a+b}$  [56]<sup>150</sup> et [64]<sup>151</sup>. Il y a  $A_n^2 = n(n-1)$  monômes dans la somme .

◇ Si  $a = b$   $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j)^a = \frac{1}{2} (\sigma_a^2 - \sigma_{2a})$  [56]<sup>152</sup>. Il y a  $\frac{1}{2} A_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  monômes dans la somme.

◇ *Cas particuliers*

\*  $a = 1, b = 0, d = a + b = 1.$

$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i x_j^0 = \sigma_1 \sigma_0 - \sigma_1 = (n-1) \sigma_1 = q(\sigma_1)$ . Et avec  $\sigma_1 = p_1(s_1) = s_1 : \sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i x_j^0 = (n-1) s_1 = p(s_1)$  [64]<sup>153</sup>.

\*  $a = 1, b = 1, d = a + b = 2.$

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_2) = q(\sigma_1, \sigma_2)$  Et avec  $\sigma_1 = p_1(s_1) = s_1$  et  $\sigma_2 = p_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2 : \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = s_2 = p(s_1, s_2)$  où  $s_1$  ne figure pas [64]<sup>154</sup>.

\*  $a = 2, b = 0, d = a + b = 2.$

$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^2 x_j^0 = \sigma_2 \sigma_0 - \sigma_2 = (n-1) \sigma_2 = q(\sigma_1, \sigma_2)$  où  $\sigma_1$  ne figure pas. Et avec  $\sigma_2 = p_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2 : \sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^2 x_j^0 = (n-1) (s_1^2 - 2s_2) = p(s_1, s_2)$  [64]<sup>155</sup>.

\*  $a = 2, b = 1, d = a + b = 3.$

$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^2 x_j = \sigma_2 \sigma_1 - \sigma_3 = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Et avec  $\sigma_1 = p_1(s_1) = s_1, \sigma_2 = p_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2$  et  $\sigma_3 = p_3(s_1, s_2, s_3) = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 : \sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^2 x_j = s_1 s_2 - 3s_3 = p(s_1, s_2, s_3)$  [64]<sup>156</sup>.

\*  $a = 2, b = 2, d = a + b = 4.$

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j)^2 = \frac{1}{2} (\sigma_2^2 - \sigma_4) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  où  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  ne figurent pas. Et avec  $\sigma_2 = p_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2$  et  $\sigma_4 = p_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 4s_1 s_3 + 2s_2^2 - 4s_4 : \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j)^2 = -2s_1 s_3 + s_2^2 + 2s_4 = p(s_1, s_2, s_3, s_4)$  [64]<sup>157</sup>.

\*  $a = 3, b = 0, d = a + b = 3.$

$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^3 x_j^0 = \sigma_3 \sigma_0 - \sigma_3 = (n-1) \sigma_3 = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Et avec  $\sigma_3 = p_3(s_1, s_2, s_3) = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 :$

---

150. p. 270

151. p. 83

152. p. 270

153. p. 504 éq. I

154. p. 504 éq. II.2

155. p. 504 éq. II.1

156. p. 504 éq. III.2

157. p. 504 éq. IV.3

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^3 x_j^0 = (n-1)(s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3) = p(s_1, s_2, s_3) [64]^{158}.$$

$$* a = 3, b = 1, d = a + b = 4.$$

$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^3 x_j = \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_4 = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  où  $\sigma_2$  ne figure pas. Et avec  $\sigma_1 = p_1(s_1) = s_1$ ,  $\sigma_3 = p_3(s_1, s_2, s_3) = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3$  et  $\sigma_4 = p_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 4s_1 s_3 + 2s_2^2 - 4s_4$  :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^3 x_j = s_1^2 s_2 - s_1 s_3 - 2s_2^2 + 4s_4 = p(s_1, s_2, s_3, s_4) [64]^{159}.$$

$$* a = 3, b = 2, d = a + b = 5.$$

$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^3 x_j^2 = \sigma_3 \sigma_2 - \sigma_5 = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$  où  $\sigma_1, \sigma_4$  ne figurent pas. Et avec  $\sigma_2 = p_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2$ ,  $\sigma_3 = p_3(s_1, s_2, s_3) = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3$  et

$$\sigma_5 = p_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = s_1^5 - 5s_1^3 s_2 + 5s_1^2 s_3 + 5s_1 s_2^2 - 5s_1 s_4 - 5s_2 s_3 + 5s_5 :$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} x_i^3 x_j^2 = -2s_1^2 s_3 + s_1 s_2^2 + 5s_1 s_4 - s_2 s_3 - 5s_5 = p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) [64]^{160}.$$

$$* a = 3, b = 3, d = a + b = 6.$$

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j)^3 = \frac{1}{2}(\sigma_3^2 - \sigma_6) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5$  ne figurent pas. Et avec  $\sigma_3 = p_3(s_1, s_2, s_3) = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3$  et  $\sigma_6 = p_6(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = s_1^6 - 6s_1^4 s_2 + 6s_1^3 s_3 + 9s_1^2 s_2^2 - 6s_1^2 s_4 - 12s_1 s_2 s_3 + 6s_1 s_5 - 2s_2^3 + 6s_2 s_4 + 3s_3^2 - 6s_6$  :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j)^3 = 3s_1^2 s_4 - 3s_1 s_2 s_3 - 3s_1 s_5 + s_2^3 - 3s_2 s_4 + 3s_3^2 + 3s_6 = p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) [64]^{161}.$$

\* etc.

• *Exemple 2.* Pour  $n \geq 3$  soit  $f(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum x_i^a x_j^b x_k^c = x_1^a x_2^b x_3^c + \dots$   $a$  est bien la plus grande puissance de chacune des indéterminées.

$$\diamond \text{ Si } a > b > c \ f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j \neq k} x_i^a x_j^b x_k^c = \sigma_a \sigma_b \sigma_c - \sigma_a \sigma_{b+c} - \sigma_b \sigma_{c+a} - \sigma_c \sigma_{a+b} + 2\sigma_{a+b+c} [56]^{162} \text{ et } [64]^{163}.$$

Il y a  $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$  monômes dans la somme.

$$\diamond \text{ Si } a = b > c \ f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i < j, i \neq k, j \neq k} (x_i x_j)^a x_k^c = \frac{1}{2}(\sigma_a^2 \sigma_c - 2\sigma_a \sigma_{a+c} - \sigma_c \sigma_{2a} + 2\sigma_{2a+c}) [56]^{164}.$$

Il y a  $\frac{1}{2} A_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$  monômes dans la somme.

158. p. 504 éq. III.1

159. p. 504 éq. IV.2

160. p. 504 éq. V.3

161. p. 504 éq. VI.4

162. p. 270

163. pp. 83-84 § 54

164. p. 270

$$\diamond \text{ Si } a > b = c \ f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j < k} x_i^a (x_j x_k)^b \\ = \frac{1}{2} (\sigma_a \sigma_b^2 - \sigma_a \sigma_{2b} - 2 \sigma_b \sigma_{b+a} + 2 \sigma_{a+2b}) \text{ [56]}^{165}.$$

Il y a  $\frac{1}{2} A_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$  monômes dans la somme.

$$\diamond \text{ Si } a = b = c \ f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (x_i x_j x_k)^a \\ = \frac{1}{6} (\sigma_a^3 - 3 \sigma_a \sigma_{2a} + 2 \sigma_{3a}) \text{ [56]}^{166}.$$

Il y a  $\frac{1}{6} A_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  monômes dans la somme.

$\diamond$  *Cas particuliers*

$$* \ a = 1, \ b = c = 0, \ d = 1$$

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j < k} x_i (x_j x_k)^0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \sigma_0^2 - 3 \sigma_1 \sigma_0 + 2 \sigma_1) \\ = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \sigma_1 = q(\sigma_1) \text{ et } p(s_1) = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) s_1.$$

$$* \ a = b = 1, \ c = 0, \ d = 2$$

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i < j, i \neq k, j \neq k} x_i x_j x_k^0 = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 \sigma_0 - 2 \sigma_1^2 - \sigma_0 \sigma_2 + 2 \sigma_2) \\ = \frac{1}{2} (n-2) (\sigma_1^2 - \sigma_2) = q(\sigma_1, \sigma_2) \text{ et } p(s_1, s_2) = (n-2) s_2 \text{ où } s_1 \text{ ne figure pas.}$$

$$* \ a = b = c = 1, \ d = 3$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k = \frac{1}{6} (\sigma_1^3 - 3 \sigma_1 \sigma_2 + 2 \sigma_3) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ et} \\ p(s_1, s_2, s_3) = s_3 \text{ où } s_1 \text{ et } s_2 \text{ ne figurent pas.}$$

$$* \ a = 2, \ b = c = 0, \ d = 2$$

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j < k} x_i^2 (x_j x_k)^0 = \frac{1}{2} (\sigma_2 \sigma_0^2 - 3 \sigma_2 \sigma_0 + 2 \sigma_2) \\ = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \sigma_2 = q(\sigma_1, \sigma_2) \text{ où } \sigma_1 \text{ ne figure pas et} \\ p(s_1, s_2) = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) (s_1^2 - 2 s_2).$$

$$* \ a = 2, \ b = 1, \ c = 0, \ d = 3$$

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j \neq k} x_i^2 x_j x_k^0 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_0 - 2 \sigma_2 \sigma_1 - \sigma_0 \sigma_3 + 2 \sigma_3 \\ = (n-2) (\sigma_2 \sigma_1 - \sigma_3) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ et } p(s_1, s_2, s_3) = (n-2) (s_1 s_2 - 3 s_3).$$

$$* \ a = 2, \ b = c = 1, \ d = 4$$

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j < k} x_i^2 x_j x_k \\ = \frac{1}{2} (\sigma_2 \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2 \sigma_1 \sigma_3 + 2 \sigma_4) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \text{ et} \\ p(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1 s_3 - 4 s_4 \text{ où } s_2 \text{ ne figure pas.}$$

$$* \ a = b = 2, \ c = 0, \ d = 4$$

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i < j, i \neq k, j \neq k} (x_i x_j)^2 x_k^0 = \frac{1}{2} (\sigma_2^2 \sigma_0 - 2 \sigma_2^2 - \sigma_0 \sigma_4 + 2 \sigma_4) \\ = \frac{1}{2} (n-2) (\sigma_2^2 - \sigma_4) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \text{ où } \sigma_1 \text{ et } \sigma_3 \text{ ne figurent pas et} \\ p(s_1, s_2, s_3, s_4) = (n-2) (-2 s_1 s_3 + s_2^2 + 2 s_4).$$

---

165. p. 270

166. p. 270

\*  $a = b = 2, c = 1, d = 5$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i < j, i \neq k, j \neq k} (x_i x_j)^2 x_k = \frac{1}{2} (\sigma_2^2 \sigma_1 - 2 \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_4 + 2 \sigma_5)$   
 $= q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$  et  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = -3 s_1 s_4 + s_2 s_3 + 5 s_5$ .

\*  $a = b = c = 2, d = 6$   
 $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (x_i x_j x_k)^2 = \frac{1}{6} (\sigma_2^3 - 3 \sigma_2 \sigma_4 + 2 \sigma_6) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$   
où  $\sigma_1, \sigma_3$  et  $\sigma_5$  ne figurent pas et  
 $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = 2 s_1 s_5 - 2 s_2 s_4 + s_3^2 - 2 s_6$ .

\*  $a = 3, b = c = 0, d = 3$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j < k} x_i^3 (x_j x_k)^0 = \frac{1}{2} (\sigma_3 \sigma_0^2 - 3 \sigma_3 \sigma_0 + 2 \sigma_3)$   
 $= \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \sigma_3 = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ne figurent pas et  
 $p(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) (s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 3 s_3)$ .

\*  $a = 3, b = 1, c = 0, d = 4$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j \neq k} x_i^3 x_j x_k^0 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma_0 - 3 \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_0 \sigma_4 + 2 \sigma_4$   
 $= (n-2) (\sigma_3 \sigma_1 - \sigma_4) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  où  $\sigma_2$  ne figure pas et  
 $p(s_1, s_2, s_3, s_4) = (n-2) (s_1^2 s_2 - s_1 s_3 - 2 s_2^2 + 4 s_4)$ .

\*  $a = 3, b = c = 1, d = 5$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j < k} x_i^3 x_j x_k = \frac{1}{2} (\sigma_3 \sigma_1^2 - \sigma_3 \sigma_2 - 2 \sigma_1 \sigma_4 + 2 \sigma_5)$   
 $= q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$  et  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = s_1^2 s_3 - s_1 s_4 - 2 s_2 s_3 + 5 s_5$ .

\*  $a = 3, b = 2, c = 0, d = 5$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j \neq k} x_i^3 x_j^2 x_k^0 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_0 - 2 \sigma_3 \sigma_2 - \sigma_0 \sigma_5 + 2 \sigma_5$   
 $= (n-2) (\sigma_3 \sigma_2 - \sigma_5) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$  où  $\sigma_1$  et  $\sigma_4$  ne figurent pas et  
 $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (n-2) (-2 s_1^2 s_3 + s_1 s_2^2 + 5 s_1 s_4 - s_2 s_3 - 5 s_5)$ .

\*  $a = 3, b = 2, c = 1, d = 6$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j \neq k} x_i^3 x_j^2 x_k$   
 $= \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 - \sigma_3^2 - \sigma_2 \sigma_4 - \sigma_1 \sigma_5 + 2 \sigma_6 = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  et  
 $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = -3 s_1^2 s_4 + s_1 s_2 s_3 + 7 s_1 s_5 + 4 s_2 s_4 - 3 s_3^2 - 12 s_6$ .

\*  $a = 3, b = c = 2, d = 7$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i \neq j, i \neq k, j < k} x_i^3 (x_j x_k)^2 = \frac{1}{2} (\sigma_3 \sigma_2^2 - \sigma_3 \sigma_4 - 2 \sigma_2 \sigma_5 + 2 \sigma_7)$   
 $= q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7)$  où  $\sigma_1$  et  $\sigma_6$  ne figurent pas. Nous n'avons pas  
calculé  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)$ .

\*  $a = b = 3, c = 0, d = 6$   
 $\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i < j, i \neq k, j \neq k} (x_i x_j)^3 x_k^0 = \frac{1}{2} (\sigma_3^2 \sigma_0 - 2 \sigma_3^2 - \sigma_0 \sigma_6 + 2 \sigma_6)$   
 $= \frac{1}{2} (n-2) (\sigma_3^2 - \sigma_6) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  où  $\sigma_2, \sigma_4$  et  $\sigma_5$  ne figurent  
pas et  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$   
 $= (n-2) (3 s_1^2 s_4 - 3 s_1 s_2 s_3 - 3 s_1 s_5 + s_2^3 - 3 s_2 s_4 + 3 s_3^2 + 3 s_6)$ .

\*  $a = b = 3, c = 1, d = 7$

$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i < j, i \neq k, j \neq k} (x_i x_j)^3 x_k = \frac{1}{2} (\sigma_3^2 \sigma_1 - 2 \sigma_3 \sigma_4 - \sigma_1 \sigma_6 + 2 \sigma_7)$   
 $= q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7)$  où  $\sigma_2$  et  $\sigma_5$  ne figurent pas. Nous n'avons pas calculé  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)$ .

\*  $a = b = 3, c = 2, d = 8$

$\sum_{1 \leq i, j, k \leq n; i < j, i \neq k, j \neq k} (x_i x_j)^3 x_k^2 = \frac{1}{2} (\sigma_3^2 \sigma_2 - 2 \sigma_3 \sigma_5 - \sigma_2 \sigma_6 + 2 \sigma_8)$   
 $= q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8)$  où  $\sigma_1, \sigma_4$  et  $\sigma_7$  ne figurent pas. Nous n'avons pas calculé  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)$ .

\*  $a = b = c = 3, d = 9$

$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (x_i x_j x_k)^3 = \frac{1}{6} (\sigma_3^3 - 3 \sigma_3 \sigma_6 + 2 \sigma_9)$   
 $= q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9)$  où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7$  et  $\sigma_8$  ne figurent pas. Nous n'avons pas calculé  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9)$ .

**Cas particulier des polynômes symétriques à  $n$  indéterminées qui dépendent des  $\frac{n(n-1)}{2}$  différences des  $n$  indéterminées**

On pourra consulter [43]<sup>167</sup>, [56]<sup>168</sup> et [64]<sup>169</sup>.

Dans ce contexte le polynôme  $p$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$n \frac{\partial p}{\partial s_1} + (n-1) s_1 \frac{\partial p}{\partial s_2} + (n-2) s_2 \frac{\partial p}{\partial s_3} + \dots = 0$  et sa recherche s'en trouve grandement facilitée [56]<sup>170</sup> et [64]<sup>171</sup>.

• *Exemple 3.* Pour  $n \geq 2$  et  $a$  pair soit :

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^a = (n-1) x_1^a + \dots$  Il y a  $C_n^2$  termes dans la somme. Alors :

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= n \sigma_a - C_a^1 \sigma_1 \sigma_{a-1} + C_a^2 \sigma_2 \sigma_{a-2} + \dots + (-1)^{\frac{a}{2}-1} C_a^{\frac{a}{2}-1} \sigma_{\frac{a}{2}-1} \sigma_{\frac{a}{2}+1} \\ &+ (-1)^{\frac{a}{2}} \frac{C_a^{\frac{a}{2}}}{2} \sigma_{\frac{a}{2}}^2. \end{aligned}$$

### Démonstration

On a, pour  $a$  entier positif, d'après la formule du binôme :

$$(x - x_j)^a = x^a - C_a^1 x_j x^{a-1} + C_a^2 x_j^2 x^{a-2} + \dots + (-1)^a x_j^a. \text{ Soit :}$$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (x - x_j)^a = n x^a - C_a^1 \sigma_1 x^{a-1} + C_a^2 \sigma_2 x^{a-2} + \dots + (-1)^a \sigma_a.$$

167. pp. 98-103 § I.11 dans le contexte plus restrictif des invariants et covariants comme fonctions des différences de racines

168. pp. 276-278 nos. 158-159 qui parle de fonctions de différences dans un contexte plus restrictif et qui parle de formules de Lagrange

169. pp. 87-95 nos. 59 à 65

170. p. 278

171. p. 89

$$\text{Si } x = x_1 : \sum_{1 \leq j \leq n; j \neq 1} (x_1 - x_j)^a = n x_1^a - C_a^1 \sigma_1 x_1^{a-1} + C_a^2 \sigma_2 x_1^{a-2} + \dots + (-1)^a \sigma_a.$$

$$\text{Si } x = x_2 : \sum_{1 \leq j \leq n; j \neq 2} (x_2 - x_j)^a = n x_2^a - C_a^1 \sigma_1 x_2^{a-1} + C_a^2 \sigma_2 x_2^{a-2} + \dots + (-1)^a \sigma_a.$$

⋮

$$\text{Si } x = x_n : \sum_{1 \leq j \leq n; j \neq n} (x_n - x_j)^a = n x_n^a - C_a^1 \sigma_1 x_n^{a-1} + C_a^2 \sigma_2 x_n^{a-2} + \dots + (-1)^a \sigma_a. \text{ Donc :}$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n; j \neq i} (x_i - x_j)^a = n \sigma_a - C_a^1 \sigma_1 \sigma_{a-1} + C_a^2 \sigma_2 \sigma_{a-2} + \dots + (-1)^a n \sigma_a.$$

Si  $a$  est impair les termes, en nombre pair, de la somme précédente se détruisent deux à deux (le premier avec le dernier, le deuxième avec l'avant dernier, etc) et la somme est nulle. Si  $a$  est pair les termes, en nombre impair, de la somme précédente s'ajoutent deux à deux (le premier avec le dernier, le deuxième avec l'avant dernier, etc) sauf le terme situé au milieu. Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i, j \leq n; j \neq i} (x_i - x_j)^a \\ &= 2(n \sigma_a - C_a^1 \sigma_1 \sigma_{a-1} + C_a^2 \sigma_2 \sigma_{a-2} + \dots + (-1)^{\frac{a}{2}-1} C_a^{\frac{a}{2}-1} \sigma_{\frac{a}{2}-1} \sigma_{\frac{a}{2}-1}) + (-1)^{\frac{a}{2}} \frac{C_a^{\frac{a}{2}}}{2} \sigma_{\frac{a}{2}}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Finalement } \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^a &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n; j \neq i} (x_i - x_j)^a \\ &= n \sigma_a - C_a^1 \sigma_1 \sigma_{a-1} + C_a^2 \sigma_2 \sigma_{a-2} + \dots + (-1)^{\frac{a}{2}-1} C_a^{\frac{a}{2}-1} \sigma_{\frac{a}{2}-1} \sigma_{\frac{a}{2}-1} \\ &+ (-1)^{\frac{a}{2}} \frac{C_a^{\frac{a}{2}}}{2} \sigma_{\frac{a}{2}}^2 \text{ QED.} \end{aligned}$$

*Cas particuliers :*

$$\diamond a = 2 : \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = n \sigma_2 - \sigma_1^2.$$

Par conséquent :

$$* q(\sigma_1, \sigma_2) = -\sigma_1^2 + n \sigma_2, \text{ car } n \geq 2.$$

$$\diamond a = 4 : \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^4 = n \sigma_4 - 4 \sigma_1 \sigma_3 + 3 \sigma_2^2 \text{ [64]}^{172},$$

Par conséquent :

$$* q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = -4 \sigma_1 \sigma_3 + 3 \sigma_2^2 + n \sigma_4 \text{ ssi } n \geq 4.$$

\*  $q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2} \sigma_1^4 - 3 \sigma_1^2 \sigma_2 + \frac{9}{2} \sigma_2^2$  si  $n = 3$  et on constate que  $\sigma_3$  n'intervient pas.

$$* q(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^4 - 4 \sigma_1^2 \sigma_2 + 4 \sigma_2^2 \text{ si } n = 2.$$



$$\diamond a = 6 : \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^6 = n \sigma_6 - 6 \sigma_1 \sigma_5 + 15 \sigma_2 \sigma_4 - 10 \sigma_3^2 \quad [64]^{173},$$

Par conséquent :

$$* q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) = -6 \sigma_1 \sigma_5 + 15 \sigma_2 \sigma_4 - 10 \sigma_3^2 + n \sigma_6 \text{ ssi } n \geq 6.$$

$$* q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) = \frac{1}{24} \sigma_1^6 - \frac{5}{8} \sigma_1^4 \sigma_2 + \frac{5}{3} \sigma_1^3 \sigma_3 + \frac{15}{8} \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \frac{15}{4} \sigma_1^2 \sigma_4 - 5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \frac{5}{8} \sigma_2^3 + \frac{75}{4} \sigma_2 \sigma_4 - \frac{25}{3} \sigma_3^2 \text{ si } n = 5.$$

$$* q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = -\frac{49}{6} \sigma_1^6 + \frac{69}{2} \sigma_1^4 \sigma_2 - \frac{65}{3} \sigma_1^3 \sigma_3 - \frac{45}{2} \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 3 \sigma_1^2 \sigma_4 + 9 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \frac{1}{2} \sigma_2^3 + 18 \sigma_2 \sigma_4 - \frac{26}{3} \sigma_3^2 \text{ si } n = 4.$$

$$* q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -\frac{3}{4} \sigma_1^6 + \frac{27}{4} \sigma_1^4 \sigma_2 - 4 \sigma_1^3 \sigma_3 - \frac{69}{4} \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 18 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \frac{33}{4} \sigma_2^3 - 9 \sigma_3^2 \text{ si } n = 3.$$

$$* q(\sigma_1, \sigma_2) = -\sigma_1^6 + 6 \sigma_1^4 \sigma_2 - 12 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 8 \sigma_2^3. \text{ si } n = 2.$$

$\diamond$  etc.

*Recherche de  $p(s_1, s_2, \dots, s_n)$*

$f$  est de degré  $d = a$  et par conséquent :

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(s_1, s_2, \dots, s_n)$  avec des monômes  $s_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$  tels que :

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = d = a \text{ et } r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq a \quad [33]^{174}.$$

Le premier monôme de  $p$  correspond à :

$$r_1 = a \text{ et } r_2 = r_3 = \dots = r_n = 0. \text{ Par conséquent } p(s_1, s_2, \dots, s_n) = A s_1^a + \dots$$

Mais si  $x_1 = 1$  et  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$  on a  $s_1 = 1$  et  $s_2 = s_3 = \dots = s_n = 0$  et par conséquent

$$n - 1 = f(1, 0, \dots, 0) = p(1, 0, \dots, 0) = A. \text{ Soit } A = n - 1.$$

Pour trouver les coefficients des autres monômes de  $p$  il faut examiner les différents cas  $a = 2, 4, 6 \dots$ . Cette recherche est facilitée par la résolution de l'équation aux dérivées partielles :

$$n \frac{\partial p}{\partial s_1} + (n-1) s_1 \frac{\partial p}{\partial s_2} + (n-2) s_2 \frac{\partial p}{\partial s_3} + \dots = 0.$$

$\diamond$  Si  $a = 2$  on trouve :

$$* p(s_1, s_2) = (n-1) s_1^2 - 2n s_2 \quad [64]^{175} \text{ et on vérifie que : } p(s_1, s_2) = q(\sigma_1, \sigma_2), \text{ obtenu précédemment.}$$

---

173. p. 88

174. p. 607

175. p. 89 Exemple I

◇ Si  $a = 4$  on trouve :

\*  $p(s_1, s_2, s_3, s_4) = (n-1)s_1^4 - 4ns_1^2s_2 + 4(n-3)s_1s_3 + 2(n+6)s_2^2 - 4ns_4$  pour  $n \geq 4$  et on vérifie que  $p(s_1, s_2, s_3, s_4) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ , obtenu précédemment.

\*  $p(s_1, s_2, s_3) = 2s_1^4 - 12s_1^2s_2 + 18s_2^2$  pour  $n = 3$  où l'on constate que  $s_3$  n'intervient pas et on vérifie que :  $p(s_1, s_2, s_3) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , obtenu précédemment. Cette valeur de  $p(s_1, s_2, s_3)$  s'obtient à partir de la valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4)$ , valable pour  $n \geq 4$  en faisant  $n = 3$  et  $s_4 = 0$ .

\*  $p(s_1, s_2) = s_1^4 - 8s_1^2s_2 + 16s_2^2$  pour  $n = 2$  et on vérifie que :  $p(s_1, s_2) = q(\sigma_1, \sigma_2)$ , obtenu précédemment. Cette valeur de  $p(s_1, s_2)$  s'obtient à partir de la valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4)$ , valable pour  $n \geq 4$  en faisant  $n = 2$  et  $s_3 = s_4 = 0$ .

◇ Si  $a = 6$  on trouve :

\*  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = (n-1)s_1^6 - 6ns_1^4s_2 + 6(n-5)s_1^3s_3 + 3(3n+10)s_1^2s_2^2 - 3(2n+10)s_1^2s_4 - 3(4n-30)s_1s_2s_3 + 6(n-5)s_1s_5 + 6(n+20)s_2s_4 - 2(n+30)s_2^3 + 3(n-30)s_3^2 - 6ns_6$  pour  $n \geq 6$  et on vérifie que  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ , obtenu précédemment.

\*  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = 4s_1^6 - 30s_1^4s_2 + 75s_1^2s_2^2 - 60s_1^2s_4 + 30s_1s_2s_3 + 150s_2s_4 - 70s_3^3 - 75s_3^2$  pour  $n = 5$  où l'on constate que  $s_5$  n'intervient pas et on vérifie que  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ , obtenu précédemment. Cette valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$  s'obtient à partir de la valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ , valable pour  $n \geq 6$  en faisant  $n = 5$  et  $s_6 = 0$ .

\*  $p(s_1, s_2, s_3, s_4) = 3s_1^6 - 24s_1^4s_2 - 6s_1^3s_3 + 66s_1^2s_2^2 - 84s_1^2s_4 - 42s_1s_2s_3 + 144s_2s_4 - 68s_3^3 - 78s_3^2$  pour  $n = 4$  et on vérifie que :  $p(s_1, s_2, s_3, s_4) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ , obtenu précédemment. Cette valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4)$  s'obtient à partir de la valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ , valable pour  $n \geq 6$  en faisant  $n = 4$  et  $s_5 = s_6 = 0$ .

\*  $p(s_1, s_2, s_3) = 2s_1^6 - 18s_1^4s_2 - 12s_1^3s_3 + 57s_1^2s_2^2 + 54s_1s_2s_3 - 66s_2^3 - 81s_3^2$  pour  $n = 3$  et on vérifie que :  $p(s_1, s_2, s_3) = q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , obtenu précédemment. Cette valeur de  $p(s_1, s_2, s_3)$  s'obtient à partir de la valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ , valable pour  $n \geq 6$  en faisant  $n = 3$  et  $s_4 = s_5 = s_6 = 0$ .

\*  $p(s_1, s_2) = s_1^6 - 12 s_1^4 s_2 + 48 s_1^2 s_2^2 - 64 s_2^3$  pour  $n = 2$  et on vérifie que  $p(s_1, s_2) = q(\sigma_1, \sigma_2)$ , obtenu précédemment. Cette valeur de  $p(s_1, s_2)$  s'obtient à partir de la valeur de  $p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ , valable pour  $n \geq 6$  en faisant  $n = 2$  et  $s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 0$ .

◇ etc.

• *Exemple 4.* Pour  $n \geq 3$  soit :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (x_i - x_j)^2 (x_j - x_k)^2 (x_k - x_i)^2 \\ = (n-2) x_1^4 x_2^2 + \dots \text{ Il y a } C_n^3 \text{ termes dans la somme.}$$

*Recherche de  $p(s_1, s_2, \dots, s_n)$*

$f$  est de degré  $d = 6$  et on a  $a = 4$  et par conséquent :

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(s_1, s_2, \dots, s_n)$  avec des monômes  $s_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$  tels que :

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = d = 6 \text{ et } r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq a = 4 \text{ [33]}^{176}.$$

Par conséquent  $r_7 = r_8 = \dots = r_n = 0$  et  $r_i \leq 4$ ;  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  et on trouve qu'il n'y a que 9 monômes possibles dans  $p$ , qui est donc de la forme :

$$p(s_1, s_2, \dots, s_n) = p(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = A s_1^3 s_3 + B s_1^2 s_2^2 + C s_1^2 s_4 \\ + D s_1 s_2 s_3 + E s_1 s_5 + F s_2^3 + G s_2 s_4 + H s_3^2 + I s_6.$$

Étant donné que  $p$  doit vérifier l'équation :

$$n \frac{\partial p}{\partial s_1} + (n-1) s_1 \frac{\partial p}{\partial s_2} + (n-2) s_2 \frac{\partial p}{\partial s_3} + (n-3) s_3 \frac{\partial p}{\partial s_4} + (n-4) s_4 \frac{\partial p}{\partial s_5} \\ + (n-5) s_5 \frac{\partial p}{\partial s_6} = 0 \text{ on en déduit les 6 équations :}$$

$$(n-2) A + 2(n-1) B = 0, \\ 3nA + (n-3)C + (n-1)D = 0, \\ 2nB + (n-2)D + 3(n-1)F = 0, \\ 2nC + (n-4)E + (n-1)G = 0, \\ nD + (n-3)G + 2(n-2)H = 0, \\ nE + (n-5)I = 0.$$

Ces 6 équations sont insuffisantes pour déterminer les 9 coefficients  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ . Mais on obtient les 3 équations manquantes car :

$$f(x_1, x_2, 0, \dots, 0) = (n-2)(s_1^2 - 4s_2)s_2^3 \implies B = n-2 \text{ et } F = -4(n-2).$$

$$0 = f(1, 1, 1, 0, \dots, 0) = p(3, 3, 1, 0, 0, 0) \implies \\ 27A - 27B + 9D + H = 0.$$

---

176. p. 607

La résolution de ces 9 équations à 9 inconnues donne :  
 $A = -2(n - 1)$ ,  $B = n - 2$ ,  $C = -4(n - 1)$ ,  $D = 2(5n - 6)$ ,  $E = 0$ ,  
 $F = -4(n - 2)$ ,  $G = 8n$ ,  $H = -9n$ ,  $I = 0$ .

$p(s_1, s_2, \dots, s_n) = -2(n - 1) s_1^3 s_3 + (n - 2) s_1^2 s_2^2 - 4(n - 1) s_1^2 s_4$   
 $+ 2(5n - 6) s_1 s_2 s_3 - 4(n - 2) s_2^3 + 8n s_2 s_4 - 9n s_3^2$ , de degré 4 et de poids 6,  
où l'on constate que  $s_5, \dots, s_n$  n'interviennent pas.

*Cas particuliers :*

Pour  $n = 3$ ; il faut faire  $s_4 = 0$  :

$$p(s_1, s_2, s_3) = p(s_1, s_2, s_3, 0) = -4 s_1^3 s_3 + s_1^2 s_2^2 + 18 s_1 s_2 s_3 - 4 s_2^3 - 27 s_3^2$$

[64]<sup>177</sup>,

Pour  $n = 4$  :

$$p(s_1, s_2, s_3, s_4) = -6 s_1^3 s_3 + 2 s_1^2 s_2^2 - 12 s_1^2 s_4 + 28 s_1 s_2 s_3 - 8 s_2^3 + 32 s_2 s_4 - 36 s_3^2,$$

Pour  $n = 5$  :

$$p(s_1, s_2, s_3, s_4) = -8 s_1^3 s_3 + 3 s_1^2 s_2^2 - 16 s_1^2 s_4 + 38 s_1 s_2 s_3 - 12 s_2^3 + 40 s_2 s_4 - 45 s_3^2,$$

$$\text{Pour } n = 6 : p(s_1, s_2, s_3, s_4) = -10 s_1^3 s_3 + 4 s_1^2 s_2^2 - 20 s_1^2 s_4 + 48 s_1 s_2 s_3 - 16 s_2^3 + 48 s_2 s_4 - 54 s_3^2,$$

etc.

*Recherche de  $q(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$*

Étant donné que :

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1, \\ s_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2), \\ s_3 &= \frac{1}{6}(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3), \\ s_4 &= \frac{1}{24}(\sigma_1^4 - 6\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3 + 3\sigma_2^2 - 6\sigma_4), \end{aligned}$$

on trouve :

$q(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = -\sigma_1^2\sigma_4 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_2^3 + n\sigma_2\sigma_4 - n\sigma_3^2$ , où l'on constate que  $\sigma_5, \dots, \sigma_n$  n'interviennent pas.

## 5.11 Polynômes à $n$ indéterminées alternants

On dit qu'un polynôme  $f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  est alternant ssi l'on a  $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$  pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  dont  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature. Alors  $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$  pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ .

---

177. pp. 89-90

**Exemple : déterminant de Vandermonde**

$$d(x_1, \dots, x_n) \triangleq \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \text{ [69] }^{178},$$

le déterminant de Vandermonde est un polynôme à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  alternant de degré  $C_n^2$ .

**5.11.1 Ensemble des polynômes à  $n$  indéterminées alternants**

$k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{A}_n}$  est l'ensemble des polynômes à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  alternants [69] <sup>179</sup>.

Un polynôme à  $n$  indéterminées alternant est alors une forme  $n$ -aire (mais très particulière) d'un certain degré  $d$  et on note :

$k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{A}_n}$  l'ensemble des polynômes à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  alternants de degré  $d$ . On a :

$$k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{S}_n} \subset k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{A}_n} \text{ [69] }^{180}.$$

**Exemple : déterminant de Vandermonde**

$$d(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]_{C_n^2}^{\mathfrak{A}_n}, \text{ mais } d(x_1, \dots, x_n) \notin k[x_1, \dots, x_n]_{C_n^2}^{\mathfrak{S}_n}.$$

**5.11.2 Expression des polynômes à  $n$  indéterminées alternants**

Si  $f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{A}_n}$  est un polynôme alternant alors il peut être écrit de manière unique avec deux polynômes symétriques  $g(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  sous la forme :

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n) \text{ où } d(x_1, \dots, x_n) \text{ est le déterminant de Vandermonde [69] }^{181}.$$

**Démonstration** cf. [69] <sup>182</sup>.

**Exemples**

- Soient  $0(x_1, \dots, x_n), 1(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  les polynômes tels que  $0(x_1, \dots, x_n) = 1$  et  $1(x_1, \dots, x_n) = 1$  alors on a bien :

$$d(x_1, \dots, x_n) = 1(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) + 0(x_1, \dots, x_n).$$

---

178. p. 5  
 179. p. 5 qui considère  $\mathbb{C}$  et non  $k$   
 180. p. 5  
 181. p. 5 Proposition 1.1.3  
 182. p. 5

• On va définir ci-après le polynôme alternant  $v_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{A}_n}$  et alors on aura :

$$v_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) + 0(x_1, \dots, x_n) \text{ avec } s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n), 0(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}.$$

### 5.11.3 Polynômes alternants $v_{\lambda}$ associés à une partition $\lambda$

On pourra consulter [51]<sup>183</sup> et [69]<sup>184</sup> et Wikipédia.

#### Partitions

On pourra consulter [30]<sup>185</sup> [29]<sup>186</sup> [38]<sup>187</sup> [59]<sup>188</sup> et [69]<sup>189</sup>.

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  est une partition de  $d$  en, au plus,  $n$  parties ssi :

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  et :
- $|\lambda| \triangleq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = d$ .

On dit que degré  $\lambda \triangleq |\lambda| = d$  est le degré de la partition  $\lambda$  et ht  $\lambda \triangleq \max\{i | \lambda_i \neq 0\}$  sa hauteur ou sa longueur. Alors :

$$v_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) \triangleq \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix} \quad [69]^{190} \text{ est un po-}$$

lynôme homogène à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  alternant de degré  $d + C_n^2$  :

$$v_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]_{d+C_n^2}^{\mathfrak{A}_n}.$$

Les  $v_{\lambda}(x_1, \dots, x_n)$  constituent une base du  $k$ -espace vectoriel  $k[x_1, \dots, x_n]_{d+C_n^2}^{\mathfrak{A}_n}$ .

#### Exemples généraux :

On constate que  $\forall k \in \mathbb{N} : v_{(k,k,\dots,k)}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots x_n)^k d(x_1, \dots, x_n)$  où  $d(x_1, \dots, x_n)$  est le déterminant de Vandermonde et, en particulier,

$$v_{(0,0,\dots,0)}(x_1, \dots, x_n) = d(x_1, \dots, x_n) \text{ et}$$

$$v_{(1,1,\dots,1)}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

183. pp. 57-60 § 6.2 Schur polynomials

184. pp. 6-7

185. pp. 44-45 Chapitre XIX "Partitions"

186. p. 1

187. pp. 272-296

188. pp. 1-17 Chapitre I § 1

189. p. 4

190. p. 6; noté  $a_{\lambda}$

### Exemples particuliers :

- $n = 2$

- ◇  $d = 1$ . Il y a une seule partition  $\lambda = (1, 0)$

- $v_{(1,0)}(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ , de degré  $1 + C_2^2 = 2$ .

- ◇  $d = 2$ . Il y a deux partitions  $\lambda = (2, 0)$  et  $\lambda = (1, 1)$

- $v_{(2,0)}(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3$ , de degré  $2 + C_2^2 = 3$ .

- $v_{(1,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 - x_2) = x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$ , de degré  $2 + C_2^2 = 3$ .

- ◇  $d = 3$ . Il y a deux partitions  $\lambda = (3, 0)$  et  $\lambda = (2, 1)$

- $v_{(3,0)}(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$ , de degré  $3 + C_2^2 = 4$ .

- $v_{(2,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3$ , de degré  $3 + C_2^2 = 4$ .

- ◇  $d = 4$ . Il y a trois partitions  $\lambda = (4, 0)$ ,  $\lambda = (3, 1)$  et  $\lambda = (2, 2)$

- $v_{(4,0)}(x_1, x_2) = x_1^5 - x_2^5$ , de degré  $4 + C_2^2 = 5$ .

- $v_{(3,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^3 - x_2^3) = x_1^4 x_2 - x_1 x_2^4$ , de degré  $4 + C_2^2 = 5$ .

- $v_{(2,2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2) = x_1^3 x_2^2 - x_1^2 x_2^3$ , de degré  $4 + C_2^2 = 5$ .

- ◇  $d = 5$ . Il y a trois partitions  $\lambda = (5, 0)$ ,  $\lambda = (4, 1)$  et  $\lambda = (3, 2)$

- $v_{(5,0)}(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^6$ , de degré  $5 + C_2^2 = 6$ .

- $v_{(4,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = x_1^5 x_2 - x_1 x_2^5$ , de degré  $5 + C_2^2 = 6$ .

- $v_{(3,2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - x_2^2) = x_1^4 x_2^2 - x_1^2 x_2^4$ , de degré  $5 + C_2^2 = 6$ .

- ◇  $d = 6$ . Il y a quatre partitions  $\lambda = (6, 0)$ ,  $\lambda = (5, 1)$ ,  $\lambda = (4, 2)$  et  $\lambda = (3, 3)$

- $v_{(6,0)}(x_1, x_2) = x_1^7 - x_2^7$ , de degré  $6 + C_2^2 = 7$ .

- $v_{(5,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^5 - x_2^5) = x_1^6 x_2 - x_1 x_2^6$ , de degré  $6 + C_2^2 = 7$ .

- $v_{(4,2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1^3 - x_2^3) = x_1^5 x_2^2 - x_1^2 x_2^5$ , de degré  $6 + C_2^2 = 7$ .

- $v_{(3,3)}(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^3 (x_1 - x_2) = x_1^4 x_2^3 - x_1^3 x_2^4$ , de degré  $6 + C_2^2 = 7$ .

- ◇ etc.

- $n = 3$

- ◇  $d = 1$ . Il y a une seule partition  $\lambda = (1, 0, 0)$

$$v_{(1,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3(x_2 - x_3) + x_2^3(x_3 - x_1) + x_3^3(x_1 - x_2) \\ = x_1^3 x_2 - x_1^3 x_3 - x_1 x_2^3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 - x_2 x_3^3, \text{ de degré } 1 + C_3^2 = 4.$$

◇  $d = 2$ . Il y a deux partitions  $\lambda = (2, 0, 0)$  et  $\lambda = (1, 1, 0)$

$$v_{(2,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4(x_2 - x_3) + x_2^4(x_3 - x_1) + x_3^4(x_1 - x_2) \\ = x_1^4 x_2 - x_1^4 x_3 - x_1 x_2^4 + x_1 x_3^4 + x_2^4 x_3 - x_2 x_3^4, \text{ de degré } 2 + C_3^2 = 5.$$

$$v_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3(x_2^2 - x_3^2) + x_2^3(x_3^2 - x_1^2) + x_3^3(x_1^2 - x_2^2) \\ = x_1^3 x_2^2 - x_1^3 x_3^2 - x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_2^3 x_3^2 - x_2^2 x_3^3, \text{ de degré } 2 + C_3^2 = 5.$$

◇  $d = 3$ . Il y a trois partitions  $\lambda = (3, 0, 0)$ ,  $\lambda = (2, 1, 0)$  et  $\lambda = (1, 1, 1)$

$$v_{(3,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5(x_2 - x_3) + x_2^5(x_3 - x_1) + x_3^5(x_1 - x_2) \\ = x_1^5 x_2 - x_1^5 x_3 - x_1 x_2^5 + x_1 x_3^5 + x_2^5 x_3 - x_2 x_3^5, \text{ de degré } 3 + C_3^2 = 6.$$

$$v_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4(x_2^2 - x_3^2) + x_2^4(x_3^2 - x_1^2) + x_3^4(x_1^2 - x_2^2) \\ = x_1^4 x_2^2 - x_1^4 x_3^2 - x_1^2 x_2^4 + x_1^2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2 - x_2^2 x_3^4, \text{ de degré } 3 + C_3^2 = 6.$$

$$v_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^3 x_2 x_3 (x_2 - x_3) + x_2^3 x_3 x_1 (x_3 - x_1) + x_3^3 x_1 x_2 (x_1 - x_2) \\ = x_1^3 x_2^2 x_3 - x_1^3 x_2 x_3^2 - x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3^3, \\ \text{de degré } 3 + C_3^2 = 6.$$

◇  $d = 4$ . Il y a quatre partitions  $\lambda = (4, 0, 0)$ ,  $\lambda = (3, 1, 0)$ ,  $\lambda = (2, 2, 0)$  et  $\lambda = (2, 1, 1)$

$$v_{(4,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^6(x_2 - x_3) + x_2^6(x_3 - x_1) + x_3^6(x_1 - x_2) \\ = x_1^6 x_2 - x_1^6 x_3 - x_1 x_2^6 + x_1 x_3^6 + x_2^6 x_3 - x_2 x_3^6, \text{ de degré } 4 + C_3^2 = 7.$$

$$v_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5(x_2^2 - x_3^2) + x_2^5(x_3^2 - x_1^2) + x_3^5(x_1^2 - x_2^2) \\ = x_1^5 x_2^2 - x_1^5 x_3^2 - x_1^2 x_2^5 + x_1^2 x_3^5 + x_2^5 x_3^2 - x_2^2 x_3^5, \text{ de degré } 4 + C_3^2 = 7.$$

$$v_{(2,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4(x_2^3 - x_3^3) + x_2^4(x_3^3 - x_1^3) + x_3^4(x_1^3 - x_2^3) \\ = x_1^4 x_2^3 - x_1^4 x_3^3 - x_1^3 x_2^4 + x_1^3 x_3^4 + x_2^4 x_3^3 - x_2^3 x_3^4, \text{ de degré } 4 + C_3^2 = 7.$$

$$v_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^4 x_2 x_3 (x_2 - x_3) + x_2^4 x_3 x_1 (x_3 - x_1) + x_3^4 x_1 x_2 (x_1 - x_2) \\ = x_1^4 x_2^2 x_3 - x_1^4 x_2 x_3^2 - x_1^2 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^4 + x_1 x_2^4 x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3^4, \\ \text{de degré } 4 + C_3^2 = 7.$$

◇  $d = 5$ . Il y a cinq partitions  $\lambda = (5, 0, 0)$ ,  $\lambda = (4, 1, 0)$ ,  $\lambda = (3, 2, 0)$ ,  $\lambda = (3, 1, 1)$  et  $\lambda = (2, 2, 1)$

$$v_{(5,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^7(x_2 - x_3) + x_2^7(x_3 - x_1) + x_3^7(x_1 - x_2) \\ = x_1^7 x_2 - x_1^7 x_3 - x_1 x_2^7 + x_1 x_3^7 + x_2^7 x_3 - x_2 x_3^7, \text{ de degré } 5 + C_3^2 = 8.$$

$$v_{(4,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^6(x_2^2 - x_3^2) + x_2^6(x_3^2 - x_1^2) + x_3^6(x_1^2 - x_2^2) \\ = x_1^6 x_2^2 - x_1^6 x_3^2 - x_1^2 x_2^6 + x_1^2 x_3^6 + x_2^6 x_3^2 - x_2^2 x_3^6, \text{ de degré } 5 + C_3^2 = 8.$$



$$v_{(3,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5(x_2^3 - x_3^3) + x_2^5(x_3^3 - x_1^3) + x_3^5(x_1^3 - x_2^3) \\ = x_1^5 x_2^3 - x_1^5 x_3^3 - x_1^3 x_2^5 + x_1^3 x_3^5 + x_2^5 x_3^3 - x_2^3 x_1^5, \text{ de degré } 5 + C_3^2 = 8.$$

$$v_{(3,1,1)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^5 x_2 x_3 (x_2 - x_3) + x_2^5 x_3 x_1 (x_3 - x_1) + x_3^5 x_1 x_2 (x_1 - x_2) \\ = x_1^5 x_2^2 x_3 - x_1^5 x_2 x_3^2 - x_1^2 x_2^5 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^5 + x_1 x_2^5 x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3^5, \\ \text{de degré } 5 + C_3^2 = 8.$$

$$v_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2 x_3 (x_2^2 - x_3^2) + x_2^4 x_3 x_1 (x_3^2 - x_1^2) + x_3^4 x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) \\ = x_1^4 x_2^3 x_3 - x_1^4 x_2 x_3^3 - x_1^3 x_2^4 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^4 + x_1 x_2^4 x_3^3 - x_1 x_2^3 x_3^4, \\ \text{de degré } 5 + C_3^2 = 8.$$

◇  $d = 6$ . Il y a sept partitions  $\lambda = (6, 0, 0)$ ,  $\lambda = (5, 1, 0)$ ,  $\lambda = (4, 2, 0)$ ,  $\lambda = (4, 1, 1)$ ,  $\lambda = (3, 3, 0)$ ,  $\lambda = (3, 2, 1)$  et  $\lambda = (2, 2, 2)$

$$v_{(6,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^8(x_2 - x_3) + x_2^8(x_3 - x_1) + x_3^8(x_1 - x_2) \\ = x_1^8 x_2 - x_1^8 x_3 - x_1 x_2^8 + x_1 x_3^8 + x_2^8 x_3 - x_2 x_3^8, \text{ de degré } 6 + C_3^2 = 9.$$

$$v_{(5,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^7(x_2^2 - x_3^2) + x_2^7(x_3^2 - x_1^2) + x_3^7(x_1^2 - x_2^2) \\ = x_1^7 x_2^2 - x_1^7 x_3^2 - x_1^2 x_2^7 + x_1^2 x_3^7 + x_2^7 x_3^2 - x_2^2 x_3^7, \text{ de degré } 6 + C_3^2 = 9.$$

$$v_{(4,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^6(x_2^3 - x_3^3) + x_2^6(x_3^3 - x_1^3) + x_3^6(x_1^3 - x_2^3) \\ = x_1^6 x_2^3 - x_1^6 x_3^3 - x_1^3 x_2^6 + x_1^3 x_3^6 + x_2^6 x_3^3 - x_2^3 x_3^6, \text{ de degré } 6 + C_3^2 = 9.$$

$$v_{(4,1,1)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^6 x_2 x_3 (x_2 - x_3) + x_2^6 x_3 x_1 (x_3 - x_1) + x_3^6 x_1 x_2 (x_1 - x_2) \\ = x_1^6 x_2^2 x_3 - x_1^6 x_2 x_3^2 - x_1^2 x_2^6 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^6 + x_1 x_2^6 x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3^6, \\ \text{de degré } 6 + C_3^2 = 9.$$

$$v_{(3,3,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5(x_2^4 - x_3^4) + x_2^5(x_3^4 - x_1^4) + x_3^5(x_1^4 - x_2^4), \\ \text{de degré } 6 + C_3^2 = 9.$$

$$v_{(3,2,1)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^5 x_2 x_3 (x_2^2 - x_3^2) + x_2^5 x_3 x_1 (x_3^2 - x_1^2) + x_3^5 x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2), \text{ de degré } 6 + C_3^2 = 9.$$

$$v_{(2,2,2)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^4 x_2^2 x_3^2 (x_2 - x_3) + x_2^4 x_3^2 x_1^2 (x_3 - x_1) + x_3^4 x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2), \text{ de degré } 6 + C_3^2 = 9.$$

◇ etc.

### Diagramme de Young associé à une partition

Il s'agit d'un diagramme, noté  $YD(\lambda)$ , dont les lignes sont constituées de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  boîtes respectivement. Par exemple le diagramme de Young associé à la partition  $\lambda = (6, 4, 3, 3, 1)$  est  $YD(\lambda)$  :

Alors  $ht \lambda$  est la longueur de la première colonne de  $YD(\lambda)$  et degré  $\lambda$  est le nombre de boîtes de  $YD(\lambda)$ .

## 5.12 Retour sur les polynômes à $n$ indéterminées symétriques

### 5.12.1 Polynômes de Schur à $n$ indéterminées

On pourra consulter [51]<sup>191</sup>, [59]<sup>192</sup> et [69]<sup>193</sup> et Wikipédia.

Étant donné que  $v_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  s'annule pour  $x_i = x_j; i \neq j$  il est divisible par  $d(x_1, \dots, x_n)$ . Soit alors  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) \triangleq \frac{v_\lambda(x_1, \dots, x_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}$ . Il s'agit du polynôme de Schur associé à la partition  $\lambda$ . Il est à  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$  symétrique de degré  $d$  :

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{S}_n}.$$

Les  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  constituent une base du  $k$ -espace vectoriel  $k[x_1, \dots, x_n]_d^{\mathfrak{S}_n}$ .

Soit  $h_p(x_1, \dots, x_n)$  le polynôme symétrique complet de degré  $p$ , somme de tous les monômes de degrés  $p$  [29]<sup>194</sup>, [51]<sup>195</sup> et [59]<sup>196</sup> (cf. ci-après). On va voir que ce sont des cas particuliers de polynômes de Schur.

#### Fonction génératrice des polynômes symétriques complets

On vérifie immédiatement que  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{p=0}^{\infty} h_p(x_1, \dots, x_n) t^p$  [51]<sup>197</sup>.

#### Exemples généraux :

$\forall k \in \mathbb{N} : s_{(k, k, \dots, k)}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots x_n)^k$  et, en particulier,  $s_{(0, 0, \dots, 0)}(x_1, \dots, x_n) = 1$  et  $s_{(1, 1, \dots, 1)}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$  [51]<sup>198</sup>.

#### Exemples particuliers :

•  $n = 2$  alors  $d(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ , de degré  $C_2^2 = 1$

$s_0(x_1, x_2) = 2 = \sigma_0(x_1, x_2)$ , de degré 0

$s_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = \sigma_1(x_1, x_2)$ , de degré 1

191. pp. 57-60 § 6.2 Schur polynomials

192. pp. 40-62 Chapitre I § 3

193. pp. 6-7

194. p. 25

195. p. 57 § 6.2

196. pp. 21-23

197. p. 57 § 6.2

198. p. 59 Exercice 3

$s_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \frac{1}{2} [\sigma_1^2(x_1, x_2) - \sigma_2(x_1, x_2)]$ , de degré 2

$\sigma_0(x_1, x_2) = 2 = s_0(x_1, x_2)$ , de degré 0

$\sigma_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = s_1(x_1, x_2)$ , de degré 1

$\sigma_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = s_1^2(x_1, x_2) - 2 s_2(x_1, x_2)$ , de degré 2

$\sigma_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 = s_1^3(x_1, x_2) - 3 s_1(x_1, x_2) s_2(x_1, x_2)$ , de degré 3  
etc.

◇  $d = 1$ . Il y a une seule partition  $\lambda = (1, 0)$

$s_{(1,0)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = h_1(x_1, x_2)$ , de degré  $d = 1$ .

◇  $d = 2$ . Il y a deux partitions  $\lambda = (2, 0)$  et  $\lambda = (1, 1)$

$s_{(2,0)}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = h_2(x_1, x_2)$

$s_{(1,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2$ , de degré  $d = 2$ .

◇  $d = 3$ . Il y a deux partitions  $\lambda = (3, 0)$  et  $\lambda = (2, 1)$

$s_{(3,0)}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 = h_3(x_1, x_2)$ , de degré  $d = 3$ .

$s_{(2,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ , de degré  $d = 3$ .

◇  $d = 4$ . Il y a trois partitions  $\lambda = (4, 0)$ ,  $\lambda = (3, 1)$  et  $\lambda = (2, 2)$

$s_{(4,0)}(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_2^4 = h_4(x_1, x_2)$ , de degré  $d = 4$ .

$s_{(3,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3$ , de degré  $d = 4$ .

$s_{(2,2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ , de degré  $d = 4$ .

◇  $d = 5$ . Il y a trois partitions  $\lambda = (5, 0)$ ,  $\lambda = (4, 1)$  et  $\lambda = (3, 2)$

$s_{(5,0)}(x_1, x_2) = x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1 x_2^4 + x_2^5 = h_5(x_1, x_2)$ , de degré  $d = 5$ .

$s_{(4,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3) = x_1^4 x_2 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1 x_2^4$ , de degré  $d = 5$ .

$s_{(3,2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) = x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3$ , de degré  $d = 5$ .

◇  $d = 6$ . Il y a quatre partitions  $\lambda = (6, 0)$ ,  $\lambda = (5, 1)$ ,  $\lambda = (4, 2)$  et  $\lambda = (3, 3)$

$s_{(6,0)}(x_1, x_2) = x_1^6 + x_1^5 x_2 + x_1^4 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4 + x_1 x_2^5 + x_2^6 = h_6(x_1, x_2)$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(5,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_2^4)$   
 $= x_1^5 x_2 + x_1^4 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4 + x_1 x_2^5$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(4,2)}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = x_1^4 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(3,3)}(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^3$ , de degré  $d = 6$ .

◇ etc.

•  $n = 3$  alors  $d(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2$ , de degré  $C_3^2 = 3$

$s_0(x_1, x_2, x_3) = 3 = \sigma_0(x_1, x_2, x_3)$ , de degré 0

$s_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1(x_1, x_2, x_3)$ , de degré 1

$s_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{1}{2} [\sigma_1^2(x_1, x_2, x_3) - \sigma_2(x_1, x_2, x_3)]$ , de degré 2

$s_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{6} [\sigma_1^3(x_1, x_2, x_3) - 3 \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \sigma_2(x_1, x_2, x_3) + 2 \sigma_3(x_1, x_2, x_3)]$ , de degré 3

$\sigma_0(x_1, x_2, x_3) = 3 = s_0(x_1, x_2, x_3)$ , de degré 0

$\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = s_1(x_1, x_2, x_3)$ , de degré 1

$\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2(x_1, x_2, x_3) - 2 s_2(x_1, x_2, x_3)$ , de degré 2

$\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1^3(x_1, x_2, x_3) - 3 s_1(x_1, x_2, x_3) s_2(x_1, x_2, x_3) + 3 s_3(x_1, x_2, x_3)$ , de degré 3 etc.

◇  $d = 1$ . Il y a une seule partition  $\lambda = (1, 0, 0)$

$s_{(1,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = h_1(x_1, x_2, x_3)$ , de degré  $d = 1$ .

◇  $d = 2$ . Il y a deux partitions  $\lambda = (2, 0, 0)$  et  $\lambda = (1, 1, 0)$

$s_{(2,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2 = h_2(x_1, x_2, x_3)$ , de degré  $d = 2$ .

$s_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ , de degré  $d = 2$ .

◇  $d = 3$ . Il y a trois partitions  $\lambda = (3, 0, 0)$ ,  $\lambda = (2, 1, 0)$  et  $\lambda = (1, 1, 1)$

$s_{(3,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3 = h_3(x_1, x_2, x_3)$ , de degré  $d = 3$ .

$s_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$ , de degré  $d = 3$ .

$s_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ , de degré  $d = 3$ .

◇  $d = 4$ . Il y a quatre partitions  $\lambda = (4, 0, 0)$ ,  $\lambda = (3, 1, 0)$ ,  $\lambda = (2, 2, 0)$

et  $\lambda = (2, 1, 1)$

$$s_{(4,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_3^3 + x_2^4 + x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3 + x_3^4 = h_4(x_1, x_2, x_3),$$

de degré  $d = 4$ .

$$s_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 + 2 x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 + 2 x_1 x_2^2 x_3 + 2 x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3, \text{ de degré } d = 4.$$

$$s_{(2,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2, \text{ de degré } d = 4.$$

$$s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2, \text{ de degré } d = 4.$$

$\diamond d = 5$ . Il y a cinq partitions  $\lambda = (5, 0, 0)$ ,  $\lambda = (4, 1, 0)$ ,  $\lambda = (3, 2, 0)$ ,  $\lambda = (3, 1, 1)$  et  $\lambda = (2, 2, 1)$

$$s_{(5,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2^4 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^3 + x_1 x_3^4 + x_2^5 + x_2^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 + x_2 x_3^4 + x_3^5 = h_5(x_1, x_2, x_3), \text{ de degré } d = 5.$$

$$s_{(4,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_1^3 x_2^2 + 2 x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + 2 x_1^2 x_2^2 x_3 + 2 x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2^4 + 2 x_1 x_2^3 x_3 + 2 x_1 x_2^2 x_3^2 + 2 x_1 x_2 x_3^3 + x_1 x_3^4 + x_2^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 + x_2 x_3^4, \text{ de degré } d = 5.$$

$$s_{(3,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + 2 x_1^2 x_2^2 x_3 + 2 x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3 + 2 x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3, \text{ de degré } d = 5.$$

$$s_{(3,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^3, \text{ de degré } d = 5.$$

$$s_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2, \text{ de degré } d = 5.$$

$\diamond d = 6$ . Il y a sept partitions  $\lambda = (6, 0, 0)$ ,  $\lambda = (5, 1, 0)$ ,  $\lambda = (4, 2, 0)$ ,  $\lambda = (4, 1, 1)$ ,  $\lambda = (3, 3, 0)$ ,  $\lambda = (3, 2, 1)$  et  $\lambda = (2, 2, 2)$

$$s_{(6,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^6 + x_1^5 x_2 + x_1^5 x_3 + x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 + x_1^3 x_2^3 + x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^4 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4 + x_1 x_2^5 + x_1 x_2^4 x_3 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^3 + x_1 x_2 x_3^4 + x_1 x_3^5 + x_2^6 + x_2^5 x_3 + x_2^4 x_3^2 + x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4 + x_2 x_3^5 + x_3^6 = h_6(x_1, x_2, x_3), \text{ de degré } d = 6.$$

$$s_{(5,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 x_2 + x_1^5 x_3 + x_1^4 x_2^2 + 2 x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 + x_1^3 x_2^3 + 2 x_1^3 x_2^2 x_3 + 2 x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^4 + 2 x_1^2 x_2^3 x_3 + 2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2 x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4$$

+  $x_1 x_2^5 + 2 x_1 x_2^4 x_3 + 2 x_1 x_2^3 x_3^2 + 2 x_1 x_2^2 x_3^3 + 2 x_1 x_2 x_3^4 + x_1 x_3^5 + x_2^5 x_3 + x_2^4 x_3^2$   
+  $x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4 + x_2 x_3^5$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(4,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 + x_1^3 x_2^3 + 2 x_1^3 x_2^2 x_3$   
+  $2 x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^4 + 2 x_1^2 x_2^3 x_3 + 3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2 x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4 + x_1 x_2^4 x_3$   
+  $2 x_1 x_2^3 x_3^2 + 2 x_1 x_2^2 x_3^3 + x_1 x_2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2 + x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(4,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2$   
+  $x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^4 x_3 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^3 + x_1 x_2 x_3^4$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(3,3,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^3 + x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^3 x_3$   
+  $x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^3 + x_2^3 x_3^3$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(3,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2) (x_2 + x_3) (x_3 + x_1)$ , de degré  $d = 6$ .

$s_{(2,2,2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ , de degré  $d = 6$ .

◇ etc.

**Remarque** [51]<sup>199</sup> :

Si  $m < n$  alors :

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \begin{cases} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) & \text{si } \text{ht } \lambda \leq m \\ 0 & \text{si } \text{ht } \lambda > m \end{cases} .$$

**Exemples** (cf. ce qui précède)

$$s_{(1,0,0)}(x_1, x_2, 0) = s_{(1,0)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$s_{(2,0,0)}(x_1, x_2, 0) = s_{(2,0)}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

$$s_{(1,1,0)}(x_1, x_2, 0) = s_{(1,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$s_{(3,0,0)}(x_1, x_2, 0) = s_{(3,0)}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3$$

$$s_{(2,1,0)}(x_1, x_2, 0) = s_{(2,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

etc.

**Formule de Pieri**

$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i} = \sum_{\mu} s_{\mu}(x_1, \dots, x_n)$ , avec :  
 $\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_2 \geq \dots \mu_n \geq \lambda_n$  [51]<sup>200</sup> et [59]<sup>201</sup>.

**Formule de Cauchy**

Dans l'anneau  $\mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]]$  des séries formelles on a :

$$\prod_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_{\text{ht } \lambda \leq \min(n, m)} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_n) \text{ [51]}^{202}.$$

199. p. 59 Exercice 6

200. pp. 59-60 exercice 7

201. pp. 331-343 Chapitre VI § 6 qui présente diverses formules de Pieri dans un cadre plus général

202. pp. 60-62 textsection 6.3

### 5.12.2 Polynômes de Newton à $n$ indéterminées

On pourra consulter [51]<sup>203</sup>.

Soit  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  est une partition de  $|\boldsymbol{\mu}|$  en, au plus,  $n$  parties

$n_{\boldsymbol{\mu}}(x_1, \dots, x_n) \triangleq \prod \sigma_{\mu_i}(x_1, \dots, x_n)$ , où les  $\sigma_{\mu_i}(x_1, \dots, x_n)$  sont les sommes de Newton à  $n$  indéterminées, est, par définition, un polynôme de Newton à  $n$  indéterminées.

$n_{\boldsymbol{\mu}}(x_1, \dots, x_n)$  est un polynôme à  $n$  indéterminées symétrique, de degré  $|\boldsymbol{\mu}|$ , dans  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  :

$$n_{\boldsymbol{\mu}}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]_{|\boldsymbol{\mu}|}^{\mathfrak{S}_n}.$$

Étant donné que les polynômes de Schur à  $n$  indéterminées forment une base des polynômes à  $n$  indéterminées symétriques on peut exprimer les polynômes de Newton à  $n$  indéterminées en fonction des polynômes de Schur à  $n$  indéterminées :

$$n_{\boldsymbol{\mu}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\text{ht } \boldsymbol{\lambda} \leq n; |\boldsymbol{\lambda}| = |\boldsymbol{\mu}|} a_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\mu}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, \dots, x_n);$$

avec  $a_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{Z}$ .

#### Formule de Frobenius [51]<sup>204</sup>

Pour un polynôme  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  soit  $[f(x_1, \dots, x_n)]_{l_1 \dots l_n}$  le coefficient du monôme  $x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$  de  $f$  alors on a la formule de Frobenius :

$$a_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\mu}) = [d(x_1, \dots, x_n) n_{\boldsymbol{\mu}}(x_1, \dots, x_n)]_{l_1 \dots l_n} \text{ avec } l_i = \lambda_i + n - i$$

( $1 \leq i \leq n$ ).

#### Exemples

Pour chaque exemple on peut vérifier la formule de Frobenius. Nous l'avons fait parfois (cf. ci-après).

•  $n = 2$

◊  $|\boldsymbol{\mu}| = 1$

$$n_{(1,0)}(x_1, x_2) = \sigma_1(x_1, x_2) \sigma_0(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2); \text{ donc } a_{(1,0)}(1, 0) = 2.$$

◊  $|\boldsymbol{\mu}| = 2$

$$n_{(2,0)}(x_1, x_2) = \sigma_2(x_1, x_2) \sigma_0(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2); \text{ donc } a_{(2,0)}(2, 0) = 2$$

et  $a_{(1,1)}(2, 0) = -2$ .

---

203. pp. 62-63 § 6.4

204. p. 62 § 6.4 Exercice 9

$n_{(1,1)}(x_1, x_2) = \sigma_1^2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ ; donc  
 $a_{(2,0)}(1, 1) = 1$  et  $a_{(1,1)}(1, 1) = 1$ .

◇  $|\mu| = 3$

$n_{(3,0)}(x_1, x_2) = \sigma_3(x_1, x_2) \sigma_0(x_1, x_2) = 2(x_1^3 + x_2^3)$ ; donc  $a_{(3,0)}(3, 0) = 2$   
et  $a_{(2,1)}(3, 0) = -2$ .

$n_{(2,1)}(x_1, x_2) = \sigma_2(x_1, x_2) \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)$   
 $= x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3$ ; donc  $a_{(3,0)}(2, 1) = 1$  et  $a_{(2,1)}(2, 1) = 0$

◇  $|\mu| = 4$

$n_{(4,0)}(x_1, x_2) = \sigma_4(x_1, x_2) \sigma_0(x_1, x_2) = 2(x_1^4 + x_2^4)$ ; donc  $a_{(4,0)}(4, 0) = 2$ ,  
 $a_{(3,1)}(4, 0) = -2$  et  $a_{(2,2)}(4, 0) = 0$ .

$n_{(3,1)}(x_1, x_2) = \sigma_3(x_1, x_2) \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3)(x_1 + x_2)$   
 $= x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^4$ ; donc  $a_{(4,0)}(3, 1) = 1$ ,  $a_{(3,1)}(3, 1) = 0$  et  
 $a_{(2,2)}(3, 1) = -1$ .

*Vérification de la formule de Frobenius*

$d(x_1, x_2) n_{(3,1)}(x_1, x_2) = x_1^5 - x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 - x_2^5$ ; alors :

$a_{(4,0)}(3, 1) = [d(x_1, x_2) n_{(3,1)}(x_1, x_2)]_{50} = 1$  car  $l_1 = 4 + 2 - 1 = 5$  et  
 $l_2 = 0 + 2 - 2 = 0$ ,

$a_{(3,1)}(3, 1) = [d(x_1, x_2) n_{(3,1)}(x_1, x_2)]_{41} = 0$  car  $l_1 = 3 + 2 - 1 = 4$  et  
 $l_2 = 1 + 2 - 2 = 1$  et

$a_{(2,2)}(3, 1) = [d(x_1, x_2) n_{(3,1)}(x_1, x_2)]_{32} = -1$  car  $l_1 = 2 + 2 - 1 = 3$  et  
 $l_2 = 2 + 2 - 2 = 2$ .

$n_{(2,2)}(x_1, x_2) = \sigma_2^2(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4$ ; donc  
 $a_{(4,0)}(2, 2) = 1$ ,  $a_{(3,1)}(2, 2) = -1$  et  $a_{(2,2)}(2, 2) = 2$ .

◇  $|\mu| = 5$

$n_{(5,0)}(x_1, x_2) = \sigma_5(x_1, x_2) \sigma_0(x_1, x_2) = 2(x_1^5 + x_2^5)$ ; donc  $a_{(5,0)}(5, 0) = 2$ ,  
 $a_{(4,1)}(5, 0) = -2$  et  $a_{(3,2)}(5, 0) = 0$ .

$n_{(4,1)}(x_1, x_2) = \sigma_4(x_1, x_2) \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2)$   
 $= x_1^5 + x_1^4x_2 + x_1x_2^4 + x_2^5$ ; donc  $a_{(5,0)}(4, 1) = 1$ ,  $a_{(4,1)}(4, 1) = 0$  et  $a_{(3,2)}(4, 1) = -1$ .

$n_{(3,2)}(x_1, x_2) = \sigma_3(x_1, x_2) \sigma_2(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^2 + x_2^2)$   
 $= x_1^5 + x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 + x_2^5$ ; donc  $a_{(5,0)}(3, 2) = 1$ ,  $a_{(4,1)}(3, 2) = -1$  et  $a_{(3,2)}(3, 2) = 1$ .

◇  $|\mu| = 6$

$n_{(6,0)}(x_1, x_2) = \sigma_6(x_1, x_2) \sigma_0(x_1, x_2) = 2(x_1^6 + x_2^6)$ ; donc  $a_{(6,0)}(6, 0) = 2$ ,  
 $a_{(5,1)}(6, 0) = -2$ ,  $a_{(4,2)}(6, 0) = 0$  et  $a_{(3,3)}(6, 0) = 0$ .

$n_{(5,1)}(x_1, x_2) = \sigma_5(x_1, x_2) \sigma_1(x_1, x_2) = (x_1^5 + x_2^5)(x_1 + x_2)$   
 $= x_1^6 + x_1^5x_2 + x_1x_2^5 + x_2^6$ ; donc  $a_{(6,0)}(5, 1) = 1$ ,  $a_{(5,1)}(5, 1) = 0$ ,  $a_{(4,2)}(5, 1) = -1$   
et  $a_{(3,3)}(5, 1) = 0$ .



$n_{(4,2)}(x_1, x_2) = \sigma_4(x_1, x_2) \sigma_2(x_1, x_2) = (x_1^4 + x_2^2) (x_1^2 + x_2^2)$   
 $= x_1^6 + x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 + x_2^6$ ; donc  $a_{(6,0)}(4, 2) = 1$ ,  $a_{(5,1)}(4, 2) = -1$ ,  $a_{(4,2)}(4, 2) = -1$   
et  $a_{(3,3)}(4, 2) = -1$ .

$n_{(3,3)}(x_1, x_2) = \sigma_3^2(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3)^2 = x_1^6 + 2x_1^3 x_2^3 + x_2^6$ ; donc  $a_{(6,0)}(3, 3) = 1$ ,  
 $a_{(5,1)}(3, 3) = -1$ ,  $a_{(4,2)}(3, 3) = 0$  et  $a_{(3,3)}(3, 3) = 2$ .

◇ etc.

•  $n = 3$

On ne donne plus l'expression des polynômes de Newton en fonction des polynômes de Schur (sauf avis contraire : cf. ci-après).

◇  $|\mu| = 1$

$$n_{(1,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \sigma_0^2(x_1, x_2, x_3) = 9(x_1 + x_2 + x_3)$$

◇  $|\mu| = 2$

$$n_{(2,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2(x_1, x_2, x_3) \sigma_0^2(x_1, x_2, x_3) = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$n_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^2(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= 3(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)$$

◇  $|\mu| = 3$

$$n_{(3,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_3(x_1, x_2, x_3) \sigma_0^2(x_1, x_2, x_3) = 9(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

$$n_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2(x_1, x_2, x_3) \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3)$$

$$= 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$= 3(x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3)$$

$$n_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^3$$

$$= x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 6x_1x_2x_3 + 3x_1x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + x_3^3$$

◇  $|\mu| = 4$

$$n_{(4,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_4(x_1, x_2, x_3) \sigma_0^2(x_1, x_2, x_3) = 9(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$$

$$n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_3(x_1, x_2, x_3) \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3)$$

$$= 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$= 3(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1x_2^3 + x_1x_3^3 + x_2^4 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^4)$$

(cf. ci-après l'expression de ce polynôme de Newton en fonction des polynômes de Schur et la vérification de la formule de Frobenius)

$$n_{(2,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2^2(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$$

$$= 3(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + x_2^4 + 2x_2^2x_3^2 + x_3^4)$$

$$n_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2(x_1, x_2, x_3) \sigma_1^2(x_1, x_2, x_3)$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$= x_1^4 + 2x_1^3x_2 + 2x_1^3x_3 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_1x_2^3 + 2x_1x_2^2x_3$$

$$+ 2x_1x_2x_3^2 + 2x_1x_3^3 + x_2^4 + 2x_2^3x_3 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_2x_3^3 + x_3^4$$

$$\begin{aligned}
& \diamond |\boldsymbol{\mu}| = 5 \\
& n_{(5,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_5(x_1, x_2, x_3) \sigma_0^2(x_1, x_2, x_3) = 9(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5) \\
& n_{(4,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_4(x_1, x_2, x_3) \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3) \\
& = 3(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)(x_1 + x_2 + x_3) \\
& = 3(x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_1 x_2^4 + x_1 x_3^4 + x_2^5 + x_2^4 x_3 + x_2 x_3^4 + x_3^5) \\
& n_{(3,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_3(x_1, x_2, x_3) \sigma_2(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3) \\
& = 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\
& = 3(x_1^5 + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_2^5 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 + x_3^5) \\
& n_{(3,1,1)}(x_1, x_2, x_3) \\
& = \sigma_3(x_1, x_2, x_3) \sigma_1^2(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1 + x_2 + x_3)^2 \\
& = x_1^5 + 2x_1^4 x_2 + 2x_1^4 x_3 + x_1^3 x_2^2 + 2x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + 2x_1 x_2^4 \\
& + 2x_1 x_2^3 x_3 + 2x_1 x_2 x_3^3 + 2x_1 x_3^4 + x_2^5 + 2x_2^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 + 2x_2 x_3^4 + x_3^5 \\
& n_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2^2(x_1, x_2, x_3) \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \\
& = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 (x_1 + x_2 + x_3) \\
& = x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + 2x_1^3 x_2^2 + 2x_1^3 x_3^2 + 2x_1^2 x_2^3 + 2x_1^2 x_3^3 + 2x_1 x_2^4 x_3 \\
& + 2x_1 x_2 x_3^2 + 2x_1 x_3^4 + x_1 x_2^4 + 2x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_3^4 + x_2^5 + x_2^4 x_3 + 2x_2^3 x_3^2 \\
& + 2x_2^2 x_3^3 + x_2 x_3^4 + x_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \diamond |\boldsymbol{\mu}| = 6 \\
& n_{(6,0,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_6(x_1, x_2, x_3) \sigma_0^2(x_1, x_2, x_3) = 9(x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) \\
& n_{(5,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_5(x_1, x_2, x_3) \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3) \\
& = 3(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5)(x_1 + x_2 + x_3) \\
& = 3(x_1^6 + x_1^5 x_2 + x_1^5 x_3 + x_1 x_2^5 + x_1 x_3^5 + x_2^6 + x_2^5 x_3 + x_2 x_3^5 + x_3^6) \\
& n_{(4,2,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_4(x_1, x_2, x_3) \sigma_2(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3) \\
& = 3(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\
& = 3(x_1^6 + x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 + x_1^2 x_3^4 + x_2^6 + x_2^4 x_3^2 + x_2^2 x_3^4 + x_3^6) \\
& n_{(4,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_4(x_1, x_2, x_3) \sigma_1^2(x_1, x_2, x_3) \\
& = (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^6 + 2x_1^5 x_2 + 2x_1^5 x_3 + x_1^4 x_2^2 + 2x_1^4 x_2 x_3 \\
& + x_1^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 + x_1^2 x_3^4 + 2x_1 x_2^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1 x_2 x_3^4 + 2x_1 x_3^5 + x_2^6 + 2x_2^5 x_3 \\
& + x_2^4 x_3^2 + x_2^2 x_3^4 + 2x_2 x_3^5 + x_3^6 \\
& n_{(3,3,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_3^2(x_1, x_2, x_3) \sigma_0(x_1, x_2, x_3) \\
& = 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 = 3(x_1^6 + 2x_1^3 x_2^3 + 2x_1^3 x_3^3 + x_2^6 + 2x_2^3 x_3^3 + x_3^6) \\
& n_{(3,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_3(x_1, x_2, x_3) \sigma_2(x_1, x_2, x_3) \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \\
& = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) \\
& = x_1^6 + x_1^5 x_2 + x_1^5 x_3 + x_1^4 x_2^2 + x_1^4 x_3^2 + 2x_1^3 x_2^3 \\
& + x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^3 x_2 x_3^2 + 2x_1^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^4 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4 \\
& + x_1 x_2^5 + x_1 x_2^4 x_3 + x_1 x_2^3 x_3^2 + x_1 x_3^5 + x_2^6 + x_2^5 x_3 + x_2^4 x_3^2 \\
& + 2x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4 + x_2 x_3^5 + x_3^6 \\
& n_{(2,2,2)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2^3(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 \\
& = x_1^6 + 3x_1^4 x_2^2 + 3x_1^4 x_3^2 + 3x_1^2 x_2^4 + 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 3x_1^2 x_3^4 + x_2^6 + 3x_2^4 x_3^2 + 3x_2^2 x_3^4 + x_3^6
\end{aligned}$$

### D'autres exemples avec vérification de la formule de Frobenius

• Soit  $n = 2$  et  $\boldsymbol{\mu} = (3, 2, 1)$  une partition de 6 en 3 parties i.e. telle que  $|\boldsymbol{\mu}| = 6$  et  $\text{ht } \boldsymbol{\mu} = 3$ . Alors :

$$n_{(3,2,1)}(x_1, x_2) = \sigma_3(x_1, x_2) \sigma_2(x_1, x_2) \sigma_1(x_1, x_2) \\ = x_1^6 + x_1^5 x_2 + x_1^4 x_2^2 + 2 x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4 + x_1 x_2^5 + x_2^6. \text{ Et}$$

$$n_{(3,2,1)}(x_1, x_2) = \sum_{\text{ht } \boldsymbol{\lambda} \leq 2; |\boldsymbol{\lambda}|=6} a_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\mu}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, x_2). \text{ Il faut que :}$$

$\boldsymbol{\lambda} = (6, 0)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (5, 1)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3)$  et on trouve :

$$a_{(6,0)}(3, 2, 1) = 1 \in \mathbb{Z}, a_{(5,1)}(3, 2, 1) = 0 \in \mathbb{Z}, a_{(4,2)}(3, 2, 1) = 0 \in \mathbb{Z} \text{ et} \\ a_{(3,3)}(3, 2, 1) = 1 \in \mathbb{Z}.$$

*Vérification de la formule de Frobenius*

$$d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2) = x_1^7 + x_1^4 x_2^3 - x_1^3 x_2^4 - x_2^7. \text{ Donc :}$$

$$[d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{70} = 1, [d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{43} = 1, \\ [d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{34} = -1, [d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{07} = -1 \text{ et les} \\ \text{autres nuls.}$$

On a bien

$$a_{(6,0)}(3, 2, 1) = [d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{70} = 1, \text{ car } l_1 = 6 + 2 - 1 = 7 \text{ et} \\ l_2 = 0 + 2 - 2 = 0,$$

$$a_{(5,1)}(3, 2, 1) = [d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{61} = 1, \text{ car } l_1 = 5 + 2 - 1 = 6 \text{ et} \\ l_2 = 1 + 2 - 2 = 1,$$

$$a_{(4,2)}(3, 2, 1) = [d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{52} = 1, \text{ car } l_1 = 4 + 2 - 1 = 5 \text{ et} \\ l_2 = 2 + 2 - 2 = 2,$$

$$a_{(3,3)}(3, 2, 1) = [d(x_1, x_2) n_{(3,2,1)}(x_1, x_2)]_{43} = 1, \text{ car } l_1 = 3 + 2 - 1 = 4 \text{ et} \\ l_2 = 3 + 2 - 2 = 3.$$

• Soit  $n = 3$  et  $\boldsymbol{\mu} = (3, 1, 0)$  une partition de 4 en 2 parties i.e. telle que  $|\boldsymbol{\mu}| = 4$  et  $\text{ht } \boldsymbol{\mu} = 2$ . On a vu que :

$$n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3) \\ = 3(x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1 x_2^3 + x_1 x_3^3 + x_2^4 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3 + x_3^4). \text{ Et}$$

$$n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\text{ht } \boldsymbol{\lambda} \leq 3; |\boldsymbol{\lambda}|=4} a_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\mu}) s_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, x_2, x_3). \text{ Il faut que :}$$

$\boldsymbol{\lambda} = (4, 0, 0)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1, 0)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 0)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1)$  et on trouve :

$$a_{(4,0,0)}(3, 1, 0) = 3 \in \mathbb{Z}, a_{(3,1,0)}(3, 1, 0) = 0 \in \mathbb{Z}, \\ a_{(2,2,0)}(3, 1, 0) = -3 \in \mathbb{Z} \text{ et } a_{(2,1,1)}(3, 1, 0) = 1 \in \mathbb{Z}.$$

### Vérification de la formule de Frobenius

$d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1^6 x_2 - x_1^6 x_3 - x_1^4 x_2^3 + x_1^4 x_3^3 + x_1^3 x_2^4 - x_1^3 x_3^4 - x_1 x_2^6 + x_1 x_3^6 + x_2^6 x_3 - x_2^4 x_3^3 + x_2^3 x_3^4 - x_2 x_3^6)$ . Donc, en particulier :

$$\begin{aligned} [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{610} &= 3, \\ [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{520} &= 0, \\ [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{430} &= -3, \\ [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{421} &= 0, \end{aligned}$$

On a bien

$$\begin{aligned} a_{(4,0,0)}(3, 1, 0) &= [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{610} = 3, \\ \text{car } l_1 &= 4 + 3 - 1 = 6, l_2 = 0 + 3 - 2 = 1 \text{ et } l_3 = 0 + 3 - 3 = 0, \\ a_{(3,1,0)}(3, 1, 0) &= [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{520} = 0, \\ \text{car } l_1 &= 3 + 3 - 1 = 5, l_2 = 1 + 3 - 2 = 2 \text{ et } l_3 = 0 + 3 - 3 = 0, \\ a_{(2,2,0)}(3, 1, 0) &= [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{430} = -3, \\ \text{car } l_1 &= 2 + 3 - 1 = 4, l_2 = 2 + 3 - 2 = 3 \text{ et } l_3 = 0 + 3 - 3 = 0, \\ a_{(2,1,1)}(3, 1, 0) &= [d(x_1, x_2, x_3) n_{(3,1,0)}(x_1, x_2, x_3)]_{421} = 0, \\ \text{car } l_1 &= 2 + 3 - 1 = 4, l_2 = 1 + 3 - 2 = 2 \text{ et } l_3 = 1 + 3 - 3 = 1, \end{aligned}$$

## 6 Polarisation

On pourra consulter [32]<sup>205</sup> et [51]<sup>206</sup>.

### 6.1 Polarisation d'une fonction polynomiale quelconque

Soient  $V \cong k^n$  et  $\mathbf{V} \triangleq V^p \cong k^N$  avec  $N = np$ .

Soient  $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$  une base de  $V$  et  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  la base duale de  $V^* \cong k^n$ , espace dual de  $V$  (rappel) et  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^N\}$  une base de  $\mathbf{V}$  et  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  la base duale de  $\mathbf{V}^* = V^{p*} = V^{*p} \cong k^{np} = k^N$ , espace dual de  $\mathbf{V}$ . On a  $x_j(e^i) = \delta_j^i$  (symbole de Kronecker);  $i, j = 1, \dots, n$  et  $\mathbf{x}_J(\mathbf{e}^I) = \delta_J^I$ ;  $I, J = 1, \dots, N$ .

Soit  $v \in V$  et alors  $v = v_1 e^1 + \dots + v_n e^n$ ;  $v_1, \dots, v_n \in k$ . Posons  $[v] \triangleq [v_1 \dots v_n]^T$ , matrice colonne  $n \times 1$ .

Soient de même  $v^1, \dots, v^p \in V$  et alors :

$$v^1 = v_1^1 e^1 + \dots + v_n^1 e^n; v_1^1, \dots, v_n^1 \in k,$$

⋮

$$v^p = v_1^p e^1 + \dots + v_n^p e^n; v_1^p, \dots, v_n^p \in k.$$

205. p. 140 partie E

206. pp. 30-37 § 4 p. 34 § 4.4 pour  $p = 1$  pp. 76-77 § 7.3 pour  $p$  quelconque pp. 93-111 § 9.5

Posons :

$$[v^1] \triangleq [v_1^1 \dots v_n^1]^T, \text{ matrice colonne } n \times 1,$$

$\vdots$

$$[v^p] \triangleq [v_1^p \dots v_n^p]^T, \text{ matrice colonne } n \times 1.$$

Soit  $\mathbf{v} \triangleq (v^1, \dots, v^p) \in \mathbf{V}$  et alors  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \mathbf{e}^1 + \dots + \mathbf{v}_N \mathbf{e}^N$ ;  
 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N \in k$ . Posons  $[\mathbf{v}] \triangleq [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N]^T$ , matrice colonne  $N \times 1$ .

On peut dire que  $[\mathbf{v}] \triangleq [[v^1]^T \dots [v^p]^T]^T$  soit

$$\mathbf{v}_1 = v_1^1, \dots, \mathbf{v}_n = v_n^1,$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = v_1^2, \dots, \mathbf{v}_{2n} = v_n^2,$$

$\vdots$

$$\mathbf{v}_{(p-1)n+1} = v_1^p, \dots, \mathbf{v}_{pn} = v_n^p.$$

On a  $k[V] \cong k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $k[\mathbf{V}] \cong k[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]$ .

Mais posons :

$$x_1^1 = \mathbf{x}_1, \dots, x_n^1 = \mathbf{x}_n,$$

$$x_1^2 = \mathbf{x}_{n+1}, \dots, x_n^2 = \mathbf{x}_{2n},$$

$\vdots$

$$x_1^p = \mathbf{x}_{(p-1)n+1}, \dots, x_n^p = \mathbf{x}_{pn}. \text{ Alors :}$$

$$x_1^1(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_1(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1 = v_1^1, \dots, x_n^1(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_n = v_n^1,$$

$$x_1^2(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{n+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{n+1} = v_1^2, \dots, x_n^2(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{2n}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{2n} = v_n^2,$$

$\vdots$

$$x_1^p(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{(p-1)n+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{(p-1)n+1} = v_1^p, \dots, x_n^p(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{pn}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{pn} = v_n^p.$$

Et  $k[\mathbf{V}] \cong k[x_1^1, \dots, x_n^p]$ .

### Opérateurs de polarisation

On définit les opérateurs de polarisation  $\Delta_{ij}$ ;  $i, j = 1, \dots, p$  :

$$k[\mathbf{V}] \xrightarrow{\Delta_{ij}} k[\mathbf{V}], \text{ avec :}$$

$$\mathbf{f} \mapsto \Delta_{ij} \mathbf{f}$$

$(\Delta_{ij} \mathbf{f})(v^1, \dots, v^p) \triangleq \frac{\mathbf{f}(v^1, \dots, v^j + t v^i, \dots, v^p) - \mathbf{f}(v^1, \dots, v^p)}{t} \Big|_{t=0}$  [51]<sup>207</sup>. Alors :

$$\Delta_{ij} \triangleq \sum_{\nu=1}^n v_\nu^i \frac{\partial}{\partial v_\nu^j}; \quad i, j = 1, \dots, p \text{ [51]}^{208}.$$

Le développement en série de Taylor donne :

---

207. p. 76 § 7.3

208. pp. 76-77 § 7.3 Polarization operators

$\mathbf{f}(v^1, \dots, v^j + t v^i \dots, v^p) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} (\Delta_{ij}^l \mathbf{f})(v^1, \dots, v^p)$  [51]<sup>209</sup> et la somme est, en fait, finie car  $\mathbf{f}$  est une fonction polynomiale, avec :

$$(\Delta_{ij}^l \mathbf{f})(v^1, \dots, v^p) \triangleq \frac{\partial^l \mathbf{f}(v^1, \dots, v^j + t v^i \dots, v^p)}{\partial t^l} \Big|_{t=0}.$$

Alors on a :

$\Delta_{ij}^l = \sum_{q_1 + \dots + q_n = l} \frac{l!}{q_1! \dots q_n!} (v_1^i)^{q_1} \dots (v_n^i)^{q_n} \frac{\partial^l}{\partial (v_1^j)^{q_1} \dots \partial (v_n^j)^{q_n}}$ ;  $l = 0, \dots$ . Et on remarque que  $\Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij}$ .

**Exemple :  $n = 1$**

On pose  $v = v_1$ .

$$\Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij} = v^i \frac{\partial}{\partial v^j}$$

$$\Delta_{ij}^2 = (v^i)^2 \frac{\partial^2}{\partial (v^j)^2}$$

$$\Delta_{ij}^3 = (v^i)^3 \frac{\partial^3}{\partial (v^j)^3}$$

...

**Exemple :  $n = 2$**

$$\Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij} = v_1^i \frac{\partial}{\partial v_1^j} + v_2^i \frac{\partial}{\partial v_2^j}$$

$$\Delta_{ij}^2 = (v_1^i)^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_1^j)^2} + 2 v_1^i v_2^i \frac{\partial^2}{\partial v_1^j \partial v_2^j} + (v_2^i)^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_2^j)^2}$$

$$\Delta_{ij}^3 = (v_1^i)^3 \frac{\partial^3}{\partial (v_1^j)^3} + 3 (v_1^i)^2 v_2^i \frac{\partial^3}{\partial (v_1^j)^2 \partial v_2^j} + 3 v_1^i (v_2^i)^2 \frac{\partial^3}{\partial v_1^j \partial (v_2^j)^2} + (v_2^i)^3 \frac{\partial^3}{\partial (v_2^j)^3}$$

...

**Exemple :  $n = 3$**

$$\Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij} = v_1^i \frac{\partial}{\partial v_1^j} + v_2^i \frac{\partial}{\partial v_2^j} + v_3^i \frac{\partial}{\partial v_3^j}$$

$$\Delta_{ij}^2 = (v_1^i)^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_1^j)^2} + 2 v_1^i v_2^i \frac{\partial^2}{\partial v_1^j \partial v_2^j} + 2 v_1^i v_3^i \frac{\partial^2}{\partial v_1^j \partial v_3^j} + (v_2^i)^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_2^j)^2} + 2 v_2^i v_3^i \frac{\partial^2}{\partial v_2^j \partial v_3^j}$$

$$+ (v_3^i)^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_3^j)^2}$$

$$\Delta_{ij}^3 = \dots$$

...

**Exemple de polarisation d'une fonction polynomiale quelconque (non multi-homogène)**

Cet exemple correspond à  $n = 2$  et  $p = 2$ , soit  $N = 4$  :

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(v^1, v^2) = (v_1^1)^3 + 3 v_1^1 v_2^1 + 2 (v_1^2)^2 - 4 v_1^1 v_2^2.$$

On trouve, tous calculs faits :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}(v^1, v^2) = 3 (v_1^1)^2 + 3 v_2^1 - 4 v_2^2$$

---

209. pp. 76-77 § 7.3 Lemme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}(v^1, v^2) &= 3 v_1^1 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^2}(v^1, v^2) &= 4 v_1^2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^2}(v^1, v^2) &= -4 v_1^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial (v_1^1)^2}(v^1, v^2) &= 6 v_1^1 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial v_1^2}(v^1, v^2) &= 3 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial v_2^2}(v^1, v^2) &= -4 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial (v_1^2)^2}(v^1, v^2) &= 4\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial (v_1^1)^3}(v^1, v^2) = 6 \text{ et toutes les autres dérivées nulles.}$$

$$\begin{aligned}(\Delta_{11}^1 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (\Delta_{11} \mathbf{f})(v^1, v^2) = \frac{\partial \mathbf{f}(v^1+t v^1, v^2)}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= 3 (v_1^1)^3 + 6 v_1^1 v_1^2 - 4 v_1^1 v_2^2 \\ (\Delta_{12}^1 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (\Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) = \frac{\partial \mathbf{f}(v^1, v^2+t v^1)}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= -4 v_1^1 v_2^2 + 4 v_1^1 v_1^2 \\ (\Delta_{21}^1 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (\Delta_{21} \mathbf{f})(v^1, v^2) = \frac{\partial \mathbf{f}(v^1+t v^2, v^2)}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= 3 (v_1^1)^2 v_1^2 + 3 v_1^1 v_2^2 + 3 v_2^2 v_1^2 - 4 v_1^2 v_2^2 \\ (\Delta_{22}^1 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (\Delta_{22} \mathbf{f})(v^1, v^2) = \frac{\partial \mathbf{f}(v^1, v^2+t v^2)}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= -4 v_1^1 v_2^2 + 4 (v_1^2)^2 \\ (\Delta_{11}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= \frac{\partial^2 \mathbf{f}(v^1+t v^1, v^2)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 6 [(v_1^1)^3 + v_1^1 v_1^2] \\ (\Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= \frac{\partial^2 \mathbf{f}(v^1, v^2+t v^1)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 4 (v_1^1)^2 \\ (\Delta_{21}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= 6 v_1^1 (v_1^2)^2 = \frac{\partial^2 \mathbf{f}(v^1+t v^2, v^2)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 6 [v_1^1 (v_1^2)^2 + v_1^2 v_2^2] \\ (\Delta_{22}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= \frac{\partial^2 \mathbf{f}(v^1, v^2+t v^2)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 4 (v_1^2)^2 \\ (\Delta_{11}^3 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= \frac{\partial^3 \mathbf{f}(v^1+t v^1, v^2)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = 6 (v_1^1)^3 \\ (\Delta_{21}^3 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= \frac{\partial^3 \mathbf{f}(v^1+t v^2, v^2)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = 6 (v_1^2)^3.\end{aligned}$$

On a les développements en série de Taylor :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(v^1+t v^1, v^2) &= \mathbf{f}(v^1, v^2) + t (\Delta_{11} \mathbf{f})(v^1, v^2) + \frac{t^2}{2} (\Delta_{11}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) + \frac{t^3}{6} (\Delta_{11}^3 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ \mathbf{f}(v^1, v^2+t v^1) &= \mathbf{f}(v^1, v^2) + t (\Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) + \frac{t^2}{2} (\Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ \mathbf{f}(v^1+t v^2, v^2) &= \mathbf{f}(v^1, v^2) + t (\Delta_{21} \mathbf{f})(v^1, v^2) + \frac{t^2}{2} (\Delta_{21}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) + \frac{t^3}{6} (\Delta_{21}^3 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ \mathbf{f}(v^1, v^2+t v^2) &= \mathbf{f}(v^1, v^2) + t (\Delta_{22} \mathbf{f})(v^1, v^2) + \frac{t^2}{2} (\Delta_{22}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2)\end{aligned}$$

**Polarisation totale d'une fonction polynomiale homogène (cf. ci-après)**

Soit  $f \in k[V]_d$  et  $(v^0, v^1, \dots, v^d) \in V^{d+1}$ . Considérons  $\mathbf{f} \in k[V^{d+1}]$  telle que  $\mathbf{f}(v^0, v^1, \dots, v^d) \triangleq f(v^0)$ .

$\mathcal{P}f$  la polarisation totale de  $f$ , telle que  $\mathcal{P}f \in k[V^d]_{(1, \dots, 1)}$  est, par définition, donnée par :

$$(\mathcal{P}f)(v^1, \dots, v^d) = (\Delta_{d0} \dots \Delta_{20} \Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, \dots, v^d) \quad [51]^{210}.$$

**Exemple :  $d = 2$  et  $n = 2$**

$$f \in k[V]_2 \text{ et } f(v^0) = c_{20} (v_1^0)^2 + 2c_{11} v_1^0 v_2^0 + c_{02} (v_2^0)^2.$$

$$\mathbf{f} \in k[V^3] \text{ et } \mathbf{f}(v^0, v^1, v^2) = f(v^0)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2) &= v_1^1 \frac{\partial \mathbf{f}(v^0, v^1, v^2)}{\partial v_1^0} + v_2^1 \frac{\partial \mathbf{f}(v^0, v^1, v^2)}{\partial v_2^0} = v_1^1 \frac{\partial f(v^0)}{\partial v_1^0} + v_2^1 \frac{\partial f(v^0)}{\partial v_2^0} \\ &= 2 [(c_{20} v_1^1 + c_{11} v_2^1) v_1^0 + (c_{11} v_1^1 + c_{02} v_2^1) v_2^0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{20}(\Delta_{10} \mathbf{f}))(v^0, v^1, v^2) &= v_1^2 \frac{\partial (\Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2)}{\partial v_1^0} + v_2^2 \frac{\partial (\Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2)}{\partial v_2^0} \\ &= 2 [v_1^2 (c_{20} v_1^1 + c_{11} v_2^1) + v_2^2 (c_{11} v_1^1 + c_{02} v_2^1)]. \text{ Et par conséquent :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}f)(v^1, v^2) &= (\Delta_{20} \Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2) \\ &= 2 [c_{20} v_1^1 v_1^2 + c_{11} (v_1^1 v_2^2 + v_2^1 v_1^2) + c_{02} v_2^1 v_2^2] \text{ (cf. ci-après où nous retrouvons} \\ &\text{ce résultat).} \end{aligned}$$

**Exemple :  $d = 3$  et  $n = 2$**

$$f \in k[V]_3 \text{ et } f(v^0) = c_{30} (v_1^0)^3 + 3c_{21} (v_1^0)^2 v_2^0 + 3c_{12} v_1^0 (v_2^0)^2 + c_{03} (v_2^0)^3.$$

$$\mathbf{f} \in k[V^4] \text{ et } \mathbf{f}(v^0, v^1, v^2, v^3) = f(v^0)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2, v^3) &= v_1^1 \frac{\partial \mathbf{f}(v^0, v^1, v^2, v^3)}{\partial v_1^0} + v_2^1 \frac{\partial \mathbf{f}(v^0, v^1, v^2, v^3)}{\partial v_2^0} \\ &= v_1^1 \frac{\partial f(v^0)}{\partial v_1^0} + v_2^1 \frac{\partial f(v^0)}{\partial v_2^0} \\ &= 3 [(c_{30} v_1^1 + c_{21} v_2^1) (v_1^0)^2 + 2(c_{21} v_1^1 + c_{12} v_2^1) v_1^0 v_2^0 + (c_{12} v_1^1 + c_{03} v_2^1) (v_2^0)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{20}(\Delta_{10} \mathbf{f}))(v^0, v^1, v^2, v^3) &= v_1^2 \frac{\partial (\Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2, v^3)}{\partial v_1^0} + v_2^2 \frac{\partial (\Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2, v^3)}{\partial v_2^0} \\ &= 6 \{v_1^2 [(c_{30} v_1^1 + c_{21} v_2^1) v_1^0 + (c_{21} v_1^1 + c_{12} v_2^1) v_2^0] \\ &\quad + v_2^2 [(c_{21} v_1^1 + c_{12} v_2^1) v_1^0 + (c_{12} v_1^1 + c_{03} v_2^1) v_2^0]\} \\ &= 6 \{[(c_{30} v_1^1 + c_{21} v_2^1) v_1^2 + (c_{21} v_1^1 + c_{12} v_2^1) v_2^2] v_1^0 \\ &\quad + [(c_{21} v_1^1 + c_{12} v_2^1) v_1^2 + (c_{12} v_1^1 + c_{03} v_2^1) v_2^2] v_2^0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{30}(\Delta_{20}(\Delta_{10} \mathbf{f})))(v^0, v^1, v^2, v^3) &= v_1^3 \frac{\partial (\Delta_{20}(\Delta_{10} \mathbf{f}))(v^0, v^1, v^2, v^3)}{\partial v_1^0} + v_2^3 \frac{\partial (\Delta_{20}(\Delta_{10} \mathbf{f}))(v^0, v^1, v^2, v^3)}{\partial v_2^0} \\ &= 6 \{v_1^3 [(c_{30} v_1^1 + c_{21} v_2^1) v_1^2 + (c_{21} v_1^1 + c_{12} v_2^1) v_2^2] \\ &\quad + v_2^3 [(c_{21} v_1^1 + c_{12} v_2^1) v_1^2 + (c_{12} v_1^1 + c_{03} v_2^1) v_2^2]\}. \text{ Et par conséquent :} \end{aligned}$$

---

210. p. 77



$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}f)(v^1, v^2, v^3) &= (\Delta_{30} \Delta_{20} \Delta_{10} \mathbf{f})(v^0, v^1, v^2, v^3) \\
&= 6 [c_{30} v_1^1 v_1^2 v_1^3 + c_{21} (v_1^1 v_1^2 v_2^3 + v_1^1 v_2^2 v_1^3 + v_2^1 v_1^2 v_1^3) \\
&+ c_{12} (v_1^1 v_2^2 v_2^3 + v_2^1 v_1^2 v_2^3 + v_2^1 v_2^2 v_1^3) + c_{03} v_2^1 v_2^2 v_2^3] \text{ (cf. ci-après où nous retrouvons} \\
&\text{ce résultat)}.
\end{aligned}$$

### Opérateurs différentiels

On définit, plus généralement, les opérateurs différentiels :

$$\begin{array}{ccc}
k[\mathbf{V}] & \xrightarrow{\delta} & k[\mathbf{V}] \\
\mathbf{f} & \mapsto & \delta \mathbf{f}
\end{array}, \text{ avec :}$$

$$\delta \triangleq \sum_{\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^p} \mathbf{f}_{\alpha_1^1 \dots \alpha_n^p}(v^1, \dots, v^p) \frac{\partial^{\alpha_1^1 + \dots + \alpha_n^p}}{\partial (v_1^1)^{\alpha_1^1} \dots \partial (v_n^p)^{\alpha_n^p}},$$

avec  $\mathbf{f}_{\alpha_1^1 \dots \alpha_n^p} \in k[\mathbf{V}]$ ;  $\forall \alpha_1^1, \dots, \alpha_n^p \in \mathbb{N}$

L'ensemble des opérateurs différentiels  $\delta$  constitue l'anneau  $\mathcal{D}(\mathbf{V})$  des opérateurs différentiels sur  $\mathbf{V}$  qui est une sous-algèbre de  $\text{End}_k(k[\mathbf{V}])$ . Soit  $\mathcal{U}(p) \subset \mathcal{D}(\mathbf{V})$  la sous-algèbre des opérateurs différentiels sur  $\mathbf{V}$  engendrée par les opérateurs de polarisation  $\Delta_{ij}$ . On a donc :

$$\mathcal{U}(p) \subset \mathcal{D}(\mathbf{V}) \subset \text{End}_k(k[\mathbf{V}]).$$

### Opérateur de Capelli

Soit  $C_p$  l'opérateur de Capelli :

$$C_p = \begin{vmatrix} \Delta_{11} + (p-1) & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1p} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} + (p-2) & \dots & \Delta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{p1} & \Delta_{p2} & \dots & \Delta_{pp} \end{vmatrix} \text{ (le calcul doit être fait}$$

en développant les colonnes de la gauche vers la droite car les produits ne sont pas commutatifs) [51]<sup>211</sup>. On a alors le théorème de Capelli [51]<sup>212</sup> :

Si  $p > n$  :  $C_p = 0$ .

Si  $p = n$  :  $C_p = [v^1, \dots, v^n] \Omega$ , avec :

$$[v^1, \dots, v^n] \triangleq \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{vmatrix} \text{ et } \Omega \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial v_1^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v_n^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial v_n^n} \end{vmatrix} \text{ (le calcul doit être}$$

fait en développant les colonnes de la gauche vers la droite car les produits ne sont pas commutatifs).

211. p. 97

212. p. 98 et suivantes pour la démonstration

Si  $p < n$  :

$$C_p = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} v_{j_1}^1 & \dots & v_{j_1}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{j_p}^1 & \dots & v_{j_p}^p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial v_{j_1}^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial v_{j_1}^p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v_{j_p}^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial v_{j_p}^p} \end{vmatrix} \quad (\text{le calcul doit être fait})$$

en développant les colonnes de la gauche vers la droite car les produits ne sont pas commutatifs).

Nous démontrons le théorème de Capelli ci-après dans le cas particulier  $p = n = 2$ .

### 6.1.1 Cas où $p = 1$

On a  $\mathbf{V} = V$  et  $\mathbf{f}$  se note  $f$ . On supprime, pour simplifier les notations, l'indice 1 supérieur et on pose  $\Delta = \Delta_{11}$ .

L'opérateur de polarisation est :

$$\Delta \triangleq \sum_{\nu=1}^n v_{\nu} \frac{\partial}{\partial v_{\nu}},$$

$$\text{et } \Delta^k \triangleq \sum_{q_1 + \dots + q_n = k} \frac{k!}{q_1! \dots q_n!} (v_1)^{q_1} \dots (v_n)^{q_n} \frac{\partial^k}{\partial (v_1)^{q_1} \dots \partial (v_n)^{q_n}}.$$

Et, plus généralement, les opérateurs différentiels :

$$\delta \triangleq \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(v) \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial (v_1)^{\alpha_1} \dots \partial (v_n)^{\alpha_n}},$$

avec  $f_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \in k[V]$  ;  $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ .

L'opérateur de polarisation correspond à  $f_{10 \dots 0}(v) = v_1$ ,  $f_{01 \dots 0}(v) = v_2$ ,  $f_{00 \dots 1}(v) = v_n$ .

Alors le développement en série de Taylor donne :

$$f(v + tv) = f[(1+t)v] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\Delta^k f)(v).$$

#### Exemple : forme ternaire cubique

Cet exemple correspond à  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} f(v) = & c_{300} (v_1)^3 + 3 c_{210} (v_1)^2 v_2 + 3 c_{201} (v_1)^2 v_3 + 3 c_{120} v_1 (v_2)^2 \\ & + 6 c_{111} v_1 v_2 v_3 + 3 c_{102} v_1 (v_3)^2 + c_{030} (v_2)^3 + 3 c_{021} (v_2)^2 v_3 + 3 c_{012} v_2 (v_3)^2 \\ & + c_{003} (v_3)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v_1}(v) = & 3 [c_{300} (v_1)^2 + 2 c_{210} v_1 v_2 + 2 c_{201} v_1 v_3 + c_{120} (v_2)^2 + 2 c_{111} v_2 v_3 \\ & + c_{102} (v_3)^2] \\ \frac{\partial f}{\partial v_2}(v) = & 3 [c_{210} (v_1)^2 + 2 c_{120} v_1 v_2 + 2 c_{111} v_1 v_3 + c_{030} (v_2)^2 + 2 c_{021} v_2 v_3 \\ & + c_{012} (v_3)^2] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_3}(v) = 3 [c_{210} (v_1)^2 + 2 c_{111} v_1 v_2 + 2 c_{102} v_1 v_3 + c_{021} (v_2)^2 + 2 c_{012} v_2 v_3 + c_{003} (v_3)^2]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_1^2}(v) = 6 (c_{300} v_1 + c_{210} v_2 + c_{201} v_3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2}(v) = 6 (c_{210} v_1 + c_{120} v_2 + c_{111} v_3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_3}(v) = 6 (c_{201} v_1 + c_{111} v_2 + c_{102} v_3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_2^2}(v) = 6 (c_{120} v_1 + c_{030} v_2 + c_{021} v_3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_2 \partial v_3}(v) = 6 (c_{111} v_1 + c_{021} v_2 + c_{012} v_3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_3^2}(v) = 6 (c_{102} v_1 + c_{012} v_2 + c_{003} v_3)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_1^3}(v) = 6 c_{300}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_1^2 \partial v_2}(v) = 6 c_{210}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_1^2 \partial v_3}(v) = 6 c_{201}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_1 \partial v_2^2}(v) = 6 c_{120}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3}(v) = 6 c_{111}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_1 \partial v_3^2}(v) = 6 c_{102}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_2^3}(v) = 6 c_{030}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_2^2 \partial v_3}(v) = 6 c_{021}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_2 \partial v_3^2}(v) = 6 c_{012}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial v_3^3}(v) = 6 c_{003}$$

Toutes les autres dérivées sont nulles.

$$\Delta^1 = \Delta = v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial v_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial v_3}$$

$$\Delta^2 = v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_1)^2} + 2 v_1 v_2 \frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2} + 2 v_1 v_3 \frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_3} + v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_2)^2} + 2 v_2 v_3 \frac{\partial^2}{\partial v_2 \partial v_3} + v_3^2 \frac{\partial^2}{\partial (v_3)^2}$$

$$\Delta^3 = v_1^3 \frac{\partial^3}{\partial (v_1)^3} + 3 v_1^2 v_2 \frac{\partial^3}{\partial (v_1)^2 \partial v_2} + 3 v_1^2 v_3 \frac{\partial^3}{\partial (v_1)^2 \partial v_3} + 3 v_1 v_2^2 \frac{\partial^3}{\partial v_1 \partial (v_2)^2} + 6 v_1 v_2 v_3 \frac{\partial^3}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} + 3 v_1 v_3^2 \frac{\partial^3}{\partial v_1 \partial (v_3)^2} + v_2^3 \frac{\partial^3}{\partial (v_2)^3} + 3 v_2^2 v_3 \frac{\partial^3}{\partial (v_2)^2 \partial v_3} + 3 v_2 v_3^2 \frac{\partial^3}{\partial v_2 \partial (v_3)^2} + v_3^3 \frac{\partial^3}{\partial (v_3)^3}.$$

$$(\Delta f)(v) = 3 f(v)$$

$$(\Delta^2 f)(v) = 6 f(v)$$

$$(\Delta^3 f)(v) = 6 f(v).$$

Et on a bien :

$$f[(1+t)v] = (1+t)^3 f(v) = f(v) + \frac{t}{1!} (\Delta f)(v) + \frac{t^2}{2!} (\Delta^2 f)(v) + \frac{t^3}{3!} (\Delta^3 f)(v).$$

### 6.1.2 Cas où $n = 2$ et $p = 2$

Les opérateurs de polarisation sont :

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= v_1^1 \frac{\partial}{\partial v_1^1} + v_2^1 \frac{\partial}{\partial v_2^1}, \quad \Delta_{12} = v_1^1 \frac{\partial}{\partial v_1^2} + v_2^1 \frac{\partial}{\partial v_2^2}, \\ \Delta_{21} &= v_1^2 \frac{\partial}{\partial v_1^1} + v_2^2 \frac{\partial}{\partial v_2^1}, \quad \Delta_{22} = v_1^2 \frac{\partial}{\partial v_1^2} + v_2^2 \frac{\partial}{\partial v_2^2}.\end{aligned}$$

L'opérateur de Capelli est :

$$C_2 \triangleq \begin{vmatrix} \Delta_{11} + 1 & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{vmatrix} = (\Delta_{11} + 1) \Delta_{22} - \Delta_{21} \Delta_{12}. \text{ On a :}$$

$$[v^1, v^2] \triangleq \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix} = v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2 \text{ et}$$

$$\Omega \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1^1} & \frac{\partial}{\partial v_1^2} \\ \frac{\partial}{\partial v_2^1} & \frac{\partial}{\partial v_2^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial v_1^1} \frac{\partial}{\partial v_2^2} - \frac{\partial}{\partial v_2^1} \frac{\partial}{\partial v_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial v_1^1 \partial v_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial v_2^1 \partial v_1^2}.$$

On a les propriétés suivantes :

- $\Delta_{21} [v^1, v^2] = [v^1, v^2] \Delta_{21}$  [51]<sup>213</sup>.

**Démonstration**

$$\begin{aligned}\Delta_{21} ([v^1, v^2] \mathbf{f}) &= v_1^2 \frac{\partial}{\partial v_1^1} [(v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \mathbf{f}] + v_2^2 \frac{\partial}{\partial v_2^1} [(v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \mathbf{f}] \\ &= v_1^2 [v_2^2 \mathbf{f} + (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}] + v_2^2 [-v_1^2 \mathbf{f} + (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^1}] \\ &= (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) [(v_1^2 \frac{\partial}{\partial v_1^1} + v_2^2 \frac{\partial}{\partial v_2^1}) \mathbf{f}] = [v^1, v^2] (\Delta_{21} \mathbf{f}) \text{ QED.}\end{aligned}$$

- $\Delta_{11} [v^1, v^2] = [v^1, v^2] (\Delta_{11} + 1)$  [51]<sup>214</sup>.

**Démonstration**

$$\begin{aligned}\Delta_{11} ([v^1, v^2] \mathbf{f}) &= v_1^1 \frac{\partial}{\partial v_1^1} [(v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \mathbf{f}] + v_2^1 \frac{\partial}{\partial v_2^1} [(v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \mathbf{f}] \\ &= v_1^1 [v_2^2 \mathbf{f} + (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}] + v_2^1 [-v_1^2 \mathbf{f} + (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^1}] \\ &= (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) (\Delta_{11} \mathbf{f} + \mathbf{f}) = [v^1, v^2] [(\Delta_{11} + 1) \mathbf{f}] \text{ QED.}\end{aligned}$$

- $\Delta_{12} \Omega = \Omega \Delta_{12}$  [51]<sup>215</sup>.

**Démonstration**

$$\begin{aligned}\Delta_{12} (\Omega \mathbf{f}) &= v_1^1 \frac{\partial}{\partial v_1^2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial v_2^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_2^1 \partial v_1^2} \right) + v_2^1 \frac{\partial}{\partial v_2^2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial v_2^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_2^1 \partial v_1^2} \right) \\ &= v_1^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial v_1^2 \partial v_2^2} - \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_2^1 \partial (v_1^2)^2} \right) + v_2^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial (v_2^2)^2} - \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_2^1 \partial v_1^2 \partial v_2^2} \right).\end{aligned}$$

---

213. p. 94 Exercice 1.a

214. p. 94 Exercice 1.a

215. p. 94 Exercice 1.b

$$\begin{aligned}
\text{Et } \Omega(\Delta_{12} \mathbf{f}) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial v_1^1 \partial v_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial v_2^1 \partial v_1^2} \right) \left( v_1^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^2} + v_2^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial v_1^1} \left( v_1^1 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_1^2 \partial v_2^2} + v_2^1 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial (v_2^2)^2} \right) - \frac{\partial}{\partial v_2^1} \left( v_1^1 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial (v_1^2)^2} + v_2^1 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v_1^2 \partial v_2^2} \right) \\
&= v_1^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial v_1^2 \partial v_2^2} - \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_2^1 \partial (v_1^2)^2} \right) + v_2^1 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_1^1 \partial (v_2^2)^2} - \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial v_2^1 \partial v_1^2 \partial v_2^2} \right)
\end{aligned}$$

Donc  $\Delta_{12}(\Omega \mathbf{f}) = \Omega(\Delta_{12} \mathbf{f})$  QED.

- $[v^1, v^2] \Omega = (\Delta_{11} + 1) \Delta_{22} - \Delta_{21} \Delta_{12}$ ; c'est le théorème de Capelli [51]<sup>216</sup>.

### Démonstration

$$\begin{aligned}
(\Delta_{11} + 1) \Delta_{22} - \Delta_{21} \Delta_{12} &= \left( v_1^1 \frac{\partial}{\partial v_1^1} + v_2^1 \frac{\partial}{\partial v_2^1} + 1 \right) \left( v_1^2 \frac{\partial}{\partial v_1^2} + v_2^2 \frac{\partial}{\partial v_2^2} \right) \\
&- \left( v_1^2 \frac{\partial}{\partial v_1^1} + v_2^2 \frac{\partial}{\partial v_2^1} \right) \left( v_1^1 \frac{\partial}{\partial v_1^2} + v_2^1 \frac{\partial}{\partial v_2^2} \right) \\
&= v_1^1 \left( v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial v_1^1 \partial v_1^2} + v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial v_1^1 \partial v_2^2} \right) + v_2^1 \left( v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial v_2^1 \partial v_1^2} + v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial v_2^1 \partial v_2^2} \right) \\
&- v_1^2 \left( \frac{\partial}{\partial v_1^1} + v_1^1 \frac{\partial^2}{\partial v_1^1 \partial v_1^2} + v_2^1 \frac{\partial^2}{\partial v_1^1 \partial v_2^2} \right) - v_2^2 \left( \frac{\partial}{\partial v_2^1} + v_1^1 \frac{\partial^2}{\partial v_2^1 \partial v_1^2} + v_2^1 \frac{\partial^2}{\partial v_2^1 \partial v_2^2} \right) \\
&+ v_1^2 \frac{\partial}{\partial v_1^1} + v_2^2 \frac{\partial}{\partial v_2^1} = (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial v_1^1 \partial v_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial v_2^1 \partial v_1^2} \right) = [v^1, v^2] \Omega \text{ QED.}
\end{aligned}$$

Et, plus généralement, les opérateurs différentiels :

$$\delta \triangleq \sum_{\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2} \mathbf{f}_{\alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_1^2 \alpha_2^2}(v^1, v^2) \frac{\partial^{\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\partial (v_1^1)^{\alpha_1^1} \partial (v_2^1)^{\alpha_2^1} \partial (v_1^2)^{\alpha_1^2} \partial (v_2^2)^{\alpha_2^2}},$$

avec  $\mathbf{f}_{\alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_1^2 \alpha_2^2} \in k[\mathbf{V}]$ ;  $\forall \alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2 \in \mathbb{N}$ .

**Remarque** : les 6 opérateurs  $[v^1, v^2]$ ,  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{21}$ ,  $\Delta_{22}$  et  $\Omega$  sont des opérateurs différentiels :

- $[v^1, v^2]$  avec  $\mathbf{f}_{0000}(v^1, v^2) = v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2$ .
- $\Delta_{11}$  avec  $\mathbf{f}_{1000}(v^1, v^2) = v_1^1$  et  $\mathbf{f}_{0100}(v^1, v^2) = v_2^1$ .
- $\Delta_{12}$  avec  $\mathbf{f}_{0010}(v^1, v^2) = v_1^1$  et  $\mathbf{f}_{0001}(v^1, v^2) = v_2^1$ .
- $\Delta_{21}$  avec  $\mathbf{f}_{1000}(v^1, v^2) = v_1^2$  et  $\mathbf{f}_{0100}(v^1, v^2) = v_2^2$ .
- $\Delta_{22}$  avec  $\mathbf{f}_{0010}(v^1, v^2) = v_1^2$  et  $\mathbf{f}_{0001}(v^1, v^2) = v_2^2$ .
- $\Omega$  avec  $\mathbf{f}_{1001}(v^1, v^2) = 1$  et  $\mathbf{f}_{0110}(v^1, v^2) = -1$ .

## 6.2 Polarisation d'une fonction polynomiale multi-homogène

Supposons que la fonction polynomiale  $\mathbf{f}(v^1, \dots, v^p)$  est multi-homogène de degrés  $(d_1, \dots, d_p)$  i.e. telle que :

$$\mathbf{f}(t_1 v^1, \dots, t_p v^p) = t_1^{d_1} \dots t_p^{d_p} \mathbf{f}(v^1, \dots, v^p); \forall (t_1, \dots, t_p) \in k^p.$$

---

216. p. 94 éq (2)

Alors on note  $\mathbf{f} \in k[\mathbf{V}]_{(d_1, \dots, d_p)}$  et on remarque que  $\mathbf{f}$  est de degré (total)  $d = d_1 + \dots + d_p$ .

On a alors le développement de Capelli-Deruyts ou de Gordan-Capelli [51]<sup>217</sup> :

$\mathbf{f} = \sum A_i B_i \mathbf{f}$  où  $A_i \in \mathcal{U}(p)$ ,  $B_i \in \mathcal{U}(p)$  et  $B_i \mathbf{f} \in PC$  où  $PC$  est la sous-algèbre engendrée par tous les mineurs d'ordre  $k$  extraits des  $k$  premières colonnes de la matrice :

$$\begin{bmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{bmatrix}.$$

### 6.2.1 Cas où $p = 1$

On a vu que  $\mathbf{V} = V$  et que  $\mathbf{f}$  se note  $f$ . Soit  $f \in k[V]_d$  une fonction polynomiale homogène de degré  $d$  :

$$f(v) = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n = d} \frac{d!}{\nu_1! \dots \nu_n!} c_{\nu_1 \dots \nu_n} (v_1)^{\nu_1} \dots (v_n)^{\nu_n}.$$

On a  $f(tv) = t^d f(v)$  ;  $\forall t \in k$  ;  $\forall v \in V$ .

Soit  $v = t_1 v^1 + \dots + t_d v^d$ , avec  $v^1, \dots, v^d \in V$  et  $t_1, \dots, t_d \in k$  :

$f(t_1 v^1 + \dots + t_d v^d) = \sum_{s_1 + \dots + s_d = d} t_1^{s_1} \dots t_d^{s_d} \mathbf{f}_{s_1 \dots s_d}(v^1, \dots, v^d)$ , avec  $\mathbf{f}_{s_1 \dots s_d} \in k[V^d]_{(s_1, \dots, s_d)}$  multi-homogène de degrés  $(s_1, \dots, s_d)$  [51]<sup>218</sup>.

Soit  $\mathcal{P}f \triangleq \mathbf{f}_{1 \dots 1}$ . Alors  $\mathcal{P}f$  est la polarisation totale de  $f$ . On a :

$$(\mathcal{P}f)(v, \dots, v) = d! f(v) \text{ [51]}^{219}.$$

De plus On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{d0 \dots 0}(v^1, 0, \dots, 0) &= f(v^1), \\ \mathbf{f}_{0d \dots 0}(0, v^2, \dots, 0) &= f(v^2), \\ &\vdots \\ \mathbf{f}_{00 \dots d}(0, 0, \dots, v^d) &= f(v^d), \end{aligned}$$

**Polaires de  $f$**  [32]<sup>220</sup>

Soient  $u, w \in V$  et  $t \in k$ , alors :

217. pp. 87-92 § 8 pp. 97-107 §9.3

218. p. 34 éq (\*)

219. p. 34

220. p. 140 partie E "Polars"

$$f(tu + w) = \sum_{i=0}^d C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) t^i \quad [32]^{221}.$$

$\bar{\mathbf{f}}_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  polaire de  $f$  et on a :

$$\bar{\mathbf{f}}_i(u, w) = \frac{(d-i)!}{d!} \left( \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial w_j} \right)^i f(w) \quad [32]^{222}$$

$\bar{\mathbf{f}}_i$  est bi-homogène de degré  $i$  en  $u$  et  $d - i$  en  $w$  et on a, en particulier :

$$\bar{\mathbf{f}}_0(u, w) = f(w) \text{ et :}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_d(u, w) = f(u).$$

**Remarque :** [7]<sup>223</sup> note  $f^{(i)}(u, w) \triangleq C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w)$  qu'il appelle les polarisations de  $f$ .

**Exemple : forme linéaire. On a  $d = 1$**

$$f \in k[V]_1 :$$

$$f(v) = c_{1\dots 0} v_1 + \dots + c_{0\dots 1} v_n.$$

$$\text{On a } \mathbf{f}_1 = f \in k[V]_1.$$

$$f(tu + w) = \sum_{i=0}^1 C_1^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) t^i = \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) + \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) t.$$

Et comme  $f(tu + w) = f(tu) + f(w) = t f(u) + f(w)$  on a bien :

$$\bar{\mathbf{f}}_0(u, w) = f(w) \text{ et :}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_1(u, w) = f(u).$$

**Exemple : forme quadratique. On a  $d = 2$**

$$f \in k[V]_2 :$$

$$f(v) = c_{20\dots 0} (v_1)^2 + 2 c_{11\dots 0} v_1 v_2 + \dots + c_{02\dots 0} (v_2)^2 + \dots + c_{00\dots 2} (v_n)^2.$$

$$\begin{aligned} f(t_1 v^1 + t_2 v^2) &= \sum_{s_1+s_2=2} t_1^{s_1} t_2^{s_2} \mathbf{f}_{s_1 s_2}(v^1, v^2) \\ &= t_1^2 \mathbf{f}_{20}(v^1, v^2) + t_1 t_2 \mathbf{f}_{11}(v^1, v^2) + t_2^2 \mathbf{f}_{02}(v^1, v^2). \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{20}(v^1, v^2) = f(v^1)$$

$$\mathbf{f}_{02}(v^1, v^2) = f(v^2)$$

$$f(tu + w) = \sum_{i=0}^2 C_2^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) t^i = \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) + 2 \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) t + \bar{\mathbf{f}}_2(u, w) t^2$$

$$\bar{\mathbf{f}}_0(u, w) = \mathbf{f}_{02}(u, w) = f(w)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_2(u, w) = \mathbf{f}_{20}(u, w) = f(u)$$

$$2 \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) = \mathbf{f}_{11}(u, w) = (\mathcal{P}f)(u, w)$$

---

221. p. 140 éq. (2.12)

222. p. 140 éq. (2.13)

223. p. 2

- $n = 1$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_2 (v_1)^2 \\ (\mathcal{P}f)(v^1, v^2) &= \mathbf{f}_{11}(v^1, v^2) = 2 c_2 v_1^1 v_1^2 \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= c_2 u_1 w_1. \end{aligned}$$

- $n = 2$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{20} (v_1)^2 + 2 c_{11} v_1 v_2 + c_{02} (v_2)^2 \\ (\mathcal{P}f)(v^1, v^2) &= \mathbf{f}_{11}(v^1, v^2) \\ &= 2 [c_{20} v_1^1 v_1^2 + c_{11} (v_1^1 v_2^2 + v_2^1 v_1^2) + c_{02} v_2^1 v_2^2] \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= c_{20} u_1 w_1 + c_{11} (u_1 w_2 + u_2 w_1) + c_{02} u_2 w_2 \end{aligned}$$

- $n = 3$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{200} (v_1)^2 + 2 c_{110} v_1 v_2 + 2 c_{101} v_1 v_3 + c_{020} (v_2)^2 + 2 c_{011} v_2 v_3 + c_{002} (v_3)^2 \\ (\mathcal{P}f)(v^1, v^2) &= \mathbf{f}_{11}(v^1, v^2) \\ &= 2 [c_{200} v_1^1 v_1^2 + c_{110} (v_1^1 v_2^2 + v_2^1 v_1^2) + c_{101} (v_1^1 v_3^2 + v_3^1 v_1^2) + c_{020} v_2^1 v_2^2 \\ &\quad + c_{011} (v_2^1 v_3^2 + v_3^1 v_2^2) + c_{002} v_3^1 v_3^2] \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= c_{200} u_1 w_1 + c_{110} (u_1 w_2 + u_2 w_1) + c_{101} (u_1 w_3 + u_3 w_1) + c_{020} u_2 w_2 \\ &\quad + c_{011} (u_2 w_3 + u_3 w_2) + c_{002} u_3 w_3 \end{aligned}$$

**Exemple : forme cubique. On a  $d = 3$**

$f \in k[V]_3 :$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{300\dots 0} (v_1)^3 + 3 c_{210\dots 0} (v_1)^2 v_2 + 3 c_{201\dots 0} (v_1)^2 v_3 + \dots + 3 c_{200\dots 1} (v_1)^2 v_n \\ &\quad + 3 c_{120\dots 0} v_1 (v_2)^2 + 6 c_{111\dots 0} v_1 v_2 v_3 + \dots + 3 c_{102\dots 0} v_1 (v_3)^2 + \dots + 3 c_{100\dots 2} v_1 (v_n)^2 \\ &\quad + c_{030\dots 0} (v_2)^3 + 3 c_{021\dots 0} (v_2)^2 v_3 + \dots + 3 c_{020\dots 1} (v_2)^2 v_n + \dots + 3 c_{010\dots 2} v_2 (v_n)^2 \\ &\quad + c_{003\dots 0} (v_3)^3 + \dots + c_{000\dots 3} (v_n)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t_1 v^1 + t_2 v^2 + t_3 v^3) &= \sum_{s_1+s_2+s_3=3} t_1^{s_1} t_2^{s_2} t_3^{s_3} \mathbf{f}_{s_1 s_2 s_3}(v^1, v^2, v^3) \\ &= t_1^3 \mathbf{f}_{300}(v^1, v^2, v^3) + t_1^2 t_2 \mathbf{f}_{210}(v^1, v^2, v^3) + t_1^2 t_3 \mathbf{f}_{201}(v^1, v^2, v^3) + t_1 t_2^2 \mathbf{f}_{120}(v^1, v^2, v^3) \\ &\quad + t_1 t_2 t_3 \mathbf{f}_{111}(v^1, v^2, v^3) + t_1 t_3^2 \mathbf{f}_{102}(v^1, v^2, v^3) + t_2^3 \mathbf{f}_{030}(v^1, v^2, v^3) + t_2^2 t_3 \mathbf{f}_{021}(v^1, v^2, v^3) \\ &\quad + t_2 t_3^2 \mathbf{f}_{012}(v^1, v^2, v^3) + t_3^3 \mathbf{f}_{003}(v^1, v^2, v^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{300}(v^1, v^2, v^3) &= f(v^1) \\ \mathbf{f}_{030}(v^1, v^2, v^3) &= f(v^2) \\ \mathbf{f}_{003}(v^1, v^2, v^3) &= f(v^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(tu + w) &= \sum_{i=0}^3 C_3^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) t^i \\ &= \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) + 3 \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) t + 3 \bar{\mathbf{f}}_2(u, w) t^2 + \bar{\mathbf{f}}_3(u, w) t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) &= f(w) \\ \bar{\mathbf{f}}_3(u, w) &= f(u) \end{aligned}$$



•  $n = 1$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_3 (v_1)^3 \\ (\mathcal{P}f)(v^1, v^2, v^3) &= \mathbf{f}_{111}(v^1, v^2, v^3) = 6 c_3 v_1^1 v_1^2 v_1^3 \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= c_3 u_1 (w_1)^2. \\ \bar{\mathbf{f}}_2(u, w) &= c_3 (u_1)^2 w_1. \end{aligned}$$

•  $n = 2$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{30} (v_1)^3 + 3 c_{21} (v_1)^2 v_2 + 3 c_{12} v_1 (v_2)^2 + c_{03} (v_2)^3 \\ (\mathcal{P}f)(v^1, v^2, v^3) &= \mathbf{f}_{111}(v^1, v^2, v^3) \\ &= 6 [c_{30} v_1^1 v_1^2 v_1^3 + c_{21} (v_1^1 v_1^2 v_2^3 + v_1^1 v_2^2 v_1^3 + v_2^1 v_1^2 v_1^3) \\ &+ c_{12} (v_1^1 v_2^2 v_2^3 + v_2^1 v_1^2 v_2^3 + v_2^1 v_2^2 v_1^3) + c_{03} v_2^1 v_2^2 v_2^3] \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= c_{30} u_1 (w_1)^2 + c_{21} w_1 (2 u_1 w_2 + u_2 w_1) + c_{12} w_2 (u_1 w_2 + 2 u_2 w_1) + c_{03} u_2 (w_2)^2 \\ \bar{\mathbf{f}}_2(u, w) &= c_{30} (u_1)^2 w_1 + c_{21} u_1 (u_1 w_2 + 2 u_2 w_1) + c_{12} u_2 (2 u_1 w_2 + u_2 w_1) + c_{03} u_2 w_2 \end{aligned}$$

•  $n = 3$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{300} (v_1)^3 + 3 c_{210} (v_1)^2 v_2 + 3 c_{201} (v_1)^2 v_3 + 3 c_{120} v_1 (v_2)^2 + 6 c_{111} v_1 v_2 v_3 \\ &+ 3 c_{102} v_1 (v_3)^2 + c_{030} (v_2)^3 + 3 c_{021} (v_2)^2 v_3 + 3 c_{012} v_2 (v_3)^2 + c_{003} (v_3)^3 \\ (\mathcal{P}f)(v^1, v^2, v^3) &= \mathbf{f}_{111}(v^1, v^2, v^3) \\ &= 6 \{c_{300} v_1^1 v_1^2 v_1^3 + c_{210} (v_1^1 v_1^2 v_2^3 + v_1^1 v_2^2 v_1^3 + v_2^1 v_1^2 v_1^3) \\ &+ c_{201} (v_1^1 v_1^2 v_3^3 + v_1^1 v_3^2 v_1^3 + v_3^1 v_1^2 v_1^3) + c_{120} (v_1^1 v_2^2 v_2^3 + v_2^1 v_1^2 v_2^3 + v_2^1 v_2^2 v_1^3) \\ &+ c_{111} [(v_1^1 v_2^2 + v_2^1 v_1^2) v_3^3 + (v_1^1 v_3^2 + v_2^1 v_1^3) v_2^3 + (v_2^1 v_2^3 + v_2^2 v_1^3) v_1^3] \\ &+ c_{102} (v_1^1 v_3^2 v_3^3 + v_3^1 v_2^2 v_3^3 + v_3^1 v_3^2 v_1^3) + c_{030} v_2^1 v_2^2 v_2^3 \\ &+ c_{021} (v_2^1 v_2^2 v_3^3 + v_2^1 v_3^2 v_2^3 + v_3^1 v_2^2 v_2^3) + c_{012} (v_2^1 v_3^2 v_3^3 + v_3^1 v_2^2 v_3^3 + v_3^1 v_3^2 v_2^3) \\ &+ c_{003} v_3^1 v_3^2 v_3^3\} \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= c_{300} u_1 (w_1)^2 + c_{210} (2 u_1 w_2 + u_2 w_1) w_1 + c_{201} (2 u_1 w_3 + u_3 w_1) w_1 \\ &+ c_{120} (u_1 w_2 + 2 u_2 w_1) w_2 + 2 c_{111} (u_1 w_2 w_3 + u_2 w_1 w_3 + u_3 w_1 w_2) \\ &+ c_{102} (u_1 w_3 + 2 u_3 w_1) w_3 + c_{030} u_2 (w_2)^2 + c_{021} (2 u_2 w_3 + u_3 w_2) w_2 \\ &+ c_{012} (u_2 w_3 + 2 u_3 w_2) w_3 + c_{003} u_3 (w_3)^2 \\ \bar{\mathbf{f}}_2(u, w) &= c_{300} (u_1)^2 w_1 + c_{210} (u_1 w_2 + 2 u_2 w_1) u_1 + c_{201} (u_1 w_3 + 2 u_3 w_1) u_1 \\ &+ c_{120} (2 u_1 w_2 + u_2 w_1) u_2 + 2 c_{111} (u_1 u_2 w_3 + u_1 u_3 w_2 + u_2 u_3 w_1) \\ &+ c_{102} (2 u_1 w_3 + u_3 w_1) u_3 + c_{030} (u_2)^2 w_2 + c_{021} (u_2 w_3 + 2 u_3 w_2) u_2 \\ &+ c_{012} (2 u_2 w_3 + u_3 w_2) u_3 + c_{003} (u_3)^2 w_3 \end{aligned}$$

**Multiplication verticale de Young des formes homogènes [32]<sup>224</sup>**

Soient  $f, g \in k[V]_d$ . Alors on définit leur multiplication verticale de Young, notée  $f \odot g$ , par :

$$(f \odot g)(u, v) \triangleq \frac{1}{d+1} \sum_{i=0}^d (-1)^i C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(v, u) \bar{\mathbf{g}}_i(u, v) \quad [32]^{225}.$$

**Exemple : formes linéaires. On a  $d = 1$**

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{10\dots 0} v_1 + c_{01\dots 0} v_2 + \dots + c_{00\dots 1} v_n \text{ et} \\ g(v) &= c'_{10\dots 0} v_1 + c'_{01\dots 0} v_2 + \dots + c'_{00\dots 1} v_n. \text{ Alors :} \\ (f \odot g)(u, v) &= \frac{1}{2} [f(u_1, u_2, \dots, u_n) g(v_1, v_2, \dots, v_n) - f(v_1, v_2, \dots, v_n) g(u_1, u_2, \dots, u_n)] = 0. \end{aligned}$$

**Exemple : formes quadratiques. On a  $d = 2$**

$$(f \odot g)(u, v) = \frac{1}{3} [f(u) g(v) + f(v) g(u) - 2 \bar{\mathbf{f}}_1(v, u) \bar{\mathbf{g}}_1(u, v)].$$

•  $n = 1$

$$f(v) = c_2 (v_1)^2 \text{ et } g(v) = c'_2 (v_1)^2. \text{ Alors :}$$

$$(f \odot g)(u, v) = 0.$$

•  $n = 2$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{20} (v_1)^2 + 2 c_{11} v_1 v_2 + c_{02} (v_2)^2 \text{ et} \\ g(v) &= c'_{20} (v_1)^2 + 2 c'_{11} v_1 v_2 + c'_{02} (v_2)^2. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

$$(f \odot g)(u, v) = \frac{1}{3} (c_{20} c'_{02} - 2 c_{11} c'_{11} + c_{02} c'_{20}) (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2.$$

**Remarque :** si  $f(v) = l(v) h(v)$  et  $g(v) = [l(v)]^2$  avec :

$$l(v) = c_{10} v_1 + c_{01} v_2 \text{ et } h(v) = d_{10} v_1 + d_{01} v_2 \text{ on a :}$$

$$c_{20} = c_{10} d_{10}, 2 c_{11} = c_{10} d_{01} + c_{01} d_{10}, c_{02} = c_{01} d_{01} \text{ et :}$$

$$c'_{20} = (c_{10})^2, c'_{11} = c_{10} c_{01}, c'_{02} = (c_{01})^2.$$

Alors on constate que  $c_{20} c'_{02} - 2 c_{11} c'_{11} + c_{02} c'_{20} = 0$  et donc  $f \odot g = 0$ .

•  $n = 3$

$$\begin{aligned} f(v) &= c_{200} (v_1)^2 + 2 c_{110} v_1 v_2 + 2 c_{101} v_1 v_3 + c_{020} (v_2)^2 \\ &+ 2 c_{011} v_2 v_3 + c_{002} (v_3)^2 \text{ et } g(v) = c'_{200} (v_1)^2 + 2 c'_{110} v_1 v_2 \\ &+ 2 c'_{101} v_1 v_3 + c'_{020} (v_2)^2 + 2 c'_{011} v_2 v_3 + c'_{002} (v_3)^2. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

224. pp; 141-144 partie G “The vertical Young multiplication”

225. p. 141 éq. (2.18)

$$\begin{aligned}
& (f \odot g)(u, v) \\
&= \frac{1}{3} (c_{200} c'_{020} - 2 c_{110} c'_{110} + c_{020} c'_{200}) (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\
&+ \frac{1}{3} (c_{020} c'_{002} - 2 c_{011} c'_{011} + c_{002} c'_{020}) (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 \\
&+ \frac{1}{3} (c_{002} c'_{200} - 2 c_{101} c'_{101} + c_{200} c'_{002}) (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 \\
&+ \frac{2}{3} (c_{200} c'_{011} - c_{110} c'_{101} - c_{101} c'_{110} + c_{011} c'_{200}) (u_1 v_2 - u_2 v_1) (u_1 v_3 - u_3 v_1) \\
&+ \frac{2}{3} (c_{020} c'_{101} - c_{011} c'_{110} - c_{110} c'_{011} + c_{101} c'_{020}) (u_2 v_3 - u_3 v_2) (u_2 v_1 - u_1 v_2) \\
&+ \frac{2}{3} (c_{002} c'_{110} - c_{101} c'_{011} - c_{011} c'_{101} + c_{110} c'_{002}) (u_3 v_1 - u_1 v_3) (u_3 v_2 - u_2 v_3)
\end{aligned}$$

**Remarque :** si  $f(v) = l(v) h(v)$  et  $g(v) = [l(v)]^2$  avec :

$$l(v) = c_{100} v_1 + c_{010} v_2 + c_{001} v_3 \text{ et } h(v) = d_{100} v_1 + d_{010} v_2 + d_{001} v_3 \text{ on a :}$$

$$c_{200} = c_{100} d_{100}, 2 c_{110} = c_{100} d_{010} + c_{010} d_{100}, 2 c_{101} = c_{100} d_{001} + c_{001} d_{100},$$

$$c_{020} = c_{010} d_{010}, 2 c_{011} = c_{010} d_{001} + c_{001} d_{010}, c_{002} = c_{001} d_{001} \text{ et :}$$

$$c'_{200} = (c_{100})^2, c'_{110} = c_{100} c_{010}, c'_{101} = c_{100} c_{001}, c'_{020} = (c_{010})^2,$$

$$c'_{011} = c_{010} c_{001}, c'_{002} = (c_{001})^2$$

Alors on constate que

$$\begin{aligned}
c_{200} c'_{020} - 2 c_{110} c'_{110} + c_{020} c'_{200} &= 0 \\
c_{020} c'_{002} - 2 c_{011} c'_{011} + c_{002} c'_{020} &= 0 \\
c_{002} c'_{200} - 2 c_{101} c'_{101} + c_{200} c'_{002} &= 0 \\
c_{200} c'_{011} - c_{110} c'_{101} - c_{101} c'_{110} + c_{011} c'_{200} &= 0 \\
c_{020} c'_{101} - c_{011} c'_{110} - c_{110} c'_{011} + c_{101} c'_{020} &= 0 \\
c_{002} c'_{110} - c_{101} c'_{011} - c_{011} c'_{101} + c_{110} c'_{002} &= 0 \\
\text{et donc } f \odot g &= 0.
\end{aligned}$$

**Exemple : formes cubiques. On a  $d = 3$**

$$(f \odot g)(u, v) = \frac{1}{4} [f(u) g(v) - f(v) g(u) - 3 \bar{\mathbf{f}}_1(v, u) \bar{\mathbf{g}}_1(u, v) + 3 \bar{\mathbf{f}}_2(v, u) \bar{\mathbf{g}}_2(u, v)].$$

•  $n = 1$

$$f(v) = c_3 (v_1)^3 \text{ et } g(v) = c'_3 (v_1)^3. \text{ Alors :}$$

$$(f \odot g)(u, v) = 0.$$

•  $n = 2$

$$f(v) = c_{30} (v_1)^3 + 3 c_{21} (v_1)^2 v_2 + 3 c_{12} v_1 (v_2)^2 + c_{03} (v_2)^3 \text{ et}$$

$$g(v) = c'_{30} (v_1)^3 + 3 c'_{21} (v_1)^2 v_2 + 3 c'_{12} v_1 (v_2)^2 + c'_{03} (v_2)^3. \text{ Alors, tous calculs faits :}$$

$$(f \odot g)(u, v) = \frac{1}{4} (c_{30} c'_{03} - 3 c_{21} c'_{12} + 3 c_{12} c'_{21} - c_{03} c'_{30}) (u_1 v_2 - u_2 v_1)^3.$$

**Remarque :** si  $f(v) = l(v) h(v)$  et  $g(v) = [l(v)]^3$  avec :

$l(v) = c_{10} v_1 + c_{01} v_2$  et  $h(v) = d_{20} (v_1)^2 + 2 d_{11} v_1 v_2 + d_{02} (v_2)^2$  on a :

$$c_{30} = c_{10} d_{20}, 3 c_{21} = 2 c_{10} d_{11} + c_{01} d_{20}, 3 c_{12} = c_{10} d_{02} + 2 c_{01} d_{11},$$

$$c_{03} = c_{01} d_{02} \text{ et :}$$

$$c'_{30} = (c_{10})^3, c'_{21} = (c_{10})^2 c_{01}, c'_{12} = c_{10} (c_{01})^2, c'_{03} = (c_{01})^3.$$

Alors on constate que  $c_{30} c'_{03} - 3 c_{21} c'_{12} + 3 c_{12} c'_{21} - c_{03} c'_{30} = 0$  et donc  $f \odot g = 0$ .

•  $n = 3$

Devant la complexité du calcul nous n'allons traiter que le cas des formes cubiques ternaires symétriques. On a alors :

$$f(v) = c_{300} [(v_1)^3 + (v_2)^3 + (v_3)^3]$$

$$+ 3 c_{210} [(v_1)^2 v_2 + (v_1)^2 v_3 + v_1 (v_2)^2 + v_1 (v_3)^2 + (v_2)^2 v_3 + v_2 (v_3)^2] + 6 c_{111} v_1 v_2 v_3$$

et  $g(v) = c'_{300} [(v_1)^3 + (v_2)^3 + (v_3)^3]$

$$+ 3 c'_{210} [(v_1)^2 v_2 + (v_1)^2 v_3 + v_1 (v_2)^2 + v_1 (v_3)^2 + (v_2)^2 v_3 + v_2 (v_3)^2] + 6 c'_{111} v_1 v_2 v_3.$$

Posons :

$$a(u) = (u_1)^3 + (u_2)^3 + (u_3)^3$$

$$a'(v) = (v_1)^3 + (v_2)^3 + (v_3)^3$$

$$b(u) = (u_1)^2 u_2 + (u_1)^2 u_3 + u_1 (u_2)^2 + u_1 (u_3)^2 + (u_2)^2 u_3 + u_2 (u_3)^2$$

$$b'(v) = (v_1)^2 v_2 + (v_1)^2 v_3 + v_1 (v_2)^2 + v_1 (v_3)^2 + (v_2)^2 v_3 + v_2 (v_3)^2$$

$$c(u) = u_1 u_2 u_3$$

$$c'(v) = v_1 v_2 v_3$$

$$\alpha(u, v) = u_1 (v_1)^2 + u_2 (v_2)^2 + u_3 (v_3)^2$$

$$\alpha'(u, v) = (u_1)^2 v_1 + (u_2)^2 v_2 + (u_3)^2 v_3$$

$$\beta(u, v) = u_1 [(v_2)^2 + (v_3)^2 + 2 v_1 v_2 + 2 v_1 v_3]$$

$$+ u_2 [(v_3)^2 + (v_1)^2 + 2 v_2 v_3 + 2 v_2 v_1]$$

$$+ u_3 [(v_1)^2 + (v_2)^2 + 2 v_3 v_1 + 2 v_3 v_2]$$

$$\beta'(u, v) = u_1^2 (v_2 + v_3) + 2 u_1 u_2 (v_1 + v_2) + 2 u_1 u_3 (v_1 + v_3) + u_2^2 (v_3 + v_1)$$

$$+ 2 u_2 u_3 (v_2 + v_3) + u_3^2 (v_1 + v_2)$$

$$\gamma(u, v) = u_1 v_2 v_3 + u_2 v_3 v_1 + u_3 v_1 v_2$$

$$\gamma'(u, v) = u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1.$$

On a  $a(u) c'(v) - a'(v) c(u) + \alpha(u, v) \gamma'(u, v) - \alpha'(u, v) \gamma(u, v) = 0$  et alors :

$$f(u) = a(u) c_{300} + 3 b(u) c_{210} + 6 c(u) c_{111}$$

$$f(v) = a'(v) c_{300} + 3 b'(v) c_{210} + 6 c'(v) c_{111}$$

$$g(u) = a(u) c'_{300} + 3 b(u) c'_{210} + 6 c(u) c'_{111}$$

$$g(v) = a'(v) c'_{300} + 3 b'(v) c'_{210} + 6 c'(v) c'_{111}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_1(v, u) &= \alpha'(u, v) c_{300} + \beta'(u, v) c_{210} + 2 \gamma'(u, v) c_{111} \\
\bar{\mathbf{g}}_1(u, v) &= \alpha(u, v) c'_{300} + \beta(u, v) c'_{210} + 2 \gamma(u, v) c'_{111} \\
\mathbf{f}_2(v, u) &= \alpha(u, v) c_{300} + \beta(u, v) c_{210} + 2 \gamma(u, v) c_{111} \\
\bar{\mathbf{g}}_2(u, v) &= \alpha'(u, v) c'_{300} + \beta'(u, v) c'_{210} + 2 \gamma'(u, v) c'_{111} \text{ et :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \odot g)(u, v) &= \frac{3}{4} [a(u) b'(v) - a'(v) b(u) + \alpha(u, v) \beta'(u, v) - \alpha'(u, v) \beta(u, v)] \\
&\quad (c_{300} c'_{210} - c_{210} c'_{300}) \\
&+ \frac{3}{2} \{3 [b(u) c'(v) - b'(v) c(u)] + \beta(u, v) \gamma'(u, v) - \beta'(u, v) \gamma(u, v)\} \\
&\quad (c_{210} c'_{111} - c_{111} c'_{210}).
\end{aligned}$$

### Équations de Brill

On pourra consulter [6]<sup>226</sup> [7] [32]<sup>227</sup> et [37].

Soient  $f \in k[V]_d$  et  $u, w \in V$ . Posons  $\tau \triangleq t f(w)$ . Alors :

$$\begin{aligned}
f(\tau u + w) &= \sum_{i=0}^d C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) \tau^i, \text{ soit :} \\
f(t f(w) u + w) &= \sum_{i=0}^d C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) [f(w)]^i t^i.
\end{aligned}$$

Posons  $E(t) \triangleq \frac{f(t f(w) u + w)}{f(w)} = \sum_{i=0}^d C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) [f(w)]^{i-1} t^i = \sum_{i=0}^d e_i(u, w) t^i$   
[32]<sup>228</sup>, avec :

$e_i(u, w) = C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(u, w) [f(w)]^{i-1}$  [7]<sup>229</sup> [32]<sup>230</sup>. On a, en particulier :

$$\begin{aligned}
e_0(u, w) &= C_d^0 \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) [f(w)]^{-1} = 1, \\
e_d(u, w) &= C_d^d \bar{\mathbf{f}}_d(u, w) [f(w)]^{d-1} = f(u) [f(w)]^{d-1}.
\end{aligned}$$

$e_i$  est une forme homogène un  $u, w$ , de degré  $i$  en  $u$ , de degré  $i(d-1)$  en  $w$  et de degré  $i$  en les coefficients de  $f$ .

Soit alors  $E(t) = \prod_{i=1}^d (1 + E_i t) = (1 + E_1 t) \dots (1 + E_d t)$   
 $= 1 + (E_1 + \dots + E_d) t + \dots + E_1 \dots E_d t^d$ . Alors :

$$\begin{aligned}
E_1 + \dots + E_d &= e_1(u, w) = d \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) \\
&\vdots \\
E_1 \dots E_d &= e_d(u, w) = f(u) [f(w)]^{d-1}
\end{aligned}$$

On pose  $(p_d(E))(u, w) \triangleq \sum_i^d E_i^d = E_1^d + \dots + E_d^d$   
qu'il faut calculer en fonction des  $e_i(u, w)$  ;  $i = 1, \dots, d$ .

226. pp. 110-114 § 3.4 Les équations de Brill

227. pp. 144-145 Chapitre 4 partie 2.H Brill's equations

228. p. 144

229. p. 2 où  $e_i(u, w)$  correspond à  $(-1)^i C_i(f; u; w)$  avec les notations de l'auteur

230. p. 144 éq. (2.23)

Puis on pose  $P_{f,w}(u) \triangleq (p_d(E))(u, w)$  et soit  $\bar{\mathbf{P}}_{f,wi}$  la  $i^{\text{ème}}$  polaire de  $P_{f,w}$ .

$$B_f(u, v, w) \triangleq (f \odot P_{f,w})(u, v) \\ \triangleq \frac{1}{d+1} \sum_{i=0}^d (-1)^i C_d^i \bar{\mathbf{f}}_i(v, u) \bar{\mathbf{P}}_{f,wi}(u, v) \quad [32]^{231} \text{ le covariant de Brill [7]}^{232}.$$

$B_f$  est une forme homogène en  $u, v, w$  de multi-degré  $d, d, d(d-1)$  dont les coefficients sont des formes homogènes de degré  $d+1$  en les coefficients de  $f$ .

**Théorème :** une forme  $f(u)$  est le produit de formes linéaires ssi le polynôme  $B_f(u, v, w)$  est identiquement nul.

**Démonstration :** cf. [32]<sup>233</sup>. Il s'agit du principal résultat de Brill.

**Exemple : formes linéaires. On a  $d = 1$**

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) &= f(w) \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= f(u) \\ e_0(u, w) &= 1 \\ e_1(u, w) &= f(u) \\ E_1 &= e_1(u, w) = f(u) \\ P_{f,w}(u) &= (p_1(E))(u, w) = E_1 = e_1(u, w) = f(u). \text{ Donc } P_{f,w} = f. \end{aligned}$$

$$B_f(u, v, w) = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{f}}_0(v, u) \bar{\mathbf{P}}_{f,w0}(u, v) - \bar{\mathbf{f}}_1(v, u) \bar{\mathbf{P}}_{f,w1}(u, v)] \\ = \frac{1}{2} [f(u) P_{f,w}(v) - f(v) P_{f,w}(u)] = \frac{1}{2} [f(u) f(v) - f(v) f(u)] = 0.$$

**Exemple : formes quadratiques. On a  $d = 2$**

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) &= f(w) \\ \bar{\mathbf{f}}_2(u, w) &= f(u) \\ e_0(u, w) &= 1 \\ e_1(u, w) &= 2 \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) \\ e_2(u, w) &= f(u) f(w) \\ E_1 + E_2 &= e_1(u, w) = 2 \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) \\ E_1 E_2 &= e_2(u, w) = f(u) f(w) \\ P_{f,w}(u) &= (p_2(E))(u, w) = E_1^2 + E_2^2 = [e_1(u, w)]^2 - 2 e_2(u, w) \\ &= 2 \{2 [\bar{\mathbf{f}}_1(u, w)]^2 - f(u) f(w)\} \end{aligned}$$

$$B_f(u, v, w) = \frac{1}{3} [\bar{\mathbf{f}}_0(v, u) \bar{\mathbf{P}}_{f,w0}(u, v) - 2 \bar{\mathbf{f}}_1(v, u) \bar{\mathbf{P}}_{f,w1}(u, v) \\ + \bar{\mathbf{f}}_2(v, u) \bar{\mathbf{P}}_{f,w2}(u, v)] \\ = \frac{1}{3} [f(u) P_{f,w}(v) - 2 \bar{\mathbf{f}}_1(v, u) \bar{\mathbf{P}}_{f,w1}(u, v) + f(v) P_{f,w}(u)].$$

231. p. 144 éq. (2.24)

232. p.2 mais avec les notations de l'auteur

233. pp. 144-145 Théorème 2.12

Posons  $\varphi(u, v) \triangleq f_u(u, v) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(v)}{\partial v_i} u_i$  [6]<sup>234</sup> et [32]<sup>235</sup>. Alors :

$f(u) = \varphi(u, v)$  et :

$$B_f(u, v, w) = \begin{vmatrix} \varphi(u, u) & \varphi(u, v) & \varphi(u, w) \\ \varphi(v, u) & \varphi(v, v) & \varphi(v, w) \\ \varphi(w, u) & \varphi(w, v) & \varphi(w, w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(u) & \varphi(u, v) & \varphi(u, w) \\ \varphi(v, u) & f(v) & \varphi(v, w) \\ \varphi(w, u) & \varphi(w, v) & f(w) \end{vmatrix},$$

à un facteur multiplicatif près.

•  $n = 1$

$$\begin{aligned} f(u) &= c_2 (u_1)^2 \\ \bar{f}_0(u, w) &= c_2 (w_1)^2 \\ \bar{f}_1(u, w) &= c_2 u_1 w_1 \\ \bar{f}_2(u, w) &= c_2 (u_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_0(u, w) &= 1 \\ e_1(u, w) &= 2 (c_2 w_1) u_1 \\ e_2(u, w) &= (c_2 w_1)^2 (u_1)^2. \end{aligned} \text{ On trouve :}$$

$$P_{f,w}(u) = c_2'(w) (u_1)^2, \text{ avec :}$$

$$c_2'(w) = 2 (c_2)^2 (w_1)^2.$$

On a vu, d'après la multiplication verticale de Young des formes homogènes, que :

$$B_f(u, v, w) \triangleq (f \odot P_{f,w})(u, v) = 0$$

$\varphi(u, v) = f_u(u, v) = \bar{f}_1(u, v) = c_2 u_1 v_1$  et on vérifie que :

$$\begin{vmatrix} f(u) & \varphi(u, v) & \varphi(u, w) \\ \varphi(v, u) & f(v) & \varphi(v, w) \\ \varphi(w, u) & \varphi(w, v) & f(w) \end{vmatrix} = 0.$$

•  $n = 2$

$$\begin{aligned} f(u) &= c_{20} (u_1)^2 + 2 c_{11} u_1 u_2 + c_{02} (u_2)^2 \\ \bar{f}_0(u, w) &= c_{20} (w_1)^2 + 2 c_{11} w_1 w_2 + c_{02} (w_2)^2 \\ \bar{f}_1(u, w) &= c_{20} u_1 w_1 + c_{11} (u_1 w_2 + u_2 w_1) + c_{02} u_2 w_2 \\ \bar{f}_2(u, w) &= c_{20} (u_1)^2 + 2 c_{11} u_1 u_2 + c_{02} (u_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_0(u, w) &= 1 \\ e_1(u, w) &= 2 [(c_{20} w_1 + c_{11} w_2) u_1 + (c_{11} w_1 + c_{02} w_2) u_2] \\ e_2(u, w) &= [c_{20} f(w)] (u_1)^2 + 2 [c_{11} f(w)] u_1 u_2 + [c_{02} f(w)] (u_2)^2. \end{aligned} \text{ On trouve :}$$

234.

235. p. 145

$P_{f,w}(u) = c'_{20}(w) (u_1)^2 + 2 c'_{11}(w) u_1 u_2 + c'_{02}(w) (u_2)^2$ , avec :

$$\begin{aligned} c'_{20}(w) &= 2 \{ (c_{20})^2 (w_1)^2 + 2 c_{20} c_{11} w_1 w_2 + [2 (c_{11})^2 - c_{20} c_{02}] (w_2)^2 \} \\ c'_{11}(w) &= 2 [c_{20} c_{11} (w_1)^2 + 2 c_{20} c_{02} w_1 w_2 + c_{11} c_{02} (w_2)^2] \\ c'_{02}(w) &= 2 \{ [2 (c_{11})^2 - c_{20} c_{02}] (w_1)^2 + 2 c_{11} c_{02} w_1 w_2 + (c_{02})^2 (w_2)^2 \} \end{aligned}$$

On a vu, d'après la multiplication verticale de Young des formes homogènes, que :

$$\begin{aligned} B_f(u, v, w) &\triangleq (f \odot P_{f,w})(u, v) \\ &= \frac{1}{3} [c_{20} c'_{02}(w) - 2 c_{11} c'_{11}(w) + c_{02} c'_{20}(w)] (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2. \end{aligned}$$

Or, on constate alors que  $c_{20} c'_{02}(w) - 2 c_{11} c'_{11}(w) + c_{02} c'_{20}(w) = 0$  et par conséquent  $B_f(u, v, w) = 0$ .

$\varphi(u, v) = f_u(u, v) = \bar{\mathbf{f}}_1(u, v)$  et on vérifie que

$$\begin{vmatrix} f(u) & \varphi(u, v) & \varphi(u, w) \\ \varphi(v, u) & f(v) & \varphi(v, w) \\ \varphi(w, u) & \varphi(w, v) & f(w) \end{vmatrix} = 0.$$

•  $n = 3$

$$\begin{aligned} f(u) &= c_{200} (u_1)^2 + 2 c_{110} u_1 u_2 + 2 c_{101} u_1 u_3 + c_{020} (u_2)^2 + 2 c_{011} u_2 u_3 \\ &+ c_{002} (u_3)^2 \\ \bar{\mathbf{f}}_0(u, w) &= c_{200} (w_1)^2 + 2 c_{110} w_1 w_2 + 2 c_{101} w_1 w_3 + c_{020} (w_2)^2 + 2 c_{011} w_2 w_3 + c_{002} (w_3)^2 \\ \bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= a_1(w) u_1 + a_2(w) u_2 + a_3(w) u_3, \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1(w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(w)}{\partial w_1} = c_{200} w_1 + c_{110} w_2 + c_{101} w_3 \\ a_2(w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(w)}{\partial w_2} = c_{110} w_1 + c_{020} w_2 + c_{011} w_3 \\ a_3(w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f(w)}{\partial w_3} = c_{101} w_1 + c_{011} w_2 + c_{002} w_3 \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_2(u, w) = c_{200} (u_1)^2 + 2 c_{110} u_1 u_2 + 2 c_{101} u_1 u_3 + c_{020} (u_2)^2 + 2 c_{011} u_2 u_3 + c_{002} (u_3)^2$$

$$\begin{aligned} e_0(u, w) &= 1 \\ e_1(u, w) &= 2 [a_1(w) u_1 + a_2(w) u_2 + a_3(w) u_3] \\ e_2(u, w) &= [c_{200} f(w)] (u_1)^2 + 2 [c_{110} f(w)] u_1 u_2 + 2 [c_{101} f(w)] u_1 u_3 \\ &+ [c_{020} f(w)] (u_2)^2 + 2 [c_{011} f(w)] u_2 u_3 + [c_{002} f(w)] (u_3)^2. \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} P_{f,w}(u) &= c'_{200}(w) (u_1)^2 + 2 c'_{110}(w) u_1 u_2 + 2 c'_{101}(w) u_1 u_3 \\ &+ c'_{020}(w) (u_2)^2 + 2 c'_{011}(w) u_2 u_3 + c'_{002}(w) (u_3)^2, \text{ avec :} \\ c'_{200}(w) &= 2 \{ 2 [a_1(w)]^2 - c_{200} f(w) \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
c'_{110}(w) &= 2 [2 a_1(w) a_2(w) - c_{110} f(w)] \\
c'_{101}(w) &= 2 [2 a_1(w) a_3(w) - c_{101} f(w)] \\
c'_{020}(w) &= 2 \{2 [a_2(w)]^2 - c_{020} f(w)\} \\
c'_{011}(w) &= 2 [2 a_2(w) a_3(w) - c_{011} f(w)] \\
c'_{002}(w) &= 2 \{2 [a_3(w)]^2 - c_{002} f(w)\}
\end{aligned}$$

On a vu, d'après la multiplication verticale de Young des formes homogènes, que :

$$\begin{aligned}
B_f(u, v, w) &\triangleq (f \odot P_{f,w})(u, v) \\
&= \frac{1}{3} [c_{200} c'_{020}(w) - 2 c_{110} c'_{110}(w) + c_{020} c'_{200}(w)] (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\
&+ \frac{1}{3} [c_{020} c'_{002}(w) - 2 c_{011} c'_{011}(w) + c_{002} c'_{020}(w)] (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 \\
&+ \frac{1}{3} [c_{002} c'_{200}(w) - 2 c_{101} c'_{101}(w) + c_{200} c'_{002}(w)] (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 \\
&+ \frac{2}{3} [c_{200} c'_{011}(w) - c_{110} c'_{101}(w) - c_{101} c'_{110}(w) + c_{011} c'_{200}(w)] \\
&(u_1 v_2 - u_2 v_1) (u_1 v_3 - u_3 v_1) \\
&+ \frac{2}{3} [c_{020} c'_{101}(w) - c_{011} c'_{110}(w) - c_{110} c'_{011}(w) + c_{101} c'_{020}(w)] \\
&(u_2 v_3 - u_3 v_2) (u_2 v_1 - u_1 v_2) \\
&+ \frac{2}{3} [c_{002} c'_{110}(w) - c_{101} c'_{011}(w) - c_{011} c'_{101}(w) + c_{110} c'_{002}(w)] \\
&(u_3 v_1 - u_1 v_3) (u_3 v_2 - u_2 v_3).
\end{aligned}$$

Or, on constate alors que tous les coefficients sont proportionnels à :

$$c_{200} (c_{011})^2 + c_{020} (c_{101})^2 + c_{002} (c_{110})^2 - c_{200} c_{020} c_{002} - 2 c_{110} c_{101} c_{011}.$$

$\varphi(u, v) = f_u(u, v) = \bar{\mathbf{f}}_1(u, v)$  et on vérifie que

$$\begin{vmatrix}
f(u) & \varphi(u, v) & \varphi(u, w) \\
\varphi(v, u) & f(v) & \varphi(v, w) \\
\varphi(w, u) & \varphi(w, v) & f(w)
\end{vmatrix} = B_f(u, v, w), \text{ à un facteur multiplicatif}$$

près.

**Remarque** : si  $f(v) = l(v) h(v)$ , avec :

$l(v) = c_{100} v_1 + c_{010} v_2 + c_{001} v_3$  et  $h(v) = d_{100} v_1 + d_{010} v_2 + d_{001} v_3$  on a :

$$c_{200} = c_{100} d_{100}$$

$$2 c_{110} = c_{100} d_{010} + c_{010} d_{100}$$

$$2 c_{101} = c_{100} d_{001} + c_{001} d_{100}$$

$$c_{020} = c_{010} d_{010}$$

$$2 c_{011} = c_{010} d_{001} + c_{001} d_{010}$$

$$c_{002} = c_{001} d_{001} \text{ et on vérifie que :}$$

$$c_{200} (c_{011})^2 + c_{020} (c_{101})^2 + c_{002} (c_{110})^2 - c_{200} c_{020} c_{002} - 2 c_{110} c_{101} c_{011} = 0.$$

Le polynôme  $B_f(u, v, w)$  est bien identiquement nul comme annoncé par le résultat principal de Brill.

**Exemple : formes cubiques. On a  $d = 3$**

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_0(u, w) &= f(w) \\
\bar{\mathbf{f}}_3(u, w) &= f(u) \\
e_0(u, w) &= 1 \\
e_1(u, w) &= 3\bar{\mathbf{f}}_1(u, w) \\
e_2(u, w) &= 3\bar{\mathbf{f}}_2(u, w) f(w) \\
e_3(u, w) &= f(u) [f(w)]^2 \\
E_1 + E_2 + E_3 &= e_1(u, w) = 3\bar{\mathbf{f}}_1(u, w) \\
E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3 &= e_2(u, w) = 3\bar{\mathbf{f}}_2(u, w) f(w) \\
E_1 E_2 E_3 &= e_3(u, w) = f(u) [f(w)]^2 \\
P_{f,w}(u) &= (p_3(E))(u, w) = E_1^3 + E_2^3 + E_3^3 \\
&= [e_1(u, w)]^3 - 3e_1(u, w)e_2(u, w) + 3e_3(u, w) \\
&= 3\{9[\bar{\mathbf{f}}_1(u, w)]^3 - 9\bar{\mathbf{f}}_1(u, w)\bar{\mathbf{f}}_2(u, w)f(w) + f(u)[f(w)]^2\}. \\
B_f(u, v, w) &= \frac{1}{4}[\bar{\mathbf{f}}_0(v, u)\bar{\mathbf{P}}_{f,w_0}(u, v) - 3\bar{\mathbf{f}}_1(v, u)\bar{\mathbf{P}}_{f,w_1}(u, v) \\
&+ 3\bar{\mathbf{f}}_2(v, u)\bar{\mathbf{P}}_{f,w_2}(u, v) - \bar{\mathbf{f}}_3(v, u)\bar{\mathbf{P}}_{f,w_3}(u, v)] \\
&= \frac{1}{4}[f(u)P_{f,w}(v) - 3\bar{\mathbf{f}}_1(v, u)\bar{\mathbf{P}}_{f,w_1}(u, v) + 3\bar{\mathbf{f}}_2(v, u)\bar{\mathbf{P}}_{f,w_2}(u, v) - f(v)P_{f,w}(u)].
\end{aligned}$$

•  $n = 1$

$$\begin{aligned}
f(u) &= c_3 (u_1)^3 \\
\bar{\mathbf{f}}_0(u, w) &= c_3 (w_1)^3 \\
\bar{\mathbf{f}}_1(u, w) &= c_3 u_1 (w_1)^2 \\
\bar{\mathbf{f}}_2(u, w) &= c_3 (u_1)^2 w_1 \\
\bar{\mathbf{f}}_3(u, w) &= c_3 (u_1)^3 \\
e_0(u, w) &= 1 \\
e_1(u, w) &= [3c_3 (w_1)^2] u_1 \\
e_2(u, w) &= [3(c_3)^2 (w_1)^4] (u_1)^2. \\
e_3(u, w) &= [(c_3)^3 (w_1)^6] (u_1)^3. \text{ On trouve :}
\end{aligned}$$

$$P_{f,w}(u) = c'_3(w) (u_1)^3, \text{ avec :}$$

$$c'_3(w) = 3(c_3)^3 (w_1)^6.$$

On a vu, d'après la multiplication verticale de Young des formes homogènes, que :

$$B_f(u, v, w) \triangleq (f \odot P_{f,w})(u, v) = 0$$

•  $n = 2$

$$\begin{aligned}
f(u) &= c_{30} (u_1)^3 + 3c_{21} (u_1)^2 u_2 + 3c_{12} u_1 (u_2)^2 + c_{03} (u_2)^3 \\
\bar{\mathbf{f}}_0(u, w) &= c_{30} (w_1)^3 + 3c_{21} (w_1)^2 w_2 + 3c_{12} w_1 (w_2)^2 + c_{03} (w_2)^3
\end{aligned}$$

$$\bar{f}_1(u, w) = c_{30} u_1 (w_1)^2 + c_{21} w_1 (2 u_1 w_2 + u_2 w_1) + c_{12} w_2 (u_1 w_2 + 2 u_2 w_1) + c_{03} u_2 (w_2)^2$$

$$\bar{f}_2(u, w) = c_{30} (u_1)^2 w_1 + c_{21} u_1 (u_1 w_2 + 2 u_2 w_1) + c_{12} u_2 (2 u_1 w_2 + u_2 w_1) + c_{03} (u_2)^2 w_2$$

$$\bar{f}_3(u, w) = c_{30} (u_1)^3 + 3 c_{21} (u_1)^2 u_2 + 3 c_{12} u_1 (u_2)^2 + c_{03} (u_2)^3. \text{ Posons :}$$

$$a_1(w) = \frac{1}{3} \frac{\partial f(w)}{\partial w_1} = c_{30} (w_1)^2 + 2 c_{21} w_1 w_2 + c_{12} (w_2)^2$$

$$a_2(w) = \frac{1}{3} \frac{\partial f(w)}{\partial w_2} = c_{21} (w_1)^2 + 2 c_{12} w_1 w_2 + c_{03} (w_2)^2$$

$$b_1(w) \triangleq (c_{30} w_1 + c_{21} w_2) f(w)$$

$$b_2(w) \triangleq (c_{21} w_1 + c_{12} w_2) f(w)$$

$$b_3(w) \triangleq (c_{12} w_1 + c_{03} w_2) f(w)$$

$$c_1(w) \triangleq c_{30} [f(w)]^2$$

$$c_2(w) \triangleq c_{21} [f(w)]^2$$

$$c_3(w) \triangleq c_{12} [f(w)]^2$$

$$c_4(w) \triangleq c_{03} [f(w)]^2. \text{ Alors :}$$

$$e_0(u, w) = 1$$

$$e_1(u, w) = 3 [a_1(w) u_1 + a_2(w) u_2]$$

$$e_2(u, w) = 3 [b_1(w) (u_1)^2 + 2 b_2(w) u_1 u_2 + b_3(w) (u_2)^2]$$

$$e_3(u, w) = c_1(w) (u_1)^3 + 3 c_2(w) (u_1)^2 u_2 + 3 c_3(w) u_1 (u_2)^2 + c_4(w) (u_2)^3.$$

Alors on trouve :

$$P_{f,w}(u) = c'_{30}(w) (u_1)^3 + 3 c'_{21}(w) (u_1)^2 u_2 + 3 c'_{12}(w) u_1 (u_2)^2 + c'_{03}(w) (u_2)^3,$$

avec :

$$c'_{30}(w) = 3 [9 (a_1)^3 - 9 a_1 b_1 + c_1]$$

$$c'_{21}(w) = 3 [9 (a_1)^2 a_2 - 3 (2 a_1 b_2 + a_2 b_1) + c_2]$$

$$c'_{12}(w) = 3 [9 a_1 (a_2)^2 - 3 (a_1 b_3 + 2 a_2 b_2) + c_3]$$

$$c'_{03}(w) = 3 [9 (a_2)^3 - 9 a_2 b_3 + c_4]$$

On a vu, d'après la multiplication verticale de Young des formes homogènes, que :

$$B_f(u, v, w) \triangleq (f \odot P_{f,w})(u, v) = \frac{1}{4} [c_{30} c'_{03}(w) - 3 c_{21} c'_{12}(w) + 3 c_{12} c'_{21}(w) - c_{03} c'_{30}(w)] (u_1 v_2 - u_2 v_1)^3.$$

Or, on constate, tous calculs faits, que :

$$c_{30} c'_{03}(w) - 3 c_{21} c'_{12}(w) + 3 c_{12} c'_{21}(w) - c_{03} c'_{30}(w) = 0 \text{ et par conséquent :}$$

$$B_f(u, v, w) = 0.$$

### 6.2.2 Cas où $n = 2$ et $p = 2$

C'est l'objet de la théorie de Clebsch-Gordan [51]<sup>236</sup>.

Supposons que la fonction polynomiale  $\mathbf{f}$  est bi-homogène de degrés  $(d_1, d_2)$  [et donc de degré (total)  $d = d_1 + d_2$ ]. on a  $\Delta_{11} \mathbf{f} = d_1 \mathbf{f}$  et  $\Delta_{22} \mathbf{f} = d_2 \mathbf{f}$  et  $(d_1 + 1) d_2 \mathbf{f} = \Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}$ , d'après le théorème de Capelli.

On a alors la formule de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(v^1, v^2) \\ = & \sum_{i=0}^{\min(d_1, d_2)} a_i(d_1, d_2) [v^1, v^2]^i (\Delta_{21}^{d_2-i} \Delta_{12}^{d_2-i} \Omega^i \mathbf{f})(v^1, v^2), \\ & \text{avec } a_i(d_1, d_2) \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

En particulier si  $d_2 = 1$  on a, d'après le théorème de Capelli :  
 $a_0(d_1, 1) = \frac{1}{d_1+1} = \frac{1}{d}$  et  $a_1(d_1, 1) = \frac{1}{d_1+1} = \frac{1}{d}$ .

#### Exemple a

$$\mathbf{f}(v^1, v^2) = \mathbf{f}(v^1, v^2) = v_1^1 (a v_1^2 + b v_2^2) + v_2^1 (c v_1^2 + d v_2^2).$$

Cet exemple (général) correspond à  $d_1 = 1, d_2 = 1$  et donc  $d = d_1 + d_2 = 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}(v^1, v^2) &= a v_1^2 + b v_2^2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^1}(v^1, v^2) &= c v_1^2 + d v_2^2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^2}(v^1, v^2) &= a v_1^1 + c v_2^1 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^2}(v^1, v^2) &= b v_1^1 + d v_2^1. \end{aligned}$$

$$(\Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) = a (v_1^1)^2 + (b + c) v_1^1 v_2^1 + d (v_2^1)^2.$$

$$\begin{aligned} & (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & v_1^2 [2 a v_1^1 + (b + c) v_2^1] + v_2^2 [(b + c) v_1^1 + 2 d v_2^1] \\ & (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = b - c \\ & [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = (b - c) (v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2) \\ & \Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f} = 2 \mathbf{f}. \text{ Et on a bien :} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{(d_1+1)d_2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}).$$

Et on a bien la formule de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(v^1, v^2) \\ = & \sum_{i=0}^1 a_i(1, 1) [v^1, v^2]^i (\Delta_{21}^{1-i} \Delta_{12}^{1-i} \Omega^i \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & a_0(1, 1) (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) + a_1(1, 1) [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2), \text{ avec :} \\ & a_0(1, 1) = a_1(1, 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

---

236. pp. 93-111 § 9

### Exemple b

$$\mathbf{f}(v^1, v^2) = \mathbf{f}(v^1, v^2) = (v_1^1)^2 (a v_1^2 + b v_2^2) + 2 v_1^1 v_2^1 (c v_1^2 + d v_2^2) + (v_2^1)^2 (e v_1^2 + f v_2^2).$$

Cet exemple (général) correspond à  $d_1 = 2, d_2 = 1$  et donc  $d = d_1 + d_2 = 3$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}(v^1, v^2) = 2 v_1^1 (a v_1^2 + b v_2^2) + 2 v_2^1 (c v_1^2 + d v_2^2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^1}(v^1, v^2) = 2 v_1^1 (c v_1^2 + d v_2^2) + 2 v_2^1 (e v_1^2 + f v_2^2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^2}(v^1, v^2) = a (v_1^1)^2 + 2 c v_1^1 v_2^1 + e (v_2^1)^2$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^2}(v^1, v^2) = b (v_1^1)^2 + 2 d v_1^1 v_2^1 + f (v_2^1)^2$$

$$\begin{aligned} & (\Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & a (v_1^1)^3 + (b + 2c) (v_1^1)^2 v_2^1 + (2d + e) v_1^1 (v_2^1)^2 + f (v_2^1)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & v_1^2 [3a (v_1^1)^2 + 2(b + 2c) v_1^1 v_2^1 + (2d + e) (v_2^1)^2] \\ & + v_2^2 [(b + 2c) (v_1^1)^2 + 2(2d + e) v_1^1 v_2^1 + 3f (v_2^1)^2] \\ & (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = 2 [(b - c) v_1^1 + (d - e) v_2^1] \\ & [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & 2 [(b - c) (v_1^1)^2 v_2^2 - (b - c) v_1^1 v_2^1 v_2^2 + (d - e) v_1^1 v_2^1 v_2^2 - (d - e) (v_2^1)^2 v_1^2] \\ & \Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f} = 3 \mathbf{f}. \text{ Et on a bien :} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{(d_1+1)d_2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}).$$

Et on a bien la formule de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(v^1, v^2) \\ = & \sum_{i=0}^1 a_i(2, 1) [v^1, v^2]^i (\Delta_{21}^{1-i} \Delta_{12}^{1-i} \Omega^i \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & a_0(2, 1) (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) + a_1(2, 1) [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2), \text{ avec :} \\ & a_0(2, 1) = a_1(2, 1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

### Exemple c

$$\mathbf{f}(v^1, v^2) = \mathbf{f}(v^1, v^2) = v_1^1 [a (v_1^2)^2 + 2b v_1^2 v_2^2 + c (v_2^2)^2] + v_2^1 [d (v_1^2)^2 + 2e v_1^2 v_2^2 + f (v_2^2)^2].$$

Cet exemple (général) correspond à  $d_1 = 1, d_2 = 2$  et donc  $d = d_1 + d_2 = 3$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}(v^1, v^2) = a (v_1^2)^2 + 2b v_1^2 v_2^2 + c (v_2^2)^2$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^1}(v^1, v^2) = d (v_1^2)^2 + 2e v_1^2 v_2^2 + f (v_2^2)^2$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^2}(v^1, v^2) = 2 [a v_1^1 v_1^2 + b v_1^1 v_2^2 + d v_2^1 v_1^2 + e v_2^1 v_2^2]$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^2}(v^1, v^2) = 2 [b v_1^1 v_1^2 + c v_1^1 v_2^2 + e v_2^1 v_1^2 + f v_2^1 v_2^2].$$

$$\begin{aligned}
& (\Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) = 2 [a (v_1^1)^2 v_1^2 + b (v_1^1)^2 v_2^2 + (b+d) v_1^1 v_2^1 v_1^2 \\
& + (c+e) v_1^1 v_2^1 v_2^2 + e (v_2^1)^2 v_1^2 + f (v_2^1)^2 v_2^2] \\
& \frac{1}{2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = v_1^2 [2a v_1^1 v_1^2 + 2b v_1^1 v_2^2 + (b+d) v_2^1 v_1^2 + (c+e) v_2^1 v_2^2] \\
& + v_2^2 [(b+d) v_1^1 v_1^2 + (c+e) v_1^1 v_2^2 + 2e v_2^1 v_1^2 + 2f v_2^1 v_2^2] \\
& \frac{1}{2} (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = (b-d) v_1^2 + (c-e) v_2^2 \\
& \frac{1}{2} [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = (b-d) v_1^1 v_1^2 v_2^2 + (c-e) v_1^1 (v_2^2)^2 \\
& - (b-d) v_2^1 (v_1^2)^2 - (c-e) v_2^1 v_1^2 v_2^2 \\
& \frac{1}{2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}) = 2 \mathbf{f}. \text{ Et on a bien :} \\
& \mathbf{f} = \frac{1}{(d_1+1)d_2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}).
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = a (v_1^1)^3 + (2b+d) (v_1^1)^2 v_2^1 + (c+2e) v_1^1 (v_2^1)^2 + f (v_2^1)^3 \\
& \frac{1}{2} (\Delta_{21} \Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) = 3a (v_1^1)^2 v_1^2 + (2b+d) (v_1^1)^2 v_2^2 \\
& + 2(2b+d) v_1^1 v_2^1 v_1^2 + 2(c+2e) v_1^1 v_2^1 v_2^2 + (c+2e) (v_2^1)^2 v_1^2 + 3f (v_2^1)^2 v_2^2 \\
& \frac{1}{2} (\Delta_{21}^2 \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) = 6a v_1^1 (v_2^1)^2 + 4(2b+d) v_1^1 v_1^2 v_2^2 \\
& + 2(c+2e) v_1^1 (v_2^2)^2 + 2(2b+d) v_2^1 (v_1^2)^2 + 4(c+2e) v_2^1 v_1^2 v_2^2 + 6f v_2^1 (v_2^2)^2 \\
& \frac{1}{2} (\Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = (b-d) v_1^1 + (c-e) v_2^1 \\
& \frac{1}{2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = \frac{1}{2} (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& \frac{1}{2} [v^1, v^2] (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = \frac{1}{2} [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2)
\end{aligned}$$

Et on a bien la formule de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{f}(v^1, v^2) \\
& = \sum_{i=0}^1 a_i(1, 2) [v^1, v^2]^i (\Delta_{21}^{2-i} \Delta_{12}^{2-i} \Omega^i \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = a_0(1, 2) (\Delta_{21}^2 \Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) + a_1(1, 2) [v^1, v^2] (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2), \text{ avec :} \\
& a_0(1, 2) = \frac{1}{12} \text{ et } a_1(1, 2) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

### Exemple d

$$\begin{aligned}
& \mathbf{f}(v^1, v^2) = \mathbf{f}(v^1, v^2) \\
& = (v_1^1)^2 [a (v_1^2)^2 + 2b v_1^2 v_2^2 + c (v_2^2)^2] + 2v_1^1 v_2^1 [d (v_1^2)^2 + 2e v_1^2 v_2^2 + f (v_2^2)^2] \\
& + (v_2^1)^2 [g (v_1^2)^2 + 2h v_1^2 v_2^2 + i (v_2^2)^2].
\end{aligned}$$

Cet exemple (général) correspond à  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 2$  et donc  $d = d_1 + d_2 = 4$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}(v^1, v^2) = v_1^1 [a (v_1^2)^2 + 2b v_1^2 v_2^2 + c (v_2^2)^2] \\
& + v_2^1 [d (v_1^2)^2 + 2e v_1^2 v_2^2 + f (v_2^2)^2] \\
& \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^1}(v^1, v^2) = v_1^1 [d (v_1^2)^2 + 2e v_1^2 v_2^2 + f (v_2^2)^2] \\
& + v_2^1 [g (v_1^2)^2 + 2h v_1^2 v_2^2 + i (v_2^2)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^2}(v^1, v^2) = a (v_1^1)^2 v_1^2 + b (v_1^1)^2 v_2^2 + 2d v_1^1 v_2^1 v_1^2 + 2e v_1^1 v_2^1 v_2^2 \\
& + g (v_2^1)^2 v_1^2 + h (v_2^1)^2 v_2^2 \\
& \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^2}(v^1, v^2) = b (v_1^1)^2 v_1^2 + c (v_1^1)^2 v_2^2 + 2e v_1^1 v_2^1 v_1^2 + 2f v_1^1 v_2^1 v_2^2 \\
& + h (v_2^1)^2 v_1^2 + i (v_2^1)^2 v_2^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) = a (v_1^1)^3 v_1^2 + b (v_1^1)^3 v_2^2 + (b + 2d) (v_1^1)^2 v_2^1 v_1^2 \\
& + (c + 2e) (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 + (2e + g) v_1^1 (v_2^1)^2 v_1^2 + (2f + h) v_1^1 (v_2^1)^2 v_2^2 + h (v_2^1)^3 v_1^2 \\
& + i (v_2^1)^3 v_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = 3a (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 + 2(2b+d) (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 + (c+2e) (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 + 2(b+2d) v_1^1 v_2^1 (v_2^1)^2 \\
& + 2(c+4e+g) v_1^1 v_2^1 v_1^2 v_2^2 + 2(2f+h) v_1^1 v_2^1 (v_2^1)^2 + 2(f+2h) (v_2^1)^2 v_1^2 v_2^2 \\
& + (2e+g) (v_2^1)^2 (v_1^1)^2 + 3i (v_2^1)^2 (v_2^1)^2 \\
& \frac{1}{4} (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = (b-d) v_1^1 v_1^2 + (c-e) v_1^1 v_2^2 + (e-g) v_2^1 v_1^2 \\
& + (f-h) v_2^1 v_2^2 \\
& \frac{1}{4} [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = (b-d) (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 + (c-e) (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 \\
& - (b-d) v_1^1 v_2^1 (v_1^1)^2 - (c-2e+g) v_1^1 v_2^1 v_1^2 v_2^2 + (f-h) v_1^1 v_2^1 (v_2^1)^2 \\
& - (e-g) (v_2^1)^2 (v_1^1)^2 - (f-h) (v_2^1)^2 v_1^2 v_2^2 \\
& \frac{1}{2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}) = 3\mathbf{f}. \text{ Et on a bien :}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{(d_1+1)d_2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}).$$

De plus :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = a (v_1^1)^4 + 2(b+d) (v_1^1)^3 v_2^1 + (c+4e+g) (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 + 2(f+h) v_1^1 (v_2^1)^3 + i (v_2^1)^4 \\
& \frac{1}{4} (\Delta_{21} \Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = v_1^2 [2a (v_1^1)^3 + 3(b+d) (v_1^1)^2 v_2^1 + (c+4e+g) v_1^1 (v_2^1)^2 + (f+h) (v_2^1)^3] \\
& + v_2^2 [(b+d) (v_1^1)^3 + (c+4e+g) (v_1^1)^2 v_2^1 + 3(f+h) v_1^1 (v_2^1)^2 + 2i (v_2^1)^3] \\
& \frac{1}{4} (\Delta_{21}^2 \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) = 6a (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 + 6(b+d) (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 \\
& + (c+4e+g) (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 + 6(b+d) v_1^1 v_2^1 (v_2^1)^2 + 4(c+4e+g) v_1^1 v_2^1 v_1^2 v_2^2 \\
& + 6(f+h) v_1^1 v_2^1 (v_2^1)^2 + (c+4e+g) (v_2^1)^2 (v_1^1)^2 + 6(f+h) (v_2^1)^2 v_1^2 v_2^2 \\
& + 6i (v_2^1)^2 (v_2^1)^2 \\
& \frac{1}{4} (\Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) = (b-d) (v_1^1)^2 + (c-g) v_1^1 v_2^1 + (f-h) (v_2^1)^2 \\
& \frac{1}{4} (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = 2(b-d) v_1^1 v_1^2 + (c-g) v_1^1 v_2^2 + (c-g) v_2^1 v_1^2 + 2(f-h) v_2^1 v_2^2 \\
& \frac{1}{4} [v^1, v^2] (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) \\
& = 2(b-d) (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 + (c-g) (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 - 2(b-d) v_1^1 v_2^1 (v_1^1)^2 \\
& + 2(f-h) v_1^1 v_2^1 (v_2^1)^2 - (c-g) (v_2^1)^2 (v_1^1)^2 - 2(f-h) (v_2^1)^2 v_1^2 v_2^2 \\
& \frac{1}{4} (\Omega^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) = c - 2e + g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [v^1, v^2]^2 (\Omega^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & (c - 2e + g) [(v_1^1)^2 (v_2^2)^2 - 2v_1^1 v_2^1 v_1^2 v_2^2 + (v_2^1)^2 (v_1^2)^2] \end{aligned}$$

Et on a bien la formule de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(v^1, v^2) \\ = & \sum_{i=0}^2 a_i(2, 2) [v^1, v^2]^i (\Delta_{21}^{2-i} \Delta_{12}^{2-i} \Omega^i \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & a_0(2, 2) (\Delta_{21}^2 \Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) + a_1(2, 2) [v^1, v^2] (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ & + a_2(2, 2) [v^1, v^2]^2 (\Omega^2 \mathbf{f})(v^1, v^2), \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$a_0(2, 2) = \frac{1}{24}, a_1(2, 2) = \frac{1}{8} \text{ et } a_2(2, 2) = \frac{1}{12}.$$

**Exemple e**

$$\mathbf{f}(v^1, v^2) = \mathbf{f}(v^1, v^2) = (v_1^1)^3 (v_2^2)^2 + (v_1^1)^2 v_2^1 v_1^2 v_2^2 + (v_2^1)^3 (v_2^2)^2.$$

Cet exemple (particulier) correspond à  $d_1 = 3$ ,  $d_2 = 2$  et donc  $d = d_1 + d_2 = 5$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^1}(v^1, v^2) &= 3(v_1^1)^2 (v_2^2)^2 + 2v_1^1 v_2^1 v_1^2 v_2^2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^2}(v^1, v^2) &= (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 + 3(v_2^1)^2 (v_2^2)^2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1^2}(v^1, v^2) &= 2(v_1^1)^3 v_2^1 + (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_2^1}(v^1, v^2) &= (v_1^1)^2 v_2^1 v_2^2 + 2(v_2^1)^3 v_2^2. \\ (\Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) &= 2(v_1^1)^4 v_2^2 + (v_1^1)^3 v_2^1 v_2^2 + (v_1^1)^2 (v_2^1)^2 v_2^2 + 2(v_2^1)^4 v_2^2 \\ (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f})(v^1, v^2) &= 8(v_1^1)^3 (v_2^2)^2 + (v_1^1)^3 (v_2^2)^2 + 5(v_1^1)^2 v_2^1 v_1^2 v_2^2 \\ &+ 2v_1^1 (v_2^1)^2 (v_2^2)^2 + 8(v_2^1)^3 (v_2^2)^2 \\ (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) &= -(v_1^1)^2 v_2^2 + 2v_1^1 v_2^1 v_1^2 v_2^2 \\ [v^1, v^2] (\Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) &= -(v_1^1)^3 (v_2^2)^2 + 3(v_1^1)^2 v_2^1 v_1^2 v_2^2 - 2v_1^1 (v_2^1)^2 (v_2^2)^2 \\ (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}) &= 8 \mathbf{f}. \text{ Et on a bien :} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{(d_1+1)d_2} (\Delta_{21} \Delta_{12} \mathbf{f} + [v^1, v^2] \Omega \mathbf{f}).$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (v_1^1)^5 + (v_1^1)^3 (v_2^1)^2 + (v_2^1)^5 \\ \frac{1}{2} (\Delta_{21} \Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= 5(v_1^1)^4 v_2^1 + 2(v_1^1)^3 v_2^1 v_2^2 + 3(v_1^1)^2 (v_2^1)^2 v_2^2 \\ &+ 5(v_2^1)^4 v_2^2 \\ \frac{1}{4} (\Delta_{21}^2 \Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= 10(v_1^1)^3 (v_2^1)^2 + (v_1^1)^3 (v_2^2)^2 + 6(v_1^1)^2 v_2^1 v_1^2 v_2^2 \\ &+ 3v_1^1 (v_2^1)^2 (v_2^2)^2 + 10(v_2^1)^3 (v_2^2)^2 \\ (\Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (v_1^1)^2 v_2^1 \\ (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (v_1^1)^2 v_2^2 + 2v_1^1 v_2^1 v_1^2 v_2^2 \\ [v^1, v^2] (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) &= (v_1^1)^3 (v_2^2)^2 + (v_1^1)^2 v_2^1 v_1^2 v_2^2 - 2v_1^1 (v_2^1)^2 (v_2^2)^2 \\ (\Omega^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) &= -4v_1^1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [v^1, v^2]^2 (\Omega^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & -[(v_1^1)^3 (v_2^2)^2 - 2 (v_1^1)^2 v_2^1 v_1^2 v_2^2 + v_1^1 (v_2^1)^2 (v_1^2)^2] \end{aligned}$$

Et on a bien la formule de Clebsch-Gordan :

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(v^1, v^2) \\ = & \sum_{i=0}^2 a_i(3, 2) [v^1, v^2]^i (\Delta_{21}^{2-i} \Delta_{12}^{2-i} \Omega^i \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ = & a_0(3, 2) (\Delta_{21}^2 \Delta_{12}^2 \mathbf{f})(v^1, v^2) + a_1(3, 2) [v^1, v^2] (\Delta_{21} \Delta_{12} \Omega \mathbf{f})(v^1, v^2) \\ & + a_2(3, 2) [v^1, v^2]^2 (\Omega^2 \mathbf{f})(v^1, v^2), \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$a_0(3, 2) = \frac{1}{40}, a_1(3, 2) = \frac{1}{15} \text{ et } a_2(3, 2) = \frac{1}{24}.$$

## 7 Invariants des formes $n$ -aires de degré $d$

On pourra consulter [18]<sup>237</sup>, [23], [26]<sup>238</sup>, [35]<sup>239</sup>, [43], [50]<sup>240</sup>, [64], [69] et [72]<sup>241</sup>. Les pionniers de la théorie des invariants sont :

J.-L. Lagrange (1731-1813), K. F. Gauss (1777-1855),  
L. O. Hesse (1811-1874), J. Sylvester (1814-1897),  
G. Boole (1815-1864), S. Aronhold (1819-1884),  
G. Salmon (1819-1904), A. Cayley (1821-1895),  
Ch. Hermite (1822-1901), F. Eisenstein (1823-1852),  
L. Kronecker (1823-1891), F. Brioschi (1824-1897),  
F. Faà di Bruno (1825-1888), R. Dedekind (1831-1916),  
R. F. A. Clebsch (1833-1872), P. Gordan (1837-1912),  
M. E. C. Jordan (1838-1922), M. Noether (1844-1921),  
E. B. Elliot (1851-1937), F. Franklin (1853-1939),  
A. Capelli (1855-1910), D. Hilbert (1862-1943),  
E. Study (1862-1930), H. W. Turnbull (1885-1961),  
H. K. H. Weyl (1885-1955).

Plus récemment on peut citer les travaux de :

J. A. Dieudonné (1906-1992), M. Nagata (1927-2008),  
G.-C. Rota (1932-1999), J.-Ch. Fogarty (1934-2009),  
D. B. Mumford (1937-), J. B. Carrell (1940-),  
J. P. S. Kung (1952-), B. Sturmfels (1962-).

---

237. pp. 311-348 Chapter 7. Invariant Theory of Finite Groups

238. pp. 24-25 pp.48-49 pp. 467-468 p. 471 pp. 722-723

239. pp. 24-35 La percée de Hilbert en théorie des invariants

240. pp. 852-855 226 (IV.18) Invariants and Covariants

241. pp. 28-29 Algebraic Invariant p. 1481 Quadratic Invariant

Soit  $G$  un groupe avec une *représentation linéaire* sur  $W$ , i.e. un homomorphisme :

$$G \xrightarrow{\rho} GL(W) .$$

L'action linéaire correspondante de  $G$  sur  $W$  est notée :

$$\begin{aligned} G \times W &\longrightarrow W \\ (g, w) &\mapsto gw \triangleq \rho(g)w . \end{aligned}$$

L'action linéaire de  $G$  sur  $k[W]$  est :

$$\begin{aligned} G \times k[W] &\longrightarrow k[W] \\ (g, f) &\mapsto gf \quad ; \text{ avec } (gf)(w) = f(g^{-1}w) ; \forall w \in W . \end{aligned}$$

### Définition

La fonction polynomiale  $f$  est  $G$ -invariante, ou plus simplement invariante, ssi  $f(gw) = f(w) ; \forall g \in G ; \forall w \in W$ . Il revient au même de dire que la fonction polynomiale  $f$  est invariante si elle est un *point fixe* de l'action linéaire de  $G$  sur  $k[W]$ .

Les invariants forment une sous-algèbre de  $k[W]$ , appelée *anneau invariant* et dénotée  $k[W]^G$ .

De plus les sous-espaces  $k[W]_d$  sont stables sous les actions et ainsi l'anneau invariant se décompose en somme directe  $k[W]^G = \bigoplus_d k[W]_d^G$  et est donc également une  $k$ -algèbre graduée.

Dans la suite nous considérons les invariants pour les groupes  $GL(n, k)$  et/ou  $SL(n, k)$ .

## 7.1 Invariants des formes binaires

On pourra consulter [43] et [53].

Soit  $\mathcal{I}(a_0, a_1, \dots, a_d)$  un invariant de degré  $g$  et de poids  $p$ .

On a  $\mathcal{I}(a_0, a_1, \dots, a_d) = \sum_{\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_d = g} Z_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_d} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_d^{\nu_d}$ , où les  $Z_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_d}$  sont des coefficients numériques, avec :

$$g = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_d \text{ et } p = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + d\nu_d . \text{ Alors } dg = 2p .$$

Si on définit l'opérateur aux dérivées partielles :

$$\mathbf{D} = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \dots + da_{d-1} \frac{\partial}{\partial a_d} \quad [43]^{242} \text{ et } [64]^{243} \text{ on a}$$

---

242. p. 27

243. p. 92

$D\mathcal{I} = 0$  [43]<sup>244</sup> et [64]<sup>245</sup>.

Si on définit l'opérateur aux dérivées partielles :

$\Delta = d a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (d-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (d-2) a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + a_d \frac{\partial}{\partial a_{d-1}}$  [43]<sup>246</sup> et [64]<sup>247</sup> on a  $\Delta\mathcal{I} = 0$  [43]<sup>248</sup> et [64]<sup>249</sup>.

### 7.1.1 Invariants des formes binaires quadratiques

Il y a un seul invariant de degré  $g = 2$  et de poids  $p = 2$  :

$\mathcal{I}(a_0, a_1, a_2) = a_0 a_2 - a_1^2$ ; c'est le discriminant (à un facteur multiplicatif près). En fait :

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{4} \Delta; \text{ soit } \mathcal{I}(a_0, a_1, a_2) = -\frac{1}{4} \varphi(a_0, a_1, a_2).$$

### 7.1.2 Invariants des formes binaires cubiques

Il y a un seul invariant de degré  $g = 4$  et de poids  $p = 6$  :

$\mathcal{I}(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2$ ; c'est le discriminant (à un facteur multiplicatif près). En fait :

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{27} \Delta; \text{ soit } \mathcal{I}(a_0, a_1, a_2, a_3) = -\frac{1}{27} \varphi(a_0, a_1, a_2, a_3).$$

### 7.1.3 Invariants des formes binaires biquadratiques

Il y a deux invariants de base : l'un de degré  $g = 2$  et de poids  $p = 4$  et l'autre de degré  $g = 3$  et de poids  $p = 6$  :

$\mathcal{I}_2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$  de degré  $g = 2$  et de poids  $p = 4$  et :

$\mathcal{I}_3(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3$  de degré  $g = 3$  et de poids  $p = 6$ .

Tous les invariants de degré  $g = 2k + 3l$  sont :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_2^k \mathcal{I}_3^l \text{ et c'est un système d'invariants complets.}$$

---

244. p. 27

245. p. 92

246. p. 30

247. p. 92

248. p. 30

249. p. 92

$\Delta = \varphi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  est un invariant de degré  $g = 6$  et par conséquent il faut que  $(k, l) = (3, 0)$  ou  $(k, l) = (0, 2)$ . Par conséquent  $\Delta = \alpha \mathcal{I}_2^3 + \beta \mathcal{I}_3^2$  et on trouve :

$$\Delta = 256 (\mathcal{I}_2^3 - 27 \mathcal{I}_3^2).$$

#### 7.1.4 Invariants des formes binaires quintiques

On pourra consulter [23]<sup>250</sup>, [35]<sup>251</sup>, [43]<sup>252</sup> et [64]<sup>253</sup>.

Il n'y a pas d'invariants de degré impair.

Les pionniers de la théorie des invariants découvrirent les 3 invariants :

- $\mathcal{I}_4$ , de degré  $g = 4$  et de poids  $p = 10$ , qui comporte 12 monômes,
- $\mathcal{I}_8$ , de degré  $g = 8$  et de poids  $p = 20$ , qui comporte 59 monômes et
- $\mathcal{I}_{12}$ , de degré  $g = 12$  et de poids  $p = 30$ , qui comporte 228 monômes.

Pendant un certain temps on a cru que tout invariant devait avoir un degré divisible par 4 mais Hermite découvrit en 1854 l'invariant :

- $\mathcal{I}_{18}$ , de degré  $g = 18$  et de poids  $p = 45$ , qui comporte 848 monômes et montra que :

$\mathbb{C}[V_5]^G = \mathbb{C}[\mathcal{I}_4, \mathcal{I}_8, \mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{18}]$  sans être une algèbre de polynôme car Sylvester découvrit que ces 4 invariants ne sont pas indépendants mais sont liés par une équation de degré 36 qu'il appela *syzygie* :

$$16 \mathcal{I}_{18}^2 = \mathcal{I}_4 \mathcal{I}_8^4 + 8 \mathcal{I}_8^3 \mathcal{I}_{12} - 2 \mathcal{I}_4^2 \mathcal{I}_8^2 \mathcal{I}_{12} - \mathcal{I}_4 \mathcal{I}_8 \mathcal{I}_{12}^2 - 432 \mathcal{I}_{12}^3 + \mathcal{I}_4^3 \mathcal{I}_{12}^2$$

[23]<sup>254</sup> et [64]<sup>255</sup>.

#### 7.1.5 Invariants des formes binaires sextiques

On pourra consulter [43]<sup>256</sup> et [64]<sup>257</sup>.

---

250. pp. 66-68

251. p. 27

252. pp. 58-59

253. pp. 326- 373 no. 224 à 251 et p. 499

254. p. 66 mais avec une erreur  $\mathcal{I}_4 \mathcal{I}_8^2$  au lieu de  $\mathcal{I}_4 \mathcal{I}_8^4$

255. p. 337

256. p. 59

257. pp. 373- 407 no. 252 à 266 et pp. 499-500

## 7.2 Invariants des formes ternaires

On pourra consulter [23]<sup>258</sup>.

## 7.3 Invariants des formes quaternaires

On pourra consulter [23]<sup>259</sup>.

# 8 Transvectants

On pourra consulter [64]<sup>260</sup>.

## 8.1 Transvectants des formes binaires

On pourra consulter [43]<sup>261</sup>, [62]<sup>262</sup>.

Le coefficient numérique du transvectant dépend des auteurs. Pour 2 formes binaires  $f$  et  $g$  le  $r^{\text{ème}}$  transvectant est noté  $(f, g)^{(r)}$  par [62]<sup>263</sup> et  $(f, g)_r$  par [43]. De plus  $f_r \triangleq \frac{1}{2} (f, f)_p$  [43].

$$(f, g)^{(r)} \triangleq \sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r-i} \partial x_2^i} \frac{\partial^r g}{\partial x_1^i \partial x_2^{r-i}} [62]^{264}.$$

Avec :

$$f(x_1, x_2) = c_{d0} x_1^d + C_d^1 c_{(d-1)1} x_1^{d-1} x_2 + C_d^2 c_{(d-2)2} x_1^{d-2} x_2^2 + \dots \\ + C_d^{d-1} c_{1(d-1)} x_1 x_2^{d-1} + c_{0d} x_2^d, \text{ ou plus simplement :}$$

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^d + C_d^1 a_1 x_1^{d-1} x_2 + C_d^2 a_2 x_1^{d-2} x_2^2 + \dots \\ + C_d^{d-1} a_{d-1} x_1 x_2^{d-1} + a_d x_2^d, \text{ forme binaire de degré } d \text{ et :}$$

$$g(x_1, x_2) = c'_{e0} x_1^e + C_e^1 c'_{(e-1)1} x_1^{e-1} x_2 + C_e^2 c'_{(e-2)2} x_1^{e-2} x_2^2 + \dots \\ + C_e^{e-1} c'_{1(e-1)} x_1 x_2^{e-1} + c'_{0e} x_2^e, \text{ ou plus simplement :}$$

$$g(x_1, x_2) = b_0 x_1^e + C_e^1 b_1 x_1^{e-1} x_2 + C_e^2 b_2 x_1^{e-2} x_2^2 + \dots \\ + C_e^{e-1} b_{e-1} x_1 x_2^{e-1} + b_e x_2^e, \text{ forme binaire de degré } e \text{ on a :}$$

---

258. pp. 69-70

259. pp. 69-70

260. p. 457 : définition pp. 497-500 Table de quelques transvectants d'une forme de degré quelconque

261. pp. 87-96 Lectures XXVI et XXVII

262. pp. 86-98 Chapitre 5

263. p. 88

264. p. 88 éq. (5.7)

$$(f, g)_r \triangleq [\sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i a_i b_{r-i}] x^{d+e-2r} + \dots [43]^{265}.$$

En particulier :

$$(f, g)^{(0)} = f g, \text{ forme binaire de degré } d + e.$$

$$(f, g)^{(1)} = f'_{x_1} g'_{x_2} - f'_{x_2} g'_{x_1} = \begin{vmatrix} f'_{x_1} & f'_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{vmatrix} = d e (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^{d+e-2} + \dots,$$

forme binaire de degré  $d + e - 2$ . Et par conséquent  $(f, f)^{(1)} = 0$ .

$(f, g)_1 = \frac{1}{d e} (f, g)^{(1)} = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^{d+e-2} + \dots$ , forme binaire de degré  $d + e - 2$ . Et par conséquent  $f_1 = \frac{1}{2} (f, f)_1 = 0$ .

$(f, g)^{(2)} = f''_{x_1^2} g''_{x_2^2} - 2 f''_{x_1 x_2} g''_{x_1 x_2} + f''_{x_2^2} g''_{x_1^2}$   
 $= d(d-1)e(e-1)(a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) x_1^{d+e-4} + \dots$ , forme binaire de degré  $d + e - 4$ . Et par conséquent  $(f, f)^{(2)} = 2 d^2 (d-1)^2 (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^{2(d-2)} + \dots$

$(f, g)_2 = \frac{1}{d(d-1)e(e-1)} (f, g)^{(2)} = (a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) x_1^{d+e-4} + \dots$  forme binaire de degré  $d + e - 4$ . Et par conséquent  $f_2 = \frac{1}{2} (f, f)_2 = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^{d+e-4} + \dots$

$$(f, g)^{(3)} = f'''_{x_1^3} g'''_{x_2^3} - 3 f'''_{x_1^2 x_2} g'''_{x_1 x_2^2} + 3 f'''_{x_1 x_2^2} g'''_{x_1^2 x_2} - f'''_{x_2^3} g'''_{x_1^3}.$$

$$(f, g)^{(4)} = f''''_{x_1^4} g''''_{x_2^4} - 4 f''''_{x_1^3 x_2} g''''_{x_1 x_2^3} + 6 f''''_{x_1^2 x_2^2} g''''_{x_1^2 x_2^2} - 4 f''''_{x_1 x_2^3} g''''_{x_1^3 x_2} + f''''_{x_2^4} g''''_{x_1^4}.$$

etc.

On a  $(f, g)^{(r)} = (-1)^r (g, f)^{(r)}$  [62]<sup>266</sup> et donc  $(f, f)^{(r)} = 0$  si  $r$  est impair.

### 8.1.1 Exemples

- $d = 1$  et  $e = 1$

$$f = a_0 x_1 + a_1 x_2 \text{ et } g = b_0 x_1 + b_1 x_2.$$

$$(f, g)^{(1)} = a_0 b_1 - a_1 b_0 \text{ et } (f, g)^{(2)} = (f, g)^{(3)} = \dots = 0.$$

Ou

$(f, g)_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0$  et  $(f, g)_2 = (f, g)_3 = \dots = 0$  et par conséquent  $f_1 \triangleq \frac{1}{2} (f, f)_1 = 0$ . [43]<sup>267</sup>.

---

265. p. 87

266. p. 89 éq. (5.8)

267. p. 89

- $d = 2$  et  $e = 1$

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 \text{ et } g = b_0 x_1 + b_1 x_2.$$

$$(f, g)^{(1)} = 2 [(a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1 + (a_1 b_1 - a_2 b_0) x_2] \text{ et} \\ (f, g)^{(2)} = (f, g)^{(3)} = \dots = 0.$$

Ou

$$(f, g)_1 = \frac{1}{2} (f, g)^{(1)} = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1 + (a_1 b_1 - a_2 b_0) x_2 [43]^{268}.$$

- $d = 2$  et  $e = 2$

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 \text{ et } g = b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2.$$

$$(f, g)^{(1)} = 4 [(a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2] \text{ et} \\ (f, f)^{(1)} = 0.$$

$$(f, g)^{(2)} = 4 (a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) \text{ et } (f, f)^{(2)} = 8 (a_0 a_2 - a_1^2)$$

$$(f, g)^{(3)} = (f, g)^{(4)} = \dots = 0.$$

Ou

$$(f, g)_1 = \frac{1}{4} (f, g)^{(1)} = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2 \text{ et } f_1 \triangleq \frac{1}{2} (f, f)_1 = 0.$$

$$(f, g)_2 = \frac{1}{4} (f, g)^{(2)} = a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0 \text{ et } f_2 \triangleq \frac{1}{2} (f, f)_2 = a_0 a_2 - a_1^2 [43]^{269}.$$

- $d = 3$  et  $e = 3$

$$f = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 \text{ et} \\ g = b_0 x_1^3 + 3 b_1 x_1^2 x_2 + 3 b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3.$$

$$(f, g)^{(1)} = 9 \{ (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^4 + 2 (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1^3 x_2 \\ + [3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + a_0 b_3 - a_3 b_0] x_1^2 x_2^2 + 2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_1 x_2^3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_2^4 \} \\ \text{et } (f, f)^{(1)} = 0.$$

$$(f, g)^{(2)} = 36 [(a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) x_1^2 + (a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0) x_1 x_2 \\ + (a_1 b_3 - 2 a_2 b_2 + a_3 b_1) x_2^2] \text{ et } (f, f)^{(2)} = 72 [(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + 2 (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 \\ + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2]$$

$$(f, g)^{(3)} = 36 (a_0 b_3 - 3 a_1 b_2 + 3 a_2 b_3 - a_3 b_0) \text{ et } (f, f)^{(3)} = 0.$$

$$(f, g)^{(4)} = (f, g)^{(5)} = \dots = 0.$$

Ou

---

268. p. 90 p. 94

269. p. 91

$$\begin{aligned}
(f, g)_1 &= \frac{1}{9} (f, g)^{(1)} = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^4 + 2 (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1^3 x_2 \\
&+ [3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + a_0 b_3 - a_3 b_0] x_1^2 x_2^2 + 2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_1 x_2^3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_2^4 \\
\text{et } f_1 &\triangleq \frac{1}{2} (f, f)_1 = 0. \\
(f, g)_2 &= \frac{1}{36} (f, g)^{(2)} = (a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) x_1^2 \\
&+ (a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_3 - 2 a_2 b_2 + a_3 b_1) x_2^2 \text{ et} \\
f_2 &\triangleq \frac{1}{2} (f, f)_2 = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + 2 (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2 \\
(f, g)_3 &= \lambda (f, g)^{(3)} \text{ et } f_3 \triangleq \frac{1}{2} (f, f)_3 = 0. [43]^{270}.
\end{aligned}$$

•  $d = 5$  et  $e = 5$

[43]<sup>271</sup>.

## 8.2 Tranvectants des formes $n$ -aires

On pourra consulter [62]<sup>272</sup>.

## 9 Pfaffiens

Soit  $X$  une matrice carrée antisymétrique ( $X^T = -X$ ) d'ordre  $n$ . Alors  $\det X^T = \det(-X)$  soit  $\det X = (-1)^n \det X$ .

Par conséquent si  $n$  est impair on a  $\det X = 0$ , mais si  $n$  est pair on a  $\det X = P_n^2$ , où  $P_n$  est le pfaffien.

Si  $x_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $X$  (avec  $x_{ji} = -x_{ij}$  et, en particulier  $x_{ii} = 0$ ) on trouve :

$$\begin{aligned}
P_2 &= \pm x_{12}, \\
P_4 &= \pm (x_{13} x_{24} - x_{14} x_{23} - x_{12} x_{34}) \\
P_6 &= \pm [x_{12} (3456) + x_{13} (4562) + x_{14} (5623) + x_{15} (6234) + x_{16} (2345)]; \text{ avec} \\
(1234) &\triangleq x_{12} x_{34} + x_{13} x_{42} + x_{14} x_{23}, \text{ etc. (il y 15 termes)}.
\end{aligned}$$

---

270. p. 93

271. p. 94

272. pp. 234-235 Chapitre 10 (Transvectants)





**Annexe : glossaire de [64]** <sup>273</sup>

• **termes en -ants**

**Bezoutiants** p. 491

**Canonisants ou covariants canoniques** p. 222, p. 326, p. 406

**Catalecticants** p. 224, p. 269, p. 375 (nom donné par Sylvester)

**Combinants** p. 230, p. 302, p. 314, p. 495, p. 533

**Commutants** p. 484

**Concomitants ou Concomitants mixtes** pp. 173-174, pp. 197-214  
(nom donné par Sylvester)

**Contrevariants** pp. 169-170, p. 172, p. 183

**Covariants** pp. 165-166, pp. 178-196, p. 250, p. 260, p. 266 p. 299, p.  
307, p.313, p. 337, p. 343, p. 357

**Déterminants** pp. 1-11, pp. 12-27, pp. 28-42, pp. 43-50, pp. 51-70,  
pp. 71-82, pp. 482-483, pp. 485-489 (sur les déterminants fonctionnels ration-  
nels)

**Discriminants** pp. 143-156, pp. 233-238, pp. 344-345, p. 465

**Divariants** p. 174 (nom donné par Salmon)

**Éliminants** p. 96

**Émanants** p. 166 p. 475

**Évectants** pp. 174-177, p. 187, p. 210, p. 260, p. 273 (nom donné par  
Sylvester)

**Hyper-déterminants** p. 492

**Invariants** pp. 157-165, pp. 178-196, p. 202, p. 270

**Osculants** p. 243

**Résultants** p. 96, p. 109, p. 110, p. 111, p. 117, p. 120, p. 123, p. 255,  
p. 293, p. 315, p. 398, p. 465, p. 495, p. 500 (tables de résultants)

**Semi-invariants** p. 251

**Tact-invariants** pp. 241-242

---

273. pp. 569-576 partie de la table analytique avec modifications et ajouts

**Transvectants** p. 457, p. 497

• **Termes en -iens**

**Bézoutiens** voir **Bezoutiants**

**Hessiens** p. 24, p. 168, p. 207, p. 219, p. 259, p. 260, p. 272, p. 284,  
p. 288, p. 327, p. 374, p. 459, p. 489

**Jacobiens** p. 212, p. 168, p. 232, p. 235, p. 254, p. 287, p. 380, p. 393,  
p. 490

## Références

- [1] W. W. Adams et Ph. Loustau. *An introduction to Gröbner bases*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 3. American Mathematical Society. 1996.
- [2] S. Barnett. *A note on the Bezoutian matrix*. SIAM J. Appl. Math. Vol 22. no. 1. Janvier 1972.
- [3] N. Botbol. *Introducción a la teoría de eliminación*. 1999 Mathematics Subject Classification 13P15, 13D02, 13D45, 14Q10. 1 juillet 2012.
- [4] D. Boularas. *Théorie élémentaire des invariants algébriques*. Laboratoire d'Arithmétique, de Calcul formel et d'Optimisation. IREM de Limoges. Jeudi 24 mars 2005.
- [5] A. Bouvier et M. George sous la direction de F. Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. PUF. Paris. 1983.
- [6] E. Briand. *Polynômes multisymétriques*. PhD thesis, Université de Rennes 1 et Universidad de Cantabria. 2002.
- [7] E. Briand. *Brill's equations of the subvariety of the products of linear forms*.
- [8] L. Busé. *Étude du résultant sur une variété algébrique*. Thèse de Docteur en Sciences. Mathématiques. Université de Nice-Sophia Antipolis. Faculté des sciences. Laboratoire J. A. Dieudonné. UMR du CNRS no. 6621. 19 décembre 2001.
- [9] J. Canny. *Generalised characteristic polynomials*. J. symbolic computation. Vol. 9. pp. 241-250. 1990.
- [10] J. Canny et I. Emiris *A subdivision-based algorithm for the sparse resultant*. 20 avril 1999.
- [11] F. Catanese. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants by I. M. Gelfand, M.M. Kapranov and A. V. Zelevinsky*. Birkhäuser. Boston. 1994. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. Vol. 27. no. 2. pp. 183-198. 21 décembre 1999.
- [12] E. Cattani, A. Dickenstein et B. Sturmfels. *Residues and resultants*. Journal of Math. Sciences. The University of Tokyo 5. pp. 119-148. 1998.
- [13] A. Cayley. *On the theory of elimination*. Cambridge and Dublin Math. Journal, 3. pp. 116-120. 1848.
- [14] M. Chardin. *The resultant via a Koszul complex*. In. F. Eyssette and A. Galigo editors. Computational Algebraic Geometry, Vol. 109 of Progress in Mathematics, pp. 29-39. Birkhäuser, Boston. 1993.

- [15] M. Chardin. *Formules à la Macaulay pour les sous-résultants en plusieurs variables*. CRAS. Tome. 319. Serie 1, pp. 433-436. 1994.
- [16] M. Chardin. *Multivariates subresultants*. J. Pure and Appl. Alg. 101. pp. 129-138. 1995.
- [17] E. A. Coutsias, C. Seok, M. J. Wester et K. A. Dill. *Resultants and loop closure*. University of California. Posprints. Paper 1523. 2006.
- [18] D. Cox, J. Little et D. O’Shea. *Ideals, varieties, and algorithms. And introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer-Verlag. New York Berlin Heidelberg. Deuxième édition. 1997.
- [19] C. D’Andréa et A. Dickenstein. *Explicit formulas for the multivariate resultant*. arXiv : math/0007036v1.mathAG. 6 juillet 2000.
- [20] M. Demazure. *Une définition constructive du résultant*. ATP “Méthodes numériques Performantes” du CNRS. AMS subject classification 14M05, 13D25. Mai 1984.
- [21] J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique. Tome 1*. PUF. 1974.
- [22] J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique. Tome 2*. PUF. 1974.
- [23] J. Dixmier et M. Brion. *Quelques aspects de la théorie des invariants et commentaires*. Où en sont les mathématiques ? Société mathématique de France. Chapitre 5. pp. 63-92. Vuibert. Paris. Juillet 2012.
- [24] A. L. Dixon. *The eliminant of three quantics in two independent variables*. Proc. London Math. Soc. 6. pp. 49-69. 1908.
- [25] J. A. Eagon. *Partially split double complexes with and associated Wall complex and application to ideals generated by polynomials*. Journal of algebra 135. pp. 344-362. 1990.
- [26] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag New York, Inc. 1995.
- [27] D. Eisenbud, F-O. Schreyer et J. Weyman. *Resultants and Chow forms via exterior syzygies*. Journal of american mathematical society. Vol 16. no. 3 ; pp. 537-579. 27 février 2003.
- [28] M. Elkadi et B. Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*. Mathématiques & Applications 59. Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2007.
- [29] W. Fulton. *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*. Cambridge University Press. 1996.
- [30] W. Fulton et J. Harris. *Representation Theory. A first Course*. Graduate Texts in Mathematics 129. Springer 2004. BM-UPS-IMT 23398.
- [31] A. M. Garsia *Chapter 1. Invariant theory of finite groups*.

- [32] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser Boston. 1994.
- [33] R. Godement. *Cours d'algèbre. Enseignement des sciences*. Hermann, Paris. 1966.
- [34] P. Gordan. *Le résultant de trois formes quadratiques*. Journal de mathématiques pures et appliquées. 5è série. Tome 3. pp. 195-202. 1897.
- [35] J. J. Gray. *Le Défi de Hilbert. Un siècle de mathématiques*. Dunod. Paris. 2003.
- [36] B. Grenet. *Difficulté du résultant et des grands déterminants*. Rapport de recherche RRLIP2009-32. ENS Lyon-CNRS-UCBL-INRIA. 12 novembre 2009.
- [37] Y. Guan. *Brill's equations as a  $GL(V)$ -module*. arXiv : 1508.02293v2 [math.AG]. 17 avril 2016.
- [38] G.H. Hardy et E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford at the Clarendon press. 4ème édition. 1960.
- [39] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag New York, Inc. 1977.
- [40] G. Heinig et K. Rost. *Bezoutians*. 2000.
- [41] U. Helmke et P. A. Fuhrmann. *Bezoutians. Linear algebra and its application*. 122/123/124. pp. 1039-1097. Elsevier Science Publishing Co, Inc. 1989.
- [42] D. Hilbert. *Über die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe*. J. Reine und angew. Math. 103 pp. 337-345. 1888.
- [43] D. Hilbert. *Theory of algebraic invariants*. Cambridge university press. 1993.
- [44] A. Hurwitz. *Über Trägheitsformen*. Ann. di. Mat. 3a Serie. Vol 20. 1913.
- [45] J-P. Jouanolou. *Le formalisme du résultant*. Adv. in Maths 90. no. 2. pp. 117-263. 1991.
- [46] J-P. Jouanolou. *Résultant anisotrope. Compléments et applications*. The electronic journal of combinatorics 3(2). 1996.
- [47] J-P. Jouanolou. *Formes d'inertie et résultant*. Advances in Mathematics 126. pp. 119-250. 1997.
- [48] A. Khetan. *Determinantal formula for the Chow form of a toric surface*. ISSAC 2002. Lille. France. 7-10 juillet 2002.
- [49] A. Khetan. *The resultant of an unmixed bivariate system*. arXiv : math/0209115 vi [math.AG]. 11 septembre 2002.

- [50] I. Kiyosi. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics (EDM) by the Mathematical Society of Japan. 2nd edition.* The MIT Press. Cambridge, Massachussets, Londres, Angleterre. 1960.
- [51] H. Kraft et C. Procesi. *Classical invariant theory. A primer.* Preliminary version. Juillet 1996.
- [52] M. Krir. *Polarisation de fonctions symétriques.* Publications mathématiques de Besançon. 2012.
- [53] J. P. S. Kung et G-C. Rota. *The invariant theory of binary forms.* Bulletin AMS. Vol. 10. no. 1. Janvier 1984.
- [54] S. Lang. *Algebra. Third edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1993.
- [55] A. Lascoux et P. Pragacz. *Bezoutians, euclidian algorithm, and orthogonal polynomials. X.*
- [56] E. Lucas. *Théorie des nombres.* Éditions Jacques Gabay, Sceaux. 1991.
- [57] F. S. Macaulay. *Some formulae in elimination.* Proc. London Math. Soc. 1 33. pp. 3-27. 1902.
- [58] F. S. Macaulay. *The algebraic theory of modular sustems.* Stechert-Hafner Service Agency, Inc. New York et Londres. 1964.
- [59] I.G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall polynomials.* Second Edition. Claredon Press. Oxford. 1995. BM-UPS-IMT 016281.
- [60] A. Mantzaflaris. *Multihomogeneous resultant matrices for systems with scaled support.* ISSAC'09. Séoul. 2009.
- [61] C. Mutafian. *Équations algébriques et théorie de Galois. Thèmes Vuibert université. Mathématiques.* Librairie Vuibert, Paris. 1980.
- [62] P. J. Olver. *Classical invariant theory.* London Mathematical Society. Student Texts 44. Cambridge University Press. 1999.
- [63] J. Rambau. *Polyhedral subdivisions and projections of polytopes.* Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik. Berlin (ZIB). 20 mars 1998.
- [64] G. Salmon. *Leçons d'algèbre supérieure* Gauthier-Villars et fils. Paris. 1890.
- [65] P. Samuel. *Théorie algébrique des nombres. Collection Méthodes.* Hermann, Paris. 1971.
- [66] P. F. Stiller. *An introduction to the theory of resultants.* Date inconnue.
- [67] B. Sturmfels et A. Zelevinsky. *Multigraded resultants of the Sylvester type.* Journal of algebra 163. pp. 115-127. 1994.

- [68] B. Sturmfels. *Solving systems of polynomial equations*. Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). AMS. Providence. Rhode Island. no. 97. 2002.
- [69] B. Sturmfels. *Algorithms in invariant theory*. Springer-Verlag. Wien New York. Deuxième édition 2008.
- [70] G. Valiron. *Théorie des fonctions*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico. Troisième édition. Deuxième tirage. 1990.
- [71] B.L. van der Waerden. *Algebra. Volume 2*. Springer-Verlag. New York Inc. 1991.
- [72] E. W. Weisstein. *CRC Concise encyclopedia of mathematics*. CRC Press LLC. 1999.
- [73] H. Weyl. *The classical groups. Their invariants and representations*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. Deuxième édition. 1953.
- [74] J. Weyman. *Calculating discriminants by higher direct images*. Transactions of the american mathematical society. Vol. 43. no. 1. Mai 1994.
- [75] J. Weyman et A. Zelevinsky. *Determinantal formulas for multigraded resultants*. J. algebraic geometry 3. pp. 569-597. 1994.