



**HAL**  
open science

# Programmation linéaire en nombres entiers pour l'ordonnement de projet multi-compétence avec préemption partielle

Christian Artigues, Pierre Lopez, Oliver Polo Mejía

► **To cite this version:**

Christian Artigues, Pierre Lopez, Oliver Polo Mejía. Programmation linéaire en nombres entiers pour l'ordonnement de projet multi-compétence avec préemption partielle. 13th International Conference on Modeling, Optimization and Simulation (MOSIM 2020), Nov 2020, Agadir, Maroc. hal-03010078

**HAL Id: hal-03010078**

**<https://laas.hal.science/hal-03010078>**

Submitted on 17 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# PROGRAMMATION LINEAIRE EN NOMBRES ENTIERS POUR L'ORDONNANCEMENT DE PROJET MULTI-COMPETENCE AVEC PREEMPTION PARTIELLE

Christian ARTIGUES, Pierre LOPEZ, Oliver POLO MEJIA

LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, France  
{christian.artigues, pierre.lopez, oliver.polo-mejia}@laas.fr

**RÉSUMÉ :** Dans cet article, nous considérons le problème d'ordonnancement de projet à compétences multiples connu dans la littérature sous l'abréviation MSPSP (multi-skill project scheduling problem). Nous proposons une nouvelle variante de ce problème en intégrant le concept original de préemption partielle. Il s'agit d'une version de la préemption où seul un sous-ensemble de ressources est libéré pendant les périodes de préemption, au croisement donc des cas considérés dans les versions préemptives (toutes les ressources sont libérées pendant les périodes de préemption) et non-préemptives (pas d'interruption des activités). Le problème d'ordonnancement de projet à compétences multiples avec préemption partielle qui en résulte, appelé MSPSP-PP, est modélisé mathématiquement par différentes formulations en programmation linéaire en nombres entiers. Des études théoriques et expérimentales permettent d'évaluer les performances respectives des formulations proposées.

**MOTS-CLÉS :** recherche opérationnelle, ordonnancement de projet, multi-compétence, préemption partielle, programmation linéaire en nombres entiers.

## 1 INTRODUCTION

Les problèmes d'ordonnancement préemptif supposent que toutes les ressources sont libérées pendant les périodes de préemption et qu'elles peuvent être utilisées pour d'autres activités. Cependant, dans certains cas, les contraintes exigent qu'un sous-ensemble de ressources restent affectées à l'activité lorsque celle-ci a été interrompue, pour des questions de sécurité par exemple. Supposons que l'on doive exécuter une activité expérimentale qui nécessite une atmosphère inerte pour son exécution. En pratique, on peut arrêter cette activité et permettre aux techniciens et à une partie des équipements d'être utilisés pour d'autres activités. Cependant, des contraintes de sécurité et de fonctionnement peuvent nous obliger à préserver l'atmosphère inerte même lorsque l'activité est suspendue. En d'autres termes, on ne peut pas libérer les équipements qui assurent l'atmosphère inerte pendant les périodes de préemption. Les modèles traditionnels de calendrier de préemption ne peuvent pas représenter ce comportement puisqu'ils supposent que toutes les ressources sont libérées pendant les périodes de préemption. Jusqu'à présent, la seule façon de modéliser ce type d'activité, tout en respectant les exigences de sécurité, était de la déclarer "non-préemptive". Cependant, cette décision peut augmenter la durée du projet, en particulier lorsque les activités ont des fenêtres temporelles restrictives

et que disponibilité et capacité des ressources varient dans le temps. Nous appelons *préemption partielle* la possibilité de ne libérer qu'un sous-ensemble de ressources pendant les périodes de préemption d'une activité.

Nous nous intéressons ici au problème d'ordonnancement de projet multi-compétence (*multi-skill project scheduling problem* ou MSPSP) (Néron, 2002), (Bellenguez et Néron, 2008), (Montoya *et al.*, 2015). Nous présentons dans cet article une nouvelle variante du MSPSP qui utilise le concept de préemption partielle. Cette variante, appelée problème d'ordonnancement de projet multi-compétence avec préemption partielle (MSPSP-PP), n'a pas, à notre connaissance, été étudiée par d'autres auteurs dans la littérature scientifique (Hartman et Briskorn, 2010), (Orji et Wei, 2013).

Dans le MSPSP-PP, si une activité est interrompue, un sous-ensemble de ressources est libéré pendant que le sous-ensemble complémentaire reste associé à l'activité. L'ensemble  $\bar{I}$  d'activités peut être classé en trois types selon la possibilité de libérer les ressources pendant les périodes de préemption : 1) les activités non-préemptives ( $\overline{NP}$ ), si aucune des ressources ne peut être libérée ; 2) les activités partiellement préemptives ( $\overline{PP}$ ), si un sous-ensemble de ressources peut être libéré ; et 3) les activités préemptives ( $\overline{P}$ ), si toutes les

Activité	Durée	(Compétence requise, Quantité)	(Ressource requise, Quantité)	Date échu	Date de disponibilité	Type
$A_1$	4	$(c_1, 1)$	$(M_1, 1)$	–	–	$\bar{P}$
$A_2$	2	$(c_3, 1), (c_4, 1)$	$(M_1, 1)$	5	3	$\overline{NP}$
$A_3$	4	$(c_2, 1)$	$(M_1, 1)$	–	–	$\overline{PP}$ ( $M_1$ ne doit pas être libérée)

Technicien	Compétences maîtrisées	Ressource	Capacité
$tech_1$	$\{c_1, c_3\}$	$M_1$	2
$tech_2$	$\{c_2, c_4\}$		

Tableau 1 – Exemple d'instance de problème d'ordonnement de projet multi-compétence partiellement préemptif (MSPSP-PP)

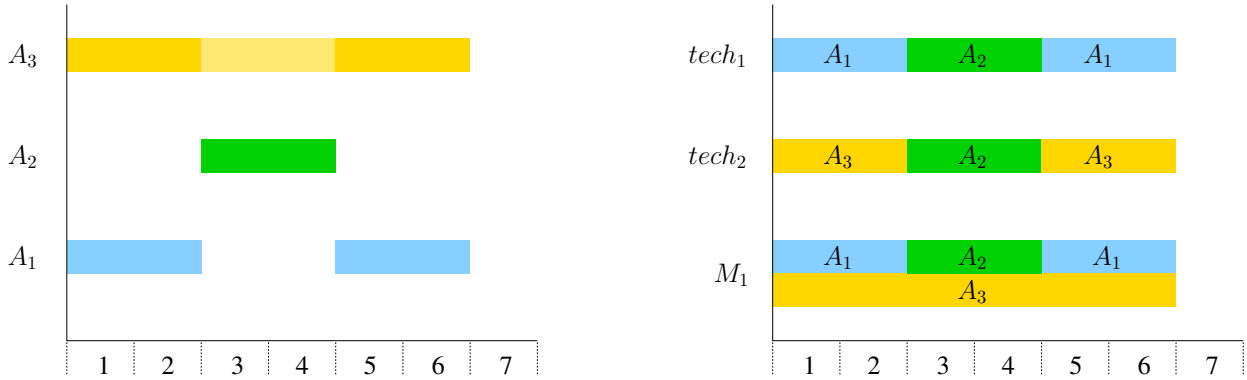


FIGURE 1 – Solution admissible de l'instance du tableau 1

ressources peuvent être libérées.

Motivés par une application réelle (Polo Mejía *et al.*, 2019b), notre objectif au niveau de l'ordonnement est essentiellement de réaliser toutes les tâches dans la limite d'un horizon imposé, en respectant toutes les contraintes, notamment celles propres au MSPSP liées aux compétences des techniciens. Cela justifie la considération d'une fonction objectif de minimisation de la durée totale du projet (*makespan*  $C_{\max}$ ), qui permet de réaliser toutes les tâches au plus tôt en maximisant naturellement l'utilisation des ressources.

Trouver une solution consiste à déterminer les périodes pendant lesquelles chaque activité est exécutée et quelles ressources exécuteront l'activité dans chaque période, tout en respectant la capacité des ressources et les caractéristiques des activités. Les ressources considérées sont renouvelables et à capacité limitée. Il peut s'agir de ressources monovalentes (à compétence unique) cumulatives (machines ou équipements) ou de ressources polyvalentes (multi-compétences) disjonctives (techniciens) maîtrisant plusieurs compétences. Les ressources poly-

valentes peuvent répondre à plus d'une exigence de compétence par activité et peuvent l'exécuter partiellement (sauf pour les activités non-préemptives où les techniciens doivent exécuter l'activité entière). Dans notre étude, la préemption partielle ne concerne que les ressources monovalentes (ensemble  $\bar{K}$ ). Plus précisément si une activité est soumise à la préemption partielle, alors c'est la ressource monovalente qu'elle utilise qui ne peut être libérée.

Une activité  $i$  est définie par sa durée  $D_i$ , ses relations de précédence  $(i, l) \in \bar{E}$ , son besoin  $Br_{i,k}$  d'une ressource  $k \in \bar{K}$  disponible en quantité  $DR_{k,t}$  en période  $t$ , son besoin  $Bc_{i,c}$  d'une compétence  $c \in \bar{C}$ , le nombre minimum de techniciens nécessaires pour l'exécuter  $Nt_i$  et le sous-ensemble de ressources préemptives. Les activités peuvent avoir ou non une date de disponibilité  $r_i$  et une date d'échéance  $d_i$  (périodes). Le tableau 1 et la figure 1 illustrent un exemple d'une instance MSPSP-PP et une solution possible.

La complexité du MSPSP-PP peut être établie en utilisant le RCPSP (*Resource-Constrained Project Scheduling Problem*) classique comme point de départ. A

chaque instance du RCPSP, nous pouvons faire correspondre une instance du MSPSP-PP, où toutes les ressources sont monovalentes et aucune d'elles ne peut être préemptée. Ainsi, nous pouvons définir le RCPSP comme un cas particulier du MSPSP-PP. Etant donné la forte NP-difficulté démontrée du RCPSP (Blazewicz *et al.*, 1983), nous pouvons donc en déduire que le MSPSP-PP est également NP-difficile au sens fort.

Dans la suite, nous présentons cinq formulations du MSPSP-PP utilisant la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) et nous étudions leurs performances respectives par des comparaisons théoriques et expérimentales.

## 2 FORMULATIONS MATHÉMATIQUES

Nous présentons dans ce paragraphe quatre formulations du MSPSP-PP indexées par le temps sur un horizon discrétisé  $\bar{H}$ .

Ces formulations généralisent celles déjà proposées dans (Polo Mejía *et al.*, 2018), (Polo Mejía *et al.*, 2019b) et de nouvelles comparaisons théoriques et expérimentales sont présentées par rapport à ces précédents travaux. Tous les modèles sont basés sur des variables binaires on/off  $Y_{i,t}$  indiquant si une activité  $i$  est en cours pendant la période  $t$ , des variables binaires on/off  $O_{j,i,t}$  pour un technicien  $j \in \bar{J}$  affecté à une activité  $i \in \bar{I}$  pendant la période  $t \in \bar{H}$ , des variables binaires  $S_{j,i}$  pour un technicien  $j$  affecté à une activité non-préemptive  $i$  (tout technicien affecté à une activité non-préemptive doit y rester affecté jusqu'à ce que l'activité soit terminée). Pour toute activité partiellement préemptive  $i$ , une variable binaire on/off  $Pp_{i,t}$  indique si l'activité  $i$  est préemptée dans la période  $t$ .

### 2.1 Modèle MSPP1

Pour le premier type de modèle, nous utilisons une variable binaire de type "step"  $Z_{i,t}$  qui précise si l'activité partiellement préemptive ou non-préemptive  $i$  commence en période  $t$  ou avant, et une variable binaire du même type  $W_{i,t}$  pour une activité partiellement préemptive ou non-préemptive  $i$  se terminant en période  $t$  ou après. La première formulation (nommée MSPP1a) s'écrit comme décrit au tableau 2.

L'expression (1) correspond à la fonction objectif de minimisation du makespan du projet. Les contraintes (2) assurent la satisfaction des besoins en ressources pendant les périodes d'exécution ( $Y_{i,t} = 1$ ) et aussi la satisfaction des besoins en ressources non-préemptives ( $PR_{i,k} = 1$ ) pendant les périodes de préemption ( $Pp_{i,t} = 1$ ). Les contraintes (3) garantissent le respect de la disponibilité des techniciens, et la contrainte disjonctive;  $DO_{j,t} = 1$  si le technicien  $j$  est disponible en période  $t$ . Avec les contraintes

(4) et (5), nous garantissons que les besoins en ressources, compétences et nombre minimal de techniciens sont satisfaits pendant les périodes d'exécution;  $CO_{j,c} = 1$  si le technicien  $j$  maîtrise la compétence  $c$ . Les contraintes (6) imposent que chaque activité s'exécute durant toute sa durée et dans sa fenêtre temporelle. Les contraintes de précédence sont indiquées dans (7). Ces contraintes expriment le fait que, dans tous les cas, la somme des parties de  $i$  en exécution à partir de  $t$  ne peut excéder la quantité  $D_i$ ; de plus, si  $l$  est en exécution en période  $t$ , l'activité  $i$ , qui doit précéder l'activité  $l$ , ne peut pas être en exécution sur toute période à partir de  $t$ . Les contraintes (8) obligent la variable binaire auxiliaire  $Z_{i,t}$  à être égale à 1 pour toutes les périodes à partir de la date de début de l'activité. Les contraintes (9), en revanche, forcent la variable binaire auxiliaire  $W_{i,t}$  à être égale à 1 pour toutes les périodes jusqu'à la date d'achèvement de l'activité. Grâce aux contraintes (10), nous déterminons les périodes pendant lesquelles une activité partiellement préemptive a été préemptée (ou non). Ces contraintes stipulent que les activités dans leur intervalle d'exécution ( $Z_{i,t} = 1$  et  $W_{i,t} = 1$  simultanément) doivent être soit en exécution ( $Y_{i,t} = 1$ ) soit préemptées ( $Pp_{i,t} = 1$ ). Les contraintes (11) garantissent que les activités non-préemptives ne sont pas interrompues. Les contraintes (12) et (13) stipulent que tous les techniciens affectés à une activité non-préemptive doivent l'exécuter jusqu'à son terme. Enfin, les contraintes (14) expriment la durée totale du projet.

Grâce aux variables  $W_{i,t}$  et  $Z_{i,t}$ , nous pouvons aussi utiliser une version désagrégée des contraintes de précédence (7) :

$$Z_{l,t} + W_{i,t} \leq 1 \quad \forall (i, l) \in \bar{E}, \forall t \in \bar{H} \quad (15)$$

Le modèle où les contraintes (7) sont remplacées par les contraintes (15) est appelé MSPP1b.

### 2.2 Modèle MSPP2

Nous proposons également deux modèles mixtes continu/discret (MSPP2a et MSPP2b), en remplaçant les variables binaires  $W_{i,t}$  et  $Z_{i,t}$  par des variables à temps continu  $G_i$  et  $F_i$  représentant respectivement les dates de début et de fin de l'activité  $i$ . Nous remplaçons ainsi les contraintes (7–11) du modèle MSPP1a par les contraintes (16–21) ci-après :

$$\begin{aligned} & \min(C_{\max}) & (1) \\ \left( \sum_{i \in \bar{I}} Y_{i,t} + \sum_{i \in \overline{PP}} PR_{i,k} * Pp_{i,t} \right) * Br_{i,k} & \leq DR_{k,t} & \forall k \in \bar{K}, \forall t \in \bar{H} & (2) \\ \sum_{i \in \bar{I}} O_{j,i,t} & \leq DO_{j,t} & \forall j \in \bar{J}, \forall t \in \bar{H} & (3) \\ Y_{i,t} * Bc_{i,c} & \leq \sum_{j \in \bar{J}} (O_{j,i,t} * CO_{j,c}) & \forall i \in \bar{I}, \forall c \in \bar{C}, \forall t \in \bar{H} & (4) \\ \sum_{j \in \bar{J}} O_{j,i,t} & \geq Y_{i,t} * Nt_i & \forall i \in \bar{I}, \forall t \in \bar{H} & (5) \\ \sum_{t=\max(1,r_i)}^{\min(d_i, |\bar{H}|)} Y_{i,t} & \geq D_i & \forall i \in \bar{I} & (6) \\ D_i * (1 - Y_{l,t}) & \geq \sum_{t'=t}^{\bar{H}} Y_{i,t'} & \forall (i, l) \in \bar{E}, \forall t \in \bar{H} & (7) \\ Z_{i,t} & \geq Y_{i,t'} & \forall i \notin \bar{P}, \forall t \in \bar{H}, \forall t' \leq t & (8) \\ W_{i,t} & \geq Y_{i,t'} & \forall i \notin \bar{P}, \forall t \in \bar{H}, \forall t' \geq t & (9) \\ Pp_{i,t} & = Z_{i,t} + W_{i,t} - Y_{i,t} - 1 & \forall i \in \overline{PP}, \forall t \in \bar{H} & (10) \\ Z_{i,t} + W_{i,t} - Y_{i,t} & = 1 & \forall i \in \overline{NP}, \forall t \in \bar{H} & (11) \\ O_{j,i,t} & \geq S_{j,i} + Y_{i,t} - 1 & \forall i \in \overline{NP}, \forall j \in \bar{J}, \forall t \in \bar{H} & (12) \\ O_{j,i,t} & \leq S_{j,i} & \forall i \in \overline{NP}, \forall j \in \bar{J}, \forall t \in \bar{H} & (13) \\ C_{\max} & \geq t * Y_{i,t} & \forall i \in \bar{I}, \forall t \in \bar{H} & (14) \end{aligned}$$

Tableau 2 – Modèle MSPP1a

$$\begin{aligned} F_i + 1 & \leq G_i & \forall (i, l) \in \bar{E} & (16) \\ Pp_{i,t} & \leq 1 - Y_{i,t} & \forall i \in \overline{PP}, \forall t \in \bar{H} & (17) \\ F_i - G_i + 1 & \leq D_i \\ & + \sum_{t \in H} Pp_{i,t} & \forall i \in \overline{PP} & (18) \\ F_i - G_i + 1 & \leq D_i & \forall i \in \overline{NP} & (19) \\ F_i & \geq t * Y_{i,t} & \forall i \in \bar{I}, \forall t \in \bar{H} & (20) \\ G_i & \leq t * Y_{i,t} \\ +(1 - Y_{i,t}) * |\bar{H}| & & \forall i \in \bar{I} & (21) \end{aligned}$$

Il reste à exprimer le fait que les variables de préemption partielle  $Pp_{i,t}$  doivent être égales à 0 en dehors de l'intervalle d'exécution de  $i$ . Nous utilisons, soit les contraintes (22) utilisant les variables  $Y$  (MSPP2a) :

$$\left. \begin{aligned} Pp_{i,t} & \leq \sum_{t'=1}^t Y_{i,t'} \\ Pp_{i,t} & \leq \sum_{t'=t}^{|\bar{H}|} Y_{i,t'} \end{aligned} \right\} \forall i \in \overline{PP}, \forall t \in \bar{H} \quad (22)$$

soit les contraintes (23) utilisant les variables  $F$  et  $G$  (MSPP2b) :

$$\left. \begin{aligned} F_i & \geq t * Pp_{i,t} \\ G_i & \leq t * Pp_{i,t} - (1 - Pp_{i,t}) * |\bar{H}| \end{aligned} \right\} \forall i \in \overline{PP}, \forall t \in \bar{H} \quad (23)$$

Les relations de précedence sont données par les contraintes (16). Les contraintes (17) indiquent que  $Pp_{i,t}$  doit être égale à zéro si l'activité  $i$  est en exécution en période  $t$ . Les contraintes (18) font en sorte que  $Pp_{i,t}$  prenne la valeur 1 pour les périodes où l'activité  $i$  a été préemptée. Les contraintes (19) garantissent que les activités de  $\overline{NP}$  ne sont pas préemptées. La date de fin de chaque activité est calculée grâce aux contraintes (20). Enfin, les contraintes (21) donnent la date de début de chaque activité.

Dans la suite (paragrapes 3 et 4), nous comparons les formulations PLNE proposées en termes de qualité de borne obtenue par relaxation linéaire et de résultats expérimentaux sur des instances de problèmes.

### 3 COMPARAISON THEORIQUE DES FORMULATIONS

En utilisant les expressions de  $G_i$  et  $F_i$ , nous pouvons montrer que les contraintes du modèle MSPP2 sont toutes couvertes par les contraintes du modèle MSPP1.

**Théorème 1.** *Le modèle MSPP1 domine le modèle MSPP2.*

*Démonstration.* Nous opérons la transformation suivante (en rappelant que  $G_i$  et  $F_i$  correspondent respectivement aux dates de début et de fin de l'activité  $i$ ) :

$$G_i = |\overline{H}| - \sum_{t \in \overline{H}} Z_{i,t} + 1 \text{ et } F_i = \sum_{t \in \overline{H}} W_{i,t}$$

Nous montrons dans la suite que les contraintes du modèle MSPP2 impliquant les variables  $F_i$  sont couvertes par les contraintes du modèle MSPP1 sur lequel nous avons effectué la transformation (nous nous restreignons aux activités dans  $\overline{PP}$  sans perte de généralité) en inscrivant les valeurs des variables binaires dans l'intervalle continu  $[0, 1]$ .

En lien avec les contraintes (18), on a :

$$F_i - G_i + 1 = \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} W_{i,t} + \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} Z_{i,t} - |\overline{H}|$$

que l'on peut simplifier, par l'expression (10), en :

$$\begin{aligned} F_i - G_i + 1 &= \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} Pp_{i,t} + \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} Y_{i,t} \\ &= \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} Pp_{i,t} + D_i \end{aligned}$$

En lien avec les contraintes (16), on a :

$$G_i - F_i - 1 = |\overline{H}| - \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} Z_{l,t} - \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} W_{i,t}$$

L'expression (16) est satisfaite si et seulement si :

$$\sum_{t=1}^{|\overline{H}|} Z_{l,t} + \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} W_{i,t} \leq |\overline{H}|$$

qui est une conséquence des contraintes de précédence (15).

En utilisant les contraintes (9) et  $F_i = \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} W_{i,t}$ , nous arrivons également aux contraintes (20). Les contraintes (21) sont impliquées par les contraintes (9) et  $G_i = |\overline{H}| - \sum_{t=1}^{|\overline{H}|} Z_{i,t} + 1$ .

Le modèle MSPP1 est donc au moins aussi bon que le modèle MSPP2. De plus, comme les résultats expérimentaux (cf. paragraphe 4) montrent qu'il y a des

cas où le modèle MSPP1 a une relaxation linéaire strictement meilleure que le modèle MSPP2, nous en déduisons que le modèle MSPP1 domine le modèle MSPP2.  $\square$

La dominance du modèle MSPP1 sur le modèle MSPP2 étant faite, nous avons également tenté d'établir une relation d'ordre entre les modèles MSPP1a et MSPP1b. Nous n'avons pas pu prouver de relation de dominance théorique entre ces modèles. En outre, les résultats expérimentaux montrent que tantôt certaines bornes obtenues par relaxation du modèle MSPP1a sont meilleures que celles obtenues par relaxation du modèle MSPP1b, tantôt le contraire (sur 200 instances générées, les résultats sont en faveur de MSPP1a pour 45 instances, en faveur de MSPP1b pour 6 instances, les résultats étant identiques pour le reste des 149 instances pour les deux formulations). Ceci justifie la proposition du modèle MSPP1c intégrant les deux types de formulation des contraintes de précédence (7) et (15), qui assure de toujours trouver la meilleure borne de relaxation.

### 4 RESULTATS EXPERIMENTAUX

Pour les campagnes d'expérimentation, nous avons utilisé un ordinateur équipé d'un processeur Intel Xeon E5-2695 à 2,3 GHz fonctionnant sous Ubuntu 16.04. Nous utilisons le solveur IBM ILOG CPLEX 12.7 en utilisant la configuration par défaut et en limitant le nombre de threads utilisés par les solveurs à 8. Le temps de calcul a été limité à 10 minutes. Nous avons généré quatre ensembles, chacun de 50 instances, en faisant varier aléatoirement la proportion de type de préemption dans l'instance (tableau 3). Toutes les instances ont 30 activités d'une durée comprise entre 5 et 10 unités de temps, jusqu'à 15 compétences, 8 ressources cumulatives, 8 techniciens (ressources polyvalentes) répartis en deux équipes, 20% des activités ont des fenêtres de temps, une densité faible de relations de précédence, et un makespan optimal moyen  $C_{\max}$  compris entre 70 et 90 unités de temps.

Données	A1	B1	C1	D1
$\overline{NP}$	10%	10%	80%	33.3%
$\overline{PP}$	10%	80%	10%	33.3%
$\overline{P}$	80%	10%	10%	33.3%

Tableau 3 – Distribution des types de préemption pour les instances du MSPSP-PP

Nous commençons par tester les performances des différentes variantes du modèle MSPP1. Comme les formulations indexées par le temps nécessitent une première estimation de l'horizon de planification, nous avons tout d'abord testé les formulations en utili-

sant la somme des durées d'activité comme horizon de planification. Pour améliorer les performances, nous avons ensuite bénéficié de l'option de démarrage à chaud ("warm start") de CPLEX en utilisant une première solution obtenue par un algorithme glouton (Polo Mejía *et al.*, 2019a). Le tableau 4 présente le nombre de cas pour lesquels l'optimalité a été prouvée, le temps moyen nécessaire pour prouver l'optimalité et l'écart moyen d'optimalité (distance entre la solution optimale ou la meilleure borne inférieure connue et la solution obtenue) pour chaque configuration du modèle MSPP1. D'après ces résultats, on peut conclure que l'utilisation simultanée des contraintes (7) et (15) (modèle MSPP1c) n'améliore pas les performances en pratique de la formulation MSPP1. En fait, elle peut même avoir un impact négatif puisqu'elle réduit le nombre de cas pour lesquels l'optimalité a été prouvée. Les configurations MSPP1a et MSPP1b ont un comportement similaire, et les tests statistiques ne permettent pas de dégager une différence sur le temps moyen pour obtenir l'optimalité ou sur l'écart à l'optimum. Toutes les formulations du modèle MSPP1 sont plus performantes lorsque la proportion d'activités préemptives est élevée (données A1). Cette performance diminue lorsque la proportion diminue, obtenant les plus mauvais résultats pour les données C1.

Une analyse similaire a été effectuée pour tester les deux formulations du modèle MSPP2. Là encore, inutile de se passer de la possibilité d'un démarrage à chaud qui améliore les performances à tous les niveaux. Le tableau 5 présente les résultats pour les deux configurations avec "warm start". Comme pour le modèle MSPP1, les performances du modèle MSPP2 s'amoindrissent avec l'augmentation du nombre d'activités non-préemptives. Rien ne permet réellement de conclure qu'une formulation domine l'autre. Toutefois, pour les données A1 (forte proportion d'activités préemptives), on peut dire que la configuration MSPP2b est plus rapide, et permet d'obtenir un écart moyen à l'optimum plus faible. Pour tous les autres jeux de données, les performances semblent être statistiquement égales.

Si nous comparons les résultats des meilleures formulations du modèle MSPP1 et du modèle MSPP2, nous pouvons conclure que le modèle MSPP1b est capable de prouver l'optimalité pour un plus grand nombre d'instances, et de donner un écart moyen plus faible pour tous les ensembles d'instances. Cependant, le modèle MSPP2b semble être plus rapide pour les cas des jeux d'instances A1 (nombre d'activités préemptives élevé). Pour une forte proportion d'activités non-préemptives, les deux modèles peinent à prouver l'optimalité. Ces résultats confirment qu'une formulation théoriquement plus forte n'implique pas nécessairement de meilleures performances en pratique.

## 5 CONCLUSION

Nous proposons dans cet article différentes formulations mathématiques de programmation linéaire en nombres entiers pour le problème d'ordonnancement de projet multi-compétence avec préemption partielle. Les formulations proposées sont comparées de manière théorique et expérimentale. Ces formulations obtiennent de meilleurs résultats que celle proposée par Maghsoudlou *et al.* (2019) pour le cas préemptif. Notons aussi que des approches de programmation par contraintes (Polo Mejía *et al.*, 2018), (Polo Mejía *et al.*, 2019b) dominent la meilleure formulation de PLNE sur les instances fortement non-préemptives, alors que les formulations de PLNE sont supérieures sur les instances préemptives. La conception d'une méthode exacte hybride serait ainsi une suite possible à ces recherches, ainsi que des analyses polyédrales poussées pour le RCPSP (partiellement) préemptif.

## REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient le SETC/DEC/DEN du CEA Cadarache, Saint-Paul-lez-Durance, France.

## REFERENCES

- Bellenguez-Morineau O. and E. Néron, 2008. Multi-mode and multi-skill project scheduling problem. In *Resource-constrained project scheduling: models, algorithms, extensions and applications*, C. Artigues, S. Demassey, E. Néron (Eds.), Wiley-ISTE, p. 149-160.
- Blazewicz J., J.K. Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan, 1983. Scheduling projects subject to resource constraints: classification and complexity. *Discrete Applied Mathematics*, 5, p. 11-24.
- Hartmann S. and D. Briskorn, 2010. A survey of variants and extensions of the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 207(1), pp. 1-14.
- Montoya C., O. Bellenguez-Morineau, E. Pinson and D. Rivreau, 2015. Integrated column generation and lagrangian relaxation approach for the multi-skill project scheduling problem. *Handbook on Project Management and Scheduling*, Springer International, pp. 565-586.
- Néron E., 2002. Lower bounds for the multi-skill project scheduling problem. *Proceedings of the Eighth International Workshop on Project Management and Scheduling*, pp. 274-277, Valencia, Spain.
- Orji I. M. J. and S. Wei, 2013. Project scheduling under resource constraints : A recent survey.

	MSPP1a			MSPP1b			MSPP1c		
	Nombre d'instances optimales	Temps moyen à l'optimum	Ecart moyen	Nombre d'instances optimales	Temps moyen à l'optimum	Ecart moyen	Nombre d'instances optimales	Temps moyen à l'optimum	Ecart moyen
A1	44	122.64 s	0.12 %	47	110.85 s	0.01%	47	123.28 s	0.05 %
B1	20	240.37 s	1.59 %	19	262.99 s	1.68 %	15	204.79 s	2.16 %
C1	0	-	9.37 %	0	-	9.43 %	0	-	9.43%
D1	16	286.36 s	2.23 %	18	289.35 s	1.85 %	16	267.32 s	2.30 %
Global	80	184.81 s	3.33 %	84	183.51 s	3.24 %	78	168.50 s	3.48 %

Tableau 4 – Résultats du modèle MSPP1 avec “warm start”

	MSPP2a			MSPP2b		
	Nombre d'instances optimales	Temps moyen à l'optimum	Ecart moyen	Nombre d'instances optimales	Temps moyen à l'optimum	Ecart moyen
A1	45	124.23 s	0.09%	46	87.39 s	0.05%
B1	14	119.19 s	2.79%	15	154.12 s	2.69%
C1	0	-	9.45%	0	-	9.45%
D1	19	194.22 s	2.12%	19	216.12 s	1.99%
Global	78	140.37 s	3.61%	80	130.48 s	3.55%

Tableau 5 – Résultats pour le modèle MSPP2 avec “warm start”

*International Journal of Engineering Research and Technology*, 2(2), pp. 1-20.

Maghsoudlou H., B. Afshar-Nadja, and S.T.A. Niaki, 2019. Preemptive multi-skilled resource constrained project scheduling problem with hard/soft interval due dates. *RAIRO-Operations Research*, 53(5), p. 1877-1898.

Polo Mejía, O., M.-C. Anselmet, C. Artigues, and P. Lopez, 2018. Mixed-integer and constraint programming formulations for a multi-skill project scheduling problem with partial preemption. *12th International Conference on Modelling, Optimization and Simulation (MOSIM 2018)*, Toulouse, France, p. 367–374.

Polo Mejía, O., C. Artigues, and P. Lopez, 2019a. A heuristic method for the multi-skill project scheduling problem with partial preemption. *8th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2019)*, Prague, Czech Republic, p. 111-120.

Polo Mejía, O., C. Artigues, P. Lopez, and V. Basini, 2019b. Mixed-integer/linear and constraint programming approaches for activity scheduling in a nuclear research facility. *International Journal of Production Research*, DOI:10.1080/00207543.2019.1693654.