



HAL
open science

Tour d'horizon sur les systèmes dynamiques hybrides

Isabelle Queinnec, Sophie Tarbouriech, Luca Zaccarian

► **To cite this version:**

Isabelle Queinnec, Sophie Tarbouriech, Luca Zaccarian. Tour d'horizon sur les systèmes dynamiques hybrides. Les Techniques de l'Ingenieur, 2023, pp.Réf: S7434 v1. 10.51257/a-v1-s7434. hal-03946527

HAL Id: hal-03946527

<https://laas.hal.science/hal-03946527>

Submitted on 9 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Tour d'horizon sur les systèmes dynamiques hybrides

Isabelle Queinnec¹, Sophie Tarbouriech¹, Luca Zaccarian^{1,2}

¹ LAAS-CNRS, Toulouse, France

² Université de Trento, Italie

Résumé

Cet article propose un tour d'horizon sur les systèmes dynamiques hybrides, c'est-à-dire les systèmes combinant des dynamiques continues et des dynamiques discrète. Après avoir présenté le formalisme hybride qui permet de traiter cette classe de systèmes, les concepts clés de solutions et de stabilité sont abordés via des définitions mathématiques et illustrés par des exemples. Des conditions suffisantes pour prouver la stabilité asymptotique uniforme globale pour un système dynamique hybride sont alors proposées via l'utilisation d'une fonction de Lyapunov, associée dans certains cas au principe d'invariance de LaSalle.

Mots-clés : Systèmes dynamiques hybrides, Stabilité, Attracteur, Systèmes à réinitialisation.

Abstract

This paper provides an overview of hybrid dynamical systems, namely systems that comprise continuous and discrete dynamics. After presenting a mathematical framework that allows describing this class of systems, the key ideas behind the solution and stability concepts are presented mathematically and illustrated by examples. Some sufficient conditions for proving global uniform asymptotic stability are then proposed, by relying on Lyapunov functions, possibly associated with the LaSalle invariance principle.

Keywords : Hybrid dynamical systems, Stability, Attractor, Reset systems.

Introduction

Les systèmes dynamiques sont généralement classifiés selon que le temps évolue de manière continue, auquel cas on parle de systèmes dynamiques à temps continu, ou de manière discrète, auquel cas on parle de systèmes dynamiques à temps discret. Ces deux classes de systèmes ont largement été étudiées dans la littérature, mais généralement de manière indépendante (voir par exemple [25], [6]), en utilisant des équations différentielles pour les systèmes continus et des équations aux différences pour les systèmes discrets. Il existe cependant de nombreux systèmes physiques qui combinent les deux types de comportement, tels que par exemple les systèmes mécaniques contrôlés de manière numérique, ou les circuits électroniques qui combinent composants analogiques et numériques. De même, les systèmes dynamiques avec impacts, les systèmes basés évènements, pour ne citer que ces deux exemples, nécessitent de combiner de manière adéquate des comportements décrits par des équations différentielles et des comportements décrits par des équations aux différences. Les réseaux sociaux et leurs études peuvent être considérés comme un autre champs d'application des systèmes dynamiques hybrides (voir par exemple [11]). Pour plus de détails et d'exemples, le lecteur peut consulter le chapitre 1 de [13].

Les systèmes à réinitialisation (reset control) sont une autre classe de systèmes qui mixent dynamiques continues et évènements discrets [1]. Ils ont été introduits dans les années 50 [5] dans l'idée d'exploiter la réinitialisation pour améliorer le comportement d'un système contrôlé avec un simple contrôleur linéaire [2], [16], [14]. Un récent tour d'horizon de cette classe de systèmes hybrides peut être trouvé dans [22].

Que le système physique combine des dynamiques continues et discrètes ou que ce soit la stratégie de contrôle qui combine ces deux dynamiques, un cadre unifié de représentation est donné par la notion de système dynamique hybride [13], [23], [12], [8], telle qu'elle va être décrite dans ce chapitre des Techniques de l'Ingénieur. Les sections qui suivent permettront de mettre en exergue l'importance de correctement traiter la stabilité et la notion de solutions, loin d'être aussi évidentes que dans le cas d'un système dynamique continu ou discret.

1 Modélisation des systèmes dynamiques hybrides

Définition 1 *Un système dynamique hybride (tel que formalisé dans [13]) est caractérisé par la combinaison de dynamiques à temps continu et à temps discret, et peut être représenté sous la forme suivante :*

$$\mathcal{H} \begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathcal{C} \\ x^+ = g(x), & x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (1)$$

dans laquelle on dénote les éléments du système hybride \mathcal{H} de la manière suivante :

- f est la fonction de flux qui gouverne l'évolution continue des solutions ;
- \mathcal{C} est l'ensemble de flux, dans lequel les solutions peuvent évoluer de manière continue ;
- g est la fonction de saut qui gouverne l'évolution discrète des solutions ;
- \mathcal{D} est l'ensemble de saut, dans lequel les solutions peuvent évoluer de manière discrète (sautent).

Tel que suggéré par l'équation (1), l'état x du système hybride évolue selon l'équation $\dot{x} = f(x)$ lorsqu'il est dans l'ensemble de flux \mathcal{C} ou saute en suivant l'équation aux différences $x^+ = g(x)$ lorsqu'il est dans l'ensemble de saut \mathcal{D} . La notation \dot{x} représente la dérivée à temps continu de x , et x^+ la valeur de l'état après un changement discret.

On peut noter que le formalisme hybride décrit par le système (1) peut être utilisé aussi pour décrire un système dynamique à temps continu classique (quand $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$; $\mathcal{D} = \emptyset$, avec n la dimension de l'état) ou un système dynamique à temps discret (quand $\mathcal{C} = \emptyset$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$).

Le modèle (1) décrit ici peut être étendu à une classe plus générale manipulant des inclusions différentielles et aux différences (et non pas des équations), mais cette classe sort du cadre de ce chapitre.

Exemple 1 – Le pendule de Newton

Le modèle du pendule de Newton décrit la dynamique de deux pendules identiques (masse unitaire ($m_1 = m_2 = 1$), longueur unitaire, sphère parfaite), soumis à la gravité g , et qui viennent se heurter au gré de leur mouvement respectif, tel qu'illustré sur la figure 1. En notant θ_1 et θ_2 les déviations angulaires des deux pendules par rapport à l'axe vertical (une valeur de θ_i positive correspond à une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), et ω_1, ω_2 leurs vitesses respectives, la dynamique continue de chaque pendule est décrite par les équations

suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 & \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\ \omega_1 &= -g \sin(\theta_1) & \omega_2 &= -g \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (2)$$

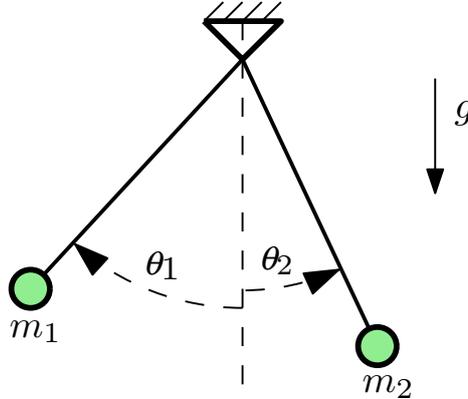


FIGURE 1 – Un modèle simple du pendule de Newton.

Pour simplifier cet exemple, on ajoute l'hypothèse que le balancement des pendules se fait dans un plan et que les trajectoires hybrides ne sortent pas de l'ensemble \mathcal{K} :

$$z = [\theta_1 \ \theta_2 \ \omega_1 \ \omega_2]^\top; \quad \mathcal{K} = \{z \in \mathbb{R}^4 : \theta_1 \geq -\pi, \theta_2 \leq \pi\} \quad (3)$$

Un impact entre les deux sphères se produit quand les positions vérifient $\theta_1 = \theta_2$ (les deux sphères sont à la même position) et les vitesses vérifient $\omega_1 \geq \omega_2$ (pour que la collision puisse avoir lieu). L'effet de l'impact correspond à échanger les vitesses des deux sphères de manière à ce que chacune repartent dans la direction opposée, avec une perte d'énergie par dissipation notée λ , $\lambda \in [0, 1]$ ($\lambda = 1$ correspond au cas sans dissipation). En utilisant la description d'un système dynamique hybride tel que formulé dans l'équation (1), on obtient donc le modèle hybride du pendule de Newton défini avec :

$$f(x) = [\omega_1 \ \omega_2 \ -g \sin(\theta_1) \ -g \sin(\theta_2)]^\top, \quad (4)$$

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{R}^4 : \theta_1 \leq \theta_2\} \cap \mathcal{K}, \quad (5)$$

$$g(x) = [\theta_1 \ \theta_2 \ \lambda\omega_2 \ \lambda\omega_1]^\top, \quad (6)$$

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{R}^4 : \theta_1 = \theta_2, \omega_1 \geq \omega_2\} \cap \mathcal{K} \quad (7)$$

Ce modèle est très simplifié car il ne tient pas compte de la taille des deux sphères et permet ainsi des impacts à une vitesse nulle, ce qui n'est pas raisonnable. Ce phénomène pourrait être évité en utilisant une régularisation temporelle comme cela est décrit dans [10, §8.2.2]. Par ailleurs, ce modèle ne représente pas correctement la situation où les masses descendent ensemble tout en étant l'une contre l'autre, réduisant ainsi leur comportement à celle d'une seule masse. En fait pour correctement représenter ce cas, un mécanisme de commutation (switch) et un modèle hybride multi-modes devraient être considérés. Cependant, le modèle décrit dans les équations précédentes permet de capturer la plupart des mouvements (raisonnables) générés par le pendule de Newton. On peut aussi noter que les ensembles \mathcal{C} et \mathcal{D} contiennent leur frontière. Ce sont des ensembles fermés.

-
- Un système dynamique hybride décrit un système caractérisé par une combinaison d'une dynamique continue et d'une dynamique discrète, ainsi que les ensembles de flux et de saut dans lesquels évoluent ces dynamiques.
 - Les systèmes dynamique à temps continu et discret classiques ont un cas particulier d'un système dynamique hybride.
-

2 Le concept de solution d'un système dynamique hybride

2.1 Solutions classiques pour les systèmes à temps continu et à temps discret

Avant de définir plus précisément le concept de solution hybride, il est utile de rappeler d'abord les solutions classiques pour les systèmes à temps continu et à temps discret, qui peuvent être perçus comme des cas particuliers de systèmes hybrides, et en se restreignant au cas où f et g sont des fonctions continues de $x \in \mathbb{R}^n$:

(TD) Une solution ϕ pour le système à temps discret $x^+ = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ est une *séquence*, $j \rightarrow \phi(j) \in \mathbb{R}^n$, définie pour tous les $j \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (c'est-à-dire, le domaine de ϕ est $\text{dom } \phi = \mathbb{N}$), telle que $\phi(j+1) = g(\phi(j))$ pour tout $j \in \text{dom } \phi$.

(CT) Une solution ϕ pour le système à temps continu $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ est une fonction absolument continue de $t \rightarrow \phi(t) \in \mathbb{R}^n$, définie pour tout $t \in \text{dom } \phi = [0, T)$ (avec T pouvant être $+\infty$), telle que $\frac{d\phi(t)}{dt} = f(\phi(t))$ pour presque tous les $t \in \text{dom } \phi$.

Autant le concept de solution pour les systèmes à temps discrets est assez simple car pour n'importe quelle condition initiale $\phi(0) \in \mathbb{R}^n$, une solution peut être indéfiniment déployée en itérant les évaluations de la fonction continue g , autant ce concept de solution pour les systèmes à temps continu mérite une plus grande attention. D'abord, la solution doit être absolument continue, à savoir que la fonction coïncide avec l'intégrale de sa dérivée (théorie de l'intégrabilité de Lebesgue). Cette fonction absolument continue (qui est continue) n'est cependant pas nécessairement différentiable, mais elle doit l'être presque partout (voir glossaire). Enfin, les solutions à temps continu peuvent ne pas évoluer jusqu'à l'infini (elles ne sont pas toujours définies pour tout temps positif) car elles peuvent faire apparaître un phénomène d'échappement en temps fini (finite escape time phenomenon) qui fait que la solution part à l'infini en temps fini.

2.2 Domaine de temps hybride

Comme précisé dans la section 1, un système dynamique hybride mêle temps continu et temps discret. En conséquence, les solutions existent dans un domaine de temps hybride caractérisé à la fois par un temps continu $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (parfois noté temps ordinaire) et un certain nombre de sauts $j \in \mathbb{N}$, tel qu'illustré sur la figure 2.

Intuitivement, le domaine de temps hybride est un ensemble *ordonné* d'intervalles de temps continu I^j , $j \geq 0$. Chaque solution hybride ϕ est alors caractérisée par son domaine de temps hybride $\text{dom } \phi$, construit de manière à marier les propriétés de saut et de flux de cette solution, en fonction de son évolution. Il est important de noter que les solutions des systèmes hybrides ne sont pas toujours uniques, et qu'une condition initiale peut conduire à des solutions multiples, chacune ayant son propre domaine de temps hybride.

Définition 2 *Un domaine compact de temps hybride \mathbb{E} est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$*

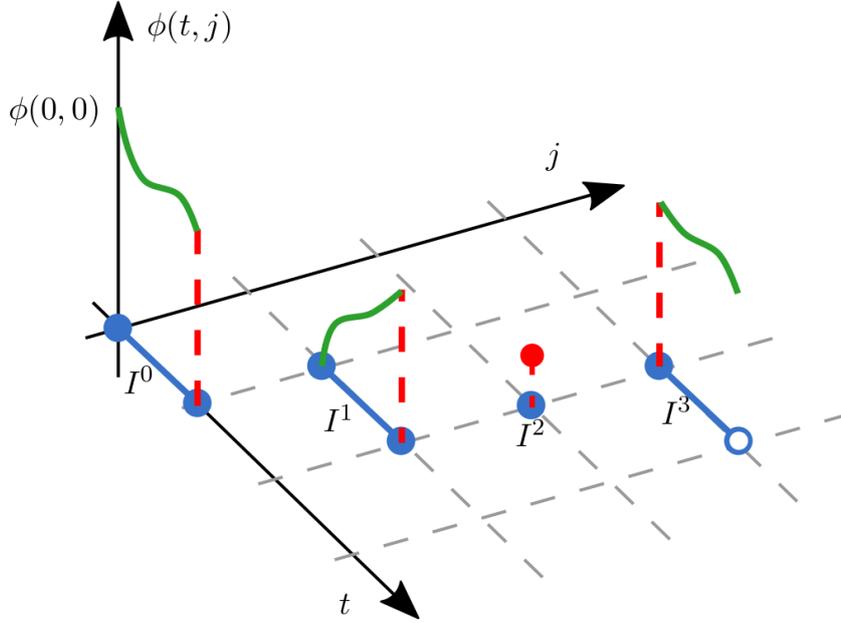


FIGURE 2 – Solution ϕ (en vert) pour un système dynamique hybride et son domaine $\text{dom } \phi$ (en bleu).

tel que

$$\mathbb{E} = \bigcup_{j=0}^{J-1} (\underbrace{[t_j, t_{j+1}]}_{I^j} \times \{j\})$$

pour une séquence donnée finie de temps $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_J$, les t_1, t_2, \dots étant appelés les "instants de saut".

Cette définition fait référence à des solutions évoluant sur un intervalle de temps (hybride) borné. Elle peut être facilement étendue pour caractériser le domaine de temps hybride d'une solution évoluant *éternellement*, ce que l'on appelle une solution *complète*.

Définition 3 Un **domaine de temps hybride** \mathbb{E} est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$ tel que n'importe quelle troncature est un domaine compact de temps hybride. Cela signifie que pour tout $[T, J] \in \mathbb{E}$, l'ensemble $\mathbb{E} \cap ([0, T] \times \{0, 1, \dots, J\})$ est un domaine compact de temps hybride.

2.3 Solutions pour un système hybride

A partir des définitions ci-dessus, on peut donner une définition rigoureuse de la solution d'un système hybride décrit sous la forme (1), sous les hypothèses simplificatrices de régularité des données du système (ensembles \mathcal{C} et \mathcal{D} fermés et fonctions f et g continues).

Définition 4 Si les ensembles \mathcal{C} et \mathcal{D} sont fermés et les fonctions f et g sont continues, alors une solution pour le système hybride (1) est une fonction ϕ telle que

- (D) $\text{dom } \phi$ est un domaine de temps hybride ;
- (SJ) Si $(t, j) \in \text{dom } \phi$ et $(t, j+1) \in \text{dom } \phi$, alors

$$\phi(t, j) \in \mathcal{D}, \quad \phi(t, j+1) = g(\phi(t, j));$$

(SF) Si $(t_1, j) \in \text{dom}\phi$ et $(t_2, j) \in \text{dom}\phi$, $t_1 < t_2$, alors $t \mapsto \phi(t, j)$ est localement absolument continue dans $[t_1, t_2]$, et

$$\phi(t, j) \in \mathcal{C}, \quad \frac{d}{dt}\phi(t, j) = f(\phi(t, j)) \quad \text{pour tous les } t \in [t_1, t_2] \text{ sauf en quelques points isolés.}$$

Nous pouvons alors préciser les différentes notions de solutions pour un système hybride dans la définition suivante.

Définition 5 Une solution ϕ du système hybride est dite :

- Non triviale si $\text{dom}\phi$ contient au moins deux points.
- Complète si $\text{dom}\phi$ est non borné (c'est-à-dire, $\text{longueur}(\text{dom}\phi) = \infty$).
- Zeno si elle est complète et $\sup_t \text{dom}\phi < \infty$:
 - les solutions effectuent un nombre de sauts infini dans un intervalle de temps ordinaire borné ;
 - Le domaine de temps hybride est non borné dans les directions de saut (j) et reste borné dans les directions du flux (t).
- Eventuellement discrète si $T = \sup_t \text{dom}\phi < \infty$ et $\text{dom}\phi \cap (\{T\} \times \mathbb{N})$ contient au moins 2 points.
- Discrète si elle est non triviale et $\text{dom}\phi \subseteq (\{0\} \times \mathbb{N})$.
- Eventuellement continue si $J = \sup_j \text{dom}\phi < \infty$ et $\text{dom}\phi \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{J\})$ contient au moins 2 points.
- Continue si elle est non triviale et $\text{dom}\phi \subseteq (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.
- Compacte si $\text{dom}\phi$ est compact.

La figure 3 permet d'illustrer les principales notions de solution de la définition précédente.

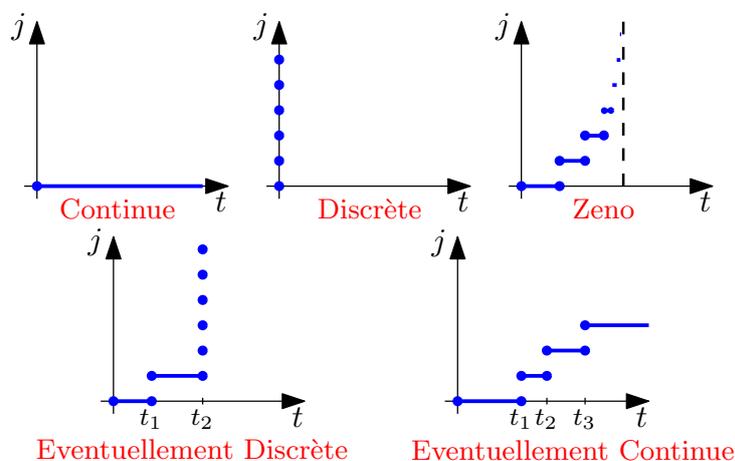


FIGURE 3 – Illustration de quelques types de solutions.

Un concept important concerne le fait que la solution soit maximale, c'est-à-dire, puisse se propager aussi longtemps que possible. Nous donnons la définition plus précise de solution maximale maintenant.

Définition 6 Une solution ϕ est maximale s'il n'existe pas d'autre solution ψ , continuation de ϕ , telle que

$$\text{dom}\phi \subset \text{dom}\psi \quad (\text{strictement})$$

et

$$\psi(t, j) = \phi(t, j), \quad \forall (t, j) \in \text{dom } \phi.$$

Notons qu'une solution complète est bien sûr maximale mais que l'inverse n'est pas vrai. On peut illustrer ceci sur un simple exemple.

Exemple 2 – *Solution maximale mais pas complète*

Considérons une solution ϕ qui saute hors de $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$:

- Cela signifie que la solution ϕ ne peut pas être étendue. Donc, elle est maximale.
- Cette solution ne peut pas évoluer pour tout temps, ce qui veut dire que $\text{dom } \phi$ est borné.
- En conclusion, elle n'est pas complète.

Pour plus de détails sur les solutions d'un système dynamique hybride, le lecteur peut par exemple consulter le chapitre 2 de [13].

La simulation des solutions des systèmes hybrides peut se faire avec MATLAB/Simulink à l'aide du simulateur HyEQ (voir Outils logiciels).

- Un domaine de temps hybride est un ensemble ordonné d'intervalles de temps continu.
- Selon son domaine de temps hybride, une solution peut être non triviale, complète (qui évolue indéfiniment), Zeno, éventuellement discrète, discrète, éventuellement continue, continue ou compacte.
- La notion de solution maximale exprime le fait qu'il n'existe pas d'autre solution qui coïncide jusqu'à son temps final et qui continuerait d'évoluer. Ainsi une solution complète est aussi maximale.

3 Le concept de stabilité d'un système dynamique hybride

Pour rappel, la stabilité d'un système linéaire $\dot{x} = Ax$ fait implicitement référence aux propriétés de stabilité de l'origine, qui est toujours un point d'équilibre. Pour le cas des systèmes hybrides, cette notion de stabilité, plus complexe, est précisée dans les paragraphes qui suivent.

3.1 Stabilité d'un point d'équilibre

Intuitivement, le concept de stabilité au sens de Lyapunov [20] d'un point d'équilibre x_e exprime l'idée que les solutions initialisées suffisamment proches de x_e sont forcées d'évoluer en restant arbitrairement proches de x_e [15], [18]. En particulier, pour chaque $\varepsilon > 0$, si on perturbe suffisamment la condition initiale ("suffisamment" signifiant "dans une boule de rayon $\delta(\varepsilon)$ "), alors toute l'évolution reste dans une boule de rayon ε centrée en x_e . De plus, sans perte de généralité, on peut ramener le problème d'analyse de la stabilité d'un point x_e à celui de l'origine.

Définition 7 *L'origine du système \mathcal{H} défini en (1) est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que toutes les solutions maximales ϕ de \mathcal{H} satisfont*

$$|\phi(0, 0)| \leq \delta(\varepsilon) \implies |\phi(t, j)| \leq \varepsilon \quad \forall (t, j) \in \text{dom } \phi. \quad (8)$$

L'origine est instable si elle n'est pas stable au sens de Lyapunov.

Dans le cas d'un système linéaire, l'unique solution démarrant d'une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est notée $\phi(t) = \Phi(t, t_0)x_0$. En conséquence, l'existence d'un scalaire $M > 0$ tel que $|\Phi(t, t_0)| \leq M$ garantit que l'on peut choisir un $\delta = \varepsilon/M$ satisfaisant (8), ce qui fait que

$$|\phi(t)| \leq |\Phi(t, t_0)\phi(t_0)| \leq |\Phi(t, t_0)| |\phi(t_0)| \leq M |\phi(t_0)| = M\delta = \varepsilon.$$

L'analyse des systèmes non-linéaires peut présenter plus de subtilités, par exemple dues à la présence d'équilibres multiples.

Définition 8 *L'origine est globalement attractive pour le système \mathcal{H} décrit dans (1) si toutes les solutions maximales ϕ sont bornées et toutes les solutions complètes satisfont*

$$\lim_{\substack{t+j \rightarrow \infty \\ (t,j) \in \text{dom}\phi}} |\phi(t, j)| = 0. \quad (9)$$

Cette définition, et plus spécifiquement la limite décrite dans l'équation (9), ne font sens que pour des solutions complètes, qui évoluent éternellement. On peut alors, en associant cette définition à la précédente, obtenir la fameuse propriété de stabilité asymptotique globale.

Définition 9 *Un point x_e est globalement asymptotiquement stable (GAS) pour le système \mathcal{H} décrit dans (1) s'il est stable au sens de Lyapunov et globalement attractif.*

Par rapport à la stabilité, nous pouvons noter que des solutions initialisées suffisamment loin de l'origine ($x_e = 0$) peuvent diverger. La notion de stabilité au sens de Lyapunov ne donne aucune garantie pour ce type de trajectoire, puisqu'elle nécessite de considérer des initialisations proches de l'origine. Cela signifie que la notion de stabilité au sens de Lyapunov est une propriété locale, qui est reliée à la notion de stabilité locale uniforme. La notion d'attractivité nécessite la bornitude des solutions, c'est-à-dire qu'elle s'intéresse aux solutions durant leur évolution transitoire et donc pouvant évoluer loin de l'origine pour éventuellement y converger. La notion d'attractivité globale est donc une propriété de convergence globale. On peut alors introduire la notion de stabilité au sens de Lagrange appelée aussi bornitude uniforme globale (Uniform global boundedness, UGB), qui est définie dans la définition suivante.

Définition 10 *L'origine du système \mathcal{H} défini en (1) est stable au sens de Lagrange (UGB) si pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon(\delta) > 0$ tel que toutes les solutions maximales ϕ de \mathcal{H} satisfont*

$$|\phi(0, 0)| \leq \delta \implies |\phi(t, j)| \leq \varepsilon(\delta) \quad \forall (t, j) \in \text{dom}\phi. \quad (10)$$

On peut voir que la propriété (10) imposée par la stabilité au sens de Lagrange est la même que la propriété (8) imposée par la stabilité au sens de Lyapunov (LS). La différence entre les deux notions de stabilité est liée au fait que dans la définition de LS, ε est choisi d'abord et δ est fonction de ε , qui peut être arbitrairement petit (stabilité des petit-signaux). A l'inverse dans la définition de UGB, δ est choisi d'abord et ε est fonction de δ , qui peut être arbitrairement large (stabilité des large-signaux). On peut alors combiner les deux notions dans une définition unifiée de stabilité globale :

Définition 11 *L'origine est Uniformément Globalement Stable (UGS) pour le système \mathcal{H} décrit dans (1) s'il existe une fonction α de classe \mathcal{K}_∞ (voir glossaire) telle que toutes les solutions maximales ϕ de \mathcal{H} satisfont*

$$|\phi(t, j)| \leq \alpha(|\phi(0, 0)|), \quad \forall (t, j) \in \text{dom}\phi. \quad (11)$$

La stabilité uniforme globale (UGS) combine les propriétés petit-signaux de la stabilité de Lyapunov (LS) avec les propriétés large-signaux de la stabilité de Lagrange (UGB), ce que l'on retrouve sous forme d'équivalence dans la proposition suivante.

Proposition 1 *L'origine est uniformément globalement stable si, et seulement si, elle est stable aux sens de Lyapunov et de Lagrange.*

L'uniformité de la définition de l'UGS vient du fait que la borne est uniforme pour toutes les solutions initialisées à une certaine distance de l'origine. Cette exigence de régularité peut aussi être établie en considérant le temps que met une solution pour atteindre une certaine boule autour de l'origine, tel que cela est formalisé dans la définition suivante, qui renforce la propriété d'attractivité globale.

Définition 12 *L'origine est Uniformément Globalement Attractive (UGA) pour le système \mathcal{H} décrit dans (1) si pour tous $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, il existe un temps $T_a(M, \varepsilon)$ tel que toutes les solutions maximales ϕ de \mathcal{H} satisfont*

$$|\phi(0, 0)| \leq M \implies |\phi(t, j)| \leq \varepsilon, \quad \forall (t, j) \in \text{dom}\phi \text{ tel que } t + j \geq T_a(M, \varepsilon). \quad (12)$$

Il est important de noter que l'attractivité uniforme globale demande plus que la simple attractivité globale car elle impose qu'il y ait une borne supérieure T_a sur le temps que prend une solution initialisée dans la boule définie par M pour atteindre et rester à jamais dans la boule définie par ε , centrées à l'origine. On peut clairement s'attendre à ce que ce temps T_a augmente quand M augmente (les solutions initialisées loin de l'origine prennent plus de temps pour converger) ou que ε diminue (les solutions convergent souvent asymptotiquement, et donc ralentissent au fur et à mesure qu'elles se rapprochent de l'origine).

Définition 13 *L'origine est Uniformément Globalement Asymptotiquement Stable (UGAS) pour le système \mathcal{H} décrit dans (1) si elle est uniformément globalement stable et attractive.*

En d'autres termes, la stabilité asymptotique uniforme globale égale la stabilité uniforme globale (UGS, elle-même égale à l'association de la stabilité de Lyapunov et de la stabilité de Lagrange) plus l'attractivité uniforme globale (UGA). C'est une propriété plus forte que la stabilité asymptotique globale (GAS) qui est la somme de la stabilité de Lyapunov et de l'attractivité globale. Dans le cas des systèmes à temps continu ou à temps discret, ces deux propriétés sont équivalentes. Par contre, pour les systèmes hybrides, ce n'est pas vrai en général, excepté sous certaines conditions de régularité du système, tel que énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 1 *Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont fermés, f et g des fonctions continues (hypothèses basiques hybrides), alors l'origine du système \mathcal{H} décrit dans (1) est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, elle est uniformément globalement asymptotiquement stable.*

3.2 Stabilité d'un ensemble compact

Dans certains cas, en particulier dus à la présence de timers ou de variables logiques dans la dynamique hybride, les solutions ne convergent pas vers un simple point mais dans des ensembles. C'est par exemple le cas d'un thermostat, pour lequel l'objectif est de stabiliser la température dans un intervalle donné en basculant au fur et à mesure le chauffage entre marche et arrêt. Dans ce cas, la stabilité doit être caractérisée dans un ensemble borné et fermé $\mathcal{A} = [z_{min}, z_{max}] \times \{0, 1\}$ pour prendre en compte le comportement à switch du chauffage. L'ensemble des conditions données dans la section précédente s'étend facilement à ce cas d'attracteurs non-triviaux, ce que l'on fait ici pour le cas spécial d'un ensemble \mathcal{A} compact (fermé et borné). En effet, en notant que les concepts de stabilité et d'attractivité décrits précédemment s'appliquent à la distance à l'origine de x (la norme $|x|$ de x), cela permet d'étendre cette notion de distance au cas d'ensembles compacts.

Définition 14 *Etant donné un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, la distance de $x \in \mathbb{R}^n$ à l'ensemble \mathcal{A} est définie par :*

$$|x|_{\mathcal{A}} = \inf_{y \in \mathcal{A}} |y - x|.$$

On peut alors étendre directement toutes les définitions précédentes relatives à la stabilité au cas d'un attracteur compact, en remplaçant simplement $|\phi|$ par $|\phi|_{\mathcal{A}}$.

-
- L'origine d'un système hybride est stable au sens de Lyapunov si pour toute boule pré-fixée, il existe une boule de condition initiale telles que les trajectoires restent dans la boule pré-fixée.
 - Un point d'équilibre d'un système hybride est globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable au sens de Lyapunov, que toutes les trajectoires maximales sont bornées et que toutes les solutions complètes convergent à 0 quand les temps continus + hybrides appartenant au domaine de temps hybride tendent vers l'infini.
-

4 Etudier la stabilité d'un système dynamique hybride par la théorie de Lyapunov

Même si, dans certains cas, on peut étudier la stabilité et l'attractivité d'un système hybride en examinant directement ses solutions et leurs expressions explicites en fonction du temps, ce n'est généralement pas possible dans le cas de systèmes non-linéaires, pour lesquels on ne peut pas déterminer d'expression explicite des solutions. Dans ce cas, on fait appel à la théorie de Lyapunov [20], qui fournit des conditions suffisantes pour étudier la stabilité asymptotique uniforme globale de systèmes hybrides non-linéaires. La formulation la plus générale du théorème de Lyapunov n'impose même pas que l'ensemble \mathcal{A} soit borné.

Théorème 2 (Théorème de Lyapunov) *Etant donné un ensemble fermé \mathcal{A} et le système hybride (1), s'il existe une fonction $x \mapsto V(x)$ continue et différentiable, des fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_{\infty}$ et une fonction continue définie positive ρ (voir glossaire) telles que*

$$\alpha_1(|x|_{\mathcal{A}}) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|_{\mathcal{A}}), \quad \forall x \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup g(\mathcal{D}), \quad (S)$$

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq -\rho(|x|_{\mathcal{A}}), \quad \forall x \in \mathcal{C}, \quad (F)$$

$$\Delta V(x) := V(g(x)) - V(x) \leq -\rho(|x|_{\mathcal{A}}), \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (J)$$

alors \mathcal{A} est uniformément globalement asymptotiquement stable pour \mathcal{H} .

Les trois conditions de ce théorème sont appelées :

- "La condition sandwich" (*S*) qui impose que V soit en sandwich entre deux fonctions de classe \mathcal{K}_{∞} de la distance à \mathcal{A} ;
- "La condition de flux" (*F*) car elle impose des conditions sur la fonction de flux f et dans l'ensemble de flux \mathcal{C} ;
- "La condition de saut" (*J*) car elle impose des conditions sur la fonction de saut g et dans l'ensemble de saut \mathcal{D} .

Tel qu'énoncé, ce théorème est difficile à appliquer dans le cas général, tant pour choisir une fonction de Lyapunov V que pour trouver les fonctions α_1 , α_2 et ρ . Il est cependant possible de transformer les conditions (*S*), (*F*) et (*J*) en des conditions plus faciles à vérifier, bien qu'équivalentes

lorsque des hypothèses supplémentaires sont vérifiées sur les données du problème (le système hybride). Ainsi, si on considère un ensemble \mathcal{A} compact,

$$V \text{ définie positive et radialement non bornée par rapport à } \mathcal{A} \text{ relatif à } \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup g(\mathcal{D}) \quad (S')$$

implique (S).

Il est beaucoup plus simple de vérifier (S') que de vérifier (S) car il n'est pas nécessaire de déterminer une expression explicite des fonctions α_1 et α_2 de classe \mathcal{K}_∞ . De même si l'équation hybride (1) vérifie les hypothèses basiques hybrides, à savoir si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont fermés et f et g sont continues, alors la condition de flux (F) est satisfaite pour une certaine fonction ρ si la condition suivante est vérifiée :

Définition 15

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0, \quad \forall x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A} \quad (F')$$

De même, la condition de saut (J) est satisfaite si la condition suivante est vérifiée :

Définition 16

$$\begin{aligned} \Delta V(x) := V(g(x)) - V(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}, \\ g(x) \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (J')$$

Ces conditions (F') et (J') sont plus simples à vérifier que les conditions originales (F) et (J) car il n'est pas nécessaire désormais de déterminer la fonction ρ qui apparait dans le théorème de Lyapunov. On peut alors établir la version plus classique du théorème de Lyapunov (que l'on retrouve dans le cas de systèmes de la forme $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f continue ou $x^+ = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, g continue avec comme attracteur \mathcal{A} un point d'équilibre).

Théorème 3 (Théorème classique de Lyapunov) *Si le système hybride (1) vérifie les hypothèses basiques hybrides (\mathcal{C} et \mathcal{D} fermés et f et g continues) et que \mathcal{A} est compact, alors (S'), (F') et (J') impliquent la stabilité asymptotique uniforme globale de l'attracteur \mathcal{A} . Dit autrement, V définie positive, \dot{V} définie négative (dans \mathcal{C}) et ΔV définie négative (dans \mathcal{D}) par rapport à \mathcal{A} impliquent que \mathcal{A} est uniformément globalement asymptotiquement stable.*

Exemple 3 – Un thermostat

Pour illustrer la difficulté de construire une solution, on considère l'exemple d'un thermostat, contrôlé en tout (on) ou rien (off) pour réguler la température d'une pièce. On définit une variable logique q égale à 1 lorsque le chauffage est en marche et égale à 0 lorsqu'il est éteint. On définit aussi quatre valeurs de température de la manière suivante : $T_{eq}(0)$ et $T_{eq}(1)$ correspondent aux températures d'équilibre lorsque le chauffage reste éteint et en marche, respectivement. T_{min} et T_{max} sont les températures qui déclenchent respectivement la mise en route et l'arrêt du chauffage. Ces quatre températures vérifient : $T_{eq}(0) < T_{min} < T_{max} < T_{eq}(1)$. On peut alors décrire le système complet dont l'état est formé de la température T et de la variable logique q sous la forme du système hybride :

$$\begin{aligned} \dot{T} &= -(T - T_{eq}(0)) + (T_{eq}(1) - T_{eq}(0))q & (T, q) \in \mathcal{C} &= \bigcup_{q \in Q} (\mathcal{C}_q \times \{q\}) \\ \dot{q} &= 0, \\ T^+ &= T & (T, q) \in \mathcal{D} &= \bigcup_{q \in Q} (\mathcal{D}_q \times \{q\}) \\ q^+ &= 1 - q, \end{aligned}$$

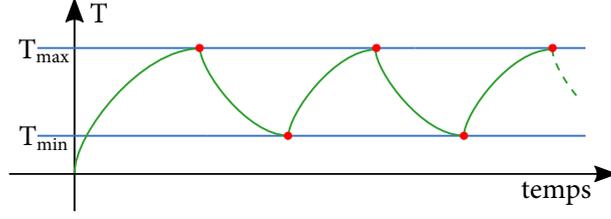


FIGURE 4 – Contrôle de la température par un automate on-off de gestion du chauffage.

avec $Q = \{0, 1\}$, $C_0 = \{T; T \geq T_{min}\}$, $C_1 = \{T; T \leq T_{max}\}$, $D_0 = \{T; T \leq T_{min}\}$, $D_1 = \{T; T \geq T_{max}\}$, ce qui donne le comportement décrit sur la figure 4.

En observant la figure 4, il est assez intuitif de conclure que les solutions convergent vers l'intervalle de températures $[T_{min}, T_{max}]$. Cela suggère que l'ensemble

$$\mathcal{A} = [T_{min}, T_{max}] \times \{0, 1\} \quad (13)$$

satisfait une propriété de stabilité globale asymptotique. Définissant l'état $x = [T \ q]^T$, une possible fonction de Lyapunov pour prouver ceci est :

$$V(x) = (\max\{T - T_{max}, T_{min} - T, 0\})^2, \quad (14)$$

où le premier terme du "max" est actif seulement quand il est positif (c'est-à-dire quand $T \geq T_{max}$), le deuxième terme est seulement actif quand il est positif (c'est-à-dire quand $T \leq T_{min}$), et le troisième terme est actif dans l'intervalle des températures souhaitées $[T_{min}, T_{max}]$ où les deux premiers termes ne sont pas positifs. La fonction V est clairement égale à 0 dans \mathcal{A} et tend vers l'infini lorsque l'état T tend vers l'infini. Donc elle satisfait la condition (S'), impliquant (S), et donc la condition sandwich est satisfaite. La fonction V satisfait aussi la condition de flux (F'). En fait, on peut voir que $\mathcal{C} \setminus \mathcal{A}$ contient deux ensembles :

$$\begin{aligned} \bar{C}_0 &= \{T > T_{max} \text{ et } q = 0\}, \\ \bar{C}_1 &= \{T < T_{min} \text{ et } q = 1\}, \end{aligned}$$

le premier étant un sous-ensemble de $C_0 \times \{0\}$ et le second un sous-ensemble de $C_1 \times \{1\}$. Ainsi, en utilisant les expressions de \dot{T} et \dot{q} dans les dynamiques hybrides, il est immédiat de vérifier que :

$$\begin{aligned} x \in \bar{C}_0 &\Rightarrow \dot{V}(x) = - \underbrace{2(T - T_{max})}_{\frac{\partial V}{\partial T}} \underbrace{(T - T_{eq}(0))}_{-\dot{T}} < 0, \\ x \in \bar{C}_1 &\Rightarrow \dot{V}(x) = - \underbrace{2(T_{min} - T)}_{\frac{\partial V}{\partial T}} \underbrace{(T_{eq}(1) - T)}_{-\dot{T}} < 0. \end{aligned}$$

La négativité provient du fait que tous les termes entre parenthèses sont positifs, étant donnée l'hypothèse $T_{eq}(0) < T_{min} < T_{max} < T_{eq}(1)$. Nous pouvons aussi noter que la dérivée partielle par rapport à q n'apparaît pas parce que $\dot{q} = 0$. La condition de flux est donc valide.

Cet exemple illustre le fait qu'utiliser directement V pour montrer la condition de saut (J) ou (J') est problématique. Pour préciser cet aspect, regardons la condition (J'). Tandis que la seconde condition est trivialement satisfaite (les sauts modifient seulement q), la première condition n'est pas satisfaite car on peut seulement en montrer une version non stricte : $\Delta V(x) = 0$.

Une modification possible de la fonction de Lyapunov garantissant aussi la condition (J') peut être sélectionnée :

$$V(x) = (\max\{(1+q)(T - T_{max}), (2-q)(T_{min} - T, 0)\})^2, \quad (15)$$

où les deux facteurs positifs $1+q$ et $2-q$ changent seulement entre 1 et 2, et garantissent une décroissance stricte de V quand le système saute depuis $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$. Plus précisément, on peut clairement voir que $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$ contient deux ensembles :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}_1 &= \{T > T_{max} \text{ et } q = 1\}, \\ \overline{\mathcal{D}}_0 &= \{T < T_{min} \text{ et } q = 0\}, \end{aligned}$$

pour lesquels nous pouvons procéder de la même façon que précédemment pour calculer

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathcal{D}}_1 &\Rightarrow \Delta V(x) = \underbrace{(T - T_{max})^2}_{V(g(x))} - \underbrace{2^2(T - T_{max})^2}_{V(x)} < 0, \\ x \in \overline{\mathcal{D}}_0 &\Rightarrow \Delta V(x) = \underbrace{(T_{min} - T)^2}_{V(g(x))} - \underbrace{2^2(T_{min} - T)^2}_{V(x)} < 0, \end{aligned}$$

Comme nous l'expliquerons plus loin il existe une route alternative consistant à appliquer le principe d'invariance de LaSalle à la fonction originale définie dans (14).

La construction de fonction de Lyapunov reste généralement une tâche ardue du fait des interactions complexes entre les conditions de positivité et de négativité (sandwich, flux et saut). Il est alors souvent plus facile de construire des fonctions de Lyapunov qui restent constantes le long de certaines évolutions du système, auquel cas il reste à vérifier les conditions de flux et de saut faibles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &:= \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0, & \forall x \in \mathcal{C}, & \quad (\text{F''}) \\ \Delta V(x) &:= V(g(x)) - V(x) \leq 0, & \forall x \in \mathcal{D}. & \quad (\text{J''}) \end{aligned}$$

On peut alors prouver la stabilité uniforme globale, mais pas la stabilité asymptotique globale, tel qu'énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 4 (Théorème faible de Lyapunov) *Etant donné un ensemble fermé \mathcal{A} et le système hybride (1), s'il existe une fonction $x \rightarrow V(x)$ continue et différentiable dans un ensemble ouvert contenant \mathcal{C} , et des fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ satisfaisant (S), (F'') et (J''), alors \mathcal{A} est uniformément globalement stable pour le système hybride.*

Dans le cas où le système hybride (1) vérifie les hypothèses basiques hybrides (\mathcal{C} et \mathcal{D} fermés et f et g continues), il est ensuite possible d'utiliser le principe d'invariance de LaSalle [17], [24] pour retrouver une propriété de stabilité asymptotique uniforme globale. L'idée derrière le principe d'invariance dans le cas d'attracteurs compacts est que si on a la stabilité uniforme globale mais pas l'attractivité uniforme globale, alors il doit exister des solutions complètes "mauvaises" qui évoluent complètement tout en restant bloquées sur un ensemble de niveau non-nul de V , notées ϕ_{bad} . A l'inverse, si on peut prouver qu'il n'existe pas de solution mauvaise, alors on peut conclure à l'attractivité uniforme globale, qui, combinée avec la stabilité uniforme globale, nous donne la stabilité asymptotique uniforme globale. C'est cette idée qui est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 5 (Principe d'invariance de LaSalle) *Etant donné un ensemble compact \mathcal{A} et le système hybride (1) vérifiant les hypothèses basiques hybrides (\mathcal{C} et \mathcal{D} fermés et f et g continues), s'il existe une fonction $x \rightarrow V(x)$ continue et différentiable dans un ensemble ouvert contenant \mathcal{C} et satisfaisant (S), (F'') et (J''), et si la condition*

$$\nexists \phi_{bad} \text{ solution complète, telle que } V(\phi_{bad}(t, j)) = V(\phi_{bad}(0, 0)) > 0, \forall (t, j) \in \text{dom } \phi_{bad} \quad (I)$$

est vérifiée, alors \mathcal{A} est uniformément globalement asymptotiquement stable.

Exemple 4 – Exemple du thermostat revisité Nous pouvons maintenant revisiter l'exemple 3 et exploiter le principe d'invariance de LaSalle pour étudier la stabilité de l'ensemble \mathcal{A} . L'avantage est que nous pouvons utiliser la fonction de Lyapunov plus simple V décrite dans (14) puisqu'elle satisfait les conditions (F') et (J''), comme cela a déjà été discuté dans l'exemple 3, et qu'il reste donc à vérifier si la condition (I) est satisfaite.

Pour voir si la condition (I) est satisfaite, nous voyons d'après (F') qu'il est impossible qu'une mauvaise solution ϕ_{bad} fasse du flux, puisque sinon V devrait décroître (et non rester constante et positive comme cela est requis). La seule possibilité serait donc que la mauvaise solution saute éternellement. Cependant toute solution qui saute doit sauter à l'intérieur de \mathcal{C} , ce qui implique qu'immédiatement après un saut toute solution doit faire du flux pendant un certain temps. Et donc on a bien la décroissance de V .

Souvent le principe d'invariance de LaSalle est la seule route possible pour prouver les propriétés de stabilité d'un système hybride. C'est en particulier le cas pour des modèles plus sophistiqués que celui du thermostat (voir l'exemple 3) pour lesquels l'intuition ne permet pas de générer des fonctions telles que celle définie dans (15). Dans ce cas, des fonctions de Lyapunov basées-énergie, similaires à celle de (14), sont déjà suffisantes pour prouver les propriétés de stabilité désirées. Un exemple de ceci est l'exemple du pendule de Newton abordé dans l'exemple 1 pour lequel des détails sont donnés dans [10, §8.3]. Ces éléments ne sont pas détaillés ici car très techniques (et basés sur l'utilisation de la régularisation en temps) et dépassant le sujet de cet article.

-
- La théorie de Lyapunov fournit des conditions suffisantes pour étudier la stabilité asymptotique uniforme globale de systèmes hybrides non-linéaires sans avoir besoin d'examiner les expressions explicites des solutions. Les trois conditions suffisantes à vérifier sont la condition sandwich sur la fonction de Lyapunov, la condition de flux et la condition de saut.
 - Le principe d'invariance de LaSalle peut aussi être invoqué pour prouver des propriétés de stabilité d'un système hybride.
-

5 Systèmes hybrides homogènes (systèmes à réinitialisation)

Les systèmes hybrides homogènes sont une classe particulière de systèmes hybrides qui comprend les systèmes à réinitialisation du contrôle (reset control en anglais) [2], [9], [21]. Cette classe est apparue dans les années 50 avec le célèbre intégrateur de Clegg [5], qui permet de traiter des problèmes liés à la charge de l'intégrateur dans un système de commande en le réinitialisant lorsque nécessaire. De manière plus générale, on définit un contrôleur à réinitialisation comme un contrôleur linéaire dont la sortie est réinitialisée à zéro (ou ailleurs) lorsque ses entrées-sorties vérifient des conditions algébriques données. L'avantage de ce type de contrôle est qu'il permet d'obtenir de meilleures performances (réduction des dépassements, amélioration des temps de montée, augmentation des domaines de fonctionnement sûrs...) qu'un contrôle linéaire classique, tout en restant de la même complexité (linéaire temps-invariant).

Définition 17 *Un système dynamique hybride homogène (système à réinitialisation) est décrit dans le cas général sous la forme :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_F x, & x \in \mathcal{C} &:= \{x \in \mathbb{R}^n; x^\top M_F x \geq 0\}, \\ x^+ &= A_J x, & x \in \mathcal{D} &:= \{x \in \mathbb{R}^n; x^\top M_J x \geq 0\}, \end{aligned} \quad (16)$$

avec M_F et M_J des matrices symétriques, nécessairement non signées (ni semi-définie positive, ni semi-définie négative) pour que \mathcal{C} et \mathcal{D} soient des cônes symétriques non vides.

Le cas particulier traité dans la suite de cette section correspond à sélectionner $M_J = -M_F$, auquel cas, pour n'importe quel point de l'espace d'état, la solution peut soit sauter, soit évoluer continuellement.

Le seul attracteur compact qui peut être asymptotiquement stable est l'origine, et sa stabilité asymptotique coïncide avec sa stabilité exponentielle globale. La stabilité asymptotique globale (et donc la stabilité exponentielle globale) de l'origine ($\mathcal{A} = \{0\}$) peut être étudiée avec une fonction de Lyapunov quadratique de la forme :

$$V(x) = x^\top P x, \text{ avec } P \text{ une matrice symétrique définie positive.}$$

En effet, s'il existe une matrice P et des scalaires τ_F et τ_J tels que :

$$P = P^\top > 0, \quad \tau_F \geq 0, \quad \tau_J \geq 0 \quad (17a)$$

$$A_F^\top P + P A_F + \tau_F M_F < 0 \quad (17b)$$

$$A_J^\top P A_J - P + \tau_J M_J < 0 \quad (17c)$$

alors les conditions (S'), (F') et (J') sont vérifiées et l'origine du système (16) est uniformément globalement asymptotiquement stable.

La condition (17a) vérifie la condition (S'). La condition (17b) permet de prouver (F') en calculant la dérivée temporelle de V le long des solutions, avec $\nabla V(x) = 2P x$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle \nabla V(x), A_F x \rangle = 2x^\top P A_F x = x^\top (A_F^\top P + P A_F) x \\ &\leq x^\top (A_F^\top P + P A_F + \tau_F M_F) x \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A} \end{aligned}$$

Elle exploite aussi la structure particulière de \mathcal{C} et la S-procédure (voir glossaire) pour vérifier que la condition $\dot{V}(x) < 0$ doit être vérifiée pour tous les x tels que $x^\top M_F x \geq 0$. Enfin, toujours en exploitant la la structure particulière de \mathcal{D} et la S-procédure, la condition (17c) permet de prouver (J') en calculant ΔV dans les sauts, à savoir $V(A_J x) - V(x) = x^\top (A_J^\top P A_J - P) x$ pour tous les x tels que $x^\top M_J x \geq 0$.

Pour τ_F et τ_J donnés, la variable de décision P apparait linéairement dans ces conditions, appelées inégalités matricielles linéaires (LMI). Il est important de noter que le cas particulier $\tau_F = \tau_J = 0$ n'exploite pas la S-procédure et ne permet pas de vérifier les conditions lorsque la dynamique continue n'est pas asymptotiquement stable, contrairement aux conditions données ici.

Pour aller plus loin, et en utilisant la fonction définie positive $\rho(|x|_{\mathcal{A}}) = \varepsilon x^2$, les conditions (S)-(F)-(J) du théorème de Lyapunov exprimées précédemment dans le cas général conduisent, pour le cas des systèmes à réinitialisation, au résultat suivant :

S'il existe une matrice P et des scalaires ε , τ_F et τ_J tels que :

$$P = P^\top > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \tau_F \geq 0, \quad \tau_J \geq 0 \quad (18a)$$

$$A_F^\top P + P A_F + \tau_F M_F \leq -\varepsilon I \quad (18b)$$

$$A_J^\top P A_J - P + \tau_J M_J \leq -\varepsilon I \quad (18c)$$

alors les conditions (S) , (F) et (J) sont vérifiées et l'origine du système (16) est uniformément globalement asymptotiquement stable.

On peut noter que lorsque les matrices A_F , A_J , M_F et M_J sont connues alors les conditions (18a), (18b) et (18c) sont linéaires en fonction des variables de décision P , ε , τ_F et τ_J . Ce sont donc des inégalités linéaires matricielles (LMIs) qui peuvent se résoudre numériquement facilement [4].

Les conditions présentées précédemment ont été exploitées dans [9] pour traiter la synthèse de contrôleurs H_∞ et généralisées dans [22].

L'ajout de boucle de réinitialisation pour modifier le comportement de la boucle fermée s'est révélé intéressant dans différentes applications : voir par exemple [26], [7], [19], [3].

-
- Un contrôleur à réinitialisation est un contrôleur linéaire dont la sortie est réinitialisée à zéro (ou à une autre valeur) lorsque les entrées-sorties vérifient des conditions algébriques particulières.
 - Les contrôleurs à réinitialisation ont de meilleures performances que les contrôleurs linéaires classiques tout en conservant la même complexité.
 - Le seul attracteur compact qui peut être asymptotiquement stable est l'origine, et sa stabilité asymptotique coïncide avec sa stabilité exponentielle globale.
 - La stabilité d'un système à réinitialisation peut être étudiée avec une fonction de Lyapunov quadratique.
-

Conclusion

Cet article a abordé les systèmes dynamiques hybrides, de leur modélisation aux conditions de stabilité basées sur l'utilisation de fonction de Lyapunov. Bien maîtriser les solutions et les différents concepts de stabilité associés à cette classe de système est un prérequis pour leur étude. Les résultats s'appuient sur les hypothèses de base pour aborder les conditions de stabilité : les fonctions de flux et de saut (f et g) sont continues ; les ensembles de flux et de saut (\mathcal{C} et \mathcal{D}) sont fermés. La notion de solution maximale et complète joue également un rôle important.

Comme dans le cadre des systèmes non-linéaires, il a été mis en évidence que, en général, les solutions ne convergent pas simplement vers un point d'équilibre (l'origine en particulier) mais plutôt vers un ensemble. Ceci est dû à la présence de timers ou de variables logiques dans la dynamique hybride. L'ensemble vers lequel convergent les trajectoires est dénoté \mathcal{A} et a la propriété d'être compact (borné et fermé) ou au moins fermé.

Des conditions suffisantes pour prouver la stabilité asymptotique uniforme globale pour un système dynamique hybride ont alors été proposées en utilisant la théorie de Lyapunov, c'est-à-dire en utilisant une fonction de Lyapunov. Ces conditions consistent en une condition de décroissance de la fonction de Lyapunov sur le flux, sur le saut et une condition de type sandwich imposant des bornes sur la fonction de Lyapunov. Cependant, dans la pratique, il peut être difficile de trouver la "bonne" fonction de Lyapunov. Lorsque la fonction de Lyapunov reste constante le long de certaines évolutions du système, des conditions de flux et de saut plus faibles peuvent être proposées. La stabilité uniforme globale peut alors être garantie, mais pas la stabilité asymptotique globale. Dans ce dernier cas, si \mathcal{A} est borné, le principe d'invariance de LaSalle peut être utilisé. L'exemple classique du thermostat a été utilisé pour illustrer ceci. La classe particulière de systèmes hybrides que constituent les systèmes à réinitialisation (reset control systems) a été considérée pour particulariser une partie des résultats avec l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques.

Dans cet article, nous avons principalement présenté des résultats d'analyse de stabilité. La

synthèse de contrôleurs hybrides afin de dépasser les limitations intrinsèques des contrôleurs continus classiques est particulièrement intéressante. Dans ce contexte, améliorer les performances lorsque le système est affecté par des non-linéarités isolées, par des incertitudes de modélisation ou des contraintes sur la transmission de l'information prend tout son sens. Enfin, proposer de nouveaux paradigmes de synthèse des contrôleurs hybrides dans le contexte des systèmes de contrôle en réseaux est un problème ouvert.

Glossaire

Fonction absolument continue; *Absolutely continuous function*

De manière équivalente, fonction qui coïncide avec l'intégrale de sa dérivée.

Fonction différentiable presque partout; *Almost everywhere differentiable function*

Fonction $t \rightarrow \phi(t)$ différentiable pour toutes les valeurs de t sauf pour un ensemble de points isolés.

Ensemble compact; *Compact set*

Ensemble fermé (la frontière appartient à l'ensemble) et borné.

Fonction de classe \mathcal{K}_∞ ; *Class \mathcal{K}_∞ function*

Fonction $s \rightarrow \alpha(s)$, définie de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\alpha(0) = 0$, continue, strictement croissante, et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = +\infty$. Une propriété importante de ce type de fonction est qu'elle est globalement inversible et que son inverse est aussi une fonction de classe \mathcal{K}_∞ .

Fonction définie positive; *Positive definite function*

Fonction $s \rightarrow \rho(s)$ définie de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $\rho(0) = 0$ et $\rho(s) > 0$ pour tout $s > 0$.

Fonction définie positive par rapport à \mathcal{A} relative à \mathcal{X} ; *Positive definite function with respect to \mathcal{A} relative to \mathcal{X}* Fonction $x \rightarrow V(x)$ définie de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $V(x) = 0, \forall x \in \mathcal{A}$ et $V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$

Fonction radialement non bornée relative à \mathcal{X} ; *Radially unbounded function relative to \mathcal{X}*

Fonction $x \rightarrow V(x)$ définie de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $V(x_i) \rightarrow \infty$ pour toutes les séquences $x_i \in \mathcal{X}$ telles que $x_i \rightarrow \infty$.

S-procédure; *S-procedure* La S-procedure permet de reformuler des conditions matricielles sous contraintes matricielles. Pour des matrices $M_i, i = 0, \dots, p$ symétriques, la condition $x^\top M_0 x > 0 \forall x$ telle que $x^\top M_i x > 0, i = 1, \dots, p$ est vérifiée s'il existe des scalaires τ_i tels que $M_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i M_i > 0$. Il y a équivalence entre les 2 conditions dans la cas où $p = 1$.

Sigles, notations et symboles

\mathbb{R}^n représenté l'ensemble des vecteurs réels de dimension n . $\mathbb{R}_{\geq 0}$ représente l'ensemble des scalaires réels non négatifs. x^\top, A^\top sont respectivement la transposée du vecteur x et de la matrice A . $A > 0$ (resp. < 0) signifie que la matrice A est symétrique et définie positive (resp. négative).

\dot{x} ou $\frac{dx}{dt}$ denotent tout deux la dérivée en fonction du temps. On utilise les mêmes notations pour décrire la dérivée une fonction.

Références

- [1] A. Baños and A. Barreiro. *Reset control systems*. Springer, 2011.
- [2] O. Beker, C.V. Hollot, and Y. Chait. Fundamental properties of reset control systems. *Automatica*, 40(6) :905–915, 2004.
- [3] A. Bisoffi, R. Beerens, M. Heemels, H. Nijmeijer, N. van de Wouw, and L. Zaccarian. To stick or to slip : A reset PID control perspective on positioning systems with friction. *IFAC Annual Reviews in Control*, 49 :37–63, 2020.
- [4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [5] J.C. Clegg. A nonlinear integrator for servomechanisms. *Trans. A. I. E. E.*, 77(Part II) :41–42, 1958.
- [6] J. Daafouz, S. Tarbouriech, and M. Sigalotti (Eds.). *Hybrid systems with constraints*. John Wiley & Sons, 2013.
- [7] A. Fernandez, A. Barreiro, A. Banos, and J. Carrasco. Reset control for passive teleoperation. In *34th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*, pages 2935–2940, 2008.
- [8] M. Fiacchini, S. Tarbouriech, and C. Prieur. Quadratic stability for hybrid systems with nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(7) :1832–1838, 2012.
- [9] F. Fichera, C. Prieur, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian. Lmi-based reset h_∞ design for linear continuous-time plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(12) :4157–4163, 2016.
- [10] F. Forni, A.R. Teel, and L. Zaccarian. Reference mirroring for control with impacts. In J. Daafouz, S. Tarbouriech, and M. Sigalotti, editors, *Hybrid Systems with Constraints*, pages 211–249. Wiley, 2013.
- [11] P. Frasca, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian. Hybrid models of opinion dynamics with opinion-dependent connectivity. *Automatica*, 100 :153–161, February 2019.
- [12] R. Goebel, R. Sanfelice, and A. R. Teel. Hybrid dynamical systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(2) :28–93, 2009.
- [13] R. Goebel, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems : Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press, New Jersey, 2012.
- [14] I.M. Horowitz and P. Rosenbaum. Non-linear design for cost of feedback reduction in systems with large parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 21 :977–1001, 1975.
- [15] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [16] K.R. Krishnan and I.M. Horowitz. Synthesis of a non-linear feedback system with significant plant-ignorance for prescribed system tolerances. *International Journal of Control*, 19 :689–706, 1974.
- [17] J. P. LaSalle. An invariance principle in the theory of stability. In *Differential equations and dynamical systems*. New York : Academic Press, 1967.
- [18] J. Levine and P. Rouchon. Systèmes dynamiques et commande. régulation et commande des systèmes asservis. *Techniques de l’Ingénieur*, [S7430], 2008, relu et validé en 2018.

- [19] H. Li, C. Du, Y. Wang, and Y. Guo. Discrete-time optimal reset control for hard disk drive servo systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(11 Part 1) :5104–5107, 2009.
- [20] A.M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3) :531–534, 1992.
- [21] D. Nesic, L. Zaccarian, and A.R. Teel. Stability properties of reset systems. *Automatica*, 44(8) :2019–2026, 2008.
- [22] C. Prieur, I. Queinnec, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian. Analysis and synthesis of reset control systems. *Foundations and Trends in Systems and Control*, 6(2-3) :117–338, 2018.
- [23] C. Prieur, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian. Lyapunov-based hybrid loops for stability and performance of continuous-time control systems. *Automatica*, 49(2) :577–584, 2013.
- [24] A. Seuret, C. Prieur, S. Tarbouriech, A. R. Teel, and L. Zaccarian. A nonsmooth hybrid invariance principle applied to robust event-triggered design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(5) :2061–2068, 2019.
- [25] A.J. Van der Schaft and J. M. Schumacher. *Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. Springer-Verlag, London, UK, 1999.
- [26] J. Zheng, Y. Guo, M. Fu, Y. Wang, and L. Xie. Improved reset control design for a PZT positioning stage. In *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1272–1277, 2007.

Outils logiciels

Hybrid Systems Simulation Toolbox for MATLAB/Simulink (HyEQ) developed by Ricardo Sanfelice : hybrid.soe.ucsc.edu/software