



**HAL**  
open science

# Codes et jeux de soustraction et de poursuite dans les graphes

Pierre Coupechoux

► **To cite this version:**

Pierre Coupechoux. Codes et jeux de soustraction et de poursuite dans les graphes. Automatique / Robotique. Institut national des sciences appliquées de Toulouse, 2018. Français. NNT: . tel-01946975v1

**HAL Id: tel-01946975**

**<https://laas.hal.science/tel-01946975v1>**

Submitted on 15 Jan 2019 (v1), last revised 7 Dec 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

*l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)*

---

---

Présentée et soutenue le *03/07/2018* par :

**PIERRE COUPECHOUX**

**Codes et jeux de soustraction et de poursuite dans les graphes.**

---

---

### JURY

JULIEN MONCEL	Maître de Conférences	Univ. Toulouse 1 Capitole IUT de Rodez
ALAIN QUILLIOT	Professeur des Universités	Univ. Clermont Auvergne
ÉRIC DUCHÊNE	Maître de Conférences	Univ. Claude Bernard Lyon 1 IUT Bourg-en-Bresse
MARIE-JOSÉ HUGUET	Professeur des Universités	Univ. Toulouse INSA Toulouse
PETRU VALICOV	Maître de Conférences	Univ. Aix-Marseille IUT Aix-Marseille
ALEXANDRE PINLOU	Professeur des Universités	Univ. Montpellier Polytech Montpellier

---

École doctorale et spécialité :

*EDSYS : Informatique 4200018*

Unité de Recherche :

*LAAS-CNRS (UPR 8001)*

Directeur de Thèse :

*Julien Moncel*

Rapporteurs :

*Alain QUILLIOT et Éric DUCHÊNE*



# Remerciements

Je voudrais commencer par remercier Julien Moncel, mon directeur de thèse, pour ses qualités humaines et professionnelles. Je sais que si j'ai besoin d'aide ou de conseils, je peux compter sur lui. Bien entendu, c'est grâce à lui que j'ai pu faire cette thèse, mais il m'a aussi et surtout offert des opportunités.

Je remercie aussi chaleureusement Alain Quilliot et Éric Duchêne d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Marie-José Huguet, Petru Valicov et Alexandre Pinlou de faire partie du jury. Je les remercie aussi pour tous les conseils qu'ils m'ont donnés.

Je remercie aussi toutes les personnes avec qui j'ai pu travailler, au LAAS ou en dehors. Notamment tous les membres du projet ANR GAG, ainsi que les personnes que j'ai eu la chance de rencontrer au RMIT, à Melbourne.

Je n'oublie pas de mentionner les enseignants de l'INSA avec qui j'ai pu partager mes séances de TP. Enseigner avec eux est très instructif, et ils m'ont permis d'améliorer mes capacités en enseignement (j'espère en tout cas!).

Je ne peux pas non plus oublier tous les membres de l'équipe ROC, grâce auxquels j'ai passé ces dernières années dans un environnement convivial. Merci en particulier à Estèle, pour toutes les discussions passionnantes qu'on a pu avoir dans notre bureau.

Et finalement, je remercie toutes les personnes de mon entourage non-professionnel, pour le support infailible. Pour en citer quelques uns : évidemment mes parents, et ma famille en général ; ma chère et tendre, Gaëlle ; Caroline et Quentin, nos complices d'escape room ; Camille, avec qui j'ai pu m'évader le temps d'un weekend ; Cyrielle, Ségolène, Nico et bien d'autres, mes complices de jeu.



# Table des matières

Remerciements . . . . .	3
<b>1 Introduction</b>	<b>7</b>
1.1 Graphes . . . . .	7
1.1.1 Familles de graphes et propriétés . . . . .	9
1.2 Identification . . . . .	14
1.2.1 Définition des codes identifiants . . . . .	15
1.2.2 Colorations identifiantes . . . . .	17
1.3 Jeux . . . . .	18
1.3.1 Cadre . . . . .	18
1.3.2 Jeux impartiaux . . . . .	19
1.3.3 Jeux octaux . . . . .	22
<b>2 Colorations identifiantes et cycles universels</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Types et graphe des transitions . . . . .	29
2.3 Construction du cycle identifié . . . . .	36
2.3.1 Construction du cycle identifié par la fusion de chemin . . . . .	36
2.3.2 Unification des cycles quand $\text{pgcd}(n, L) \neq 1$ . . . . .	37
2.3.3 Nombre impair de couleurs . . . . .	38
2.4 Résultats . . . . .	40
2.4.1 Cas $L \geq 6$ . . . . .	40
2.4.2 Petites valeurs de $L$ . . . . .	41
2.5 Conclusion . . . . .	43
<b>3 Codes identifiants dans les tournois</b>	<b>45</b>
3.1 Codes identifiants . . . . .	45
3.1.1 Rappels . . . . .	45
3.1.2 Variante et extension . . . . .	46

3.1.3	Résultats généraux . . . . .	48
3.2	Codes identifiants dans les graphes orientés . . . . .	48
3.2.1	Existence de codes identifiants dans les tournois . . . . .	49
3.3	Codes identifiants dans les tournois . . . . .	51
3.3.1	Rappels . . . . .	51
3.3.2	Résultats . . . . .	51
3.4	Conclusion . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Le problème des pompiers</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction et définitions . . . . .	63
4.1.1	Contexte . . . . .	63
4.1.2	Quelques notations . . . . .	65
4.2	Problèmes et résultats préliminaires . . . . .	65
4.2.1	FIREFIGHTER et FRACTIONAL FIREFIGHTER . . . . .	65
4.2.2	Simplification pour les arbres . . . . .	71
4.2.3	Version <i>online</i> sur les arbres . . . . .	72
4.3	Le jeu des pompiers <i>online</i> sur les arbres finis . . . . .	72
4.3.1	Analyse de la compétitivité d'un algorithme glouton . . . . .	72
4.3.2	Algorithme compétitif amélioré pour FIREFIGHTER . . . . .	75
4.4	Séparation des suites de pompiers . . . . .	80
4.4.1	Définitions . . . . .	80
4.4.2	Arbres niveaux-réguliers . . . . .	81
4.4.3	Targeting Game . . . . .	82
4.5	Suites de pompiers vs. croissance par niveau . . . . .	84
4.5.1	Instances <i>offline</i> infinies . . . . .	84
4.5.2	Version <i>online</i> du problème des pompiers sur les arbres à croissance linéaire . . . . .	88
4.6	Conclusion . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Jeux de soustraction dans les graphes</b>	<b>91</b>
5.1	Jeux octaux dans les graphes . . . . .	91
5.2	Le jeu <b>0.33</b> dans les étoiles subdivisées . . . . .	92
5.3	Le jeu <b>0.33</b> dans les bi-étoiles subdivisées . . . . .	96
5.3.1	Réduction des bi-étoiles subdivisées . . . . .	98
5.3.2	Calcul des valeurs de Grundy des bi-étoiles subdivisées . . . . .	103
5.4	Conclusion . . . . .	113

# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce chapitre, je présenterai au lecteur les différentes notions que je serai amené à utiliser dans ce manuscrit.

Ce manuscrit retrace les différentes étapes de ma thèse. J'ai eu la chance de travailler sur plusieurs sujets très intéressants grâce à des opportunités qui se sont présentées au cours de ma thèse. Tous les travaux présentés ici orbitent autour de la théorie des graphes. Je me suis intéressé à des notions d'identification, avec les **colorations identifiantes** et les **codes identifiants**, puis j'ai pu mêler la théorie des jeux combinatoires à la théorie des graphes grâce au projet ANR GAG. Grâce à ce projet, nous avons pu créer une extension des **jeux octaux** sur les graphes, dont nous avons pu donner quelques résultats. Finalement, j'ai eu la chance de pouvoir travailler avec des collègues australiens, à Melbourne, sur un problème qui peut être vu comme un jeu à un joueur : **le problème du pompier**.

### 1.1 Graphes

Dans tous les chapitres qui suivent, nous serons amenés à travailler avec des graphes.

Moralement, un graphe est un ensemble de points, reliés entre eux par des liens. Imaginons par exemple que l'on regarde une carte ferroviaire de la France. On peut la modéliser en mettant un point sur chaque gare, puis en dessinant un trait entre deux points quand les deux gares sont directement reliées par la voie ferrée. La Figure 1.1 montre ce que l'on pourrait obtenir avec ce genre de dessin.

Dans le vocabulaire de la théorie des graphes, un point est appelé un **sommet**, et un lien est appelé une **arête**. Comme une arête est un lien entre deux sommets, une façon de l'écrire est comme une paire de sommets. Par exemple, si  $x$  et  $y$  sont deux



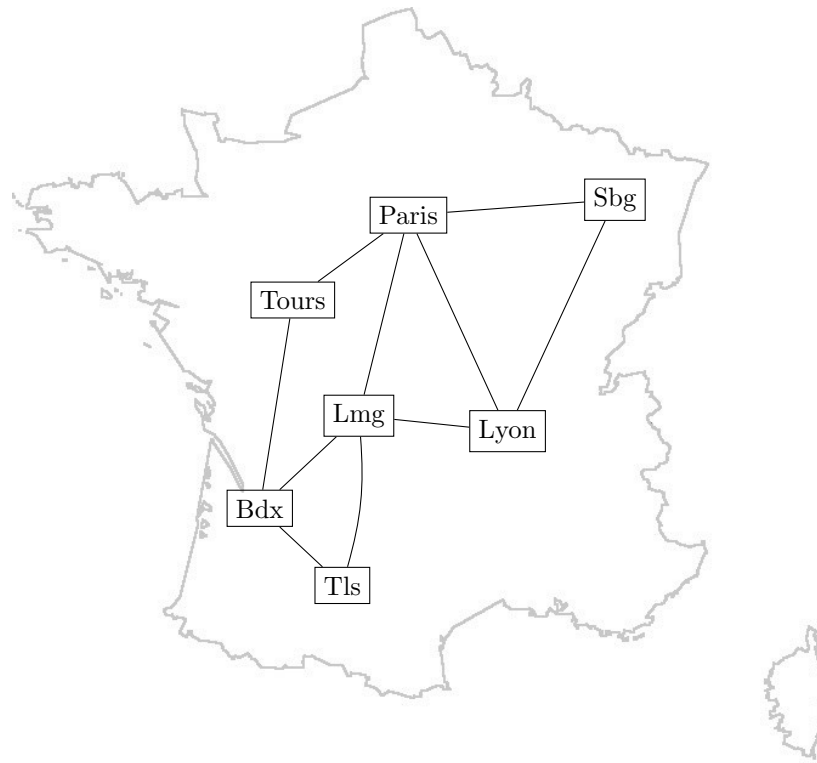


FIGURE 1.1 – Carte ferroviaire (très simplifiée) de la France.

sommets d'un graphe, une arête entre ces deux sommets sera notée  $\{x, y\}$ , ou parfois  $(x, y)$ . Lorsqu'une telle arête existe, on dit que  $y$  est un **voisin** de  $x$ . Le nombre de voisins que possède un sommet  $x$  est appelé le **degré** de  $x$ , et est noté  $d(x)$ .

Un graphe est donc défini de la façon suivante :

**Définition 1.** *Un graphe  $G$  est composé d'un ensemble de sommets  $V$  et d'un ensemble d'arêtes  $E$ . On note  $G = (V, E)$ .*

**Remarque 1.** *Les notations  $V$  et  $E$  viennent de l'anglais, où sommet se dit vertex, et arête se dit edge.*

Le graphe de la Figure 1.1 est donc caractérisé par :

— son ensemble de sommets :

$$V = \{Tls, Paris, Lyon, Lmg, Tours, Bdx, Sbg\}$$

— et son ensemble d'arêtes :

$$E = \{\{Tls, Lmg\}, \{Lmg, Bdx\}, \{Bdx, Tls\}, \{Lyon, Lmg\}, \{Lyon, Paris\}, \\ \{Paris, Sbg\}, \{Sbg, Lyon\}, \{Paris, Tours\}, \{Tours, Bdx\}, \{Tours, Lmg\}\}$$

Lorsque l'on veut parler de l'ensemble des sommets d'un graphe  $G$ , on note souvent  $V(G)$ . Littéralement : l'ensemble des sommets (*vertices* au pluriel) de  $G$ . On note aussi  $E(G)$  pour désigner l'ensemble des arêtes de  $G$ .

Lorsqu'une arête  $\{u, v\}$  existe, on dit que  $v$  est un **voisin** de  $u$ .

La définition des graphes est très simple, mais l'outil n'en est pas moins très puissant. Il est possible de modéliser beaucoup de choses avec des graphes.

Il est notamment très courant de rendre un graphe plus complet en ajoutant des informations dessus. Par exemple, on pourrait pour chaque arête de la Figure 1.1 préciser le nombre de kilomètres que fait cette portion de voie ferrée. On pourrait aussi choisir des colorier les arêtes de plusieurs couleur pour indiquer la nature du train qui passe sur cette voie (TGV, TER, etc). On pourrait aussi donner des couleurs aux sommets pour indiquer si la gare est un terminus, ou s'il y a des correspondances.

**Remarque 2.** *La façon dont on dessine le graphe n'est pas nécessairement importante. On peut ne s'intéresser qu'à sa structure (comment les sommets sont reliés entre eux), et oublier où sont dessinés les points.*

On parle de **sous-graphe induit** d'un graphe lorsque l'on ne garde qu'une partie de ses sommets. Tous les autres sommets disparaissent, ainsi que les arêtes auxquelles ils étaient rattachés.

### 1.1.1 Familles de graphes et propriétés

Parmi l'ensemble de tous les graphes possibles, certains se ressemblent, ont une forme similaire. Il est courant de donner des noms à ces graphes qui se ressemblent. On dit qu'on les classe dans des familles.

Dans cette section, nous allons présenter quelques une de ces familles de graphes. La liste n'est évidemment pas exhaustive. Nous ne présenterons que certaines familles que nous serons amenés à utiliser dans ce manuscrit.

#### Chemins et cycles

Un **chemin** est un graphe composé de  $n$  sommets placés les uns après les autres, et d'arêtes qui relient les sommets successifs. Plus formellement, un chemin peut

s'écrire comme un ensemble de sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n$  et des arêtes  $\{u_i, u_{i+1}\}$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Les sommets au bout du chemin sont appelés les extrémités de ce chemin. La taille d'un chemin peut être, suivant les définitions, le nombre de sommets ou le nombre d'arcs du graphe.

La Figure 1.2 montre à quoi ressemble un chemin de 4 sommets.

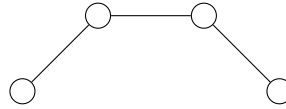


FIGURE 1.2 – Chemin de 4 sommets.

Un **cycle** est un chemin dans lequel on a rajouté une arête qui relie les deux extrémités du chemin.

La Figure 1.3 montre à quoi ressemble un cycle de 4 sommets.

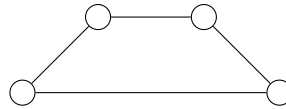


FIGURE 1.3 – Cycle de 4 sommets.

On parle aussi naturellement de chemin ou de cycle dans un graphe. Il s'agit alors d'une suite de sommets du graphe tels que 2 sommets consécutifs sont reliés par une arête. Dans un cadre général, ce chemin peut passer plusieurs fois par le même sommet. Si ce n'est pas le cas, on appelle ce chemin un **chemin élémentaire**. Un exemple de chemin dans la Figure 1.1 est :

*Tls, Lmg, Lyon, Paris, Lmg.*

C'est un chemin qui va de Toulouse à Limoges, en passant par 5 villes au total dont deux fois Limoges : il n'est donc pas élémentaire. Les cycles qui ne passent jamais deux fois par le même sommet sont appelés **cycles élémentaires**.

Lorsqu'un graphe ne possède aucun cycle élémentaire d'au moins 3 sommets, on dit que ce graphe est **acyclique**.

## Arbres

Les arbres sont des graphes acycliques particuliers : ils sont aussi connexes.

On dit qu'un graphe est **connexe** quand les sommets sont tous reliés entre eux, directement ou non. Autrement dit pour tout sommet de départ et pour tout sommet d'arrivée, il existe un chemin qui relie ces deux sommets.

Par exemple, une carte ferroviaire de la France plus complète que celle présentée en Figure 1.1 ne serait pas connexe : les voies ferrées en Corse sont séparées des voies métropolitaines.

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle.

Parfois, un des sommets de l'arbre peut jouer un rôle particulier : la **racine** de l'arbre. Tous les sommets peuvent potentiellement être racine de l'arbre. Ce choix est arbitraire, et dépendra de l'utilisation qu'on en fait.

La Figure 1.4 illustre ce qu'est un arbre.

**Remarque 3.** *En informatique, les arbres sont généralement dessinés avec la racine en haut et les feuilles en bas.*

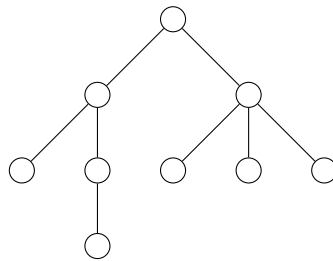


FIGURE 1.4 – Arbre à 9 sommets.

Le nombre d'arêtes d'un arbre est connu : c'est exactement le nombre de sommets moins un.

## Graphes complets

Au contraire, un graphe qui possède toutes les arêtes possibles, est appelé **graphe complet**.

La Figure 1.5 montre un graphe complet à 6 sommets.

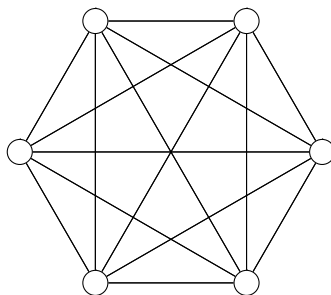


FIGURE 1.5 – Graphe complet à 6 sommets.

### Tournois

On peut aussi ajouter des flèches sur les arêtes pour indiquer un sens sur celle-ci. On parle alors de **graphe orienté**. Cette modification permet de modéliser plus finement des relations entre les sommets, quand ces relations ne sont pas réciproques.

Les arêtes sont alors appelés **arcs**, et sont notés  $(u, v)$ . Pour indiquer que l'arc va de  $u$  vers  $v$ , on dit que  $v$  est un successeur de  $u$ , ou que  $u$  est un prédécesseur de  $v$ .

Les successeurs d'un sommet sont nommés les **voisins sortants** de ce sommet. Évidemment, les **voisins entrants** d'un sommet sont ses prédécesseurs.

Les arcs  $(u, v)$  et  $(v, u)$  sont différents ; ils représentent tous les deux un lien entre les deux sommets  $u$  et  $v$ , mais dans des sens différents !

Les tournois font partie des graphes orientés.

**Définition 2.** *Un tournoi  $T = (V, E)$  est un graphe orienté tel que pour toute paire  $u, v \in V$  de sommets distincts, soit  $(u, v)$  est un arc de  $T$ , soit  $(v, u)$  l'est, mais pas les deux.*

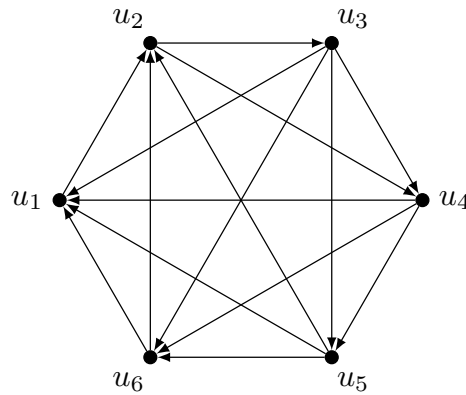
**Remarque 4.** *Une façon de voir un tournoi est de considérer qu'il s'agit d'une orientation d'un graphe complet : on a donné un sens à chacune des arêtes du graphe complet.*

**Définition 3.** *Un tournoi  $T = (V, E)$  de  $n$  sommets est transitif si pour tout sommets  $a, b, c \in V$ ,  $(a, b) \in E$  et  $(b, c) \in E$  implique  $(a, c) \in E$ .*

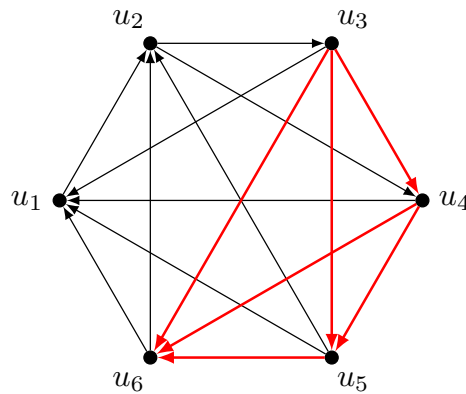
**Remarque 5.** *Soit  $T$  un tournoi transitif de  $n$  sommets. Alors ses sommets ont des degrés entrants qui couvrent  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ . En notant  $u_i$  l'unique sommet de degré entrant  $i$ , pour  $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , on a alors la propriété suivante :  $\forall i, j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , l'arc  $(u_i, u_j)$  existe dans le graphe ssi  $i < j$ .*

**Définition 4.** Un tournoi localement transitif  $T$  est un tournoi tel que pour chaque sommet  $u \in V$ , les deux sous-graphes induits par les voisins sortants de  $u$  d'une part, les voisins entrant de  $u$  d'autre part, sont tous les deux transitifs.

Le tournoi à 6 sommets suivant est localement transitif :

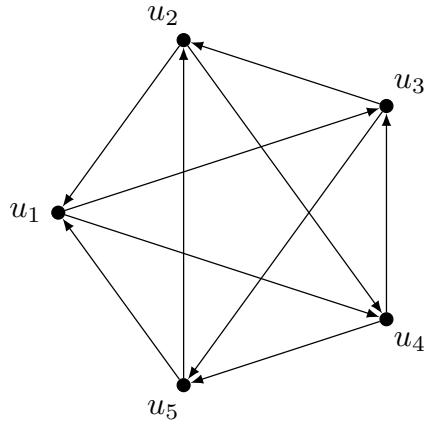


On peut le vérifier en regardant par exemple le sous graphe induit par les prédécesseurs du sommet  $u_1$ .



**Définition 5.** Un tournoi régulier  $T$  est un tournoi tel que pour chaque sommet  $u \in V$ ,  $d^+(v) = d^-(v)$ .

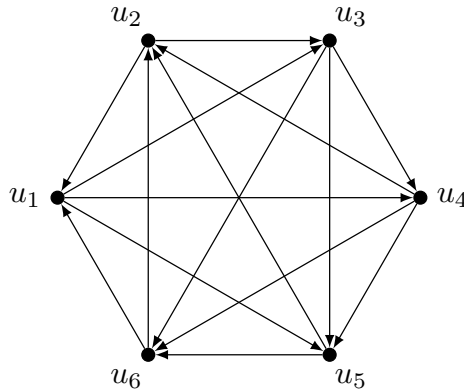
Le graphe suivant est un tournoi régulier avec 5 sommets. Chacun d'entre eux a 2 prédécesseurs et 2 successeurs.



**Remarque 6.** *Un tournoi régulier non vide a un nombre de sommet impair.*

**Définition 6.** *Un tournoi  $T$  de  $n$  sommets, avec  $n$  pair, est semi-régulier s'il vérifie  $d^+(u) - d^-(u) = \pm 1$  pour chaque sommet  $u \in V$ .*

Le graphe suivant est semi-régulier : chacun de ses sommets a 2 successeurs et 3 prédécesseurs, ou 3 successeurs et 2 prédécesseurs.



## 1.2 Identification

Un des thèmes abordés dans ce manuscrit est le thème de l'identification. Dans un graphe, on cherche à identifier les sommets, c'est-à-dire à être capable de les distinguer les uns des autres.

Les codes identifiants sont apparus dans la littérature en 1998 quand M. Karpovsky, K. Chakrabarty et L. Levitin [37] les ont créés pour modéliser un problème

de détection et de localisation de processeurs défectueux dans un réseau multiprocesseurs. Dans ce contexte, il existe une procédure qui permet à un processeur de détecter les défaillances des processeurs "proches" de lui (y compris lui-même). L'utilisateur doit au préalable choisir un sous-ensemble de processeurs qui pourront utiliser cette procédure. Il veut les choisir de manière à être sûr de deux choses, lorsqu'un des processeurs est défaillant :

1. S'en apercevoir ;
2. Le localiser.

Nous verrons comment les codes identifiants sont tout à fait adaptés à cette problématique.

### 1.2.1 Définition des codes identifiants

Avant de pouvoir définir proprement les codes identifiants, nous allons définir plusieurs notions intermédiaires.

Dans toute cette partie,  $G = (V, E)$  est un graphe.

Étant donné un sommet  $v \in V$  du graphe, on note  $\Gamma(v)$  le **voisinage ouvert** de ce sommet :  $\Gamma(v) = \{x \in V \setminus \{v\} : (x, v) \in E\}$ . Par extension, on rajoute le sommet  $v$  lui-même à cet ensemble pour obtenir le **voisinage fermé** de  $v$ , que l'on note  $\Gamma[v]$ . Les notations  $N(v)$  et  $N[v]$  sont aussi très courantes.

Un **code**  $C$  du graphe est tout simplement un sous-ensemble de ses sommets :  $C \subset V$ .

Un code  $C$  est dit **couvrant** si tous les sommets du graphe ont un voisin (ou eux-même) dans le code :  $\forall x \in V, \Gamma[x] \cap C \neq \emptyset$ . On dit naturellement qu'un sommet  $c$  du code **couvre** un sommet du graphe s'il est dans son voisinage fermé.

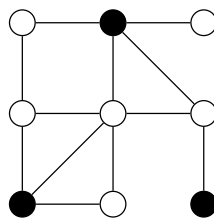


FIGURE 1.6 – Les sommets noirs forment un code couvrant du graphe. Tous les sommets blancs sont voisins d'au moins un sommet noir.

Les codes couvrants sont souvent aussi appelés **dominants**.



Dans le contexte des réseaux multiprocesseurs présenté plus tôt, la notion de couverture permet de vérifier la première condition. Pour la seconde, on va introduire la notion d'identification.

L'intersection du code  $C$  et du voisinage fermé d'un sommet  $x$  du graphe est ce qui l'identifie. On note  $I(v, C) = \Gamma[v] \cap C$  cet ensemble (et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le code, on le notera abusivement  $I(v)$ ).

Un code est dit **séparateur** si pour chaque sommet, son identifiant relatif au code est unique. Autrement dit :

$$\forall x, y \in V, x \neq y \Rightarrow I(x, C) \neq I(y, C).$$

Étant donné un code  $C$  et deux sommets  $x, y \in V$ , on dit que le sommet  $u \in V$  les **sépare** s'il est dans l'identifiant de l'un, mais pas de l'autre. On dit alors aussi que le code  $C$  **sépare** les sommets  $x$  et  $y$ .

Autrement dit, le sommet  $u$  du code  $C$  sépare les sommets  $x$  et  $y$  s'il est dans la différence symétrique de leurs identifiants :

$$u \in I(x, C) \Delta I(y, C),$$

où la différence symétrique de deux ensembles  $A$  et  $B$  est définie par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Un code  $C$  est dit **séparateur** s'il sépare toute paire de sommets distincts du graphe.

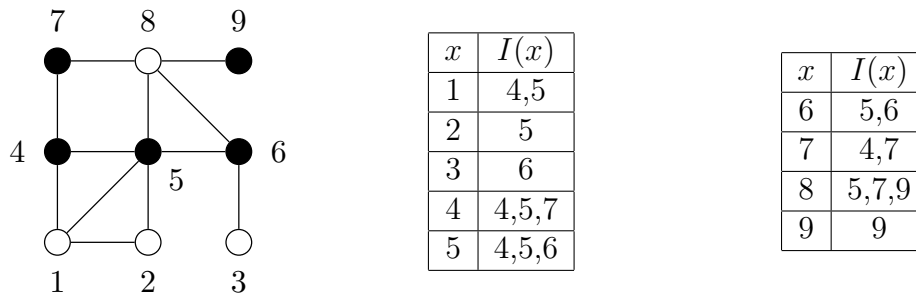


FIGURE 1.7 – Les sommets noirs forment un code séparateur du graphe. Tous les sommets blancs sont voisins d'au moins un sommet noir.

Finalement, un code **identifiant** est un code qui est couvrant et séparateur.

Comme le code séparateur de la figure 1.7 est aussi couvrant, c'est donc un code identifiant.

**Définition 7.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe, et  $C \subset V$  un sous-ensemble de ses sommets.  $C$  est un code identifiant de  $G$  s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\forall v \in V, \Gamma[v] \cap C \neq \emptyset \quad (\text{Couverture})$$

$$\forall u, v \in V, u \neq v \Rightarrow \Gamma[u] \cap C \neq \Gamma[v] \cap C \quad (\text{Séparation})$$

### 1.2.2 Colorations identifiantes

Une des variantes des codes identifiants consiste à colorier les sommets du graphe.

**Définition 8** (Coloration). Une coloration  $c$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est une fonction définie sur l'ensemble  $V$  des sommets à image dans un ensemble de couleurs, représentés par des entiers. Étant donné un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$ ,  $c(S) = \{c(x) : x \in S\}$  est l'ensemble des couleurs des sommets de  $S$ .

Il existe aussi d'autres sortes de colorations ; on peut par exemple donner une couleur aux arêtes d'un graphe. Cependant, dans le cadre de cette thèse, nous n'utiliserons que des colorations de sommets, que nous nommerons donc simplement coloration.

La variante des codes identifiants dont nous parlerons dans ce manuscrit est une coloration ; cette variante se décline sous deux formes : les colorations globalement identifiantes et les colorations localement identifiantes.

**Définition 9** (Coloration globalement identifiante). Une coloration globalement identifiante d'un graphe  $G = (V, E)$  est une coloration  $c$  de ce graphe telle que :

$$\forall x, y \in V, x \neq y, \quad c(N[x]) \neq c(N[y])$$

Notons que cette coloration n'est pas nécessairement une coloration dite **propre** : deux sommets voisins peuvent avoir la même couleur.

**Définition 10.** Le nombre minimum de couleurs d'une coloration globalement identifiante d'un graphe  $G$  est noté  $\chi_{id}(G)$ .

Il existe aussi une variante locale de ces colorations identifiantes.

**Définition 11** (Coloration localement identifiante). Une coloration localement identifiante d'un graphe  $G = (V, E)$  est une coloration  $c$  de ce graphe telle que :

$$\forall (x, y) \in E, \quad c(N[x]) \neq c(N[y])$$

La différence par rapport aux colorations globalement identifiantes est que l'on a besoin de ne séparer que les sommets voisins.

## 1.3 Jeux

### 1.3.1 Cadre

Lorsque l'on parle de théorie des jeux, on peut en réalité penser à deux théories différentes : la théorie des jeux économiques, et la théorie des jeux combinatoires. Dans ce manuscrit, c'est cette dernière qui nous intéressera. Dès que nous parlerons d'un jeu, il s'agira en réalité d'un jeu combinatoire.

Un jeu est une situation, appelée **position**, dans laquelle un ou plusieurs joueurs font des actions, appelées **coups**, qui font évoluer la situation. Ces actions résultent en de nouvelles situations, appelées **options**. Par abus de langage, on peut confondre ces deux notions : lorsque l'on parlera d'un coup d'un joueur, on fera référence à la situation dans laquelle se trouve le jeu après qu'il a joué.

Les joueurs sont souvent appelés **Left** et **Right**. Dans chaque situation, un ensemble de **règles** définit quelles sont les options de chaque joueur.

Une **stratégie** est une procédure qui indique, étant donnée une situation, quelle option choisir. Une **stratégie gagnante** est une stratégie qui permet au joueur qui l'applique de gagner, quels que soient les coups de son adversaire. De manière générale, on suppose que les deux joueurs jouent parfaitement ; cela veut dire que s'il existe une stratégie gagnante pour eux, ils gagneront.

Pour qu'un jeu soit qualifié de combinatoire, il faut qu'il respecte certaines propriétés.

**Définition 12** ([8]). *Un jeu combinatoire est un jeu à 2 joueurs tel que :*

1. les deux joueurs jouent chacun leur tour ;
2. il n'y a pas de hasard dans le jeu ;
3. le jeu est fini (il y a un nombre fini de situations et chaque situation ne peut intervenir qu'une seule fois pendant une partie) ;
4. l'information est parfaite (chaque joueur connaît toutes les informations qui caractérisent la situation actuelle) ;
5. la dernière action détermine le gagnant.

En convention **normale** (qui sera la seule étudiée dans ce manuscrit), le joueur qui a joué en dernier sera désigné comme gagnant. En convention **misère** c'est le contraire : le joueur qui n'a plus d'option disponible gagne la partie.

Un exemple de jeu combinatoire est **DOMINEERING**. Le jeu se joue sur une grille carrée (un échiquier), avec des dominos (il n'y a pas de valeurs inscrites sur ces

dominos). Le joueur **Left** joue en posant des dominos horizontalement, et le joueur **Right** les pose verticalement.

Pour qu'un joueur puisse poser un domino, il faut que les deux cases où il veut jouer soient vides ; il ne faut pas superposer les dominos.

Par exemple, la Figure 1.8 représente une situation en cours de partie en **Left** et **Right**.

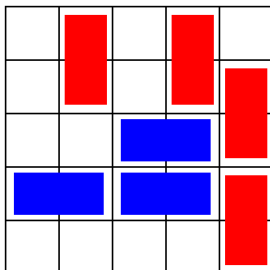


FIGURE 1.8 – Une partie en cours de DOMINEERING. Le joueur **Left** joue les horizontaux, et **Right** les verticaux.

### 1.3.2 Jeux impartiaux

Parmi l'ensemble des jeux combinatoires, une famille se distingue : les jeux impartiaux.

Les **jeux impartiaux** sont des jeux combinatoires dans lesquels les deux joueurs ont tout le temps les mêmes options. Autrement dit, les règles ne diffèrent pas entre les joueurs.

Par exemple, le jeu DOMINEERING n'est pas impartial, car l'un des joueurs joue horizontalement et l'autre, verticalement.

En retirant cette contrainte (les deux joueurs peuvent jouer verticalement ou horizontalement, au choix), on obtient un nouveau jeu, appelé CRAM. Ce jeu est un jeu impartial.

Un exemple de jeu impartial connu du grand public est le jeu que l'on appellera ALLUMETTES, que l'on peut trouver dans l'émission télévisée Fort Boyard. Une situation de ce jeu est seulement caractérisée par un nombre d'allumettes, et les règles imposent aux joueurs de retirer de 1 à 3 allumettes à leur tour.

Puisque dans une même situation d'un jeu impartial les deux joueurs ont tout le temps les mêmes options, les joueurs seront distingués par qui joue en premier. À

partir d'une certaine position d'un jeu impartial, il n'y a donc que 2 issues possibles : soit le premier joueur a une stratégie gagnante, soit le second joueur en a une.

Si le premier joueur a une stratégie gagnante, on dira que la situation est une  $\mathcal{N}$ -position (pour *Next*; le prochain joueur à jouer gagne). Dans le cas contraire, la situation sera une  $\mathcal{P}$ -position (pour *Previous*).

Dans l'exemple du jeu ALLUMETTES, en jouant en convention normale, on peut voir que c'est le second joueur qui a une stratégie gagnante dans la situation où il reste 4 allumettes. La Figure 1.9 montre comment le second joueur peut répliquer dans tous les cas, en fonction du coup du premier joueur.

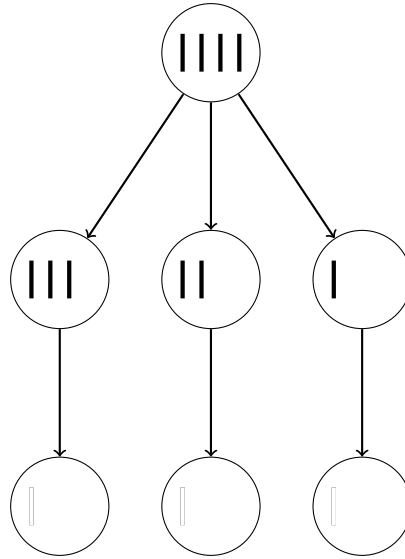


FIGURE 1.9 – Stratégie du second joueur. En partant de 4 allumettes, quel que soit le coup du premier joueur, le second joueur a une réponse qui lui permet de gagner.

L'ensemble des options d'une situation  $S$  d'un jeu impartial (qui ne dépend donc pas du joueur) est noté  $\text{opt}(S)$ .

En connaissant les issues des options d'une situation  $S$ , on peut calculer simplement l'issue de  $S$ .

**Proposition 1.** *Soit  $S$  une situation d'un jeu impartial en convention normale.*

- *Si  $\text{opt}(S) = \emptyset$ , alors  $S$  est une  $\mathcal{P}$ -position ;*
- *S'il existe une  $\mathcal{P}$ -position dans  $\text{opt}(S)$ , alors  $S$  est une  $\mathcal{N}$ -position ;*
- *Si toutes les situations de  $\text{opt}(S)$  sont des  $\mathcal{N}$ -positions, alors  $S$  est une  $\mathcal{P}$ -position.*

En utilisant cette proposition, on peut par exemple déduire que la situation du jeu ALLUMETTES avec 5 allumettes est une  $\mathcal{N}$ -position. En effet, le premier joueur peut retirer une allumette, ce qui laisse à son adversaire 4 allumettes, situations que l'on sait perdante, d'après la Figure 1.9.

Un autre jeu, qui ressemble à ALLUMETTES, est le jeu NIM. Les situations sont les mêmes (un tas d'un certain nombre d'allumettes), mais les règles diffèrent. Les joueurs ne sont plus limités à maximum 3 allumettes, mais peuvent en retirer le nombre qu'ils veulent. La situation du jeu NIM avec  $n$  allumettes est notée  $*n$ .

Bien que ce jeu soit d'apparence très simple (il suffit de retirer toutes les allumettes dès le premier tour pour gagner!), il est la pierre angulaire des jeux combinatoires impartiaux. Pour pouvoir parler du théorème qui est très certainement le plus important dans toute l'étude des jeux combinatoires impartiaux et qui relie NIM à tous les autres jeux, il faut commencer par parler de *somme* de jeu.

Pour cela, il suffit d'imaginer plusieurs situations (pas forcément du même jeu) en parallèle. À chaque tour, le joueur peut jouer sur une seule des situations. S'il ne peut jouer sur aucune des situations, il a alors perdu (en convention normale).

Par exemple, on peut imaginer de jouer au jeu ALLUMETTES avec 2 allumettes d'un côté, et 1 allumette de l'autre.

La somme de 2 situations de jeux  $S_1$  et  $S_2$  est notée  $S_1 + S_2$ . Les jeux qui sont des  $\mathcal{P}$ -positions ont un rôle particulier dans une somme de jeux.

En effet, si  $S_1$  est une  $\mathcal{P}$ -position, alors quel que soit le jeu  $S_2$ ,  $S_1 + S_2$  a la même issue que  $S_2$ . Le joueur qui a une stratégie gagnante dans  $S_2$  l'applique, et lorsque l'autre joueur joue dans  $S_1$ , il suffit de jouer la stratégie gagnante de  $S_1$ .

Dans le cas où au moins une des deux situations est perdante, on est donc capable d'en déduire l'issue de la somme. Mais ce n'est pas le cas si les deux situations sont gagnantes. Pour que ce soit possible, il faut d'abord raffiner la notion d'issue.

Pour cela, nous allons commencer par définir une relation d'équivalence entre les situations. Nous dirons que deux situations  $S_1$  et  $S_2$  sont équivalentes, et on notera  $S_1 \equiv S_2$  si la somme  $S_1 + S_2$  est une  $\mathcal{P}$ -position.

Pour chacune des classes d'équivalence définies par la relation  $\equiv$ , on attribue une valeur, appelée valeur de Grundy. La valeur de Grundy d'une situation  $S$  d'un jeu  $J$ , notée  $\mathcal{G}_J(S)$  (ou  $\mathcal{G}(S)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté), est calculée à partir des valeurs de Grundy des options de  $S$  de la façon suivante :

$$\mathcal{G}_J(S) = \text{mex}(\mathcal{G}_J(P) : P \in \text{opt}(S)),$$

où  $\text{mex}(E)$  (pour *Minimum EXclusion*) est le plus petit entier positif ou nul qui n'est pas dans  $E$ .

En définissant les valeurs de Grundy, on peut montrer [8] que la situation de jeu  $*n$  a une valeur de Grundy égale à  $n$ , pour tout  $n$  entier.

Autrement dit, toute situation  $S$  d'un jeu combinatoire impartial est équivalente à une situation du jeu de NIM trivial,  $*\mathcal{G}(S)$ .

Bien que cette propriété semble déjà extraordinaire, il existe par-dessus un théorème qui permet de calculer la valeur de Grundy d'une somme de jeu en fonction des valeurs de Grundy de ses composantes :

**Théorème 1** (Théorème de Sprague-Grundy [47]). *Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux situations de jeu. Alors  $\mathcal{G}(S_1 + S_2) = \mathcal{G}(S_1) \oplus \mathcal{G}(S_2)$ , où  $\oplus$  est appelée la **nim-somme** et consiste à faire le OU logique bit à bit entre les deux nombres écrits en binaire.*

### 1.3.3 Jeux octaux

Une famille de jeux très étudiée est la famille des jeux octaux. Le tronc commun de ces jeux est que l'on joue sur un tas d'allumettes, à l'image des jeux ALLUMETTES et NIM. En fait, ces deux jeux font partie des jeux octaux. Entre deux jeux octaux différents, ce sont les règles, qui permettent d'enlever un certain nombre d'allumettes suivant les cas, qui diffèrent.

Ils sont définis de la manière suivante :

**Définition 13** ([8]). *Soit  $u_1, \dots, u_n, \dots$  une suite d'entiers positifs, tels que pour tout  $i$ ,  $u_i \leq 7$ . On décompose chaque  $u_i$  comme  $u_i = b_1^i + 2b_2^i + 4b_3^i$  avec  $b_1^i, b_2^i, b_3^i$  des variables binaires. Les règles du jeu octal  $\mathbf{0.u_1 \dots u_n \dots}$  sont les suivantes : le joueur a le droit de retirer  $i$  allumettes dans un tas si :*

- $b_1^i = 1$  et qu'il vide le tas ;
- ou que  $b_2^i = 1$  et qu'il ne vide pas le tas ;
- ou que  $b_3^i = 1$  et qu'il coupe le tas en deux tas restants non vides.

Un jeu octal est dit fini s'il possède un nombre fini de  $u_i$  non nuls. On arrêtera alors son écriture à la dernière valeur non nulle.

Par exemple, le jeu ALLUMETTES défini précédemment correspond en fait au jeu 0.333. Le  $i$ -ème 3 signifie que le joueur a le droit de retirer  $i$  allumettes s'il y a au moins  $i$  allumettes (il peut soit vider le tas, soit laisser un tas non vide).

Le jeu de NIM correspond au jeu 0.33333. . . . Le joueur peut retirer le nombre d'allumettes qu'il veut, et laisser un tas (vide ou non). Il ne peut pas couper le tas en deux.

Même si le jeu se joue sur un nombre quelconque de tas, grâce au Théorème 1, il suffit de connaître les valeurs de Grundy des tas de toutes tailles. C'est pour cela

qu'on s'intéresse, lorsque l'on étudie un jeu octal, à la **suite de Grundy** de ce jeu. La  $i$ -ème valeur de cette suite est tout simplement la valeur de Grundy de la situation avec un tas de  $i$  allumettes.

À l'heure actuelle, tous les jeux octaux dont on a su calculer la suite de Grundy ont la propriété que celle-ci est ultimement périodique (c'est-à-dire périodique à partir d'un certain terme). D'où la conjecture suivante :

**Conjecture 1** (Conjecture de Guy [8]). *La suite de Grundy d'un jeu octal fini est ultimement périodique.*





# Chapitre 2

## Colorations identifiantes et cycles universels

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des colorations identifiantes, qui sont un mélange des colorations et des codes identifiants dont nous avons pu parler dans le chapitre 1. Nous chercherons à construire des colorations globalement identifiantes sur des cycles, en étendant la notion de cycle universel introduite par Jackson. Ces résultats ont été publiés récemment [17].

### 2.1 Introduction

Nous allons construire une coloration identifiante d'un cycle. Cette coloration est une variante des codes identifiants, dont la définition est rappelée ici :

**Définition 14** (Code identifiant). *Un code identifiant  $C$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble de  $V$  tel que :*

- (1)  $\forall x \in V, C \cap N[x] \neq \emptyset$
- (2)  $\forall x, y \in V, x \neq y, C \cap N[x] \neq C \cap N[y]$

où  $N[x]$  est le voisinage fermé du sommet  $x$ , c'est-à-dire l'ensemble de ses voisins ainsi que lui-même.

**Définition 15.** *La cardinalité minimum d'un code identifiant d'un graphe  $G$  est notée  $\gamma_{id}(G)$ .*

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à une variante colorée des codes identifiants. Rappelons aussi ce qu'est une coloration d'un graphe :

**Définition 16** (Coloration). *Une coloration  $c$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est une fonction définie sur l'ensemble  $V$  des sommets à image dans un ensemble de couleurs, représentés par des entiers. Étant donné un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$ ,  $c(S) = \{c(x) : x \in S\}$  est l'ensemble des couleurs des sommets de  $S$ .*

Il existe aussi d'autres sortes de colorations; on peut par exemple donner une couleur aux arêtes d'un graphe, par exemple. Cependant, dans le cadre de cette thèse, nous n'utiliserons que des colorations de sommets, que nous nommerons donc simplement coloration.

Dans ce chapitre, nous utilisons une sorte de variante des codes identifiants, qui utilise une coloration; cette variante se décline sous deux formes : les colorations globalement identifiantes et les colorations localement identifiantes.

**Définition 17** (Coloration globalement identifiante). *Une coloration globalement identifiante d'un graphe  $G = (V, E)$  est une coloration  $c$  de ce graphe telle que :*

$$\forall x, y \in V, x \neq y, \quad c(N[x]) \neq c(N[y])$$

Notons que cette coloration n'est pas nécessairement une coloration propre : deux sommets voisins peuvent avoir la même couleur.

**Définition 18.** *Le nombre minimum de couleurs d'une coloration globalement identifiante d'un graphe  $G$  est noté  $\chi_{id}(G)$ .*

Il existe des liens entre les codes identifiants et les colorations globalement identifiantes.

**Théorème 2.** *Étant donné un graphe  $G$ ,  $\chi_{id}(G) \leq \gamma_{id}(G) + 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $C$  un code identifiant de  $G$ . On peut construire une coloration globalement identifiante de  $G$  en donnant une couleur unique à chaque sommet de  $C$ , et une autre couleur, commune, à tous les autres sommets. De cette manière, la coloration est composée de  $|C| + 1$  couleurs et est en effet une coloration globalement identifiante : si l'on prend  $x$  et  $y$  deux sommets distincts du graphe, il existe un sommet  $z$  dans la différence symétrique de  $C \cap N[x]$  et  $C \cap N[y]$ ; la couleur de  $z$ , qui est unique, permet de séparer les sommets  $x$  et  $y$  dans la coloration.  $\square$

Cette borne est serrée pour certains graphes. Par exemple,  $\gamma_{id}(P_3) = 2$  et  $\chi_{id}(P_3) = 3$ , comme l'on peut le voir dans la Figure 2.1.

Il existe aussi une variante locale de ces colorations identifiantes.

FIGURE 2.1 – Un code identifiant et une coloration globalement identifiante de  $P_3$ .

**Définition 19** (Coloration localement identifiante). *Une coloration localement identifiante d'un graphe  $G = (V, E)$  sans jumeaux est une coloration  $c$  de ce graphe telle que :*

$$c \text{ est une coloration propre : } \forall (x, y) \in E, c(x) \neq c(y)$$

$$\forall (x, y) \in E, \quad c(N[x]) \neq c(N[y])$$

Deux sommets d'un graphe sont dits **jumeaux** s'ils possèdent le même voisinage fermé. Il est alors impossible de séparer ces deux sommets, et le graphe dans lequel ils se trouvent n'admet donc pas de coloration identifiante. Pour cette raison, on peut choisir de n'étudier que des graphes qui ne contiennent pas de jumeaux.

La différence par rapport aux colorations globalement identifiantes est que l'on a besoin de ne séparer que les sommets voisins.

**Définition 20.** *Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour une coloration localement identifiante d'un graphe  $G$  est noté  $\chi_{lid}(G)$ .*

**Théorème 3** ([27]). *Soit  $n \geq 4$  un entier, et  $C_n$  le cycle de longueur  $n$ . Alors :*

- $\chi_{lid}(C_n) = 3$  si  $n \equiv 0 \pmod{4}$
- $\chi_{lid}(C_n) = 5$  si  $n = 5$  ou si  $n = 7$
- $\chi_{lid}(C_n) = 4$  sinon.

La Figure 2.2 montre des exemples de colorations localement identifiantes de plusieurs cycles, de tailles différentes.

$n = 5, 7$	$n \equiv 0 \pmod{4}$	$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n \equiv 2 \pmod{4}$	$n \equiv 3 \pmod{4}$
01234 0123402	0121 01210121	013230121 0132301210121	310121 3101210121	01323012142 013230121420121

FIGURE 2.2 – Exemples de colorations localement identifiantes de cycles

Le Théorème 3 donne le nombre exact de couleurs nécessaires pour construire une coloration localement identifiante d'un cycle, en fonction de sa longueur, mais il n'existe pas d'équivalent dans le cas des colorations globalement identifiantes.

**Définition 21** (Cycle identifié). *Un cycle identifié est un cycle  $C$  et une coloration globalement identifiante  $c$  de  $C$ .*

Dans un premier temps, nous allons chercher à construire des cycles identifiés avec plus de 6 couleurs. Nous verrons par la suite ce qui se passe avec moins de couleurs. Le but est de construire un cycle identifié aussi grand que possible, avec au plus  $L$  couleurs. Dans sa thèse, Parreau [42] a remarqué que les cycles universels sont des cycles identifiés. La preuve d'existence des cycles universels que donne Jackson [36] a le mérite d'être constructive. Nous allons donc nous baser sur cette preuve pour construire de grands cycles identifiés.

**Définition 22** ([36]). *Un cycle  $k$ -universel de  $\binom{L}{k}$  est un cycle de  $\binom{L}{k}$  sommets où ceux-ci sont étiquetés par des entiers de 0 à  $L - 1$  et tel que chaque combinaison de  $k$  nombres apparaît une unique fois en tant que suite de  $k$  sommets consécutifs.*

Un cycle 3-universel de  $\binom{L}{3}$  peut être vu comme un cycle identifié, car le voisinage fermé d'un sommet est une suite de 3 sommets consécutifs.

**Théorème 4** ([36]). *Si  $\text{pgcd}(L, 3) = 1$  et  $L \geq 8$ , alors il existe un cycle universel de  $\binom{L}{3}$ .*

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus en partant de la preuve de ce théorème, puis en la modifiant pour correspondre au cadre des colorations globalement identifiantes.

**Corollaire 1** ([42]). *Si  $\text{pgcd}(L, 3) = 1$  et  $L \geq 8$ , la longueur maximum d'un cycle identifié avec  $L$  couleurs est au moins  $\binom{L}{3}$ .*

*Démonstration.* Soit  $C$  un cycle universel de  $\binom{L}{3}$ . On construit une coloration en considérant que la couleur d'un sommet est son étiquette. Comme chaque suite d'étiquettes de 3 sommets successifs est unique, la coloration est bien globalement identifiante.  $\square$

Ces cycles 3-universels ne considèrent pas les répétitions d'étiquettes dans les suites d'étiquettes de 3 sommets successifs (par définition, elles sont toutes différentes). Par conséquent, le résultat précédent n'est pas nécessairement parfait dans le cas des colorations globalement identifiantes, puisqu'il est autorisé dans ce contexte d'avoir plusieurs fois la même couleur dans une suite de 3 sommets consécutifs. L'exemple de la Figure 2.3 montre ceci. Nous pouvons vérifier que les sommets sont bien identifiés par les couleurs de leur voisinage. Le sommet du haut, par exemple,

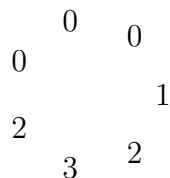


FIGURE 2.3 – Exemple d’une coloration globalement identifiante d’un cycle de taille 7, avec 4 couleurs.

possède seulement la couleur 0 dans son voisinage, et c’est le seul sommet qui vérifie cela.

Jackson a aussi étudié le cas des cycles  $k$ -universels avec répétition, où les étiquettes d’une suite de  $k$  sommets successifs ne sont pas nécessairement distinctes. Cependant, pour  $k = 3$ , ces cycles ne peuvent pas être vus en tant que cycles identifiés, car il y aurait des collisions. Par exemple,  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 1, 1)$  sont deux combinaisons différentes pour Jackson, mais du point de vue des colorations globalement identifiantes, ces deux suites de 3 sommets donnent un unique ensemble de couleurs :  $\{0, 1\}$ .

**Lemme 1** ([42]). *Une borne supérieure de la taille d’un cycle identifié avec au plus  $L$  couleurs est  $\frac{L^3+5L}{6}$ .*

*Démonstration.* Chaque sommet  $x$  du cycle a exactement 2 voisins, donc  $N[x]$  est de cardinalité 3. Le sommet  $x$  a donc de 1 à 3 couleurs différentes dans son voisinage. Chacune de ces couleurs peut prendre  $L$  valeurs différentes, donc le nombre de possibilités pour  $c(N[x])$  est

$$\binom{L}{3} + \binom{L}{2} + \binom{L}{1} = \frac{L^3 + 5L}{6}$$

□

## 2.2 Types et graphe des transitions

Dans l’optique de construire des cycles identifiés plus grands que ceux obtenus dans le Corollaire 1, nous avons besoin d’étendre la méthode que Jackson utilise dans sa preuve, en incluant les répétitions de couleurs. La principale idée est que pour un sommet donné, le plus important est son voisinage fermé, qui forme une suite de 3 couleurs. Nous allons répartir ces suites dans des classes d’équivalence.

Deux suites seront de la même classe si l'on obtient la deuxième en ajoutant une constante à toutes les couleurs de la première. Ensuite, nous allons construire des chemins qui ne contiennent pas plusieurs suites de 3 sommets consécutifs d'une même classe d'équivalence. Finalement, nous allons fusionner ces chemins pour obtenir un cycle (en résolvant les différents problèmes qui peuvent apparaître). Une suite de 3 couleurs de sommets successifs sera notée  $(a, b, c)$ . Du point de vue des colorations globalement identifiantes, on ne s'intéresse qu'à l'ensemble  $\{a, b, c\}$ , sans s'occuper de l'ordre et des répétitions ( $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  et  $(1, 0, 1)$  sont 4 suites différentes, mais qui donnent le même ensemble de couleurs  $\{0, 1\}$  dans le voisinage du sommet central). Tout comme Jackson l'a fait dans sa preuve, nous allons donner un *type* à chaque suite de 3 couleurs, en utilisant les différences entre les couleurs de cette suite. Le type d'une suite sera sa classe d'équivalence.

**Définition 23.** *Étant donné une suite de 3 couleurs  $(a, b, c)$ , on considère les trois différences  $d_1 = b - a$ ,  $d_2 = c - b$ , et  $d_3 = a - c$  modulo  $L$ . Le type de la suite de couleurs, noté  $\langle t, u \rangle$ , sera défini en utilisant deux de ces trois différences, en suivant les règles suivantes :*

- *Si les trois sont différentes, on garde les deux plus petites, en commençant par celle dont l'indice suit celui de la plus grande. Si la plus grande est  $d_2$ , nous garderons donc  $d_3$  et  $d_1$ . Le type sera alors  $\langle d_3, d_1 \rangle$ .*
- *Sinon il y a au moins deux différences égales à une certaine valeur  $d$  (et cette valeur est unique). Dans ce cas, le type sera deux fois cette valeur, c'est-à-dire  $\langle d, d \rangle$ .*

*Ces deux différences sont le type de  $(a, b, c)$ , noté  $\langle t, u \rangle$ .*

Remarquons qu'à partir du type d'une suite de 3 couleurs, nous pouvons retrouver les trois différences (non ordonnées), car la somme des 3 est égale à 0 modulo  $L$ . Nous ne considérons arbitrairement que les suites de 3 couleurs telles que leurs deux premières différences forment leur type. Nous ignorons toutes les autres permutations de cet ensemble de 3 couleurs. Par exemple, le type  $\langle 1, 2 \rangle$  et la couleur initiale 0 donne la suite  $(0, 1, 3)$ , puisque  $0 + \mathbf{1} = 1$  et  $1 + \mathbf{2} = 3$ . Toutes les autres permutations de  $(0, 1, 3)$ , telles que  $(1, 0, 3)$  ou  $(3, 0, 1)$  n'apparaîtront pas dans la construction qui suit.

Chaque suite de 3 couleurs que nous considérons est par conséquent représentée par son type (sa classe d'équivalence) et la couleur initiale, du premier des trois sommets (qui permet de différencier les suites d'une même classe). C'est pour pouvoir avoir cette caractérisation que nous avons choisi de faire le choix arbitraire d'une seule suite parmi toutes les permutations.

$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$
$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$
$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$
$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$
$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 3, 3 \rangle$	$\langle 4, 4 \rangle$

FIGURE 2.4 – Liste des types existants pour  $L = 8$ .

Comme précisé précédemment, deux suites de 3 couleurs différentes peuvent avoir le même ensemble de couleurs (par exemple,  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 1, 1)$  ont l'ensemble de couleurs  $\{0, 1\}$ ).

**Définition 24.** *Étant donné un nombre de couleurs  $L$ , on dit que le type  $\langle u, v \rangle$  existe s'il existe 3 couleurs  $a, b$  et  $c$  telles que la suite  $(a, b, c)$  est du type  $\langle u, v \rangle$ .*

**Lemme 2.** *Le type  $\langle j, k \rangle$  existe si et seulement si l'une des deux affirmations suivantes est vraie :*

1.  $j = k$  et  $j \leq \frac{L}{2}$
2.  $2j < L - k$  et  $2k < L - j$

*Démonstration.* Supposons que le type  $\langle j, k \rangle$  existe. Alors il existe une suite de 3 couleurs  $(i, i + j, i + j + k)$  qui est de type  $\langle j, k \rangle$ . Les différences entre les couleurs sont  $j, k$  et  $L - j - k$ . Ces différences donnent effectivement un type  $\langle j, k \rangle$  seulement dans le cas où une des affirmations est vraie. Réciproquement, si  $j = k$  et  $j < \frac{L}{2}$ ,  $\{0, j, 2j\}$  est en effet de type  $\langle j, k \rangle$ . Finalement, si  $2j < L - k$  et  $2k < L - j$  alors  $\{0, j, j + k\}$  est de type  $\langle j, k \rangle$  car la troisième différence,  $L - j - k$ , est la plus grande des trois.  $\square$

Remarquons que si le type  $\langle j, k \rangle$  existe (notamment via la suite de couleurs  $(0, j, j + k)$ ), alors le type  $\langle k, j \rangle$  existe aussi (via la suite  $(0, k, k + j)$ ).

Étant donné  $L$  et un type, il est possible d'énumérer les différents ensembles de couleurs qui donnent une suite de ce type.

**Lemme 3.** *Soit  $L \in \mathbb{N}$  et un type existant  $\langle j, k \rangle$ .*

1. *Si  $L$  est pair, alors le type  $\langle \frac{L}{2}, \frac{L}{2} \rangle$  représente  $\frac{L}{2}$  ensembles de couleurs différents ;*
2. *Si  $L$  est un multiple de 3, alors le type  $\langle \frac{L}{3}, \frac{L}{3} \rangle$  représente  $\frac{L}{3}$  ensembles de couleurs différents ;*
3. *Les types  $\langle 0, j \rangle$  et  $\langle j, 0 \rangle$  représentent les mêmes  $L$  ensembles de couleurs.*



4. Dans tous les autres cas, le type  $\langle j, k \rangle$  représente  $L$  ensembles de couleurs différents, et ces ensembles ne peuvent pas être obtenus depuis un autre type.

Lorsqu'un type représente moins de  $L$  ensembles de couleurs différents, nous dirons que ce type est **incomplet**.

- Démonstration.*
1. Les ensembles représentés par ce type n'ont que deux couleurs différentes,  $i$  et  $i + \frac{L}{2}$ . Parmi toutes les valeurs initiales  $i$ , seulement la moitié va donner des ensembles de couleurs différents, car pour  $i$  in  $[\frac{L}{2}, \dots, L - 1]$ , nous obtenons l'ensemble  $\{i, i + \frac{L}{2}\}$ , qui est égal à l'ensemble obtenu depuis la couleur initiale  $i - \frac{L}{2}$ .
  2. Pour  $i$  dans  $[0, \dots, \frac{L}{3} - 1]$ , le choix de la couleur initiale  $i$ ,  $i + \frac{L}{3}$  ou  $i + 2\frac{L}{3}$  donne le même ensemble de couleurs  $\{i, i + \frac{L}{3}, i + 2\frac{L}{3}\}$ .
  3. Les suites qui donnent un type  $\langle 0, j \rangle$  (respectivement  $\langle j, 0 \rangle$ ) sont de la forme  $\{i, i, i + j\}$  (resp.  $\{i, i + j, i + j\}$ ). Dans les deux cas, ils forment l'ensemble de deux couleurs  $\{i, i + j\}$ .
  4. La suite commençant par la couleur  $i$  est  $(i, i + j, i + j + k)$ . Les différences  $j$  et  $k$  sont non nulles, donc  $i \neq i + j$  et  $i + j \neq i + j + k$ . La seule possibilité pour avoir  $i = i + j + k$  serait d'avoir  $j + k = L$ , mais dans ce cas,  $j = k = \frac{L}{2}$  (sinon, ce ne serait pas un type  $\langle j, k \rangle$ ), qui est un cas précédent de ce lemme.  $\square$

La Figure 2.5 montre quelques-uns des types existants pour  $L = 8$  avec pour chacun, la seule suite de ce type ayant 0 comme couleur initiale, ainsi que son ensemble de couleurs associé. Comme nous l'avons vu dans le Lemme 3, les types  $\langle 0, 2 \rangle$  et  $\langle 2, 0 \rangle$  ont des suites différentes qui sont associées au même ensemble de couleurs (il y a une collision entre ces types).

Type	Suite de couleurs commençant par 0	Ensemble de couleurs
$\langle 4, 4 \rangle$	(0, 4, 0)	{0, 4}
$\langle 0, 2 \rangle$	(0, 0, 2)	{0, 2}
$\langle 2, 0 \rangle$	(0, 2, 2)	{0, 2}
$\langle 1, 2 \rangle$	(0, 1, 3)	{0, 1, 3}
$\langle 2, 1 \rangle$	(0, 2, 3)	{0, 2, 3}

FIGURE 2.5 – Quelques types pour  $L = 8$  avec la suite de couleurs commençant par 0 ainsi que l'ensemble de couleurs associé.

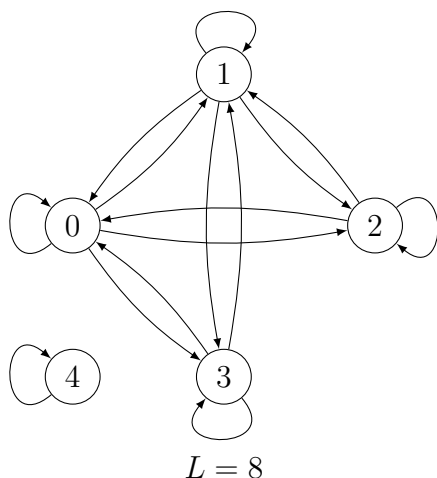


FIGURE 2.6 – Graphe des transitions de tous les types existants pour  $L = 8$ .

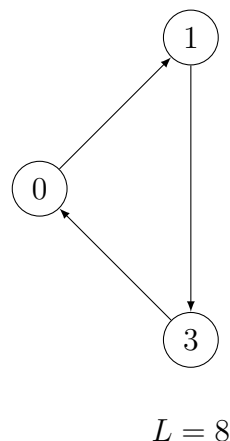


FIGURE 2.7 – Graphe des transitions de  $E_L^1$  pour  $L = 8$ .

Nous utilisons les types précédemment définis pour construire un graphe orienté, de la manière suivante.

**Définition 25** (Graphe des transitions). *Étant donné un ensemble de types  $T$ , le graphe des transitions  $G = (V, E)$  de ces types vérifie :*

- $V$  est l'ensemble des entiers qui apparaissent dans au moins un type ;
- $E = \{(j, k) : \langle j, k \rangle \text{ est un élément de } T\}$ .

La Figure 2.6 montre le graphe des transitions obtenu à partir des types de la Figure 2.4.

Un chemin du graphe des transitions représente une suite de types, à partir de laquelle on peut construire une suite de couleurs, à partir d'une couleur initiale arbitraire pour le premier type. Pour les types suivants, la couleur initiale sera déterminée par les types précédents. Par exemple, le chemin commençant avec le sommet 0, suivi des sommets 1, 2 et 1 nous donne les types  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, 2 \rangle$  et  $\langle 2, 1 \rangle$ . En partant de la couleur initiale 0, choisie arbitrairement, cela donne la suite de couleurs 00134. Les 3 premières couleurs  $(0, 0, 1)$  sont bien de type  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $(0, 1, 3)$  de type  $\langle 1, 2 \rangle$  et  $(1, 3, 4)$  de type  $\langle 2, 1 \rangle$ .

La démarche pour obtenir un cycle identifié est de choisir un circuit eulérien d'un graphe des transitions. Puisque chaque type correspond à un arc de ce graphe, chaque type va apparaître une unique fois dans ce circuit. En partant d'une couleur initiale arbitraire  $i_0$ , nous obtenons alors une suite de couleurs commençant avec la

couleur  $i_0$  et finissant avec la couleur  $i_1$ . Ensuite, nous allons répéter ce processus, en partant de la couleur obtenue en fin de l'itération précédente, en recommençant tant que l'on ne retombe pas sur  $i_0$ . Ce faisant, nous obtenons une suite de couleurs se commençant et se terminant par  $i_0$ . Pour obtenir le cycle, il suffit alors de fusionner les deux extrémités du chemin. Ce processus va être détaillé dans la sous-section 2.3.2, et les Figures 2.10 et 2.11 montrent les résultats pour  $L = 9$ .

Cependant, lors de cette construction, plusieurs problèmes peuvent se présenter. Le graphe des transitions de tous les types existants peut ne pas être eulérien, et il peut y avoir des types redondants (les types  $\langle 0, j \rangle$  et  $\langle j, 0 \rangle$  qui représentent les mêmes ensembles de couleurs) ou incomplets. Le graphe de la Figure 2.6 n'est pas eulérien (car non connexe). Pour le rendre eulérien, nous allons le construire à partir d'un sous-ensemble des types existants. Nous allons aussi choisir de ne pas prendre les types incomplets ou redondants.

Initialement, nous choisissons les types suivants, pour un nombre de couleurs  $L$  donné :

$$\langle 0, k \rangle, \langle k, m_k \rangle, \text{ et } \langle m_k, 0 \rangle, \text{ avec} \\ m_k = \left( \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor - k \right), \forall k \in \mathbb{N} \text{ où } 0 < 2k < \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor. \quad (2.1)$$

Cette liste de types sera notée  $E_L^1$ . Remarquons qu'il y a respectivement  $\frac{L}{4} - 1$ ,  $\frac{L-1}{4} - 1$ ,  $\frac{L-2}{4}$  et  $\frac{L-3}{4}$  valeurs de  $k$  possibles dans l'équation 2.1 pour  $L \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ . Tous ces types existent, d'après le Lemme 2.

**Lemme 4.** *Le graphe des transitions obtenu depuis la liste  $E_L^1$  est eulérien.*

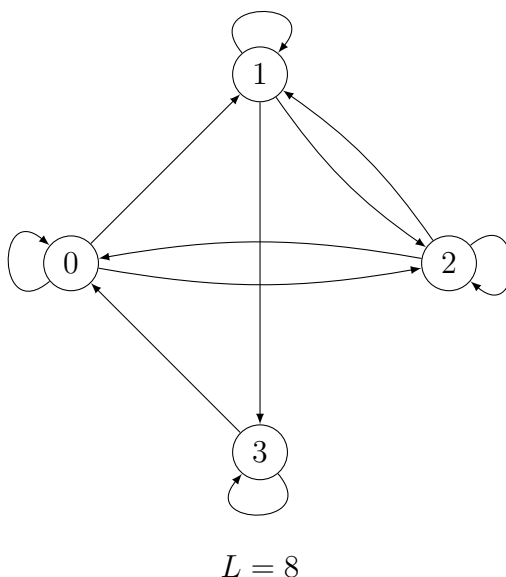
*Démonstration.* Un circuit eulérien de ce graphe est  $0, 1, m_1, 0, 2, m_2, 0, \dots, 0$ . En effet, les arcs de ce circuits sont  $(0, 1), (1, m_1), (m_1, 0), \dots, (0, i), (i, m_i), (m_i, 0)$ . Ce sont exactement les arcs qui représentent les types de  $E_L^1$ .  $\square$

La Figure 2.7 montre un exemple de ce graphe pour  $L = 8$ .

Ensuite, nous ajoutons à  $E_L^1$  toutes les paires de types  $\langle j, k \rangle$  et  $\langle k, j \rangle$  pour  $j \neq 0$ ,  $k \neq 0$  et  $j \neq k$  qui n'apparaissent pas déjà dans  $E_L^1$ . Nous appelons  $E_L^2$  cette nouvelle liste de types.

**Lemme 5.** *Le graphe des transitions obtenu depuis  $E_L^2$  est eulérien.*

*Démonstration.* Ce graphe peut être vu comme le graphe obtenu depuis  $E_L^1$  auquel nous rajoutons des paires d'arcs symétriques (et les sommets, si besoin). Par conséquent, le graphe est équilibré : chaque sommet a autant de voisins entrants que de

FIGURE 2.8 – Graphe des transitions de  $E_L^3$  pour  $L = 8$ .

voisins sortants. Montrons maintenant qu'il est fortement connexe. Soit  $\langle j, k \rangle$  et  $\langle k, j \rangle$  deux types ajoutés. Supposons que  $j < k$ . Il y a 3 cas possibles :

- Si  $2j < \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$ , alors le sommet  $j$  existait déjà dans le graphe, via le type  $\langle j, m_j \rangle$ .
- Si  $2j = \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$ , alors  $2k > \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$ . Soit  $k' = \lfloor \frac{L}{2} \rfloor - k$ .  $2k' < 2 \lfloor \frac{L}{2} \rfloor - \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$ , c'est-à-dire  $2k' < \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$ . De plus,  $m_{k'} = k$ , donc le sommet  $k$  existait déjà, grâce au type  $\langle k', k \rangle$ .
- Si  $2j > \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$ , alors posons  $j' = \lfloor \frac{L}{2} \rfloor - j$ . Comme dans le cas précédent, nous pouvons montrer que  $m_{j'} = j$  et que le sommet  $j$  existait déjà dans le graphe.

Dans tous les cas, au moins l'un des sommets  $j$  ou  $k$  était déjà présent dans le graphe obtenu depuis  $E_L^1$ . Le nouveau graphe est donc aussi fortement connexe.  $\square$

Ensuite, nous pouvons ajouter à  $E_L^2$  tous les types  $\langle j, j \rangle$  pour  $0 \leq j \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$  et  $j \neq \frac{L}{3}$ . Nous appelons  $E_L^3$  cette nouvelle liste. Le Figure 2.8 montre le graphe des transitions obtenu depuis  $E_L^3$  pour  $L = 8$ .

**Lemme 6.** *Le graphe des transitions obtenu depuis  $E_L^3$  est eulérien.*

*Démonstration.* Ce graphe peut être vu comme le graphe obtenu depuis  $E_L^2$  auquel nous avons ajouté des boucles, donc le graphe est équilibré. Si  $j \leq 1$ , nous savons

L	Circuit du graphe des transitions obtenu depuis $E_L^3$
8	0 0 1 1 2 2 1 3 3
9	0 0 1 1 2 2 1 3 2 3
10	0 0 1 1 2 2 1 3 3 1 4 4 0 2 3
11	0 0 1 1 2 2 1 3 3 1 4 4 0 2 4 2 3

FIGURE 2.9 – Exemples de circuits eulériens des graphes des transitions obtenus depuis  $E_L^3$  pour plusieurs valeurs de  $L$ .

que le sommet  $j$  existe déjà. Si  $2 \leq j < \frac{L}{2}$ , alors les types  $\langle 1, j \rangle$  et  $\langle j, 1 \rangle$  existent, d'après le Lemme 2, donc le type  $\langle 1, j \rangle$  est dans  $E_L^1$  si  $j = m_1$  ou  $E_L^2$  sinon, donc le sommet  $j$  existe déjà aussi.  $\square$

## 2.3 Construction du cycle identifié

### 2.3.1 Construction du cycle identifié par la fusion de chemin

Comme le graphe des transitions obtenu avec les types de  $E_L^3$  est eulérien, il existe un circuit eulérien sur ce graphe. Nous pouvons en exhiber un comme suit. Nous partons du circuit vu dans la preuve du Lemme 4. Pour chaque arc ajouté dans  $E_L^2$ , nous ajoutons une paire d'arcs  $(j, k)$  et  $(k, j)$  avec  $j < k$  et  $j \neq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$  la première fois que nous passons par le sommet  $j$  (pour  $L = 8$ , l'ajout des arcs  $(1, 2)$  et  $(2, 1)$  dans le circuit 013 donne le circuit 01213), et les arcs  $(k, j)$  et  $(j, k)$  avec  $j < k$  et  $j = \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$  la première fois que nous passons par le sommet  $k$ . Finalement, nous ajoutons les boucles  $(j, j)$  la première fois que nous passons par le sommet  $j$ .

Des exemples de circuits obtenus par cette méthode, pour différentes valeurs de  $L$ , sont montrés dans la Figure 2.9.

Comme nous l'avons déjà annoncé, nous allons utiliser ce circuit eulérien pour construire une suite de types. Nous choisissons arbitrairement de commencer le circuit juste avant la boucle  $(1, 1)$ . À partir d'une couleur initiale et de ce circuit, nous pouvons construire un chemin (une suite) de couleurs qui suit les types du circuit (tant que ce chemin ne se referme pas en un cycle, nous ignorerons les effets de bords des deux sommets aux extrémités, à qui il manque un voisin à chacun). Par exemple pour  $L = 8$  et le circuit de la Figure 2.9 (112213300), avec une couleur initiale 0, nous obtenons le chemin 0124672555. Nous pouvons vérifier que la première suite de 3 couleurs 012 est bien de type  $\langle 1, 1 \rangle$ , la deuxième 124 est bien de type  $\langle 1, 2 \rangle$ , etc. Le seul type manquant  $\langle 0, 1 \rangle$  – le dernier – va apparaître par la suite. Nous appelons  $n$

la différence entre la première et la dernière couleur de ce chemin (modulo  $L$ ). Dans cet exemple,  $n = 5 - 0 = 5$ .

Maintenant, nous prenons la couleur obtenue à la fin en tant que nouvelle couleur initiale pour construire un nouveau chemin, qui peut être fusionné au précédent. Ces deux chemins contiennent les mêmes types, dans le même ordre, mais avec différentes couleurs initiales. L'opération de fusion consiste à concaténer les deux chemins en ayant au préalable enlevé le premier sommet du deuxième chemin. Comme le circuit que nous avons choisi sur le graphe des transitions est eulérien, cette opération est possible. Dans l'exemple précédent, la fusion des deux chemins 0124672555 et 5671347222 donne 0124672555671347222. Cette fusion ajoute le dernier type du circuit ( $\langle 0, 1 \rangle$ ) au premier chemin, qui était manquant.

Nous pouvons répéter ce processus tant que la couleur qu'on obtient à la fin est une nouvelle couleur. Lorsque nous obtenons à nouveau la première couleur initiale (celle du tout premier sommet), nous pouvons alors fermer le chemin pour obtenir un cycle. Deux cas sont alors possibles. Si  $\text{pgcd}(n, L) = 1$ , alors toutes les valeurs de  $\llbracket 0, L - 1 \rrbracket$  ont été choisies en tant que couleur initiale, avant de retomber sur 0. Dans ce cas, toutes les suites de 3 couleurs représentées par un type de  $E_L^3$  sont présentes exactement une fois dans le cycle. Sinon, si  $\text{pgcd}(n, L) = k (\neq 1)$ , nous n'avons obtenu que  $\frac{L}{k}$  couleurs initiales, à savoir les multiples de  $n$  modulo  $L$ .

Le second cas intervient pour  $L = 9$ . Par construction, nous obtenons  $n = 6$ , donc  $\text{pgcd}(n, L) = 3$ , et les couleurs initiales successivement choisies sont 0, 6 et 3. Cependant, il existe une solution qui permet de rajouter tous les autres chemins des autres couleurs initiales dans le cycle, en déplaçant quelques types  $\langle 1, 1 \rangle$  comme suit.

### 2.3.2 Unification des cycles quand $\text{pgcd}(n, L) \neq 1$

Appelons  $P_i$  le chemin obtenu en commençant par la couleur  $i$  et en itérant l'algorithme précédent jusqu'à ce qu'on retombe sur la couleur  $i$ . Nous considérons  $k$  tels chemins indépendants (sans suites de 3 couleurs identiques) parmi les  $L$  possibilités; plus précisément, nous considérons  $P_0, P_1, \dots, P_{L-k+1}$ . Notons  $P'_i$  le chemin obtenu depuis  $P_i$ , en enlevant le premier sommet. Ce chemin contient les mêmes suites de 3 sommets que  $P_i$ , mis à part la première  $(i, i + 1, i + 2)$ , du type  $\langle 1, 1 \rangle$ . Ce chemin commence avec la couleur  $i + 1$  et finit avec la couleur  $i$ . Par conséquent, nous pouvons fusionner les chemins  $P_i$  et  $P'_{i-1}$ , comme le montre la Figure 2.11. Nous pouvons utiliser ceci pour fusionner les chemins  $P_0, P'_{L-1}, P'_{L-2}, \dots, P'_{L-k+1}$  dans cet ordre. Ce nouveau chemin commence avec la couleur 0 et finit avec la couleur  $L - k + 1$ . Nous pouvons ensuite ajouter au bout de ce chemin toutes les couleurs  $L - k + 2, \dots, L - 1, 0$ , dans cet ordre. Ce faisant, nous ajoutons les suites de 3 couleurs de

Différences		+1	+1	+2	+2	+1	+3	+2	+3	+0	+0
Chemins	$i_0 = 0$	1	2	4	6	7	1	3	6	6	(6)
	$i_1 = 6$	7	8	1	3	4	7	0	3	3	(3)
	$i_2 = 3$	4	5	7	0	1	4	6	0	0	(0)
	$i'_0 = 8$	0	1	3	5	6	0	2	5	5	(5)
	$i'_1 = 5$	6	7	0	2	3	6	8	2	2	(2)
	$i'_2 = 2$	3	4	6	8	0	3	5	8	8	(8)
	$i''_0 = 7$	8	0	2	4	5	8	1	4	4	(4)
	$i''_1 = 4$	5	6	8	1	2	5	7	1	1	(1)
	$i''_2 = 1$	2	3	5	7	8	2	4	7	7	(7)

FIGURE 2.10 – Chemins obtenus depuis le circuit eulérien pour  $L = 9$ .

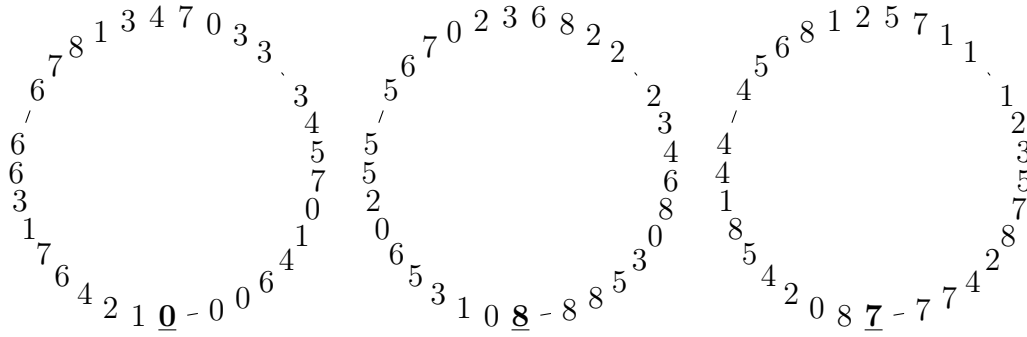


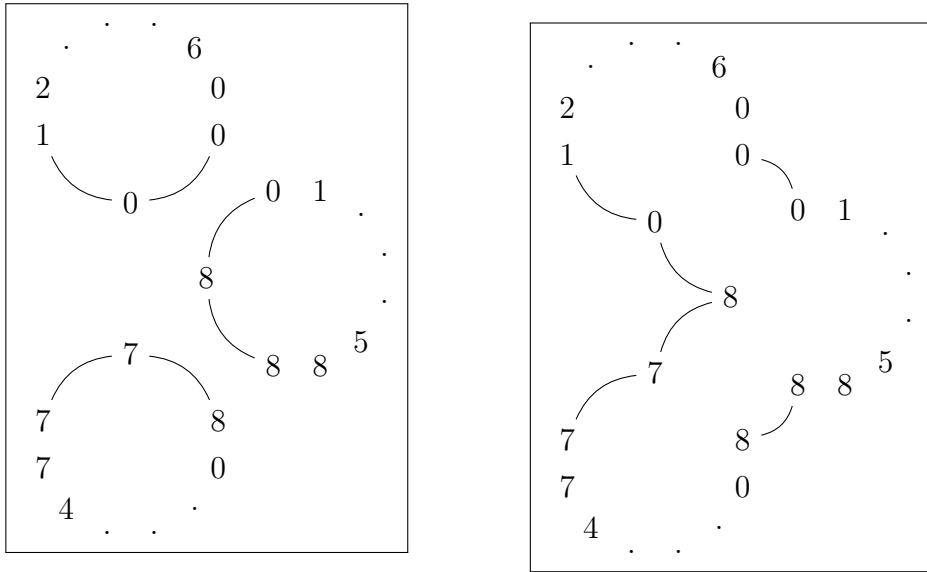
FIGURE 2.11 – Cycles obtenus en fusionnant les chemins de la Figure 2.10 pour  $L = 9$ .

type  $\langle 1, 1 \rangle$  que nous avons précédemment enlevés. La Figure 2.12 montre le résultat de cet ajout pour  $L = 9$ . Nous pouvons vérifier que les couleurs dans les voisinages des sommets ne changent pas par rapport aux chemins pris séparément, ce qui nous assure qu’il n’y a pas deux suites de 3 couleurs identiques.

Dans tous les cas, nous obtenons un cycle qui contient toutes les suites de 3 couleurs représentées par un type de  $E_L^3$ . La Figure 2.13 montre le cycle obtenu pour  $L = 9$ .

### 2.3.3 Nombre impair de couleurs

Lorsque  $L$  est impair, nous pouvons augmenter le nombre de sommets dans le cycle, en utilisant les types redondants  $\langle 0, \frac{L-1}{2} \rangle$ ,  $\langle \frac{L-1}{2}, 0 \rangle$  et  $\langle \frac{L-1}{2}, \frac{L-1}{2} \rangle$ . Nous pouvons insérer une suite de 3 couleurs de chacun des deux premiers types, et  $L - 1$  du



3 cycles indépendants, comme montrés dans la Figure 2.11.

Déplacement d'un sommet par cycle.

FIGURE 2.12 – Fusion des cycles obtenus dans la sous-section 2.3.2 pour  $L = 9$ .

<b>0</b>	1	2	4	6	7	1	3	6	6	6	7	8	1	3	4	7	0	3	3	3	4	
<u>8</u>																					5	
<u>7</u>	7	7	4	2	8	7	5	3	2				3	1	<b>0</b>	0	0	6	4	1	0	7
									1				5									
4	5	6	8	1	2	5	7	1	1				6	0	2	5	5	5	6	7	0	2
4																						3
4	1	8	5	4	2	0	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	5	3	0	8	6	4	3	2	2	2	2	8	6

Les sommets soulignés sont les premiers sommets de  $P_8$  et  $P_7$ , supprimés dans  $P'_8$  et  $P'_7$ . Les sommets en **gras** montrent les passages dans des "nouveaux" cycles (dans le sens de la Figure 2.11).

FIGURE 2.13 – Cycle obtenu dans la sous-section 2.3.2 pour  $L = 9$ .



troisième type. Commençons par construire le chemin qui contient ces types, de la manière suivante :

- Le premier sommet est 0, et le premier type est  $\langle 0, \frac{L-1}{2} \rangle$  (les trois premiers sommets sont donc 0, 0 and  $\frac{L-1}{2}$ ).
- Nous ajoutons  $L - 1$  sommets pour former des suites de 3 couleurs, toutes de type  $\langle \frac{L-1}{2}, \frac{L-1}{2} \rangle$ .
- Nous ajoutons le sommet 0 au bout du chemin, pour former le type  $\langle \frac{L-1}{2}, 0 \rangle$ .

Avec cette construction, nous avons  $L-1$  suites de 3 couleurs de type  $\langle \frac{L-1}{2}, \frac{L-1}{2} \rangle$ , avec les multiples de  $\frac{L-1}{2}$  comme couleurs initiales. Comme  $\text{pgcd}(L, \frac{L-1}{2}) = 1$ , toutes ces suites sont différentes. La troisième couleur de la dernière suite de 3 couleurs est 0, car la couleur du début de chemin est 0 et nous ajoutons  $L$  fois  $\frac{L-1}{2}$ . Par conséquent, en rajoutant la couleur 0 à la fin du chemin, la dernière suite de 3 couleurs est bien de type  $\langle \frac{L-1}{2}, 0 \rangle$ . Nous pouvons vérifier que les deux suites de 3 couleurs de type  $\langle 0, \frac{L-1}{2} \rangle$  et  $\langle \frac{L-1}{2}, 0 \rangle$  ne représentent pas les mêmes ensembles de couleurs : le premier est  $\{0, \frac{L-1}{2}\}$ , et le second est  $\{0, \frac{L+1}{2}\}$ .

Ce chemin ainsi construit commence et finit par deux 0. Nous pouvons donc insérer ce chemin dans le cycle, à la place des deux dernières couleurs de la suite  $(0, 0, 0)$  (qui est bien présente dans le cycle d'après la sous-section 2.3.2, à la fin du premier cycle de la sous-section 2.3.1).

Par exemple, pour  $L = 9$ , le chemin est 004837261500. Nous remplaçons 0001 dans le cycle de la Figure 2.13 par 00048372615001.

## 2.4 Résultats

### 2.4.1 Cas $L \geq 6$

**Théorème 5.** *La méthode expliquée dans les sous-sections 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3, avec  $L$  couleurs, construit un cycle identifié de longueur :*

$$\frac{L^3 + 5L}{6} - \left\{ \begin{array}{ll} \frac{L+2}{4}L & \text{si } L \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{L+3}{4}L - 1 & \text{si } L \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{L^2}{4} & \text{si } L \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{L+1}{4}L - 1 & \text{si } L \equiv 3 \pmod{4} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{3} \text{ si } L \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right\}$$

*Démonstration.* Le nombre total d'ensembles de couleurs est  $\binom{L}{1} + \binom{L}{2} + \binom{L}{3} = \frac{L^3+5L}{6}$ . Nous comptons les ensembles manquants dans le cycle de la sous-section 2.3.3.

1. Le type  $\langle j, k \rangle$  pour  $j, k \neq 0$  et  $j \neq k$  n'apparaît pas dans  $E_L^3$  si et seulement si  $\langle k, j \rangle$  était déjà dans  $E_L^1$  (sinon, nous aurions ajouté les types  $\langle j, k \rangle$  et  $\langle k, j \rangle$  dans  $E_L^3$ ). Il y a respectivement  $\frac{L}{4} - 1$ ,  $\frac{L-1}{4} - 1$ ,  $\frac{L-2}{4}$  et  $\frac{L-3}{4}$  tels types pour  $L \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ , d'après la construction de  $E_L^1$ . Chacun de ces types représente  $L$  ensembles de couleurs. Puisque tous les types sont différents, tous les ensembles de couleurs sont différents.
2. Si  $L$  est pair, alors le type  $\langle \frac{L}{2}, \frac{L}{2} \rangle$  est manquant. Ce type représente  $\frac{L}{2}$  ensembles de couleurs.
3. Si  $L \equiv 0 \pmod{3}$ , alors le type  $\langle \frac{L}{3}, \frac{L}{3} \rangle$  est manquant. Il représente  $\frac{L}{3}$  ensembles de couleurs.
4. D'après le Lemme 2, il y a  $\frac{L}{2}$  types différents de la forme  $\langle 0, k \rangle$  lorsque  $L$  est pair,  $\frac{L-1}{2}$  lorsque  $L$  est impair. Il y a respectivement  $\frac{L}{2} - 2$ ,  $\frac{L-1}{2} - 2$ ,  $\frac{L-2}{2}$  et  $\frac{L-3}{2}$  types de la forme  $\langle 0, k \rangle$  ou  $\langle j, 0 \rangle$  ( $j, k \neq 0$ ) pour  $L \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ , par construction de  $E_L^1$ . Dans  $E_L^3$ , le type  $\langle 0, 0 \rangle$  est toujours ajouté. Par conséquent le nombre de valeurs de  $i$  tels que les types  $\langle 0, i \rangle$  et  $\langle i, 0 \rangle$  sont tous les deux absents est 1 quand  $L \equiv 0, 1 \pmod{4}$  et 0 quand  $L \equiv 2, 3 \pmod{4}$  (par exemple, quand  $L \equiv 0 \pmod{4}$ , il y a  $(\frac{L}{2} - 2) + 1$  types sur  $\frac{L}{2}$  au total). Chacun de ces types représente  $L$  ensembles de couleurs (Lemme 3). Le nombre d'ensembles de couleurs manquants de type  $\langle 0, k \rangle$  ou  $\langle j, 0 \rangle$  est donc  $L$  si  $L \equiv 0, 1 \pmod{4}$ , 0 sinon.
5. Lorsque  $L$  est impair, nous avons ajouté  $L + 1$  ensembles de couleurs lors de la dernière étape, dans la sous-section 2.3.3.

Les types considérés dans les points 1 à 4 sont de toute évidence différents, et sont tous des types de  $E_L^3$ . Ce n'est pas le cas des types du point 5 ; tous les types des points 1 à 5 sont donc différents, tout comme les ensembles de couleurs qu'ils représentent.

Par exemple, pour  $L \equiv 0 \pmod{4}$ , nous savons qu'il y a  $\frac{L-4}{4}L$  ensembles de couleurs manquants d'après le point 1,  $\frac{L}{2}$  d'après le point 2, et  $L$  d'après le point 4. Au total, on compte donc  $\frac{L+2}{4}$  ensembles de couleurs manquants. Si de plus,  $L \equiv 0 \pmod{3}$ , il y a  $\frac{L}{3}$  ensembles supplémentaires absents, d'après le point 3.

□

## 2.4.2 Petites valeurs de $L$

Les longueurs optimales d'un cycle identifié pour un nombre de couleurs  $L < 6$  sont connues.

Pour  $L = 1$ , le seul cycle possible est un sommet seul. Il n'existe pas de cycle identifié avec  $L = 2$  couleurs : si un tel cycle existait, il aurait au moins deux sommets voisins de couleurs différentes (pour avoir les deux couleurs) ; ces deux sommets auraient alors le même ensemble de couleur dans leur voisinage. Dans les cas  $L = 3$  et  $L = 4$ , les preuves sont moins triviales.

**Proposition 2.** *Il n'existe pas de cycle identifié avec  $L = 3$  couleurs.*

*Démonstration.* Il y a  $7 (= \frac{3^3+5*3}{2})$  ensembles de couleurs avec au plus 3 couleurs :  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{1, 2\}$  et  $\{0, 1, 2\}$ . Les singletons ne peuvent être présents que s'il y a trois sommets consécutifs de la même couleur. Deux telles suites de 3 couleurs identiques ne peuvent pas se succéder (si nous avons six sommets consécutifs de  $x_1$  à  $x_6$  avec  $x_1, x_2$  et  $x_3$  d'une couleur,  $x_4, x_5$  et  $x_6$  d'une autre couleur, alors  $x_3$  et  $x_4$  ont les mêmes couleurs dans leur voisinage). Il y a donc au moins un sommet intermédiaire entre deux suites de 3 sommets consécutifs de même couleur. Étant donné que le cycle est de taille au plus 7, il ne peut y avoir qu'une seule suite de 3 sommets consécutifs de même couleur. Sur les 7 ensembles différents, au plus 5 sont donc présents dans un cycle identifié. Supposons que le singleton restant (par exemple  $\{0\}$ ) est représenté. Les deux sommets du cycle qui ne forment pas ce type sont alors de couleur 1 et 2 (pour avoir les 3 couleurs dans le cycle). Cependant, ceci ne permet pas d'obtenir un cycle identifié. Le cycle ne peut donc pas avoir plus de 4 sommets. Dans ce cas, deux sommets sont de la même couleur. Si  $c(x_i) = c(x_{i+1})$ , alors  $c(N[x_{i+2}]) = c(N[x_{i+3}])$ , et si  $c(x_i) = c(x_{i+2})$ , alors  $c(N[x_i]) = c(N[x_{i+1}])$ . Finalement, comme il ne peut pas y avoir de cycle identifié de taille 3 avec 3 couleurs, cela conclut la preuve.  $\square$

**Proposition 3.** *La taille maximale d'un cycle identifié avec  $L = 4$  couleurs est 10.*

Ce résultat a été obtenu par énumération exhaustive de tous les cycles avec 4 couleurs et au plus 14 sommets. Cette énumération a été faite par un ordinateur. Nous aurions aussi pu employer des arguments similaires à ceux de la preuve de la Proposition 2. Un exemple de tel cycle est 0121333200.

Le dernier cas,  $L = 5$  couleurs, montre que la borne  $\frac{L^3+5L}{6}$  peut être atteinte.

**Proposition 4.** *Il existe un cycle identifié de taille 25 pour  $L = 5$  couleurs. Tous les ensembles d'au plus 3 couleurs parmi 5 sont représentés dans ce cycle.*

*Démonstration.* Un exemple d'un tel cycle est 0124440133340222341112300. Ce cycle a été obtenu avec la méthode employée précédemment, avec une légère modification dans la définition des types. D'après la Définition 23, les types sont  $\langle 0, 0 \rangle$ ,  $\langle 1, 1 \rangle$ ,  $\langle 2, 2 \rangle$ ,  $\langle 0, 1 \rangle$  (ou  $\langle 1, 0 \rangle$ ) et  $\langle 0, 2 \rangle$  (ou  $\langle 2, 0 \rangle$ ). Ici, nous choisissons de remplacer le type

$\langle 2, 2 \rangle$  par le type  $\langle 1, 2 \rangle$ . Ce choix change seulement l'ordre des suites de 3 couleurs de ce type. Par exemple, à la place de la suite  $(0, 2, 4)$  (obtenue avec la couleur initiale 0 et le type  $\langle 2, 2 \rangle$ ), nous avons la suite  $(4, 0, 2)$  (avec la couleur initiale 4 et le type  $\langle 1, 2 \rangle$ ). Avec cette définition, le graphe des transitions obtenu depuis  $E_L^3$  est eulérien. Cela signifie qu'il est possible de trouver un circuit de ce graphe qui passe par toutes les arêtes exactement une fois. À partir de ce circuit, on peut trouver le cycle donné en exemple précédemment. Ce cycle est effectivement optimal, car  $25 = \frac{5^3 + 5*5}{6}$ .  $\square$

Cette preuve ouvre des pistes vers une amélioration du résultat du Théorème 5.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux colorations globalement identifiantes de cycles. Plus précisément, nous avons cherché à construire des cycles les plus grands possibles admettant une coloration globalement identifiante, étant donné un nombre de couleurs fixe.

Le Théorème 5 donne un résultat d'existence de cycles d'une certaine longueur en fonction du nombre de couleurs fixé. Mais bien plus que le résultat numérique, c'est la preuve de ce théorème – qui a le mérite d'être constructive – qui est intéressante.

Cependant, le théorème ne garantit pas l'optimalité des solutions exposées. En effet, la Proposition 4 montre une idée d'amélioration possible de ce théorème. Pour l'instant, il n'a pas été possible de généraliser ce procédé au cas général.



# Chapitre 3

## Codes identifiants dans les tournois

Dans ce chapitre, nous étudierons les codes identifiants dans une classe de graphes particulière, les tournois. Des variantes et généralisations des codes identifiants seront aussi présentées. Nous donnerons quelques résultats de la littérature, avant de présenter le résultats des travaux effectués en collaboration avec Touati Hillal – lors de ses deux séjours en France – et Julien Moncel.

### 3.1 Codes identifiants

#### 3.1.1 Rappels

On rappelle ici rapidement ce qu'est un code identifiant. Pour plus de détail, le lecteur est invité à se rendre au chapitre 1.

**Définition 26.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un code  $C$  de ce graphe est un sous-ensemble de ses sommets :  $C \subseteq V$ .

**Définition 27.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un code  $C$  de ce graphe est dit couvrant si tous les sommets du graphe ont dans leur voisinage fermé un sommet du code  $C$  :

$$\forall v \in V, \Gamma[v] \cap C \neq \emptyset$$

**Définition 28.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un code  $C$  de ce graphe est dit séparateur si toute paire de sommets est séparée, c'est-à-dire si deux sommets distincts n'ont pas les mêmes sommets du code dans leur voisinages fermés respectif :

$$\forall u, v \in V, u \neq v, \Gamma[u] \cap C \neq \Gamma[v] \cap C$$

**Définition 29.** *Un code identifiant d'un graphe  $G$  est un code qui est à la fois couvrant et séparateur.*

### 3.1.2 Variante et extension

Commençons tout d'abord par la remarque suivante :

**Remarque 7.** *Un graphe n'admet pas nécessairement de code identifiant. En effet, si deux sommets sont jumeaux, c'est-à-dire s'ils ont le même voisinage, il sera alors impossible de les séparer.*

En revanche, si un graphe ne possède pas de jumeaux, il admet alors un code identifiant (on peut vérifier facilement que l'ensemble de tous les sommets en est un). Pour cette raison, nous ne travaillons qu'avec des graphes **sans jumeaux**.

La notion de code identifiant a été étendue, entre autre, en jouant sur la distance considérée dans le voisinage. Le voisinage fermé d'un sommet  $v$  peut être vu comme l'ensemble des sommets à distance au plus 1 de  $v$ . C'est pourquoi on note aussi  $\Gamma[v] = \Gamma_1[v]$ . De manière plus générale, on note  $\Gamma_r[v]$  l'ensemble des sommets à distance au plus  $r$  de  $v$ , c'est-à-dire :  $\Gamma_r[v] = \{x \in V, d(x, v) \leq r\}$ . Il est ensuite naturel de considérer  $I_r(v) = \Gamma_r[v] \cap C$  l'identifiant du sommet  $v$ , par rapport à un code  $C$ .

**Définition 30.** *On appelle  $C$  un code  $r$ -identifiant de  $G = (V, E)$  un sous-ensemble de  $V$  qui vérifie :*

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \Gamma_r[v] \cap C &\neq \emptyset \\ \forall u, v \in V, u \neq v &\Rightarrow \Gamma_r[u] \cap C \neq \Gamma_r[v] \cap C \end{aligned}$$

Dans le cas des graphes orientés, il est important de distinguer deux types de voisinages : entrant et sortant. Le voisinage entrant (respectivement sortant) d'un sommet  $v$  est l'ensemble des prédécesseurs (resp. successeurs) de  $v$ , et est noté  $\Gamma^-(v)$  (resp.  $\Gamma^+(v)$ ). Ces ensembles vérifient donc par définition :  $\Gamma^-(v) = \{x \in V, (x, v) \in A\}$  et  $\Gamma^+(v) = \{x \in V, (v, x) \in A\}$ . On appelle degré entrant (respectivement sortant) de  $v$  le nombre d'éléments de  $\Gamma^-(v)$  (resp.  $\Gamma^+(v)$ ). On définit de manière analogue les voisinages fermés  $\Gamma^-[v]$  et  $\Gamma^+[v]$  en ajoutant le sommet  $v$ , et  $\Gamma_r^-[v]$  et  $\Gamma_r^+[v]$  les voisinages à distance au plus  $r$ .

Une fois ces définitions faites, la notion de code identifiant dans un graphe orienté reste similaire au cas non orienté. Les sommets sont couverts et séparés entre eux par leur voisinage fermé entrant.

**Définition 31.** *Un code  $r$ -identifiant dans un graphe orienté  $G = (V, A)$  est un sous-ensemble  $C$  de  $V$  qui vérifie :*

$$\forall v \in V, \Gamma_r^-[v] \cap C \neq \emptyset$$

$$\forall u, v \in V, u \neq v \Rightarrow \Gamma_r^-[u] \cap C \neq \Gamma_r^-[v] \cap C$$

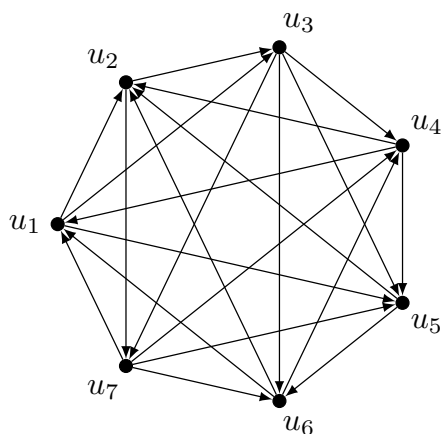
S'il est très facile de trouver un code identifiant dans un graphe, quand il existe, il est en revanche plus difficile d'en trouver un avec le moins de sommets possible. Plus formellement, on note  $\gamma_{ID}(G)$  le nombre minimal de sommets d'un code identifiant de  $G$ , et trouver la valeur de  $\gamma_{ID}(G)$  est un problème NP-difficile [15].

Dans le cas des chemins et circuits orientés, on sait trouver des codes identifiants optimaux [46]. Les résultats présentés dans la suite concernent les codes identifiants sur une classe particulière de graphes orientés : les tournois. Les tournois se déclinent sous de multiples formes, comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1. Le but de notre étude est de donner des résultats concernant les codes identifiants dans cette classe de graphes, pour ainsi étendre les connaissances que l'on a à propos des codes identifiants.

Un tournoi est une orientation d'un graphe complet. Il existe un arc unique entre toute paire de sommets ; il n'y a donc pas d'arcs symétriques.

**Définition 32.** *Un tournoi de taille  $n$  est un graphe orienté  $T = (V, E)$  tel que pour tout sommets distincts  $u$  et  $v$ , soit  $(u, v) \in E$  est un arc, soit  $(v, u) \in E$  est un arc (mais pas les deux à la fois).*

Le graphe suivant est un exemple de tournoi à 7 sommets.





Ces graphes sont appelés tournois car ils peuvent être interprétés comme le résultat d'une compétition entre plusieurs joueurs, où chacun affronte tous les autres. Un arc  $(u, v)$  dans ce tournoi indique que le joueur représenté par  $u$  a gagné contre son adversaire représenté par  $v$ .

On retrouve aussi les tournois dans des modèles de théorie du vote et de théorie du choix social [45, 34], dans lesquels le tournoi modélise une structure de préférences.

De nombreuses propriétés ont été étudiées sur ces graphes. Par exemple, le nombre de tournois non isomorphes de taille  $n$  donnée, l'existence d'un chemin hamiltonien, etc [41].

### 3.1.3 Résultats généraux

Le problème de trouver un code identifiant dans un graphe a été étudié dans plusieurs classes de graphes, des cycles [9] aux produits de graphes [49], en passant par les graphes d'intervalles [10]. Il existe aussi des résultats sur l'approximabilité [26] de ce problème dans certaines classes, ainsi que des études de complexité [4].

Il existe en revanche moins de résultats sur les graphes orientés. On peut néanmoins citer un article [28] qui caractérise les graphes orientés qui admettent comme seul code identifiant l'ensemble de tous leurs sommets, un autre [13] qui fournit un algorithme linéaire pour trouver un code identifiant optimal dans un arbre orienté, ou un autre [11] qui donne les conditions pour qu'un graphe de De Bruijn soit  $r$ -identifiable.

**Proposition 5.** *Un graphe orienté admet un code identifiant si et seulement s'il ne possède pas de jumeaux, c'est-à-dire de sommets ayant le même voisinage entrant fermé.*

On en déduit alors facilement :

**Corollaire 2.** *Tous les tournois admettent un code identifiant.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un tournoi. Pour toute paire de sommets distincts, il existe un unique arc entre ces sommets ; notons  $(u, v)$  cet arc. Le sommet  $v$  est alors séparateur de  $u$  et  $v$ . Il n'existe donc pas de sommets jumeaux.  $\square$

## 3.2 Codes identifiants dans les graphes orientés

Nous allons maintenant élargir le champ d'étude aux graphes orientés qui sont, à l'heure actuelle, moins étudiés. Le cas non orienté est inclus dans le cas orienté,

puisqu'il suffit de remplacer chaque arête par deux arcs symétriques pour obtenir le même modèle de graphe. L'identification dans le cas des graphes orientés est un peu différente, puisqu'un sommet est couvert et représenté par ses prédécesseurs.

Nous allons commencer par voir que la notion de graphe transitif joue un rôle important dans les codes identifiants, car elle est liée aux codes de cardinalité égale au nombre de sommets du graphe.

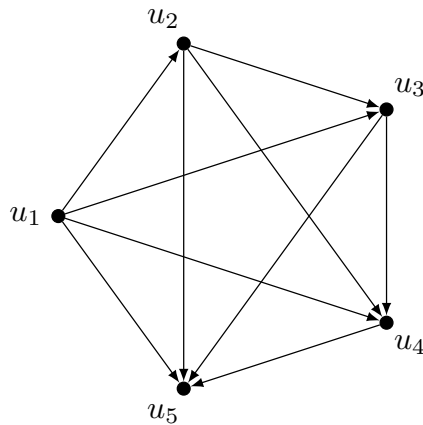
**Théorème 6** ([28]). *Un graphe orienté  $G = (V, E)$  vérifie  $\gamma^{\text{ID}}(G) = |V|$  si et seulement si  $G$  est la fermeture transitive d'une union disjointe d'arbres orientés enracinés.*

**Corollaire 3.** *Si le graphe  $G$  possède un arc symétrique (c'est-à-dire deux arcs entre les mêmes sommets mais de sens opposés) mais ne possède pas de jumeaux, alors  $\gamma^{\text{ID}}(G) < |V|$ .*

Dans le cas particulier où  $G$  est un tournoi, on en déduit le résultat suivant :

**Corollaire 4.** *Un tournoi  $T$  avec  $n$  sommets est transitif si et seulement si  $\gamma^{\text{ID}}(T) = n$ .*

Le tournoi suivant est un tournoi transitif à 5 sommets.



### 3.2.1 Existence de codes identifiants dans les tournois

On peut montrer qu'un tournoi n'admet un code  $r$ -identifiant, pour  $r \geq 2$ , que s'il est transitif. Nous allons pour cela utiliser le lemme suivant :

**Lemme 7.** Soit  $T = (V, E)$  un tournoi,  $r \geq 2$  un entier,  $u \in V$  un sommet de degré sortant minimal et  $(u, v) \in E$  un arc de  $T$ . Alors si un sommet  $x \in V$   $r$ -sépare les sommets  $u$  et  $v$ , il vérifie  $d(x, u) = r$  et  $d(x, v) = r + 1$ , où  $d$  représente la distance entre deux sommets, au sens orienté.

*Démonstration.* Soit  $x$  un sommet qui  $r$ -sépare les sommets  $u$  et  $v$  :  $x \in \Gamma_r^-[u] \Delta \Gamma_r^-[v]$ . Comme  $d(u, v) = 1$ ,  $d(x, v) \leq 1 + d(x, u)$ , et deux cas sont alors possibles a priori :

- $d(x, u) = r$  et  $d(x, v) = r + 1$
- ou  $d(x, u) \geq r + 1$  et  $d(x, v) \leq r$

Montrons maintenant par l'absurde que le second cas n'est pas possible. Considérons  $y$  un voisin sortant de  $x$ . Puisque  $d(x, u) \geq r + 1 \geq 3$ , le sommet  $y$  est aussi un voisin sortant de  $u$ . Finalement, comme  $x$  est un voisin sortant de  $u$ , cela veut dire que  $u$  a un voisin sortant de plus que  $x$ , ce qui est absurde, car  $u$  a un degré sortant minimal.  $\square$

**Théorème 7.** Soit  $r \geq 2$  un entier et  $T$  un tournoi admettant un code  $r$ -identifiant. Alors  $T$  est transitif.

*Démonstration.* Montrons ce résultat par induction ; prenons un tournoi  $T$  admettant un code  $r$ -identifiant  $C$ .

- Si  $T$  est un tournoi avec 1 sommet, alors il est transitif.
- Supposons que le résultat est vrai pour tout tournoi de  $n$  sommets, pour  $n$  fixé, et considérons un tournoi  $T = (V, E)$  de  $n + 1$  sommets qui admet un code  $r$ -identifiant. Considérons le minimum des degrés sortants parmi les sommets de  $T$ .
  - Si ce minimum est 0, prenons  $x$  un sommet de degré sortant nul. Considérons alors le tournoi  $T'$  obtenu en enlevant le sommet  $x$  de  $T$ . Comme le sommet  $x$  n'est dans aucun voisinage entrant autre que le sien, la restriction de  $C$  à  $V \setminus \{x\}$  est un code  $r$ -identifiant de  $T'$ . Par induction,  $T'$  est donc transitif. Comme  $T$  est obtenu à partir de  $T'$  en ajoutant un sommet successeur de tous les autres,  $T$  est lui aussi transitif.
  - Dans le cas où tous les sommets possèdent au moins un voisin sortant, donnons une étiquette à tous les arcs, en concaténant les degrés entrants des deux extrémités de l'arc. Ainsi, l'arc  $(u, v)$  sera étiqueté par  $(d^-(u), d^-(v))$ . On peut de cette manière définir un ordre sur les étiquettes, en définissant naturellement  $(d_1, d_2) > (d_3, d_4)$  ssi  $d_1 > d_3$  ou  $(d_1 = d_3$  et  $d_2 > d_4)$ . Considérons alors un arc  $(u, v)$  ayant une étiquette maximale, ainsi que  $x$  un sommet qui  $r$ -sépare  $u$  et  $v$ . Puisque l'étiquette est maximale,  $u$  est de

degré entrant maximal, c'est-à-dire de degré sortant minimal. Le Lemme 7 s'applique donc et  $d(x, u) = r$  et  $d(x, v) = r + 1$ . On peut en déduire que chaque prédécesseur de  $v$  est aussi un prédécesseur de  $x$  (sinon,  $v$  serait à distance au plus 2 de  $x$ ). De plus,  $v$  est un prédécesseur de  $x$ . Finalement, le degré entrant de  $x$  est supérieur à celui de  $v$ . Comme  $(u, x)$  est un arc de  $T$  (car  $u$  est à distance  $r \geq 2$  de  $x$ ), cela contredit le fait que  $(u, v)$  ait une étiquette maximale.

□

Les tournois transitifs sont donc les seuls qui possèdent des codes  $r$ -identifiants.

### 3.3 Codes identifiants dans les tournois

Nous avons étudié en particulier les codes identifiants dans les tournois.

#### 3.3.1 Rappels

Commençons par rappeler brièvement les définitions vues dans le Chapitre 1 concernant différentes propriétés sur les tournois.

**Définition 33.** *Un tournoi localement transitif  $T$  est un tournoi tel que pour chaque sommet  $u \in V$ , les deux sous-graphes induits par les voisins sortants de  $u$  d'une part, les voisins entrant de  $u$  d'autre part, sont tous les deux transitifs.*

**Définition 34.** *Un tournoi régulier  $T$  est un tournoi tel que pour chaque sommet  $u \in V$ ,  $d^+(u) = d^-(u)$ .*

**Définition 35.** *Un tournoi  $T$  de  $n$  sommets, avec  $n$  pair, est semi-régulier s'il vérifie  $d^+(u) - d^-(u) = \pm 1$  pour chaque sommet  $u \in V$ .*

#### 3.3.2 Résultats

Nous pouvons montrer que la borne inférieure valable dans le cas général reste serrée dans le cas particulier des tournois.

**Proposition 6.** *La borne inférieure  $\gamma^{\text{ID}}(T) = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$  reste serrée dans la classe des tournois.*

*Démonstration.* Soit  $k > 0$  un entier. Nous allons construire un tournoi de  $n = 2^k - 1$  sommets qui admet un code identifiant de taille  $k = \log_2(n + 1)$ . Commençons par prendre un tournoi  $T = (V, E)$  de  $k$  sommets. L'ensemble de ses sommets est un code. Nous allons créer un tournoi  $T'$  en rajoutant des sommets à ce graphe, en gardant le même code. Initialement,  $T' = (V', E')$  est donc égal à  $T = (V, E)$ . Ensuite, on regarde l'ensemble des parties de  $V$ , que l'on note  $\mathcal{P}(V)$ . Pour chaque élément  $P \neq \emptyset$  de  $\mathcal{P}(E)$ , on regarde si un des sommets  $u$  de  $T'$  est identifié par  $P$ , c'est-à-dire  $\Gamma[u] \cap V = P$ . Si aucun des sommets ne vérifie cette propriété, on va créer un nouveau sommet  $p$  associé à  $P$ . Il suffit d'ajouter tous les arcs  $(v, p)$ ,  $v \in P$ , ainsi que tous les arcs  $(p, w)$ ,  $w \in V \setminus P$ . Le sommet  $p$  est alors bien identifié par  $P$ . Ensuite, il suffit d'ajouter tous les arcs entre  $p$  et les sommets de  $V' \setminus V$  dans un sens arbitraire, qui n'auront pas d'importance dans l'identification.

Une fois que tous les éléments de  $\mathcal{P}(V)$  (non vides) sont bien représentés,  $|V'| = 2^k - 1$ . Le tournoi  $T'$  est donc un tournoi de taille  $n$  qui admet un code  $V$  de taille  $\log_2(n + 1)$ .  $\square$

Nous avons vu dans le Corollaire 4 que les tournois transitifs sont exactement ceux qui vérifient  $\gamma^{\text{ID}}(T) = n$ . Ce corollaire découle du Théorème 6 qui utilise un théorème beaucoup plus général. Nous proposons ici une preuve plus directe de ce résultat.

**Proposition 7.** *Soit  $T$  un tournoi transitif de  $n$  sommets. Alors  $\gamma^{\text{ID}}(T) = n$ .*

*Démonstration.* Notons  $u_i$  les sommets de  $T$  de telle sorte que  $\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $d^-(u_i) = i$ . Comme  $u_0$  n'a aucun prédécesseur, il est nécessairement dans tout code identifiant de  $T$ , pour respecter la condition de couverture. De plus, on peut déduire d'après la remarque 5, que pour  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , le sommet  $u_i$  est l'unique sommet qui sépare  $u_{i-1}$  et  $u_i$ . Tous les sommets sont donc indispensables dans le code identifiant, et celui-ci est donc composé de tous les sommets de  $T$ .  $\square$

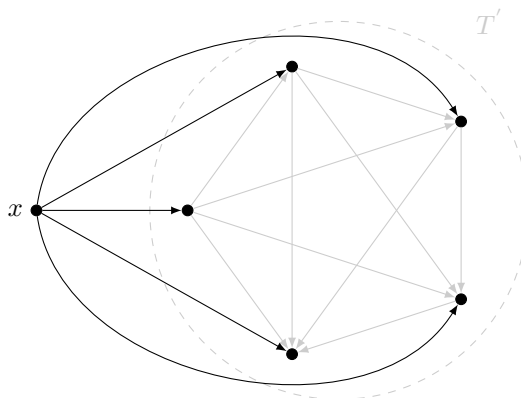
La réciproque peut se montrer de la manière suivante :

**Théorème 8.** *Soit  $T$  un tournoi de  $n$  sommets tel que  $\gamma^{\text{ID}}(T) = n$ . Alors  $T$  est transitif.*

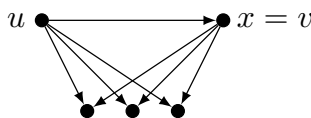
*Démonstration.* Montrons par récurrence sur  $n$  que le théorème est vrai.

- Si  $T$  a un seul sommet, alors il est évidemment transitif.
- Supposons que le résultat est vrai pour un certain  $n$  fixé. Considérons un tournoi  $T$  de  $n + 1$  sommets tel que  $\gamma^{\text{ID}}(T) = n + 1$ . Prenons un sommet  $x \in V$  de degré sortant maximal.

- Premier cas :  $d^+(x) = n$  ; le sommet  $x$  est alors prédécesseur de tous les autres sommets et ne sert donc pas à les séparer entre eux. Notons  $T'$  le tournoi obtenu depuis  $T$  en enlevant le sommet  $x$ , et prenons  $C'$  un code identifiant de  $T'$ . Le code  $C = C' \cup \{x\}$  est alors un code identifiant de  $T$  car  $x$  est le seul sommet qui n'est identifié que par  $x$  lui-même (sinon le sommet ne serait pas couvert dans  $T'$ ). Comme  $\gamma^{\text{ID}}(T) = n + 1$ ,  $\gamma^{\text{ID}}(T') = n$  et par hypothèse de récurrence,  $T'$  est transitif. En ajoutant le sommet  $x$  à  $T'$  pour obtenir  $T$ , on conserve le caractère transitif, car  $x$  est prédécesseur de tous les autres sommets.



- Second cas :  $d^+(x) < n$  ; montrons par l'absurde que ce cas n'est pas possible. Remarquons que  $V \setminus \{x\}$  n'est pas un code. Le sommet  $x$  a au moins un prédécesseur, qui le couvre donc. Tous les autres sommets se couvrent eux-mêmes. Donc  $x$  est le seul à séparer deux sommets  $u$  et  $v$ . Quitte à les renommer, supposons que l'arc entre ces deux sommets est dans le sens  $(u, v)$ . Le sommet  $v$  sépare alors  $u$  de lui-même ; d'où  $v = x$ . Le seul sommet qui sépare  $u$  et  $x$  est  $x$ , donc  $\Gamma^-[x] = \Gamma^-[u] \cup \{x\}$ . On en déduit alors que  $d^-(x) = d^-(u) + 1$  et donc que  $d^+(x) = d^+(u) - 1$ . Cela contredit le fait que  $x$  est de degré sortant maximal, et ce cas là n'est donc pas possible.



□

Nous nous intéressons maintenant à la taille minimale d'un code identifiant dans des tournois qui présentent certaines propriétés.

La Proposition suivante peut se déduire du Théorème 7. Nous donnons ici une autre preuve, qui utilise une mécanique un peu différente.

**Proposition 8.** *Soit  $T$  un tournoi régulier et  $r \geq 2$  un entier. Il n'existe pas de code  $r$ -identifiant de  $T$ .*

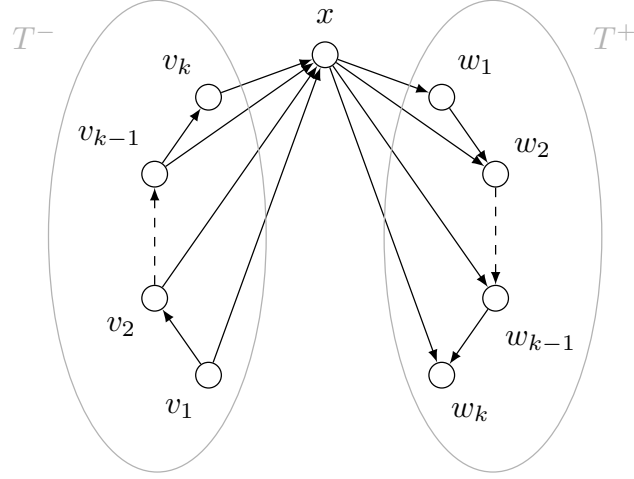
*Démonstration.* Soit  $T = (V, E)$  un tournoi régulier, et  $u, v \in V$  deux sommets de  $T$ . Montrons qu'il existe deux chemins de longueur au plus 2, l'un allant de  $u$  à  $v$  et l'autre de  $v$  à  $u$ . L'un de ces deux chemins est déjà donné par l'arc entre  $u$  et  $v$ . Supposons par exemple que l'arc entre ces deux sommets est orienté dans le sens  $(u, v)$ , et cherchons un chemin de  $v$  à  $u$ . Les sommets  $v$  possèdent chacun  $\frac{n-1}{2}$  successeurs. Comme  $v$  est un successeur de  $u$ , il existe (au moins) un sommet  $w$  qui est successeur de  $v$  et pas de  $u$ . Ce sommet nous donne donc le chemin  $(u, w, v)$  de  $u$  à  $v$ , de taille 2. Ainsi, tous les sommets de  $T$  sont couverts à distance 2 par tous les sommets. Il n'existe donc pas de code  $r$ -identifiant de  $T$ .  $\square$

**Proposition 9.** *Soit  $T$  un tournoi régulier localement transitif, de  $n$  sommets. Alors  $\gamma^{\text{ID}}(T) = \frac{n+1}{2}$ .*

*Démonstration.* Commençons par montrer qu'à isomorphisme près, il n'existe qu'un seul tournoi régulier localement transitif de taille  $n$ .

Soit  $T$  un tel tournoi. Montrons tout d'abord qu'il existe un ordre cyclique des sommets (c'est-à-dire un cycle qui contient tous les  $n$  sommets de  $T$ ). De plus, dans l'ordre de ce cycle, en partant d'un sommet  $x$ , on trouve d'abord tous ses successeurs, puis tous ses prédécesseurs.

Notons  $k = \frac{n-1}{2}$ . Soit  $x$  un sommet de  $T$ . Comme  $T$  est régulier,  $|\Gamma^-(x)| = |\Gamma^+(x)| = k$ . De plus, comme  $T$  est localement transitif, le sous-tournoi  $T^-$  induit par  $\Gamma^-(x)$  est transitif. Pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on note  $v_i$  le sommet de  $T^-$  qui possède  $i - 1$  prédécesseurs dans  $T^-$ . De la même manière, on note  $T^+$  le sous-tournoi induit par  $\Gamma^+(x)$ , et  $w_i$  le sommet de  $T^+$  qui possède  $i - 1$  prédécesseurs dans  $T^+$ .



Montrons maintenant par récurrence sur  $i$  que pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  :

1.  $\Gamma^+(v_i) = \{x\} \cup \{v_j : j > i\} \cup \{w_j : j < i\}$
2.  $\Gamma^-(w_{k+1-i}) = \{x\} \cup \{w_j : j < k+1-i\} \cup \{v_j : j > k+1-i\}$

Cette propriété est effectivement vraie pour  $i = 1$ . Considérons maintenant  $i > 1$  et supposons qu'elle est vraie pour toute valeur inférieure à  $i$ . On sait déjà que  $v_i$  possède  $(i - 1)$  prédécesseurs que sont les  $\{v_j, j < i\}$ . De plus par hypothèse de récurrence, on sait que  $v_i$  n'est pas un prédécesseur de  $w_j$  si  $j \leq k + 1 - i$  ; il possède donc  $k + 1 - i$  prédécesseurs  $\{w_j : j \leq k + 1 - i\}$ . Le sommet  $v_i$  possède donc  $(i - 1) + (k + 1 - i) = k$  prédécesseurs, et tous les autres sommets sont donc ses successeurs. Le deuxième point se montre de manière identique, en considérant les successeurs du sommet  $w_{k+1-i}$ .

Maintenant, renommons les sommets de ce cycle  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en suivant l'ordre du circuit.

Considérons deux sommets consécutifs du circuit,  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . D'après la propriété que l'on vient de montrer, on sait que  $\Gamma^-[x_i] \Delta \Gamma^-[x_{i+1}] = \{x_{i+1}, x_{i-k}\}$ . Donc dans tout code identifiant de  $T$ , il y a au moins un de ces deux sommets.

Considérons maintenant un graphe composé des sommets de  $T$ , mais dont les arcs sont tous les couples  $\{x_{i+1}, x_{i-k}\}$ , pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Un code identifiant est alors nécessairement un transversal de ce graphe. Or ce graphe est un cycle : pour le voir, il suffit de prendre les sommets dans l'ordre  $x_1, x_{1+(k+1)}, x_{1+2(k+1)}, \dots, x_{1+n(k+1)} = x_1$ . Comme  $n$  est impair, la taille minimale d'un transversal de ce graphe est donc  $\frac{n+1}{2}$ . On peut par exemple prendre un sommet sur deux, en partant de  $x_1$  :  $x_1, x_{1+2(k+1)}, \dots$ . Cela revient à prendre tous les  $x_i$  pour  $i$  impair. Finalement, on peut vérifier en utilisant la propriété montrée en début de preuve que cet ensemble est bien un code de  $T$ .



□

**Proposition 10.** *Soit  $T$  un tournoi transitif de  $n$  sommets et  $T'$  un tournoi obtenu en ajoutant un sommet à  $T$ . Alors  $\gamma^{\text{ID}}(T') \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  et la borne est serrée.*

*Démonstration.* Notons  $u_i$  les sommets de  $T$  de telle sorte que  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $d^-(u_i) = i$ , et  $v$  le sommet ajouté à  $T'$ . Prenons  $C'$  un code identifiant de  $T'$ . Montrons dans un second temps par l'absurde que  $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,  $C$  contient au moins l'un des deux sommets  $v_i$  et  $v_{i+1}$ . Supposons que ce n'est pas le cas, pour un certain  $i$ . Les deux seuls sommets qui peuvent séparer  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont les sommets  $v_{i+1}$  et  $x$ . Comme  $v_{i+1}$  n'est pas dans  $C$ ,  $x$  l'est nécessairement. Puisqu'il sépare  $v_i$  et  $v_{i+1}$ , il est prédécesseur de l'un des deux sommets  $v_i$  et  $v_{i+1}$ , et successeur de l'autre. Ces deux sommets étant couverts, on en déduit que  $i > 0$ . Maintenant, considérons les trois sommets  $v_{i-1}$ ,  $v_i$  et  $v_{i+1}$ , et  $C$  la restriction de  $C'$  au tournoi  $T$  (sans le sommet  $x$ ). Ces trois sommets sont identifiés par les mêmes sommets de  $T$  :  $\Gamma^-[v_{i-1}] \cap C = \Gamma^-[v_i] \cap C = \Gamma^-[v_{i+1}] \cap C$ . Même en rajoutant le sommet  $x$ , il n'est donc pas possible de séparer ces trois sommets dans  $T'$ , d'où la contradiction. Dans un second temps, on peut remarquer que s'il existe un  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que  $v_i$  n'est pas dans le code  $C'$ , alors  $x$  est dans le code, pour séparer  $v_i$  de  $v_{i-1}$  s'il existe, et pour couvrir  $v_i$  sinon. La taille du code identifiant  $C'$  est donc au moins égale à  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ .

Pour montrer que cette borne est serrée, on exhibe le tournoi  $T'$  suivant : si  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  est impair, on oriente l'arc dans le sens  $(v_i, x)$  ; sinon, on l'oriente dans le sens  $(x, v_i)$ . On peut alors vérifier qu'en prenant le sommet  $x$  avec tous les sommets  $v_i$  pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  impair, on obtient un code identifiant. □

Nous nous intéressons finalement au cas d'un tournoi semi-régulier et localement transitif. Un graphe avec de telles propriétés ressemble fortement à celui de la Proposition 9. Cependant, une partie de la structure est un peu différente, suite au changement de parité du nombre de sommets. Une partie de la structure d'un tel graphe est libre, et il existe donc plusieurs graphes différents ayant ces propriétés.

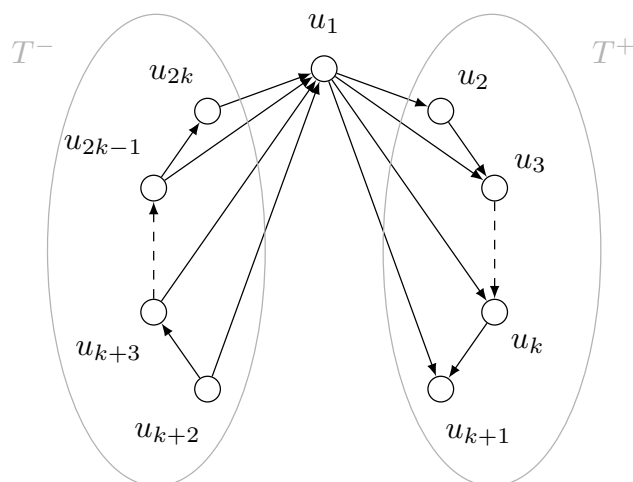
**Proposition 11.** *Soit  $T$  un tournoi semi-régulier, localement transitif de  $n$  sommets. Alors  $\gamma^{\text{ID}}(T) \geq \frac{n}{2}$ , et la borne est serrée.*

*Démonstration.* Notons  $k = \frac{n}{2}$ . Dans un premier temps, on cherche à exhiber un circuit de  $T$  de telle sorte qu'en prenant  $k-1$  sommets consécutifs de ce cycle, le tournoi induit par ceux-ci soit toujours transitif. Considérons  $u_1$  un sommet arbitraire du tournoi  $T$ . Comme  $T$  est localement transitif, les sous-tournois induits par  $\Gamma^-(u_1)$  et  $\Gamma^+(u_1)$  sont transitifs. Notons  $T^+$  (respectivement  $T^-$ ) le tournoi transitif induit par  $\Gamma^-(u_1)$  (resp.  $\Gamma^+(u_1)$ ). On peut donc trier les sommets de  $T^+$  par degré entrant

croissant (dans  $T^+$ ), et les nommer  $u_2, u_3, \dots$  jusqu'au dernier sommet de  $T^+$ . Le tournoi  $T$  étant semi-régulier,  $T^+$  contient  $k$  ou  $k-1$  sommets. Le dernier sommet de  $T^+$  sera donc nommé  $u_k$  ou  $u_{k+1}$ . De manière similaire, on peut trier les sommets de  $T^-$  par degré entrant croissant, et les renommer. Cette fois-ci, on commence à partir du dernier, que l'on nomme  $u_{2k}$ , puis on nomme l'avant-dernier  $u_{2k-1}, \dots$ , jusqu'au premier, qui sera donc appelé  $u_{k+1}$  ou  $u_{k+2}$ , en fonction de la taille de  $T^-$ . Montrons maintenant que  $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{2k})$  est bien un circuit.

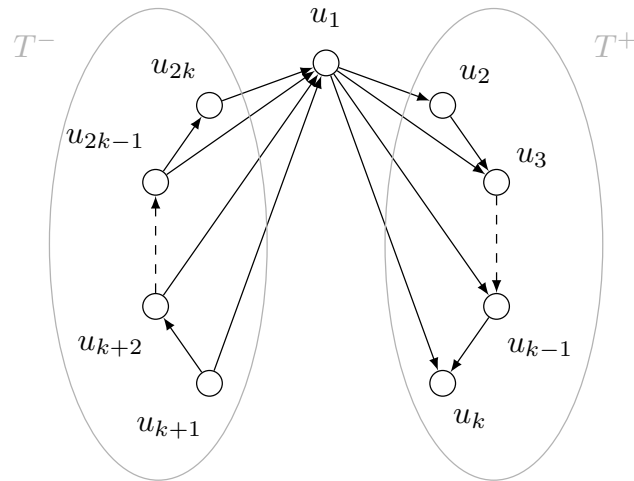
Il y a 2 cas possibles :

—  $u_{k+1} \in T^+$



Dans ce cas, le sommet  $u_{k+1}$  possède  $k$  prédécesseurs : tous les sommets  $u_i$  pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Tous les sommets de  $T^-$  sont donc des successeurs de  $u_{k+1}$ .

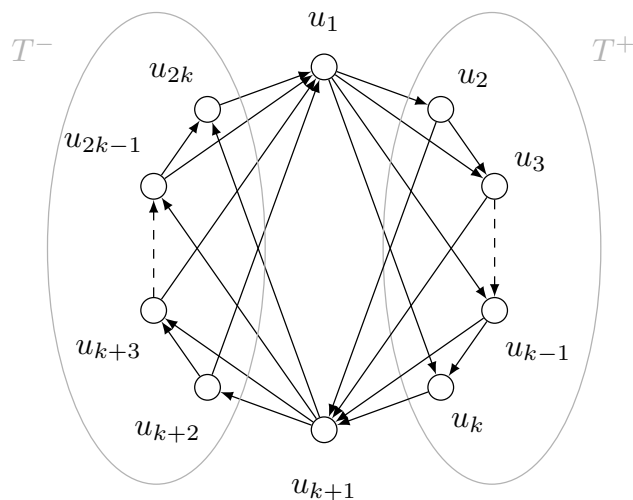
—  $u_{k+1} \in T^-$



De manière similaire au cas précédent, on connaît déjà  $k$  successeurs de  $u_{k+1}$ . Tous les sommets de  $T^+$  sont donc prédécesseurs de  $u_{k+1}$ .

Dans les 2 cas, en faisant abstraction de l'arc entre les sommets  $u_1$  et  $u_{k+1}$ , on obtient donc des structures identiques :

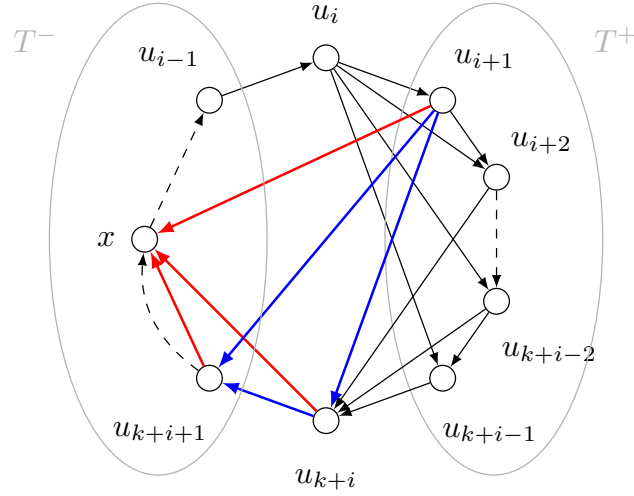
1. Deux sommets  $u_1$  et  $u_{k+1}$  opposés dans le circuit.
2. Un sous-tournoi transitif composé des sommets  $k-1$  sommets entre  $u_1$  et  $u_{k+1}$  dans l'ordre du circuit.
3. Un sous-tournoi transitif composé des sommets  $k-1$  sommets entre  $u_{k+1}$  et  $u_1$  dans l'ordre du circuit.
4. Le sommet  $u_1$  prédécesseur (respectivement successeur) des  $k-1$  sommets suivants (resp. précédents) dans le circuit.
5. Le sommet  $u_{k+1}$  prédécesseur (respectivement successeur) des  $k-1$  sommets suivants (resp. précédents) dans le circuit.



Maintenant, montrons par récurrence qu'on retrouve cette structure en isolant n'importe quelle paire de points opposés dans le circuit,  $u_i$  et  $u_{k+i}$ , pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ .

Supposons que l'on ait cette structure pour un certain  $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ .

Par hypothèse de récurrence, on sait déjà que les  $k-1$  sommets  $u_{i+2}, u_{i+3}, \dots, u_{k+i}$  forment un tournoi transitif; de même pour les sommets  $u_{k+i+1}, u_{k+i+2}, \dots, u_{i-1}$ . Il reste à montrer les points 4 et 5 pour les sommets  $u_{i+1}$  et  $u_{k+i+1}$ . En particulier, il faut montrer que  $u_{i+1}$  et  $u_{k+i+1}$  sont chacun successeur des  $k-1$  sommets qui les précèdent. Supposons par l'absurde qu'il existe un sommet  $x \in V$  entre  $u_{k+i+1}$  et  $u_{i+1}$  (dans l'ordre du circuit) tel que l'arc entre ce sommet et  $u_{i+1}$  est dans le sens  $(u_{i+1}, x)$ . Les trois sommets  $u_{i+1}$ ,  $u_{k+i}$  et  $u_{k+i+1}$  sont alors prédécesseurs de  $x$ . Par transitivité, connaissant les arcs  $(u_{i+1}, u_{k+i})$  et  $(u_{k+i}, u_{k+i+1})$ , on en déduit que l'arc  $(u_{i+1}, u_{k+i+1})$  existe dans ce sens. Mais alors, le sommet  $u_{i+1}$  possède au moins  $k+1$  successeurs (les  $k$  suivants dans le circuit, et  $x$ ); ce qui est absurde car le tournoi est semi-régulier.



La propriété est donc bien vérifiée.

Considérons  $C$  un code identifiant du tournoi. Montrons que :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \{u_i, u_{k+i}\} \cap C \neq \emptyset$$

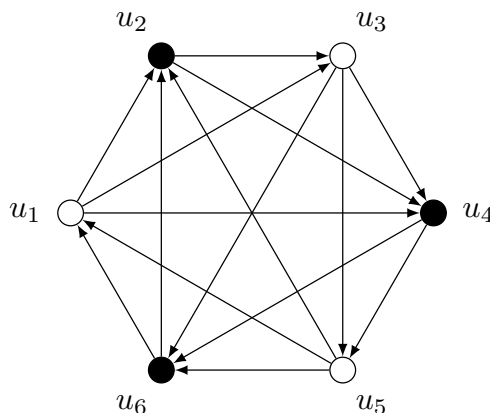
Soit  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Par symétrie, on peut supposer que l'arc entre les sommets  $u_i$  et  $u_{k+i}$  est dans le sens  $(u_i, u_{k+i})$ . Le sommet  $u_i$  a donc  $k-1$  prédécesseurs qui sont les  $k-1$  qui le précèdent dans le cycle. Considérons l'arc entre les deux sommets de la paire précédente dans l'ordre du circuit. Deux cas sont possibles :

- L'arc est dans le sens  $(u_{i-1}, u_{k+i-1})$ . Alors les seuls sommets capables de séparer  $u_i$  et  $u_{i-1}$  sont  $u_i$  et  $u_{k+i}$ .
- L'arc est dans le sens  $(u_{k+i-1}, u_{i-1})$ . Alors le seul sommet capable de séparer  $u_{k+i-1}$  et  $u_{k+i}$  est  $u_{k+i}$ .

Dans les deux cas, au moins un des deux sommets est dans le code  $C$ . Comme cette propriété est vraie pour les  $k$  arcs entre les sommets opposés deux à deux, on en déduit :

$$|C| \geq k \geq \frac{n}{2}$$

Finalement, on montre que la borne est serrée en exhibant le tournoi suivant :



Un code identifiant de ce tournoi semi-régulier localement transitif est  $\{u_2, u_4, u_6\}$ , qui est bien de taille  $\frac{6}{2} = 3$ .

□

### 3.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié l'existence et la taille de codes identifiants optimaux dans plusieurs tournois particuliers. Les preuves données peuvent aussi être intéressantes d'un point de vue structurelle car elle montrent des structures particulières de certains tournois. Notamment :

**Proposition 12.** *Soit  $T$  un tournoi régulier transitif, ou semi-régulier transitif. Il est possible d'ordonner les sommets de  $T$  en un circuit tel que :*

1. *Tous les successeurs d'un sommet sont juste après lui dans l'ordre du circuit ;*
2. *Tous les prédécesseurs d'un sommet sont juste avant lui dans l'ordre du circuit.*

**Remarque 8.** *L'ordre considéré n'est pas un ordre au sens mathématique de la relation d'ordre.*

Ce résultat structurel qui découle de propriétés de tournois semblait déjà connu [43], mais nous n'avons pas trouvé de référence claire vers une preuve concrète. De plus, redémontrer ce résultat permet de mieux comprendre la structure en question, pour pouvoir l'utiliser dans le contexte des codes identifiants.

Ces travaux peuvent être complétés notamment en étudiant des variantes de codes identifiants dans les tournois. On peut par exemple citer l'identification d'ensembles de sommets [38, 29, 33], ou le cas où les sommets du code n'ont pas besoin d'être séparés des autres [9, 14].



# Chapitre 4

## Le problème des pompiers

Dans ce chapitre, nous étudierons le problème des pompiers (FIREFIGHTER), particulièrement dans le cas des arbres. Nous introduirons la version *online* du problème et donnerons quelques résultats sur cette version. Ces travaux ont été effectués lors de mes deux séjours en Australie, à Melbourne, avec Marc Demange, David Ellison et Bertrand Jouve. Ces travaux rentrent dans le cadre du projet GEO-SAFE<sup>1</sup>.

### 4.1 Introduction et définitions

#### 4.1.1 Contexte

Depuis qu'il a été formellement introduit par B. Hartnell en 1995 ([32], cité dans [23]), le problème des pompiers – FIREFIGHTER – a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Bien que ce jeu avait initialement pour vocation d'être une modélisation très simple des problèmes de propagation et de confinement du feu, il peut aussi représenter tout type de menace capable de se propager à travers un réseau (maladies, virus, rumeurs, inondation, ...).

C'est un jeu à un joueur, déterministe, à temps discret, joué sur un graphe. Au début, un feu démarre sur un des sommets du graphe, puis se propage à chaque tour à tous les sommets voisins, à moins d'être bloqué. Pour contenir le feu, le joueur reçoit à chaque tour  $i$  un nombre  $f_i$  de pompiers, qu'il peut utiliser pour protéger des sommets (qui ne sont encore ni brûlés ni protégés). Ces sommets sont alors définitivement protégés. Le jeu se termine lorsque le feu ne peut plus se propager. Dans le cas où le graphe est fini, le but du joueur est de sauver autant de sommets

---

1. Travaux soutenus par le projet GEO-SAFE, H2020-MSCA-RISE-2015 project # 691161.



que possible, alors que dans le cas infini, on considère que le joueur gagne si le jeu se termine (c'est-à-dire si le feu est contenu).

On trouve beaucoup de littérature sur ce problème et ses variantes ; citons [23] qui fournit une vaste présentation des principales recherches sur ce sujet. On trouve une grande partie d'études de complexité et de recherches d'approximation dans plusieurs classes de graphes [7, 12, 22, 25] ainsi que l'étude de la complexité paramétrée ([6, 12]). En particulier, lorsque le joueur dispose d'un pompier à chaque tour, on sait résoudre polynomialement le problème dans certaines classes de graphes, comme par exemple : les graphes de degré maximum 3 où le feu commence sur un sommet de degré 2 [22], les graphes d'intervalles, les graphes de permutations et les *split graphs* [25].

Cependant, on sait que ce problème est très compliqué, même dans certains cas particuliers. Par exemple, le jeu sur la classe des arbres est très riche et beaucoup l'étudient. Dans le cas où le joueur a un nombre constant de pompiers à chaque tour, le problème est NP-complet sur la classe des arbres de degré maximum 3 [22], ainsi que dans d'autres cas encore plus restrictifs [7] ; on peut trouver dans [16] des résultats supplémentaires de complexité.

À propos de résultats d'approximation sur les arbres, il a été montré que le problème est  $\frac{1}{2}$ -approximable avec une approche gloutonne [31] avec un nombre constant de pompiers par tour. Lorsque ce nombre de pompier par tour est 1, il a été montré que le problème est  $(1 - \frac{1}{e})$ -approximable [12] ; ce ratio a été amélioré dans [35] pour le cas des arbres ternaires et très récemment, une approche en temps polynomial a été obtenue (toujours pour le cas des arbres) [2], ce qui clôt la question de l'approximation dans les arbres avec un pompier par tour, et ouvre vers des généralisations. Le problème avec un pompier par tour est difficile à approximer en  $n^{1-\varepsilon}$  sur les graphes en général [3].

La plupart des papiers sur ce problème considèrent une suite constante de pompiers (c'est d'ailleurs comme ça que le problème a été défini, historiquement). Le cas de la grille carrée infinie est très intéressant et a poussé le modèle à être étendu en changeant le nombre de pompiers disponibles à chaque tour. Cette motivation vient du fait que dans la grille carrée infinie, il est possible de contenir un feu de n'importe quelle taille avec deux pompiers par tour, mais que ce n'est pas possible avec un seul [24, 48]. En cherchant à affiner ce résultat, M-E Messinger a commencé à considérer des suites de pompiers périodiques [40], et d'autres suites plus générales sont étudiées dans [21].

D'autres étudient aussi ce problème en utilisant des modèles de programmation linéaire en nombre entiers, particulièrement sur les arbres [2, 30, 39]. Cette approche suggère très naturellement une variante continue du problème (la version relaxée du

programme linéaire), où le nombre de pompiers par tour peut être n'importe quel réel positif et où le joueur peut partiellement protéger les sommets. La partie non protégée d'un sommet peut alors brûler, et transmettre une fraction du feu à ses voisins. Cette variante définit le jeu appelé FRACTIONAL FIREFIGHTER qui a été introduit dans [24].

### 4.1.2 Quelques notations

Étant donné un arbre  $T$  enraciné en  $r$ , et deux sommets  $v$  et  $v'$ , on note  $v \triangleleft v'$  le fait que  $v$  est un ancêtre de  $v'$  (ou que  $v'$  est un descendant de  $v$ ), et  $v \trianglelefteq v'$  lorsque  $v = v'$  ou  $v \triangleleft v'$ . Pour tout sommet  $v$ , notons  $T[v]$  le sous-arbre induit par  $v$  et ses descendants. Notons  $T_i$  le  $i$ -ème niveau de  $T$ , où  $T_0 = \{r\}$ . Si l'arbre  $T$  est fini, la hauteur  $h(T)$  est la distance maximale de  $r$  à une feuille de  $T$ . Lorsque  $i > h(T)$ , on a  $T_i = \emptyset$ . Le poids  $w(v)$  d'un sommet  $v$  est le nombre de sommets de  $T[v]$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira  $w(v) = w_v$ .

Nous appelons  $B(T)$  l'arbre obtenu depuis  $T$  en fusionnant tous les sommets aux niveaux 0 et 1 en une seule nouvelle racine  $r_B$  : chaque arête  $u_1u_2 \in E(T)$  avec  $u_1 \in T_1$  et  $u_2 \in T_2$  donne naissance à une arête  $r_Bu_2 \in E(B(T))$ . Pour  $k \leq h(T)$ ,  $B^k(T)$  sera l'arbre obtenu en appliquant  $k$  fois ce procédé à  $T$  : tous les sommets des niveaux 0 à  $k$  sont fusionnés en un seul sommet noté  $r_{B^k}$  qui devient la nouvelle racine de l'arbre.

Finalement, étant donné un prédicat  $P$ , on note  $\mathbb{1}_P$  la fonction caractéristique de  $P$ , telle que  $\mathbb{1}_{P(x)} = 1$  si  $P(x)$  est vrai, 0 sinon.

## 4.2 Problèmes et résultats préliminaires

### 4.2.1 FIREFIGHTER et FRACTIONAL FIREFIGHTER

Une instance de FRACTIONAL FIREFIGHTER est définie par un triplet  $(G, r, (f_i))$ , où  $G = (V(G), E(G))$  est un graphe fini,  $r \in V(G)$  est le sommet du graphe où le feu se déclenche, et  $(f_i)_{i \geq 1}$  la suite de pompiers disponibles à chaque tour (qui est positive). Notons  $S_i$  la somme cumulée de tous les pompiers reçus depuis le début de la partie :  $S_i = \sum_{j=1}^i f_j$ .

Le tour  $i = 0$  correspond à l'état initial du jeu, où  $r$  est le seul sommet qui brûle, et aucun des sommets n'est protégé. Les tours  $i \geq 1$  correspondent aux tours durant lesquels le joueur intervient. À chaque tour  $i \geq 1$  et pour chaque sommet  $v$ , le joueur décide quelle quantité de protection  $p_i(v)$  il ajoute à  $v$ . Pendant la partie,

pour chaque sommet  $v$ , la partie de  $v$  qui brûle est notée  $b_i(v) \in [0, 1]$ ; on a donc  $b_0(r) = 1$  et  $b_0(v) = 0$  pour tout sommet  $v \neq r$ .

De manière identique, la protection cumulée reçue par le sommet  $v$  au tour  $i$  est notée  $p_i^c(v)$  avec  $p_0^c(v) = 0$  pour tout sommet  $v$ . Les deux suites  $(b_i(v))_{i \geq 0}$  et  $(p_i^c(v))_{i \geq 0}$  sont croissantes, et  $b_i(v) + p_i^c(v) \leq 1$  pour tout  $i$  et  $v$ . À chaque tour  $i$ , et pour tout sommet  $v$ , le joueur choisit de jouer  $p_i(v)$  en respectant les contraintes

$$p_i(v) \geq 0,$$

$$b_{i-1}(v) + p_{i-1}^c(v) + p_i(v) \leq 1,$$

et

$$\sum_{v \in V(G)} p_i(v) \leq f_i.$$

La nouvelle protection du sommet  $v$  est  $p_i^c(v) = p_{i-1}^c(v) + p_i(v)$ . Le feu se propage ensuite en suivant la règle

$$b_i(v) = \max\left\{ \max_{v' \in N(v)} b_{i-1}(v') - p_i^c(v), b_{i-1}(v) \right\} \quad (4.1)$$

où  $N(v)$  est le voisinage ouvert de  $v$ . La partie se termine lorsque le feu ne se propage plus, c'est-à-dire  $b_i(v) = b_{i-1}(v)$  pour tout  $v$ .

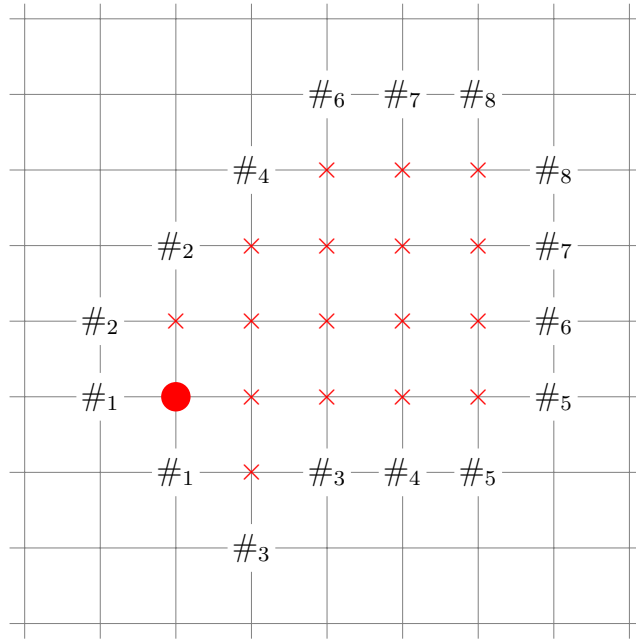
Le problème FIREFIGHTER standard est similaire au problème FRACTIONAL FIREFIGHTER, mais avec la contrainte que les  $p_i(v)$  sont des variables binaires. Il s'en suit que  $p_i^c(v)$  et  $b_i(v)$  sont aussi binaires. Dans ce cas, la suite des pompiers doit être entière.

**Remarque 9.** *Dans le problème FIREFIGHTER, puisque les sommets n'ont que deux états (brûlé ou non brûlé), il est naturel d'employer un max dans l'équation (4.1).*

Dans un premier temps, nous pouvons regarder une partie sur une grille carrée.

**Théorème 9** ([48]). *Dans une partie de FIREFIGHTER ou FRACTIONAL FIREFIGHTER sur une grille carrée infinie, 2 pompiers par tour sont suffisants pour arrêter un feu qui se déclenche en une case. De plus, il faut au minimum 8 tours pour pouvoir arrêter le feu.*

*Démonstration partielle :* la Figure 4.1 montre qu'il est possible d'arrêter le feu en 8 tours, avec 2 pompiers par tour. □



Les symboles  $\#_i$  dénotent un pompier joué au tour  $i$ . Le point rouge est le point de départ du feu. Les croix rouges sont les sommets brûlés en fin de partie.

FIGURE 4.1 – Stratégie optimale pour arrêter un feu sur une grille infinie.

L'optimalité de la stratégie de la Figure 4.1 a été donnée par Develin et Hartke [18], qui ont utilisé le programme linéaire en nombre entiers de la Figure 4.3 pour modéliser le problème des pompiers sur la grille infinie. La solution obtenue en Figure 4.1 laisse brûler 18 sommets, et ne dure que 8 tours.

Fogarty [24] donne dans sa thèse un algorithme qui permet d'encercler le feu sur une grille infinie, en utilisant 2 pompiers par tour. Cet algorithme permet au joueur d'encercler le feu, même après l'avoir laissé s'étendre un nombre quelconque de tours en début de partie.

**Théorème 10** ([24]). *Après avoir laissé le feu s'étendre pendant  $k > 0$  tours sur une grille infinie, il est ensuite possible de l'encercler avec deux pompiers par tour, en  $32k + 1$  tours, et en ayant  $318k^2 + 14k + 1$  sommets brûlés.*

La Figure 4.2 montre le résultat de l'application de l'algorithme en ayant laissé le feu s'étendre 1 tour avant de commencer à placer les pompiers.

Nous montrons maintenant que ce jeu se termine toujours sur un graphe fini  $G$ . Notons  $L_r(G)$  la longueur maximum d'un chemin induit sans corde de  $G$ , avec  $r$  comme extrémité. Nous avons :

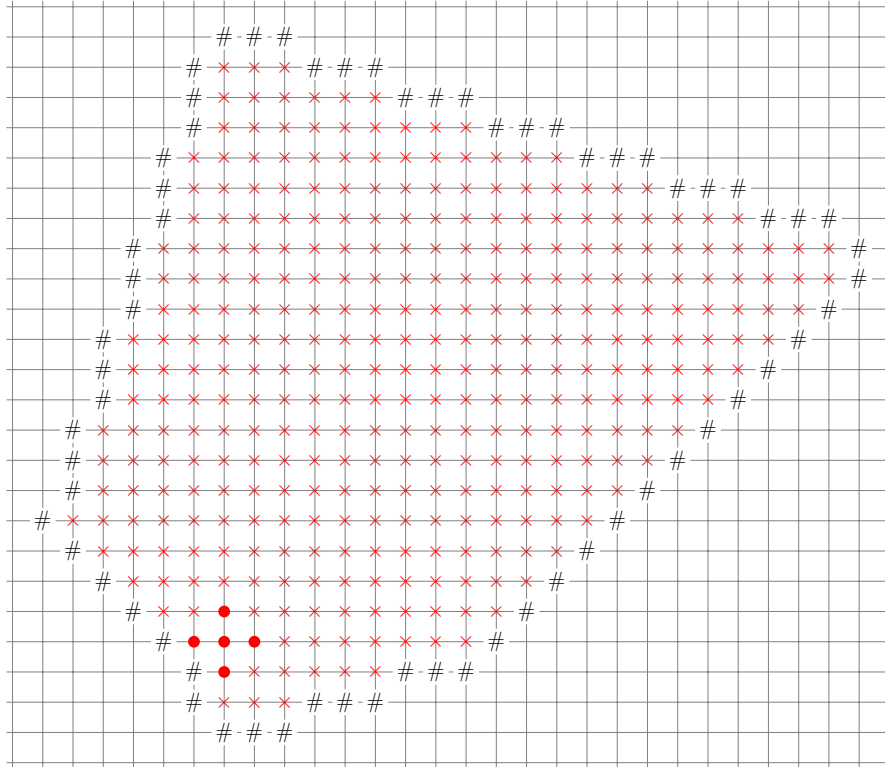


FIGURE 4.2 – Résultat de l’algorithme de Fogarty pour arrêter un feu s’étant étendu sans protection pendant 1 tour.

$$\begin{array}{l}
\text{Min } \sum_{x \in V} b_{x,T} \\
\text{s.t.} \\
\left\{ \begin{array}{l}
b_{x,t} \geq b_{x,t-1} \\
d_{x,t} \geq d_{x,t-1} \\
b_{x,t} + d_{x,t} \geq b_{y,t-1}, y \in N(x) \\
b_{x,t} + d_{x,t} \leq 1 \\
\sum_{y \in N(x)} b_{y,t-1} \geq b_{x,t} \\
\sum_{x \in V} (d_{x,t} - d_{x,t-1}) \leq d \\
d_{x,0} = 0 \\
b_{r,0} = 1 \\
b_{x,0} = 0 \\
b_{x,t}, d_{x,t} \in \{0, 1\}
\end{array} \right.
\end{array}$$

En connaissant a priori une solution du problème, on peut borner la taille de la grille et le nombre de tours maximal  $T$  sans créer d'effet de bord.  $V$  est l'ensemble des sommets de la grille (finie). La valeur  $b_{x,t}$  (respectivement  $d_{x,t}$ ) indique si le sommet  $x$  est brûlé (resp. défendu) au tour  $t$ , et  $d$  est le nombre de pompiers disponibles à chaque tour. En essayant plusieurs objectifs différents, on s'aperçoit que la solution qui minimise le nombre de sommets brûlés est aussi celle qui minimise le nombre de tours.

FIGURE 4.3 – Programme linéaire en nombres entiers modélisant le jeu des pompiers sur une grille carrée infinie.

**Proposition 13.** *Le nombre de tours d'une partie de FIREFIGHTER ou FRACTIONAL FIREFIGHTER sur un graphe  $G$  et dont le feu est initialement sur le sommet  $r$  est inférieur à  $L_r(G)$ , et cette borne est serrée.*

*Démonstration.* D'abord, montrons par récurrence que pour tout sommet  $v \in V(G)$  :

Pour tout  $i \geq 1$ , si  $b_i(v) > b_{i-1}(v)$ , alors il existe un chemin induit  $P_{i,v} = (u_0 = r, u_1, \dots, u_i = v)$  sur  $i + 1$  sommets tel que  $b_j(u_j)$  est décroissante sur ce chemin.

Pour  $i = 1$ , si  $b_1(v) > b_0(v)$ , alors  $v$  est un voisin de  $r$  et  $b_0(r) = 1 \geq b_1(v)$ . Ce chemin  $P_{1,v} = (r, v)$  est de longueur 2.

Supposons que la propriété est vraie au tour  $i$  et que  $b_{i+1}(v) > b_i(v)$ . Alors  $v$  reçoit sa partie supplémentaire de feu depuis un de ses voisins  $w$  :

$$b_{i+1}(v) = b_i(w) - p_{i+1}^c(v) > b_i(v)$$

De plus, on a nécessairement  $b_i(w) > b_{i-1}(w)$  car sinon, on aurait la contradiction suivante :

$$b_i(v) \geq b_{i-1}(w) - p_i^c(v) \geq b_i(w) - p_i^c(v) \geq b_i(w) - p_{i+1}^c(v) > b_i(v)$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $w$ , on sait qu'il existe un chemin induit  $P_{i,w} = (u_0 = r, u_1, \dots, u_i = w)$  tel que  $(b_j(u_j))$  est décroissante. Comme  $b_{i+1}(v) = b_i(w) - p_{i+1}^c(v)$ , on a  $b_{i+1}(v) \leq b_i(w)$ .

De plus, pour tout  $j < i$ ,  $u_j$  et  $v$  ne sont pas adjacents car sinon, on aurait la contradiction suivante :

$$b_i(v) \geq b_{j+1}(v) \geq b_j(u_j) - p_{j+1}^c(v) \geq b_i(w) - p_{i+1}^c(v) > b_i(v)$$

Le chemin  $P_{i+1,v}$  obtenu en ajoutant l'arête  $(w, v)$  à  $P_{i,w}$  est donc bien un chemin induit sans corde qui satisfait la propriété. Par conséquent, si  $b_{i+1}(v) > b_i(v)$  pour un certain  $v$ , alors on a  $i + 1 \leq L_r(G)$ . Le feu ne peut donc plus se propager après le tour  $L_r(G) + 1$ .

Réciproquement, considérons  $P$  un chemin induit ayant  $r$  pour extrémité et de longueur  $L_r(G) + 1$ . Si  $(f_i) = (|G| - L_r(G) - 1, 0, 0, 0 \dots)$  et si le complémentaire de  $P$  est protégé au premier tour, alors le jeu se terminera en exactement  $L_r(G)$  tours.  $\square$

**Exemple 1.** *Sur un arbre binaire parfait  $(B_n, r)$  de hauteur  $n$ , avec un pompier par tour, la durée de (FRACTIONAL) FIREFIGHTER est exactement  $n = L_r(B_n, r)$ , quelle que soit la stratégie du joueur (ce sera une conséquence immédiate de la Proposition 16).*

### 4.2.2 Simplification pour les arbres

Étant donnée une instance  $(T, r, (f_i))$ , où  $T$  est un arbre et  $r$  un sommet de  $T$ , on considèrera qu'il est enraciné en  $r$ , le sommet initialement en feu. Si  $T$  est fini, la Proposition 13 implique que le jeu durera au plus  $h(T)$  tours. Nous considérons qu'il a exactement  $h(T)$  tours, avec des tours éventuellement vides en fin de partie lorsque le feu ne peut plus se propager, où le joueur ne reçoit plus de pompiers.

La structure des stratégies sur un arbre est très particulière. En effet, d'après l'Équation (4.1), à chaque tour  $i$ , la quantité de feu  $b_i(v)$  est décroissante en suivant n'importe quel chemin depuis la racine, ce qui signifie que le feu ne se propage que dans un sens : depuis la racine vers les feuilles. De plus, pour chaque sommet  $v$  de  $T_j$  pour un certain  $j$ , la quantité de feu  $b_j(v)$  ne peut plus augmenter après le tour  $j$ . Par conséquent, il n'y a aucun intérêt à protéger un sommet de  $T_j$  à un tour  $i > j$ . Remarquons aussi que pour chaque stratégie qui alloue une quantité de protection à un sommet  $v \in T_k$  au tour  $i < k$ , on peut créer une stratégie strictement meilleure en déplaçant cette protection sur le parent de  $v$ . Pour ces raisons, on ne considère donc que les stratégies qui jouent sur  $T_i$  au tour  $i$ . Dans le cas de stratégie optimale *offline*, cette propriété a été mise en avant dans [31].

Cette propriété est vraie pour FIREFIGHTER et FRACTIONAL FIREFIGHTER sur les arbres. Avec une telle stratégie, on notera donc  $p_i^c(v) = p_i(v)$ , et les valeurs de  $p_i(v)$  et  $b_i(v)$  ne peuvent changer qu'au tour  $i$ . On s'autorise donc à écrire  $p(v) = p_i(v)$  et  $b(v) = b_i(v)$  pour  $v \in T_i$ . De plus, comme il est inutile de protéger un sommet plus que nécessaire, on supposera que  $p(v) \leq b(w)$ , pour  $v$  un sommet de l'arbre et  $w$  son père. La quantité de protection que reçoit un sommet est alors au plus la quantité de feu de son père. Une stratégie  $p$  est alors caractérisée par les valeurs  $p(v), v \in V(T)$ . Étant donnée une stratégie  $p$ ,  $p(v)$  est la quantité de protection reçue directement par le sommet  $v$ , mais ce dernier reçoit aussi une protection indirecte de ses ancêtres, que l'on note  $P_p(v) = \sum_{v' \triangleleft v} p(v')$  (qui sera utilisée dans la Section 4.3.1). Pour chaque sommet  $v \in T_i$ , on a  $b_{i-1}(v) = 0$ , et en sommant l'Équation (4.1) de 1 à  $i$ , on en déduit que  $p(v) + P_p(v) + b(v) = 1$ .

Une stratégie pour FIREFIGHTER ou FRACTIONAL FIREFIGHTER doit satisfaire les contraintes :

$$[\mathcal{C}] \begin{cases} \sum_{v \in T_i} p(v) \leq f_i & (i) \\ \forall v, p(v) + P_p(v) \leq 1 & (ii) \end{cases}$$

Rappelons que dans [39], FIREFIGHTER sur les arbres a été modélisé par un programme linéaire en nombres entiers, en utilisant ces contraintes. La résolution de FRACTIONAL FIREFIGHTER correspond alors à la version relaxée de ce programme linéaire en nombre entiers.



### 4.2.3 Version *online* sur les arbres

L'optimisation *online* [5] est une version dans laquelle les informations sont révélées au cours du jeu. On définit maintenant les versions *online* de FIREFIGHTER and FRACTIONAL FIREFIGHTER sur les arbres. Le graphe et le sommet initialement enflammé sont connus dès le début, mais la suite de pompiers  $(f_i)_{i \geq 1}$  est donnée en cours de partie, par un second joueur, qu'on appelle naturellement *adversaire*. À chaque tour  $i$ , l'adversaire donne  $f_i$  au joueur, qui choisit alors comment distribuer la protection disponible.

La version dont on a précédemment parlé est appelée version *offline*.

Considérons un algorithme *online*  $OA$  pour un des deux problèmes et jouons sur un arbre fini  $T$  jusqu'à ce que la partie se termine. La valeur  $\lambda_{OA}$  obtenue par l'algorithme, défini par la proportion de sommets sauvés, est comparée à celle qu'obtiendrait un algorithme *offline* optimal, avec la même suite de pompiers. Cette dernière valeur est notée  $\beta_I$  si on joue à FIREFIGHTER (où "I" signifie "Integral") et  $\beta_F$  si l'on joue à FRACTIONAL FIREFIGHTER. On appellera *Bob* l'algorithme *offline* optimal, qui garantit donc d'obtenir les valeurs  $\beta_I$  et  $\beta_F$ .

L'algorithme  $OA$  est dit  $\gamma$ -compétitif, pour  $\gamma \in ]0, 1]$ , pour FIREFIGHTER (resp. FRACTIONAL FIREFIGHTER) *online* si pour chaque instance on a  $\frac{\lambda_{OA}}{\beta_I} \geq \gamma$  (resp.  $\frac{\lambda_{OA}}{\beta_F} \geq \gamma$ );  $\gamma$  est appelé le *ratio de compétitivité* garanti par  $OA$ . Un algorithme *online* sera dit *optimal* s'il garantit le meilleur ratio possible (si celui-ci existe).

Commençons par une réduction :

**Proposition 14.** *On peut réduire l'étude de (FRACTIONAL) FIREFIGHTER *online* sur les arbres aux instances où  $f_1 > 0$ .*

*Démonstration.* Si  $f_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , alors l'instance  $(T, r, (f_i))$  est équivalente à l'instance  $(B^k(T), r_{B^k}, (f_{i+k}))$ .  $\square$

Dans le cas infini, on ne définit pas la compétitivité. On cherche seulement à savoir si le feu peut être contenu par un algorithme *online*. Les Sections 4.3.1 et 4.3.2 traitent le cas fini, alors que la Section 4.5.2 traite les arbres infinis.

## 4.3 Le jeu des pompiers *online* sur les arbres finis

### 4.3.1 Analyse de la compétitivité d'un algorithme glouton

Les algorithmes gloutons sont généralement de bons candidats pour les algorithmes *online*, et même parfois la seule approche connue. Deux types d'algorithmes

gloutons ont été principalement étudiés dans la littérature pour FIREFIGHTER sur les arbres [23] et les deux sont des stratégies *online* de notre problème. Le *glouton sur les degrés* essaye de sauver à chaque tour les sommets de grand degré; il a été montré dans [7] qu'il ne peut garantir aucun ratio de compétitivité sur les arbres, même pour une suite de pompiers constante.

Le second algorithme glouton, introduit dans [31] pour une suite de pompiers  $(f_i)$  entière, maximise à chaque tour le poids total de tous les sommets protégés (c'est-à-dire le nombre de sommets des sous-arbres protégés). On peut le généraliser pour une suite non entière, pour les deux problèmes FIREFIGHTER et FRACTIONAL FIREFIGHTER.

Notons  $G_r$  (pour *greedy*) l'algorithme glouton qui choisit à chaque tour  $i$  une solution optimale du programme linéaire  $\mathcal{P}_i$  ayant pour variables  $x(v), v \in T_i$  et comme contraintes :

$$\mathcal{P}_i : \begin{cases} \max \sum_{v \in T_i} x(v)w(v) \\ \sum_{v \in T_i} x(v) \leq f_i & (i) \\ \forall v \in T_i, x(v) + P_x(v) \leq 1 & (ii) \end{cases}$$

Une solution optimale de  $\mathcal{P}_i$  est obtenue en ordonnant les sommets  $\{v_1, \dots, v_{|T_i|}\}$  de niveau  $i$  par ordre de poids décroissant, en les prenant un par un en suivant cet ordre et en leur donnant de façon gloutonne la valeur  $x(v_j) = \min(f_i - \sum_{k < j} x(v_k), 1 - P_x(v_j))$ . On peut se convaincre de ce résultat par analogie avec le problème du sac à dos fractionnaire.

Remarquons que  $G_r$  est utilisable à la fois pour FIREFIGHTER et pour FRACTIONAL FIREFIGHTER.

Il a été montré dans [31] que  $G_r$  sur les arbres avec un pompier par tour est une  $\frac{1}{2}$ -approximation (c'est-à-dire qu'un algorithme optimal ne pourra pas sauver plus de 2 fois le nombre de sommets sauvés par cet algorithme). Ils affirment que ce ratio d'approximation reste correct pour un nombre constant entier de pompiers par tour. Nous avons étendu ce résultat pour une suite quelconque  $(f_i)_{i \geq 1}$  (entière ou non). Puisque  $G_r$  est aussi un algorithme *online*, ce ratio peut aussi être vu comme un ratio de compétitivité pour la version *online*.

**Théorème 11.** *L'algorithme glouton  $G_r$  est  $\frac{1}{2}$ -compétitif pour les versions online de FIREFIGHTER et FRACTIONAL FIREFIGHTER sur les arbres finis.*

*Démonstration.* Commençons par regarder le cas fractionnaire avec une instance *online*  $(T, r, (f_i))$  de FRACTIONAL FIREFIGHTER sur un arbre.

Soit  $x(v)$  et  $y(v)$  les quantités de protection placées sur le sommet  $v$  par  $G_r$  et Bob respectivement. On a  $\lambda_{G_r} = \sum_v x(v)w(v)$  et  $\beta_F = \sum_v y(v)w(v)$ . On rappelle que  $P_x(v) = \sum_{v' \triangleleft v} x(v')$  et  $P_y(v) = \sum_{v' \triangleleft v} y(v')$ .

On sépare  $y(v)$  en deux nombres positifs,  $y(v) = g(v) + h(v)$ , avec :  
 $g(v) = \min\{y(v), \max\{0, P_x(v) - P_y(v)\}\}$  et  $h(v) = \max\{0, y(v) + \min\{0, P_y(v) - P_x(v)\}\}$ .

Montrons maintenant par induction que  $\forall v' \in T$ ,  $\sum_{v \preceq v'} g(v) \leq P_x(v')$ . Comme  $g(r) = 0$ , la propriété est vraie pour la racine  $r$ . En supposant que la propriété est vraie pour un certain sommet  $v'$ , prenons  $v''$  un fils de  $v'$ . Si  $P_x(v'') - P_y(v'') \geq 0$ , alors on a directement :

$$\sum_{v \preceq v''} g(v) = \sum_{v \preceq v'} g(v) + g(v'') \leq \sum_{v \preceq v'} y(v) + (P_x(v'') - P_y(v'')) = P_x(v'')$$

Sinon,  $g(v'') = 0$  et en remarquant que  $\sum_{v \preceq v'} g(v) \leq P_x(v')$  et  $P_x(v'') \geq P_x(v')$ , la propriété est vraie pour  $v''$ ; ce qui termine la preuve de la propriété.

On en déduit que :

$$\sum_{v'} \sum_{v \preceq v'} g(v) \leq \sum_{v'} P_x(v') = \sum_{v'} \sum_{v \preceq v'} x(v) \leq \sum_{v'} \sum_{v \preceq v'} x(v)$$

Comme  $w(v) = \sum_{v \preceq v'} 1$ , en inversant les sommes des deux côtés, on obtient :

$$\sum_v g(v)w(v) \leq \sum_v x(v)w(v) = \lambda_{Gr} \quad (4.2)$$

Regardons maintenant les coefficients  $h(v)$ . On affirme que les coefficients  $h(v)$  pour  $v \in T_i$  satisfont les contraintes (i) et (ii) de  $\mathcal{P}_i$ ; en effet pour (i), on a  $h(v) \leq y(v)$  et  $y$  satisfait la contrainte. Pour (ii), remarquons que  $h(v) + P_x(v) = \max\{P_x(v), y(v) + \min\{P_x(v), P_y(v)\}\} \leq \max\{P_x(v), y(v) + P_y(v)\} \leq 1$ .

Par conséquent,  $\forall i$ ,  $\sum_{v \in T_i} h(v)w(v) \leq \sum_{v \in T_i} x(v)w(v)$ , et donc :

$$\sum_{v \in T} h(v)w(v) \leq \sum_{v \in T} x(v)w(v) = \lambda_{Gr} \quad (4.3)$$

Finalement, puisque  $g(v) + h(v) = y(v)$ , on en conclut grâce aux équations (4.2) et (4.3) que  $\beta_F \leq 2\lambda_{Gr}$ .

L'algorithme glouton  $G_r$  est donc  $\frac{1}{2}$ -compétitif pour la version *online* de FRACTIONAL FIREFIGHTER. De plus, comme il ne joue que des quantités entières de protection quand la suite de pompiers est entière, il est aussi  $\frac{1}{2}$ -compétitif pour FIREFIGHTER *online*.  $\square$

La Conjecture 2.3 dans [30] (qui est aussi la Conjecture 3.5 de [23]) affirme qu'il existe une constante  $\rho$  telle que la valeur optimale de FRACTIONAL FIREFIGHTER est au plus  $\rho$  fois celle de FIREFIGHTER. Cette conjecture est appuyée par de nombreux tests [30], mais déterminer cette constante est l'un des problèmes ouverts proposés dans [23] (Problem 7). Le Théorème 11 peut se voir différemment, sous le point de vue  $\lambda_{Gr} \leq \beta_I \leq \beta_F \leq 2\lambda_{Gr}$ , ce qui montre que  $\rho = 2$  est une telle constante dans le cas des arbres finis.

**Corollaire 5.** *Dans FRACTIONAL FIREFIGHTER, la quantité de sommets sauvés est au plus deux fois celle dans FIREFIGHTER.*

### 4.3.2 Algorithme compétitif amélioré pour FIREFIGHTER

Dans cette section, on recherche des améliorations possibles de stratégies *online* pour FIREFIGHTER sur les arbres finis. Notons  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or, solution de l'équation :  $\varphi^2 = \varphi + 1$ .

Seulement dans cette section, pour chaque sommet  $v \in T_i$  et chaque  $i \leq j \leq i + h(T[v])$ , on appelle  $v_j$  un sommet de poids maximum  $w_{v_j}$  dans  $T_j \cap V(T[v])$ . On définit  $\bar{w}_{v_j}$  pour tout  $j$  par :

$$\bar{w}_{v_j} = w_{v_j} \text{ si } j \in [i; i + h(T[v])] \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout entier  $k \geq 2$ , on note par  $\alpha_{I,k}$  le meilleur ratio de compétitivité pour FIREFIGHTER *online* sur les arbres finis avec au plus  $k$  pompiers disponibles (sur l'ensemble de toute la partie). On a donc :

$$\alpha_{I,k} = \inf_{T \in \mathcal{T}} \max_{OA \in \mathcal{A}_L} \min_{(f_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}, \sum_i f_i \leq k} \frac{\lambda_{OA}}{\beta_I}$$

où  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des arbres enracinés et  $\mathcal{A}_L$  l'ensemble des algorithmes *online* pour FIREFIGHTER sur les arbres finis.

Remarquons que la suite  $(\alpha_{I,k})$  est décroissante. Notons  $\alpha_I = \inf_{k \geq 2} \alpha_{I,k}$  le meilleur ratio de compétitivité pour FIREFIGHTER *online* sur les arbres finis.

Dans cette section, on donne un algorithme *online* optimal pour FIREFIGHTER sur les arbres finis dans le cas où il y a au plus 2 pompiers. D'après la Proposition 14, on peut supposer que  $f_1 = 1$  et une telle instance est alors caractérisée par le tour où le joueur reçoit le second pompier.

**Lemme 8.** *Soit  $a$  et  $b$  deux sommets distincts de  $T_1$  qui maximisent le poids de toute paire de sommets distincts de  $T_1$ . Si  $\sum_i f_i \leq 2$ , il y a un algorithme *online* optimal pour FIREFIGHTER qui joue le premier pompier en  $a$  ou en  $b$ .*

*Démonstration.* Si le premier pompier est placé sur  $v \in T_1 \setminus \{a, b\}$  par un algorithme *offline* optimal, comme il y a au plus 2 pompiers en tout, il existe  $u \in \{a, b\}$ , tel que  $T[u]$  brûle complètement. On en déduit que  $w(u) = w(v)$ . Par conséquent, en jouant la protection de  $v$  sur  $u$ , on obtient alors une autre solution optimale.  $\square$

On suppose que *Bob* a cette propriété, mais remarquons que même si  $w_a > w_b$ , il ne va pas nécessairement jouer sur  $a$ , comme montré dans la Figure 4.4 sur le graphe  $W_{1,10,20}$  : si la suite de pompier est  $(1, 0, 1, 0, 0, 0 \dots)$ , alors le premier coup de *Bob* doit nécessairement être en  $x$ .

Remarquons aussi que, lorsque la racine est de degré au moins 3, le second pompier n'est pas nécessairement dans  $V(T[a]) \cup V(T[b])$ .

Nous considérons maintenant l'Algorithme 1 et supposons que l'adversaire va donner au plus 2 pompiers au cours de la partie.

Le cas où  $f_1 = 2$  est trivial car un algorithme *online* peut prendre la même décision que *Bob* en assignant les deux pompiers aux deux sommets de plus grand poids. Nous supposons donc que les pompiers n'arrivent pas tous les deux au même tour.

L'algorithme travaille avec une version mise à jour  $\tilde{T}$  de l'arbre  $T$  : lorsqu'un sommet est protégé, le sous-arbre correspondant est retiré, et tous les sommets brûlés sont fusionnés en un seul sommet. L'algorithme ne joue donc que sur les sommets au niveau 1 de  $\tilde{T}$ .

Avant de commencer la partie *online* du jeu, l'algorithme calcule les poids de tous les sommets. Les poids des sommets non brûlés ne changeront pas lors de la mise à jour de  $\tilde{T}$ . La valeur de  $h(\tilde{T})$ , nécessaire à la ligne 6 peut être calculée initialement, pendant le calcul des poids, puis mise à jour simplement lors de la mise à jour de  $\tilde{T}$ . Par soucis de clarté, on ne détaille pas ces mises à jour dans l'algorithme. La notation  $\bar{w}_{v_j}$  utilisée à la ligne 6 est définie dans la Section 4.3.2.

**Théorème 12.** *L'Algorithme 1 est un algorithme online  $\frac{1}{\varphi}$ -compétitif pour FIRE-FIGHTER avec au plus 2 pompiers. Il est optimal dans ce cas.*

*Démonstration.* Si l'adversaire ne donne pas de pompier avant le tour  $h(T)$ , l'Algorithme 1 et *Bob* ne peuvent sauver aucun sommet, et par convention, on dit que le ratio de compétitivité est alors 1.

Supposons que le premier pompier est donné à un certain tour  $k \leq h(T)$ ; l'arbre possède encore au moins un sommet non brûlé. Pendant les  $(k - 1)$  premiers tours, l'instance est mise à jour en  $(B^k(T), r_{B^k}, (f_{i+k}))$  avec un pompier donné au (nouveau) premier tour. La nouvelle racine a au moins un sommet. La Proposition 14 assure que cette instance est équivalente à la première.

**Algorithme 1**


---

**Entrée :** Un arbre fini  $T$  enraciné en  $r$  - Un adversaire *online*.

- 1:  $(\tilde{T}, \tilde{r}) \leftarrow (T, r)$ ; Calcul de  $w_v, \forall v \in V(\tilde{T})$
  - 2: {Début de la partie *online*}
  - 3: À chaque tour, après que le feu s'est étendu,  $\tilde{T}$  est mis à jour - les sommets brûlés sont fusionnés avec  $\tilde{r}$ ;
  - 4: **si** on reçoit le Premier Pompier **et**  $\tilde{r}$  a au moins un fils **alors**
  - 5: On note  $a$  et  $b$  deux enfants de  $\tilde{r}$  de plus grands poids  $w_a, w_b, w_a \geq w_b$  ( $a = b$  si  $\tilde{r}$  a seulement un fils);
  - 6: **si**  $\min_{2 \leq i \leq 1+h(\tilde{T})} \frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} \geq \frac{1}{\varphi}$  **alors**
  - 7: Placer le premier pompier sur  $a$ ;
  - 8: **sinon**
  - 9: Placer le premier pompier sur  $b$ ;
  - 10: **si** on reçoit le Second Pompier **et**  $\tilde{r}$  a au moins un fils **alors**
  - 11: Placer le pompier sur le fils de  $\tilde{r}$  de poids maximum
- 

Si la racine a seulement un fils, alors  $a = b$  à la ligne 5 et l'Algorithme 1 choisit  $a$  et sauve tous les sommets non brûlés, ce qui amène à un ratio de compétitivité égal à 1.

Sinon,  $a \neq b$  avec  $w_a \geq w_b$  (ligne 5). Supposons dans un premier temps que l'adversaire donne un seul pompier au cours de la partie; alors l'Algorithme 1 le place sur  $a$  ou  $b$  alors que *Bob* le place en  $a$ . Si  $w_a \geq \varphi w_b$ , alors on a :

$$\forall i, 2 \leq i \leq 1 + h(T), \frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} \geq \frac{w_a}{w_b + w_a} \geq \frac{\varphi w_b}{w_b + \varphi w_b} = \frac{1}{\varphi} \quad (4.4)$$

Par conséquent, (voir ligne 6) l'unique pompier est placé en  $a$  par l'algorithme, ce qui garantit un ratio de compétitivité de 1. Sinon, on a  $w_b > \frac{1}{\varphi} w_a$  et même en plaçant un pompier en  $b$ , on garantit un ratio de compétitivité au moins égal à  $\frac{1}{\varphi}$ .

Supposons dans un second temps que l'adversaire nous donne 2 pompiers au cours de la partie.

Considérons deux cas :

**Cas (i) :** Si l'Algorithme 1 joue le premier pompier en  $a$  à la ligne 7, et si l'adversaire donne le second pompier au tour  $i$ , alors l'algorithme va sauver  $w_a + \bar{w}_{x_i}$  sommets, pour un certain  $x \in T_1 \setminus \{a\}$  tel que  $\bar{w}_{x_i} = \max_{u \in T_1 \setminus \{a\}} \bar{w}_{u_i}$ . Avec les mêmes pompiers, *Bob* va sauver  $w_v + \bar{w}_{y_i}$  pour des certains  $v \in \{a, b\}$  et  $y \in T_1 \setminus \{v\}$ . Si les deux stratégies n'ont pas la même valeur (l'optimal a un ratio strictement plus grand), alors nécessairement  $v = b$  et  $y = a$ . Dans ce cas, le critère de la ligne 6 assure que

le ratio de compétitivité est au moins  $\frac{1}{\varphi}$ .

**Cas (ii)** : Si l'Algorithme 1 joue le premier pompier en  $b$  à la ligne 9. Appelons  $j$  le tour où l'adversaire donne le second pompier. La ligne 5 assure que :

$$\exists i, 2 \leq i \leq 1 + h(T), \frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} < \frac{1}{\varphi} \quad (4.5)$$

Cela implique en particulier que  $w_a < \varphi w_b$  puisque dans le cas contraire l'Équation (4.4) serait correcte. Dans le cas (ii), l'Algorithme 1 sauve  $w_b + \bar{w}_{x_j}$  sommets avec  $x \in T_1 \setminus \{b\}$  tel que :

$$\bar{w}_{x_j} = \max_{u \in T_1 \setminus \{b\}} \bar{w}_{u_j}.$$

De son côté, *Bob* choisit  $v \in \{a, b\}$  et, s'il existe,  $y_j$  pour un certain  $y \in T_1 \setminus \{v\}$ , ce qui lui permet de sauver un total de  $w_v + \bar{w}_{y_j}$  sommets.

Si  $y \neq b$ , alors  $\bar{w}_{y_j} \leq \bar{w}_{x_j}$ , par définition de  $x$ , et alors :

$$\frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_a + \bar{w}_{y_j}} \geq \frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_a + \bar{w}_{x_j}} \geq \frac{w_b}{w_a} > \frac{1}{\varphi} \quad (4.6)$$

Finalement, si  $y = b$ , alors  $v = a$  et le ratio de compétitivité à évaluer est  $\frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_a + \bar{w}_{b_j}}$ . On affirme l'inégalité suivante :

$$\frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} \times \frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_a + \bar{w}_{b_j}} \geq \frac{1}{\varphi^2} \quad (4.7)$$

Si  $i \geq j$ , on a  $\bar{w}_{a_i} \leq \bar{w}_{a_j}$  et comme  $a \neq b$ ,  $\bar{w}_{a_j} \leq \bar{w}_{x_j}$ . Par conséquent :  $\frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} \geq \frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_b + \bar{w}_{a_j}} \geq 1$  et alors :

$$\frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} \times \frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_a + \bar{w}_{b_j}} \geq \frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_a + \bar{w}_{b_j}} \geq \frac{w_a}{w_a + w_b}.$$

Maintenant, si  $i < j$ , on obtient :  $\frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_a + \bar{w}_{b_j}} \geq 1$  et alors :

$$\frac{w_a + \bar{w}_{b_i}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} \times \frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_a + \bar{w}_{b_j}} \geq \frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_b + \bar{w}_{a_i}} \geq \frac{w_b}{w_a + w_b}.$$

Dans les deux cas, puisque  $\frac{w_a}{w_a + w_b} \geq \frac{w_b}{w_a + w_b} \geq \frac{1}{1 + \varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$ , on en déduit l'Équation (4.7).

Maintenant, les Équations (4.5) et (4.7) impliquent que dans le cas (ii), loque  $y = b$ , on a aussi  $\frac{w_b + \bar{w}_{x_j}}{w_a + \bar{w}_{b_j}} \geq \frac{1}{\varphi}$ .

En ajoutant l'Équation (4.6), cela clôt le cas (ii) et montre que l'Algorithme 1 est  $\frac{1}{\varphi}$ -compétitif. □

Même si les analyses de complexité ne sont généralement pas faites pour les algorithmes *online*, on peut remarquer que la ligne 6 requiert seulement de connaître les poids des sommets dans  $V(T[a]) \cup V(T[b])$  et le poids maximum par niveau dans  $T[a]$  et  $T[b]$ , et par conséquent, l'Algorithme 1 requiert  $O(|V(T[a])| + |V(T[b])|)$  pour choisir la position du premier pompier, et donc  $O(|V(T)|)$  en tout.

On finit cette section avec un résultat sur l'optimalité de l'algorithme glouton  $G_r$ , et de l'Algorithme 1 dans le cas où il n'y a que deux pompiers maximum. Ces résultats sont obtenus à partir des graphes  $W_{k,l,m}$  (Figure 4.4).

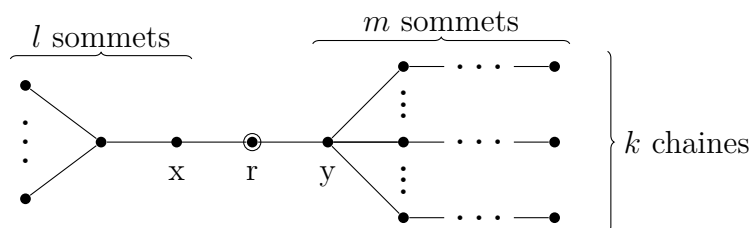


FIGURE 4.4 – Graphe  $W_{k,l,m}$

**Proposition 15.** *Pour tout  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{2} \leq \alpha_{I,k} \leq \frac{1}{\varphi}$ , et plus précisément :*

- (i)  $\alpha_I = \frac{1}{2}$  : l'algorithme glouton  $G_r$  est optimal pour FIREFIGHTER dans les arbres finis ;
- (ii)  $\alpha_{I,2} = \frac{1}{\varphi}$  : l'Algorithme 1 est optimal si au plus deux pompiers sont disponibles ;
- (iii)  $\alpha_{I,4} < \frac{1}{\varphi}$ .

*Démonstration.* Le Théorème 11 montre que  $\alpha_I \geq \frac{1}{2}$ . Étant donnés des entiers  $l, m, k$  tels que  $k$  divise  $m - 1$ , on définit le graphe  $W_{k,l,m}$  comme montré dans la Figure 4.4. On suppose que  $m > k^2$ .

(i) Considérons un algorithme *online* pour  $W_{k,l,m}$ . Si  $f_1 = 1$ , l'algorithme va protéger soit  $x$  soit  $y$ . S'il choisit  $x$  et que la suite de pompiers est  $(1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ , l'algorithme protège alors la branche de  $x$  et une des  $k$  chaînes, alors que l'optimal aurait protégé  $y$  puis l'étoile à gauche de  $x$ . Le ratio est donc  $\frac{l + \frac{m-1}{k}}{l+m-1}$ . S'il choisit  $y$  et que la suite de pompiers est  $(1, 0, 1, 1, 1, \dots)$ , alors l'algorithme protège la branche de  $y$  et un des sommets de l'étoile, pendant que l'optimal protège la branche de  $x$



et les  $k$  chaînes moins  $\frac{k(k+1)}{2}$  sommets. Si  $l = m$ , pour de grandes valeurs de  $m$ , le ratio entre les deux algorithmes tend vers  $\frac{1+\frac{1}{k}}{2}$ . En considérant par exemple  $W_{k,k^3,k^3}$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , on a  $\alpha_I = \frac{1}{2}$ .

(ii) Considérons les graphes  $W_{1,l,\lfloor \varphi l \rfloor}$ . Si l'algorithme *online* protège  $x$ , alors l'adversaire choisit la suite de pompiers  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ , et s'il choisit  $y$ , l'adversaire donne alors  $(1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ . Dans les deux cas, le ratio tend vers  $\frac{1}{\varphi}$  quand  $l \rightarrow +\infty$ .

(iii) Si au plus 4 pompiers sont disponibles, alors le graphe  $W_{4,901,1001}$  est un exemple où  $\frac{1}{\varphi}$  ne peut pas être atteint. En effet, si  $f_1 = 1$  et que l'algorithme *online* choisit  $x$ , l'adversaire va choisir la suite  $(1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ , comme dans la preuve du cas (i), pour un ratio de  $\frac{1151}{1901}$ . Si l'algorithme *online* choisit  $y$ , comme les pompiers sont limités à 4, l'adversaire va choisir  $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ , pour un ratio de  $\frac{1002}{1645}$ . Ce second choix est légèrement meilleur, mais ne permet pas d'atteindre  $\frac{1}{\varphi}$ .  $\square$

On peut aussi prouver aussi que le Théorème 12 reste correct si trois pompiers sont disponibles (i.e.,  $\alpha_{I,3} = \frac{1}{\varphi}$ ). Cependant, cette preuve implique une analyse au cas par cas beaucoup plus technique, et ne sera pas présentée ici.

## 4.4 Séparation des suites de pompiers

### 4.4.1 Définitions

On considère maintenant le problème FRACTIONAL FIREFIGHTER sur les graphes infinis. On dit qu'une suite de pompiers  $(f_i)$  est *plus faible* que  $(f'_i)$  si  $\forall k, S_k \leq S'_k = \sum_{i=1}^k f'_i$ , et on note  $(f_i) \preceq (f'_i)$ . Si de plus  $\exists k : S_k < S'_k$ ,  $(f_i)$  est dite *strictement plus faible* que  $(f'_i)$  et on note  $(f_i) \prec (f'_i)$ .

**Lemme 9.** *Si le feu peut être contenu dans l'instance  $(G, r, (f_i))$  et si  $(f_i) \preceq (f'_i)$ , alors le feu peut aussi être contenu dans l'instance  $(G, r, (f'_i))$ .*

*Démonstration.* Étant donnée une stratégie gagnante pour  $(G, r, (f_i))$ , si  $(f'_i)$  pompiers sont disponibles, alors on contient le feu de la même façon, éventuellement en les jouant plus tôt.  $\square$

Cependant, si  $(f_i) \prec (f'_i)$ , il n'existe pas toujours de graphe infini  $G$  tel que le feu peut être contenu dans  $(G, r, (f'_i))$  mais pas dans  $(G, r, (f_i))$  (voir Exemple 2). On appelle un tel graphe  $G$  un graphe *séparateur* de  $(f_i)$  et  $(f'_i)$ . Dans cette section, on donne des conditions suffisantes pour l'existence d'un tel graphe.

**Exemple 2.** Soit  $f_1 = 1$ ,  $f'_1 = 1.5$  et  $\forall i \geq 2$ ,  $f_i = f'_i = 0$ . Bien que  $(f_i) \prec (f'_i)$ , aucun graphe ne sépare les deux suites, étant donné un feu initial de 1. En effet, la demi-protection supplémentaire apportée par  $f'$  ne peut pas servir à arrêter le feu sur une autre branche.

#### 4.4.2 Arbres niveaux-réguliers

Étant donnée une suite  $(a_i) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ , appelons  $T((a_i))$  l'arbre enraciné en  $r$  où chaque sommet de niveau  $i - 1$  a  $a_i$  enfants. On dit qu'un arbre est *niveaux-réguliers* s'il est de cette forme. Remarquons que dans ce cas, on a  $|T_i| = \prod_{j=1}^i a_j$ .

**Proposition 16.** Dans l'instance  $(T((a_i)), r, (f_i))$ , la quantité totale de feu qui se propage au niveau  $i$  est  $\max\{0, F_i\}$ , où  $F_0 = 1$  et  $F_i = a_i F_{i-1} - f_i$  pour tout  $i$ .

*Démonstration.* Au tour  $i$ , le joueur protège seulement les sommets au niveau  $i$ . Si aucune protection n'est placée, la quantité totale de feu est multipliée par  $a_i$ . Par conséquent, si  $f_i \geq a_i F_{i-1}$ , le feu est alors contenu; sinon, la quantité totale de feu qui se propage au niveau  $i$  est  $a_i F_{i-1} - f_i$ , peu importe la manière dont sont placés les pompiers au niveau  $i$ .  $\square$

Étant données deux suites de pompiers  $(f_i) \preceq (f'_i)$ , posons  $k = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid f_i \neq f'_i\}$  et  $\epsilon = f'_k - f_k$ . On définit maintenant la suite de pompiers  $(f''_i)$  par  $\forall i \leq k$ ,  $f''_i = f'_i$ ,  $f''_{k+1} = f_{k+1} - \epsilon$  et  $\forall i \geq k + 2$ ,  $f''_i = f_i$ . Remarquons que  $(f''_i) \preceq (f'_i)$ , car  $(f''_i)$  est la plus faible des suites plus fortes que  $(f_i)$  avec les paramètres  $k$  et  $\epsilon$ . Par conséquent, un arbre séparant  $(f_i)$  et  $(f''_i)$  sépare aussi  $(f_i)$  et  $(f'_i)$ .

**Proposition 17.** L'arbre *niveaux-réguliers*  $T = T((a_i))$  sépare  $(f_i)$  et  $(f''_i)$  si et seulement s'il y a un rang  $N$  tel que :  $A \leq \sum_{i=k+2}^N \frac{f_i}{\prod_{j=k+2}^i a_j} < B$ ,

où  $A = |T_{k+1}|(1 - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f''_i}{|T_i|})$  et  $B = |T_{k+1}|(1 - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f_i}{|T_i|})$ .

*Démonstration.* On déduit de la Proposition 16 que  $F_n = \prod_{j=1}^n a_j - \sum_{i=1}^n f_i \prod_{j=i+1}^n a_j$ . Donc,  $F_n = |T_n|(1 - \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{|T_i|})$ . On peut définir  $F''_n$  similairement pour  $(f''_i)$ . La condition de séparation peut s'exprimer comme suit : il y a un rang  $N$  tel que  $F''_N \leq 0 < F_N$ . Par conséquent, il y a un rang  $N$  tel que

$$|T_N|(1 - \sum_{i=1}^N \frac{f''_i}{|T_i|}) \leq 0 < |T_N|(1 - \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{|T_i|}).$$

Alors

$$1 - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f_i''}{|T_i|} \leq \sum_{i=k+2}^N \frac{f_i}{|T_i|} < 1 - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f_i}{|T_i|},$$

et finalement,

$$A \leq \sum_{i=k+2}^N \frac{f_i}{\prod_{j=k+2}^i a_j} < B.$$

□

**Remarque 10.** Dans la Proposition 17,  $A = F_{k+1}''$  et  $B = F_{k+1}$ .

### 4.4.3 Targeting Game

En utilisant les notations de la Proposition 17, on peut voir ce cas particulier comme un nouveau problème, purement numérique, que l'on appelle *Targeting Problem*. Une instance de ce problème est donnée par deux réels positifs,  $A < B$ , et une suite de réels positifs,  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , qui représente des mouvements vers la cible  $[A, B[$ . Le joueur commence à la position  $u_0 = 0$  avec une taille initiale de pas égale à 1. On note  $\delta_i$  la taille du pas au tour  $i$ , donc  $\delta_0 = 1$ . À chaque tour  $i > 0$ , le joueur choisit un entier positif  $a_i$  par lequel il va diviser la taille du pas du tour précédent ; c'est-à-dire  $\delta_i = \frac{\delta_{i-1}}{a_i} = \prod_{j=1}^i a_j^{-1}$ . Ensuite, la position du joueur est mise à jour en utilisant la règle :  $u_i = u_{i-1} + f_i \delta_i$ . S'il existe un entier  $N$  tel que  $u_N \in [A, B[$ , alors le joueur a gagné avec la stratégie  $(a_i)$ .

Le *Targeting Problem* peut être résumé de la façon suivante :  
Étant donnés  $0 < A < B$  et une suite  $(f_i)$ , existe-t-il un entier  $N$  et une suite  $(a_i)$  tels que  $A \leq \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{\prod_{j=1}^i a_j} < B$  ?

On donne deux conditions suffisantes sur les données de ce problème qui assurent l'existence d'une stratégie gagnante.

**Théorème 13.** *S'il existe un entier  $N$  tel que  $\sum_{i=1}^N f_i \geq A \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil$ , alors il existe une suite  $(a_i)$  avec  $a_i = 1, \forall i \geq 2$  telle que le joueur gagne avec la stratégie  $(a_i)$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que si  $m \geq \frac{A}{B-A}$ , alors  $(m+1)A \leq mB$ . Il s'ensuit que

$$\left[ A \left\lceil \frac{A}{B-A} \right\rceil, +\infty \right[ \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [kA, kB[.$$

Par conséquent, il existe un entier  $k$  tel que  $kA \leq \sum_{i=1}^N f_i < kB$ . Donc  $A \leq \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{k} < B$ . Finalement, si le joueur choisit  $a_1 = k$  et  $a_i = 1$  pour tout  $i \geq 2$ , il gagnera la partie au tour  $N$ .  $\square$

**Théorème 14.** *Si  $|\{i : f_i \geq B\}| \geq \log_2 \left( \frac{B}{B-A} \right)$ , alors le joueur gagne la partie en choisissant à chaque tour  $i$  le plus petit  $a_i$  tel que  $u_i < B$ .*

*Démonstration.* Considérons un tour  $i$  tel que  $a_i > 1$ . Comme le joueur choisit la plus petite valeur de  $a_i$  qui ne dépasse pas  $B$ , on en déduit que  $B \leq u_{i-1} + \frac{\delta_{i-1}}{a_i - 1} f_i$ . Par définition de  $u_i$ ,  $\delta_{i-1} f_i = a_i(u_i - u_{i-1})$ , donc  $B \leq u_{i-1} + \frac{a_i}{a_i - 1}(u_i - u_{i-1})$ . Alors  $B(a_i - 1) \leq u_{i-1}(a_i - 1) + a_i(u_i - u_{i-1})$  et

$$a_i(B - u_i) \leq B - u_{i-1} \quad (4.8)$$

Considérons maintenant la suite  $x_i = \frac{B - u_i}{\delta_i}$ . En divisant l'Équation (4.8) par  $\delta_{i-1}$ , on voit que  $x_i < x_{i-1}$  quand  $a_i > 1$ . Lorsque  $a_i = 1$ , cette propriété reste vraie. La suite  $(x_i)$  est donc décroissante, et  $\forall i, x_i \leq x_0 = B$ .

À chaque tour  $i$  où  $f_i \geq B$ , on a  $\delta_{i-1} f_i \geq \delta_{i-1} x_{i-1} = B - u_{i-1} > u_i - u_{i-1} = \delta_i f_i$ . Donc  $\delta_{i-1} > \delta_i$ , et  $a_i > 1$ .

Il découle ensuite de l'Équation (4.8) que  $B - u_i \leq \frac{B - u_{i-1}}{2}$ .

Finalement, en choisissant  $N$  tel que  $|\{i \leq N : f_i \geq B\}| \geq \log_2 \left( \frac{B}{B-A} \right)$ , on a  $A \leq x_N < B$ .  $\square$

**Proposition 18.** *Étant données  $(f_i) \prec (f'_i)$ , notons  $k$  le plus petit entier tel que  $f_k \neq f'_k$  et  $\epsilon = f'_k - f_k$ . S'il existe un entier  $N$  tel que  $\sum_{k+2}^N f_i \geq 2 \left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil$  ou  $|\{k+2 \leq i \leq N; f_i \geq 2\}| > 1 - \log_2 \epsilon$ , alors il existe un arbre niveaux-réguliers qui sépare  $(f_i)$  et  $(f'_i)$  en  $N$  tours.*

*Démonstration.* Pour  $i \leq k$ , on choisit le plus petit  $a_i$  tel que  $F_i > 0$ ; i.e.  $a_i = \left\lfloor \frac{f_i}{F_{i-1}} \right\rfloor + 1$ . On choisit ensuite  $a_{k+1} = \max\{2, \left\lfloor \frac{f_{k+1}}{F_k} \right\rfloor + 1\}$ .

En utilisant la Proposition 17, il est suffisant d'avoir un rang  $N$  tel que :

$$A \leq \sum_{i=k+2}^N \frac{f_i}{\prod_{j=k+2}^i a_j} < B,$$

où  $A = |T_{k+1}|(1 - \sum_{i=1}^k \frac{f_i''}{|T_i|})$  et  $B = |T_{k+1}|(1 - \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{|T_i|})$ .

Avec ce choix de  $a_i$ , on en déduit que pour  $i \leq k$ ,  $(a_i - 1)F_{i-1} - f_i \leq 0$ . Par conséquent  $a_i F_{i-1} - f_i \leq F_{i-1}$ , et  $F_i \leq F_{i-1}$ . Si  $a_{k+1} = \lfloor \frac{f_{k+1}}{F_k} \rfloor + 1$ , alors  $F_{k+1} \leq F_k$ . Sinon, si  $a_{k+1} = 2$ ,  $F_{k+1} \leq 2F_k$ . Finalement, on a  $B = F_{k+1} \leq 2F_0 = 2$ .

Remarquons aussi que  $B - A = \sum_{i=1}^{k+1} (f_i'' - f_i) \prod_{j=i+1}^{k+1} a_j = (f_k'' - f_k) a_{k+1} + (f_{k+1}'' - f_{k+1}) = (a_{k+1} - 1)\epsilon$ . En ayant choisi  $a_{k+1} \geq 2$ , on a  $B - A \geq \epsilon$ .

Par conséquent, on a un entier  $N$  tel que  $\sum_{k+2}^N f_i \geq 2 \lfloor \frac{2}{\epsilon} \rfloor \geq A \lfloor \frac{A}{B - A} \rfloor$  ou  $|\{k + 2 \leq i \leq N \mid f_i \geq 2\}| > 1 - \log_2 \epsilon \geq \log_2 \left( \frac{B}{B - A} \right)$ . Il suffit ensuite d'utiliser le Théorème 13 ou le Théorème 14. □

**Remarque 11.** Dans le cas où  $|\{k + 2 \leq i \leq N; f_i \geq 2\}| > 1 - \log_2 \epsilon$ , la suite  $(a_i)$  est créée de façon gloutonne, en sélectionnant la meilleure valeur de  $a_i$  telle que  $F_i > 0$  (et  $a_{k+1} \geq 2$ ). La valeur de  $a_i$  dépend donc seulement de  $F_{i-1}$  et  $f_i$ .

## 4.5 Suites de pompiers vs. croissance par niveau

### 4.5.1 Instances *offline* infinies

Sur les arbres infinis, l'objectif est de contenir le feu. Par conséquent, les branches finies d'un arbre infini ne nous intéressent pas. Jouer sur un arbre infini est équivalent à jouer sur son sous-arbre sans feuille maximal. Sans perte de généralité, on peut donc restreindre l'étude au cas des arbres infinis sans feuille. Remarquons que si  $T$  est sans feuille, alors  $(|T_i|)$  est croissante.

Intuitivement, on devine que si le feu ne peut pas être contenu sur un arbre infini, cela veut dire que le nombre de sommets par niveau croît plus vite, dans un certain sens, que la suite de pompiers. En suivant cette intuition, le Théorème 15 donne un critère pour qu'une instance soit gagnante, basé sur le comportement asymptotique des deux suites.

**Théorème 15.** Soit  $(T, r, (f_i))$  une instance de FIREFIGHTER or FRACTIONAL FIREFIGHTER où  $T$  est un arbre infini sans feuille. Si  $S_i \rightarrow +\infty$  et  $\frac{S_i}{|T_i|} \rightarrow 0$ , alors l'instance  $(T, r, (f_i))$  est gagnante.

La preuve du Théorème 15 va demander d'avoir au préalable le lemme suivant, probablement bien connu :

**Lemme 10.** *Si  $(u_n)$  est une suite positive qui croît vers  $+\infty$ , alors  $\sum \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n}$  diverge.*

*Démonstration.* Soit  $v_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n}$ . Si  $v_n \not\rightarrow 0$ , alors  $\sum v_n$  diverge. Supposons que  $v_n \rightarrow 0$ . Comme  $\frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 - v_n$ , on a  $\ln \frac{u_0}{u_n} = \ln \prod_{i=1}^n (1 - v_i) = \sum_{i=1}^n \ln(1 - v_i)$ . Comme  $u_n \rightarrow +\infty$ ,  $\ln(\frac{u_0}{u_n}) \rightarrow -\infty$ , donc  $\sum \ln(1 - v_i) \rightarrow -\infty$ , et comme  $v_n \rightarrow 0$ ,  $\sum_{i=1}^n v_i \rightarrow +\infty$ .  $\square$

On peut maintenant prouver le Théorème 15.

*Démonstration.* Comme  $T$  est un arbre sans feuille,  $(|T_i|)$  est croissante et comme  $\frac{S_i}{|T_i|} \rightarrow 0$ , il existe une constante  $C$  positive et une injection croissante  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que

$$\forall i, |T_{\sigma(i)}| \leq CS_{\sigma(i)} < \infty$$

Soit  $a : V(T) \rightarrow [0, 1]$  la quantité de protection que l'on va placer sur chaque sommet. Pour décrire la quantité de chaque sommet qui reste non protégée à la fin de chaque tour, on utilise une suite d'étiquettes  $l_i : V(T) \rightarrow [0, 1]$ . Initialement, tous les sommets sont non protégés, donc  $l_0 = 1$ . Au tour  $i$ , la protection est placée sur les sommets de  $T_i$ , donc  $\forall v \in V(T), l_i(v) = l_{i-1}(v) - \sum_{v' \in T_i} a(v') \mathbb{1}_{v' \preceq v}$ . Pour chaque  $W \subset V(T)$  et chaque étiquetage  $l$ , on définit  $l(W) = \sum_{v \in W} l(v)$ .

Pour tout  $i$  et  $h \in \mathbb{N}^*$  avec  $h > i$ , pour tout  $v \in T_i$ , posons  $w_h(v) = |\{v' \in T_h, v \triangleleft v'\}|$ . On a alors  $\sum_{v \in T_i} w_h(v) = |T_h|$  et pour tout  $j < i$ ,

$$\sum_{v \in T_i} w_h(v) l_j(v) = l_j(T_h) \quad (4.9)$$

En utilisant le Lemme 10, on voit que  $\sum \frac{S_{\sigma(i)} - S_{\sigma(i-1)}}{S_{\sigma(i)}}$  diverge. Par conséquent  $\prod(1 + \frac{S_{\sigma(i)} - S_{\sigma(i-1)}}{CS_{\sigma(i)}})$  diverge également. Soit  $N$  un entier tel que  $\prod_{i=1}^N (1 + \frac{S_{\sigma(i)} - S_{\sigma(i-1)}}{CS_{\sigma(i)}}) > 2C$ , et  $h$  tel que  $S_{\sigma(h)} > 2S_{\sigma(N)}$ .

On considère la stratégie suivante : à chaque tour  $i$ , on protège les sommets qui ont le plus de descendants au niveau  $\sigma(h)$ , i.e.  $a(v)$  est une solution optimale du programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max \sum_{v \in T_i} a(v) w_{\sigma(h)}(v) \\ a(v) \leq l_{i-1}(v) ; v \in T_i \\ \sum_{v \in T_i} a(v) \leq f_i \end{cases}$$

Si  $f_i \geq l_{i-1}(T_i)$  alors on peut protéger tout le niveau  $i$  de l'arbre, et donc  $T_{\sigma(h)}$ , et le feu est alors contenu. On suppose donc que  $f_i < l_{i-1}(T_i)$  pour tout  $i < \sigma(h)$ .

En définissant pour  $v \in T_i$ ,  $a'(v) = f_i \frac{l_{i-1}(v)}{l_{i-1}(T_i)}$ , on a  $a'(v) \leq l_{i-1}(v)$  car  $f_i < l_{i-1}(T_i)$  et  $\sum_{v \in T_i} a'(v) = f_i$ .

On en déduit, par caractérisation de l'optimal et en utilisant l'équation (4.9) que :

$$\sum_{v \in T_i} a(v)w_{\sigma(h)}(v) \geq \sum_{v \in T_i} a'(v)w_{\sigma(h)}(v) = \frac{f_i l_{i-1}(T_{\sigma(h)})}{l_{i-1}(T_i)}$$

Remarquons que pour  $j \leq i$ ,  $l_{j-1}(T_j) \leq |T_j| \leq |T_{\sigma(i)}|$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} l_{\sigma(i-1)}(T_{\sigma(h)}) - l_{\sigma(i)}(T_{\sigma(h)}) &= \sum_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)} \sum_{v \in T_j} a(v)w_{\sigma(h)}(v) \\ &\geq \sum_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)} \frac{f_j l_{j-1}(T_{\sigma(h)})}{l_{j-1}(T_j)} \\ &\geq \sum_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)} \frac{f_j l_{\sigma(i)}(T_{\sigma(h)})}{|T_{\sigma(i)}|} \\ &\geq \frac{S_{\sigma(i)} - S_{\sigma(i-1)}}{CS_{\sigma(i)}} l_{\sigma(i)}(T_{\sigma(h)}) \quad (\text{since } |T_{\sigma(i)}| \leq CS_{\sigma(i)}) \end{aligned}$$

Donc

$$l_{\sigma(i-1)}(T_{\sigma(h)}) \geq \left(1 + \frac{S_{\sigma(i)} - S_{\sigma(i-1)}}{CS_{\sigma(i)}}\right) l_{\sigma(i)}(T_{\sigma(h)})$$

De plus,

$$|T_{\sigma(h)}| \geq l_{\sigma(0)}(T_{\sigma(h)}) \geq \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{S_{\sigma(i)} - S_{\sigma(i-1)}}{CS_{\sigma(i)}}\right) l_{\sigma(N)}(T_{\sigma(h)}) > 2Cl_{\sigma(N)}(T_{\sigma(h)})$$

Et finalement,

$$l_{\sigma(N)}(T_{\sigma(h)}) \leq \frac{|T_{\sigma(h)}|}{2C} \leq \frac{1}{2} S_{\sigma(h)} \leq S_{\sigma(h)} - S_{\sigma(N)}$$

Cela signifie que les pompiers disponibles entre les tours  $\sigma(N)$  et  $\sigma(h)$  sont plus nombreux que les sommets non protégés du niveau  $\sigma(h)$ . Par conséquent, la stratégie permet de gagner en au plus  $\sigma(h)$  tours.  $\square$

Réciproquement, le comportement asymptotique ne permet pas de garantir qu'une instance sera perdante. En effet, si  $f_1 \geq |T_1|$ , l'instance est gagnante, quel que soit le comportement asymptotique de la suite de pompiers. Cependant, en choisissant des comportements asymptotiques pour lesquels les niveaux de l'arbre grandissent plus rapidement que la suite de pompiers, le Théorème 16 garantit que certaines instances avec ce comportement sont perdantes.

**Théorème 16.** Soit  $(t_i) \in \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*}$  et  $(f_i) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}^*}$  telles que  $(t_i)$  est croissante et tend vers  $+\infty$ . Alors, il existe un arbre niveaux-réguliers  $T$  enraciné en  $r$  tel que :

- $\exists N : \forall i \geq N, \frac{t_i}{2} \leq |T_i| \leq t_i$
- l'instance  $(T, r, (f_i))$  est perdante pour (FRACTIONAL) FIREFIGHTER.

si et seulement si  $\sum \frac{f_i}{t_i}$  converge.

*Démonstration.* 1) Supposons que  $\sum \frac{f_i}{t_i}$  converge. Posons  $M$  tel que  $\sum_{M+1}^{+\infty} \frac{f_i}{t_i} < \frac{1}{4}$  et  $N > M$  tel que  $t_N > 4S_M$ . On choisit  $a_1 = t_N$ ,  $a_i = 1$  pour  $2 \leq i \leq N$ , et  $a_i = \left\lfloor \frac{t_i}{\prod_{j=1}^{i-1} a_j} \right\rfloor$  pour  $i > N$ . Nous allons montrer que  $T = T((a_i))$  est une solution.

Montrons par récurrence que  $\forall i \geq N, \frac{t_i}{2} \leq |T_i| \leq t_i$ . Remarquons que

$$|T_N| = \prod_{j=1}^N a_j = t_N$$

Supposons que le résultat est vrai pour  $i-1$ , où  $i > N$  :

$$\frac{t_{i-1}}{2} \leq \prod_{j=1}^{i-1} a_j \leq t_{i-1}$$

Comme  $t_i \geq t_{i-1}$ , on a  $a_i \geq 1$ . Par conséquent,

$$a_i \leq \frac{t_i}{\prod_{j=1}^{i-1} a_j} \leq a_i + 1 \leq 2a_i$$

Donc,  $\frac{t_i}{2} \leq |T_i| \leq t_i$ , et le résultat est toujours correct pour tout  $i \geq N$ .

Comme  $T$  est niveaux-régulier, la quantité de feu qui se propage au niveau  $n$  est  $\max(0, F_n)$ , où  $F_n = |T_n|(1 - \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{|T_i|})$ . Pour  $n > N$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{|T_i|} &= \frac{S_N}{t_N} + \sum_{i=N+1}^n \frac{f_i}{|T_i|} \\ &\leq \frac{S_M}{t_N} + \frac{1}{t_N} \sum_{i=M+1}^N f_i + 2 \sum_{i=N+1}^n \frac{f_i}{t_i} \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{4t_N} + \frac{2}{4} \leq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $F_n > 0$  pour tout  $n$ , et donc le feu ne peut pas être contenu.

2) Réciproquement, si  $\sum \frac{f_i}{t_i}$  diverge et  $T = T((a_i))$  est tel que  $\exists N : \forall i \geq N, \frac{t_i}{2} \leq |T_i| \leq t_i$ , alors  $\sum \frac{f_i}{|T_i|}$  diverge aussi. On en déduit que  $F_n = |T_n|(1 - \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{|T_i|})$  est négatif à partir d'un certain rang. Par conséquent, le feu est contenu.  $\square$



**Remarque 12.** Avec les hypothèses du Théorème 16, si  $\sum \frac{f_i}{t_i}$  converge, on peut créer une instance perdante  $(T', r', (f_i))$  avec  $\forall i, |T_i| = t_i$  en ajoutant  $t_i - |T_i|$  feuilles au niveau  $i$  pour tout  $i$ . On aura  $|T_n| = t_n$  sans ajouter de feuilles si et seulement s'il existe un arbre niveaux-régulier avec  $t_i$  sommets au niveau  $i$  pour tout  $i$ .

**Remarque 13.** La remarque 1.12 dans [20] donne une condition suffisante pour qu'une instance soit perdante pour FIREFIGHTER dans un graphe général qui satisfait des conditions de croissance, en utilisant un critère similaire de convergence de  $\sum \frac{f_i}{t_i}$ . Dans le cas général, les deux résultats ne peuvent pas être comparés. Dans notre cas, leur résultat peut cependant être vu comme un cas particulier de FIREFIGHTER où  $(t_i) = (\lambda^i)$  pour un certain  $\lambda$ .

### 4.5.2 Version *online* du problème des pompiers sur les arbres à croissance linéaire

Dans la section précédente, le Théorème 15 se limite au cas *offline*, car la stratégie implique pour le joueur d'être capable de calculer  $\sigma(h)$  dès le début. Dans cette section, on donne un résultat qui fonctionne aussi dans le cas *online*, en se limitant aux arbres à croissance linéaire. On dit qu'un arbre enraciné  $(T, r)$  est à *croissance linéaire* si le nombre de sommets par niveau augmente de façon linéaire, i.e.  $|T_i| = \mathcal{O}(i)$ .

**Remarque 14.** Cette propriété de croissance linéaire de  $T$  est toujours correcte si on choisit un autre sommet  $r'$  comme racine. En effet, si  $d$  est la distance entre  $r$  et  $r'$ , l'ensemble des sommets  $i$  de  $r'$  est inclus dans  $\bigcup_{j=i-d}^{i+d} T_j$ , dont le cardinal est  $\mathcal{O}(i)$ .

**Théorème 17.** Il existe un algorithme *online* pour les instances  $(T, r, (f_i))$  de FRACTIONAL FIREFIGHTER où  $T$  est à croissance linéaire, tel que si une fonction périodique non nulle est plus faible que  $f_i$ , le feu va être contenu.

La preuve du Théorème 17 va utiliser le lemme suivant :

**Lemme 11.** Pour n'importe quel réel  $a > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n \frac{j^{a-1}}{j^a} = 0$  .

*Démonstration.* On a  $\ln \prod_{j=1}^n \frac{j^{a-1}}{j^a} = \sum_{j=1}^n \ln(1 - \frac{1}{j^a})$  et comme  $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^a} \rightarrow +\infty$ , on a  $\sum_{j=1}^n \ln(1 - \frac{1}{j^a}) \rightarrow -\infty$ . Par conséquent,  $\prod_{j=1}^n \frac{j^{a-1}}{j^a} \rightarrow 0$ .  $\square$

On peut maintenant prouver le Théorème 17 :

*Démonstration.* Puisque  $T$  est à croissance linéaire, soit  $C$  tel que  $\forall i, |T_i| \leq Ci$ . Le fait qu'il existe une suite périodique non nulle plus faible que  $(f_i)$  signifie que  $(\mathbf{1}_{n|i}) \preceq (f_i)$  pour tout  $n$  plus grand qu'un certain  $m$ . Tout d'abord, nous allons donner une stratégie *offline* pour contenir le feu avec un pompier tous les  $n$  tours. Ensuite nous montrerons que l'instance *online* avec  $(\mathbf{1}_{n|i}) \preceq (f_i)$  pour un  $n$  connu du joueur est gagnante. Finalement, nous décrirons une stratégie *online* gagnante même quand  $n$  n'est pas connu.

Étant donné un entier  $n$ , considérons l'instance  $(T, r, (\mathbf{1}_{n|i}))$ . On voit d'après le Lemme 11 qu'il existe un entier  $N$  tel que  $\prod_{j=1}^N \frac{Cnj-1}{Cnj} < \frac{1}{2Cn}$ . Posons  $h(n) = 2nN$ . Une stratégie gagnante pour cette instance *offline* est obtenue en protégeant au tour  $nj$  le sommet non protégé de  $T_{nj}$  avec le plus grand nombre de descendants au niveau  $h(n)$ . Puisque  $|T_{nj}| \leq Cnj$ , le nombre restant de sommets non protégés dans  $T_{h(n)}$  est réduit par au moins  $\frac{1}{Cnj}$  de sa précédente valeur. Donc le nombre de sommets non protégés de  $T_{h(n)}$  restants après  $nN$  tours est plus petit que  $|T_{h(n)}| \prod_{i=1}^N \frac{Cni-1}{Cni} \leq \frac{|T_{h(n)}|}{2Cn} \leq N$ . Comme  $N$  pompiers vont encore être placés entre les tours  $N$  et  $h(n)$ , la stratégie est gagnante en au plus  $h(n)$  tours.

Si le joueur sait à l'avance que  $(\mathbf{1}_{n|i}) \preceq (f_i)$  pour un certain  $n$ , la stratégie décrite ci-dessus peut être adaptée en utilisant le Lemme 9.

Dans le cas général, on suppose que  $(\mathbf{1}_{n|i}) \preceq (f_i)$  pour un certain  $n$ , mais le joueur ne connaît pas ce  $n$ .

La stratégie *online* est la suivante : on joue initialement en supposant que  $(\mathbf{1}_{n_0|i}) \preceq (f_i)$  avec  $n_0 = 100$ . Si le feu n'est pas contenu au tour  $h(n_0)$ , ou plus tard au tour  $h(n_k)$ , on choisit alors  $n_{k+1} = h(n_k) \left( \lceil S_{h(n_k)} \rceil + 1 \right)$ . On suppose ensuite que  $(\mathbf{1}_{h(n_k)|i}) \preceq (f_i)$ . On en déduit, en annulant les  $h(n_k)$  premiers termes de  $(f_i)$ , que la suite résultante est plus forte que  $(\mathbf{1}_{n_{k+1}|i})$ . Donc nous pouvons considérer que les  $h(n_k)$  premiers tours ont été perdus, et on suit la stratégie avec  $n_{k+1}$ , jusqu'au tour  $h(n_{k+1})$ . Cette stratégie finira par gagner lorsque  $n_k$  sera suffisamment grand.  $\square$

## 4.6 Conclusion

Nous nous sommes principalement intéressés dans nos travaux au cas où la suite de pompiers donnée dans une instance de (FRACTIONAL) FIREFIGHTER n'est pas constante. Nous avons obtenus des résultats sur plusieurs questions dans le cas particulier des arbres.

Nous avons introduit la version *online* de (FRACTIONAL) FIREFIGHTER sur les arbres et avons donné des premiers résultats dans le cas fini. À l'heure actuelle, nos

résultats suggèrent qu'il reste de nombreux problèmes ouverts dans cette version *online*. À notre connaissance, le Théorème 11 est la première preuve non triviale de compétitivité d'un algorithme pour le problème FRACTIONAL FIREFIGHTER. Il serait intéressant de savoir s'il est possible d'obtenir un meilleur ratio dans le cas des arbres finis. Bien que ce le cas des arbres soit déjà compliqué, la principale question reste de déterminer les meilleurs ratios pour les versions *online* des problèmes (FRACTIONAL) FIREFIGHTER dans d'autres classes de graphes.

La recherche d'un arbre séparant deux suites de pompiers est aussi un problème difficile, encore ouvert. Nous avons étudié les arbres niveaux-réguliers, qui assurent que toutes les stratégies du joueur – du moment que celui-ci place ses pompiers juste à côté du feu – sont optimales. Cela nous a permis de n'avoir à choisir que la forme de l'arbre, et d'oublier la stratégie du joueur. Une question intéressante dans ce sens serait de savoir si l'existence d'un arbre qui sépare deux suites de pompiers implique l'existence d'un arbre niveaux-réguliers qui sépare aussi ces deux suites. De plus, nous avons seulement étudié le cas où l'une des deux suites est plus faible que l'autre. Le cas général est encore ouvert.

Nous avons montré que certaines conditions du comportement asymptotique de la suite de pompiers par rapport à celle de la croissance d'un arbre permettait d'affirmer que l'instance était gagnante. Cependant, d'autres conditions garantissent que l'instance est perdante. Nous conjecturons que si  $\sum \frac{f_i}{|T_i|}$  diverge, alors l'instance est gagnante.

Finalement, remarquons que la question de l'approximation de (FRACTIONAL) FIREFIGHTER dans le cas des arbres finis pour une suite quelconque de pompiers est, à notre connaissance, non résolue.

# Chapitre 5

## Jeux de soustraction dans les graphes

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à une extension des jeux octaux qui se jouent sur des graphes. Nous regarderons plus particulièrement le jeu 0.33, dans lequel chaque joueur peut retirer un sommet ou deux sommets voisins sans déconnecter le graphe. Nous étudierons ce jeu dans la classe des arbres, et donnerons une résolution complète dans les cas particuliers des étoiles et bi-étoiles subdivisées.

L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre découlent du projet ANR GAG<sup>1</sup> (*Games and Graphs*).

### 5.1 Jeux octaux dans les graphes

**Définition 36.** Soient  $u_1, \dots, u_n, \dots$  des entiers positifs inférieurs ou égaux à 7, Et  $G$  un graphe. Notons  $u_i = b_1^i + 2 \cdot b_2^i + 4 \cdot b_3^i$  où tous les  $b_j^i$  sont égaux à 0 ou 1, pour tout  $i$  et  $j$ .

Dans le jeu  $\mathbf{0.u_1 \dots u_n \dots}$  joué sur le graphe  $G$ , un joueur peut retirer un ensemble  $X_i$  de  $i$  sommets qui forment un sous-graphe induit connexe d'une même composante connexe  $H$  de  $G$  si et seulement si :

1.  $b_1^i = 1$  et  $X_i = H$  ;
2. ou  $b_2^i = 1$  et  $H \setminus X_i$  est connexe et non vide ;
3. ou  $b_3^i = 1$  et  $H \setminus X_i$  n'est pas connexe.

---

1. Supported by the ANR-14-CE25-0006 project of the French National Research Agency.

Dans le cas où  $G$  est un chemin, le jeu est alors équivalent à la version standard du même jeu joué sur un tas. Regardons quelques exemples de jeux octaux sur les graphes :

- Le jeu **0.33** sur un graphe connexe correspond au cas où les joueurs peuvent retirer un sommet ou deux sommets adjacents, sans déconnecter le graphe. C'est ce jeu que nous allons étudier dans la suite.
- Le jeu **0.07** correspond au cas où les joueurs peuvent retirer n'importe quelle paire de sommets adjacents. Ce jeu est exactement le jeu bien connu ARC KAYLES [44].
- Le jeu **0.6**, dans lequel les joueurs peuvent retirer n'importe quel sommet non isolé, correspond au jeu GRIM. Adams et al [1] ont récemment étudié ce jeu, et une version du même jeu avec scores est aussi étudiée [19].
- Le jeu **0.137** joué sur un chemin correspond au jeu NODE KAYLES. Il est possible de retirer soit un unique sommet s'il est isolé, soit 2 sommets à une extrémité de chemin, soit trois sommets consécutifs, n'importe où sur un chemin.

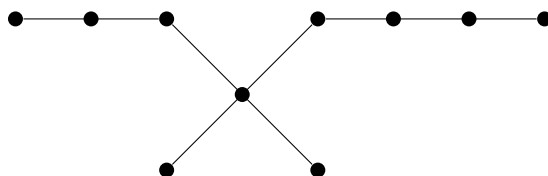
**Remarque 15.** *Dans la définition des jeux octaux, si  $b_3^i = 1$ , les joueurs peuvent alors séparer un tas en exactement deux tas non vides. On peut définir une généralisation en autorisant de séparer en  $k$  tas, pour  $k > 2$ . Cette distinction n'est pas considérée ici, puisque d'après la définition 36, quand  $b_3^i = 1$  pour un certain  $i$ , les joueurs peuvent déconnecter le graphe sans limite sur le nombre de composantes connexes qu'ils créent.*

*Dans le cas où le support du jeu est un chemin, on retombe bien sur la définition des jeux octaux sur les tas, car il n'est pas possible de créer plus de 2 composantes connexes.*

## 5.2 Le jeu 0.33 dans les étoiles subdivisées

Rappelons que pour  $n$  entier, nous appelons  $P_n$  le chemin de  $n$  sommets et  $n - 1$  arêtes.

Rappelons également qu'une étoile subdivisée est un arbre obtenu en subdivisant une étoile. Notons  $S_{l_1, \dots, l_k}$  l'étoile subdivisée où  $l_i > 0$  est le nombre de sommets du  $i$ -ème chemin. Un exemple d'une telle étoile subdivisée est donné dans la figure 5.1. Habituellement, on demande que  $k$  soit au moins égal à 3, pour exclure les chemins. Cependant, dans notre cas, nous considérons que les chemins sont des étoiles subdivisées. Par exemple le chemin  $P_4$  peut donc aussi être vu comme l'étoile subdivisée  $S_3$ .

FIGURE 5.1 – L'étoile subdivisée  $S_{1,1,3,4}$ .

Dans le jeu **0.33** sur un graphe, les joueurs peuvent retirer un ou deux sommets adjacents, tant qu'ils ne déconnectent pas le graphe. Les options possibles du premier joueur sur l'étoile subdivisée  $S_{1,1,3,4}$  sont données dans la section 5.2.

Notre but est d'être capable de donner la valeur de Grundy d'une étoile subdivisée, sans la calculer entièrement.

On peut remarquer que jouer à **0.33** sur un chemin ou sur un cycle de même taille est équivalent : en effet, dès le deuxième tour, on se retrouve avec un chemin dans les 2 cas, car il n'est pas autorisé de couper le chemin en deux composantes connexes différentes. Les valeurs de Grundy des chemins et cycles de même taille sont donc les mêmes, et sont aussi égales aux valeurs de Grundy du même jeu sur un tas de même taille.

**Proposition 19.** *Soient  $n \geq 0$ .*

$$\mathcal{G}(P_n) = \mathcal{G}(C_n) = n \bmod 3$$

Nous avons remarqué que l'on a un résultat similaire dans le cas des étoiles subdivisées. On peut en effet réduire les tailles des branches modulo 3 sans changer la valeur de Grundy de l'étoile subdivisée.

**Théorème 18.** *Soient  $l_1, \dots, l_k \geq 0$  des entiers.*

$$\mathcal{G}(S_{l_1, \dots, l_k}) = \mathcal{G}(S_{l_1 \bmod 3, \dots, l_k \bmod 3})$$

Nous prouverons ce théorème en montrant qu'en attachant un chemin  $P_3$  au sommet central ou sur une des feuilles, on ne change pas la valeur de Grundy de l'arbre. Mais nous avons d'abord besoin de lemmes intermédiaires.

Tout d'abord, faisons l'observation suivante, qui sera utile dans plusieurs preuves :

**Observation 1.** *Soit  $n \geq 4$ ,  $P_n$  un chemin de taille  $n$  et  $x$  un sommet de  $P_n$ . Si un coup joué dans  $P_n$  retire le sommet  $x$ , alors il existe un coup équivalent qui ne le retire pas : il suffit de jouer sur le coup symétrique.*

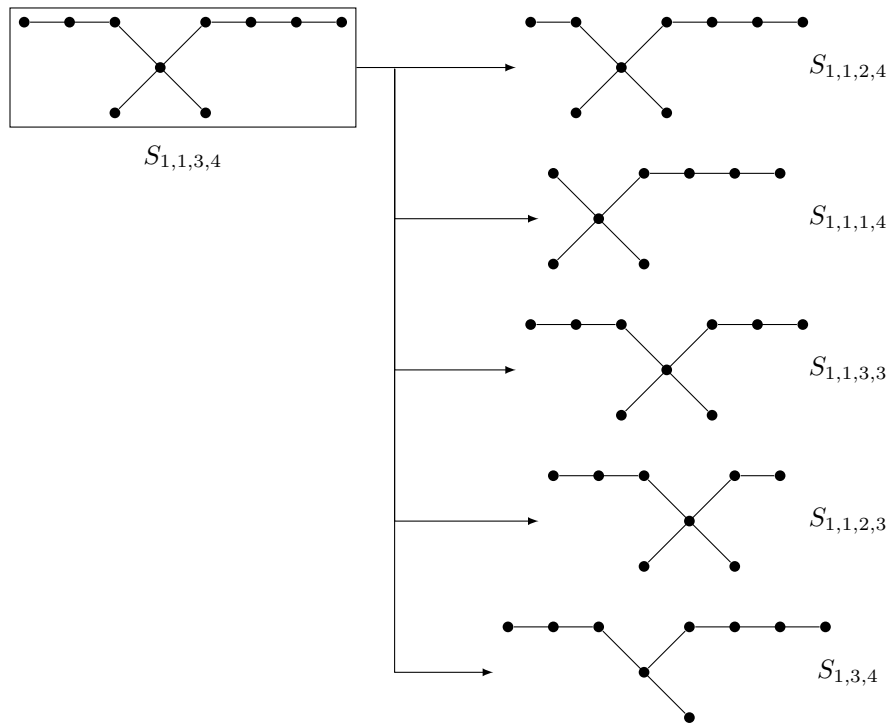


FIGURE 5.2 – Liste des options possibles pour le premier joueur dans le jeu **0.33** à partir de  $S_{1,1,3,4}$ .

Cette observation sera notamment utile lorsque nous considèrerons des fins de parties, au cours desquelles il ne reste plus qu'un chemin.

**Lemme 12.** Soit  $l \geq 0$ . Notons  $S = S_{1,1,l}$ .

$$\mathcal{G}(S) = |V(S)| \bmod 3 = l \bmod 3$$

*Démonstration.* Montrons ce lemme par induction. Les cas de base sont les valeurs de  $l \leq 1$  :

- Si  $l = 0$ , alors  $S = P_3$ , dont on connaît la valeur de Grundy :  
 $\mathcal{G}(S) = 0 = |V(S)| \bmod 3$ .
- Si  $l = 1$ , alors le seul coup possible pour le premier joueur est de retirer une feuille, laissant ainsi  $S_{1,1}$  à son adversaire.  
Ainsi,  $\mathcal{G}(S) = \text{mex}(0) = 1 = |V(S)| \bmod 3$ .

Maintenant, supposons que le résultat est vrai pour jusqu'à une certaine valeur  $l - 1$  et considérons  $S = S_{1,1,l}$ , pour  $l > 1$ . Le premier joueur dispose de 3 coups possibles :

- Il peut jouer sur une des deux branches de taille 1. En faisant cela, il laisse à son adversaire  $S_{1,l} = P_{l+2}$ , de valeur de Grundy  $l + 2$ .
- Il peut retirer un sommet de la plus grande des trois branches, et laisser à son adversaire  $S_{1,1,l-1}$  qui a une valeur de Grundy égale à  $l+2 \bmod 3$  par hypothèse d'induction.
- Il peut retirer deux sommets de la plus grande des trois branches, et laisser à son adversaire  $S_{1,1,l-2}$ , de valeur de Grundy  $l + 1 \bmod 3$  par hypothèse d'induction.

On peut donc calculer la valeur de Grundy de  $S$  :

$$\mathcal{G}(S) = \text{mex}(l + 1 \bmod 3, l + 2 \bmod 3) = l \bmod 3 = |V(S)| \bmod 3.$$

□

**Lemme 13.** *On peut attacher un chemin  $P_3$  à n'importe quelle feuille de l'étoile subdivisée, ou à son sommet central, sans changer sa valeur de Grundy.*

*Démonstration.* Soit  $S$  une étoile subdivisée et  $S'$  une autre étoile subdivisée obtenue en ajoutant un  $P_3$  au sommet central de  $S$ . Nous montrons par induction sur la taille de  $S$  que  $S + S'$  est une  $\mathcal{P}$ -position. Les cas de base correspondent aux cas où le premier joueur peut retirer le sommet central de  $S$  (ou si  $S$  est déjà vide) dans le jeu  $S + S'$ .

- Si  $S = \emptyset$ , alors  $S + S' = P_3$ , de valeur de Grundy 0.
- Si  $S$  est un chemin et que son centre est une des extrémités, alors  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(S')$  car  $S'$  est un chemin de longueur  $|S| + 3$ .
- Si  $S = S_{1,1}$ , alors  $S' = S_{1,1,3}$ . D'après le Lemme 12,  $S$  et  $S'$  ont la même valeur de Grundy.
- Si  $S = S_{1,l}$  avec  $l > 1$ , alors l'Observation 1 nous permet de supposer que le coup du premier joueur dans  $S$  ne retire pas le sommet central. Le second joueur peut alors copier ce coup dans  $S'$ . Par hypothèse d'induction,  $S + S'$  est donc une  $\mathcal{P}$ -position.

Dans le cas général, le premier joueur ne retire pas le sommet central de  $S$ . Il y a maintenant 3 situations possibles :

- Si le premier joueur retire 1 ou 2 sommets du  $P_3$  ajouté à  $S$  dans  $S'$ . Le second joueur peut alors retirer le reste du  $P_3$ , et laisser le jeu  $S + S$  au premier joueur.



- Si le premier joueur joue autre part dans  $S'$  (respectivement dans  $S$ ), le second joueur peut copier ce coup dans  $S$  (resp.  $S'$ ); le  $P_3$  ajouté n'empêche aucune de ces actions. Par hypothèse d'induction, le jeu restant est alors perdant.

□

Le Théorème 18 découle directement du Lemme 13.

On peut maintenant utiliser le Théorème 18 pour réduire l'étude aux étoiles subdivisées dont les branches sont de taille 1 ou 2. Pour retrouver la valeur de Grundy de n'importe quelle étoile subdivisée, on pourra alors regarder celle qui lui correspond lorsque l'on réduit ses branches modulo 3.

Il est possible d'énumérer simplement toutes ces étoiles subdivisées réduites en les plaçant dans un tableau : l'étoile subdivisée de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ , pour  $j \leq i$ , possède  $i$  branches attachées à son sommet central, et  $j$  d'entre elles sont de longueur 2 (les  $i - j$  restantes sont donc de longueur 1). On insère ensuite une ligne en première position, dans laquelle on placera le graphe vide. La Figure 5.3 montre les premières lignes de ce tableau. On peut aussi voir sur cette figure les options disponibles pour chacune des étoiles subdivisées.

En partant du graphe vide, on peut donc calculer les valeurs de Grundy des étoiles subdivisées en utilisant ce tableau.

**Théorème 19.** *La Figure 5.4 donne les valeurs de Grundy des étoiles subdivisées, après réduction des tailles des branches modulo 3.*

À partir de la cinquième ligne, on voit des motifs apparaître. Les lignes impaires sont de la forme  $1203(12)^*$ , et les lignes paires sont de la forme  $03120(30)^*$ . De plus, si on exclue les quatre premières colonnes, celles qui correspondent à un nombre pair de branches de taille 2 sont de la forme  $(01)^*$  et les autres sont de la forme  $(23)^*$ .

### 5.3 Le jeu 0.33 dans les bi-étoiles subdivisées

Rappelons tout d'abord ce qu'est une bi-étoile subdivisée.

Soit  $S$  et  $S'$  deux étoiles subdivisées. La bi-étoile subdivisée  $S \bullet^m \bullet S'$  est le graphe obtenu en rajoutant un chemin de  $m$  arêtes qui connectent les deux sommets centraux de  $S$  et  $S'$ . Si  $m = 0$ , on retombe alors dans le cas d'une étoile subdivisée. Similairement, si  $S = S_{l_1, \dots, l_k}$  et  $S' = \emptyset$  (respectivement  $S' = S_p$ ), alors la bi-étoile subdivisée  $S \bullet^m \bullet S'$  est en réalité l'étoile subdivisée  $S_{l_1, \dots, l_k, m-1}$  (resp.  $S_{l_1, \dots, l_k, m+p}$ ). Par soucis de clarté, lorsque  $m = 1$ , on notera seulement  $S \bullet \bullet S'$ .

La Figure 5.5 donne un exemple de bi-étoile subdivisée.

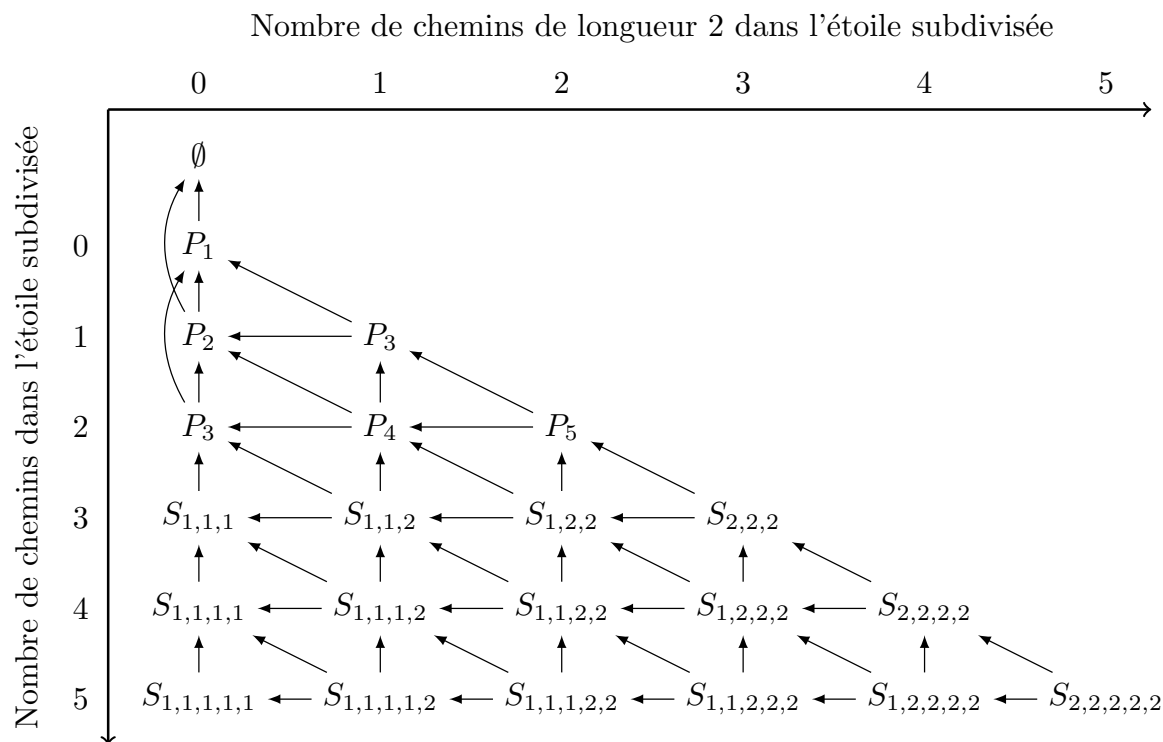


FIGURE 5.3 – Les six premières lignes du tableau des étoiles subdivisées avec les options de chacune d’entre elles.

Lorsque l’on joue à **0.33** sur une étoile-subdivisée, le début de partie ressemble à une partie sur deux étoiles subdivisées (comme s’il n’y avait pas de chemin entre les deux sommets centraux), car tant qu’une des deux étoiles n’est pas vide, on ne peut pas retirer les sommets de ce chemin. Pour cette raison, nous avons essayé de voir s’il était possible d’ajuster les résultats du jeu sur deux étoiles subdivisées, en fonction de la longueur du chemin qui relie les deux étoiles, pour obtenir des résultats sur les bi-étoiles subdivisées.

Dans un premier temps, nous montrons que l’on peut étendre le Théorème 18 dans le cas des bi-étoiles subdivisées.

**Théorème 20.** *Pour tout  $l_1, \dots, l_k, l'_1, \dots, l'_{k'}$ ,  $m$  entiers positifs, nous avons :*

$$\mathcal{G}(S_{l_1, \dots, l_k} \overset{m}{\bullet} S_{l'_1, \dots, l'_{k'}}) = \mathcal{G}(S_{l_1 \bmod 3, \dots, l_k \bmod 3} \overset{m \bmod 3}{\bullet} S_{l'_1 \bmod 3, \dots, l'_{k'} \bmod 3})$$

Ensuite nous donnerons les valeurs de Grundy d’une bi-étoile subdivisée, en fonc-

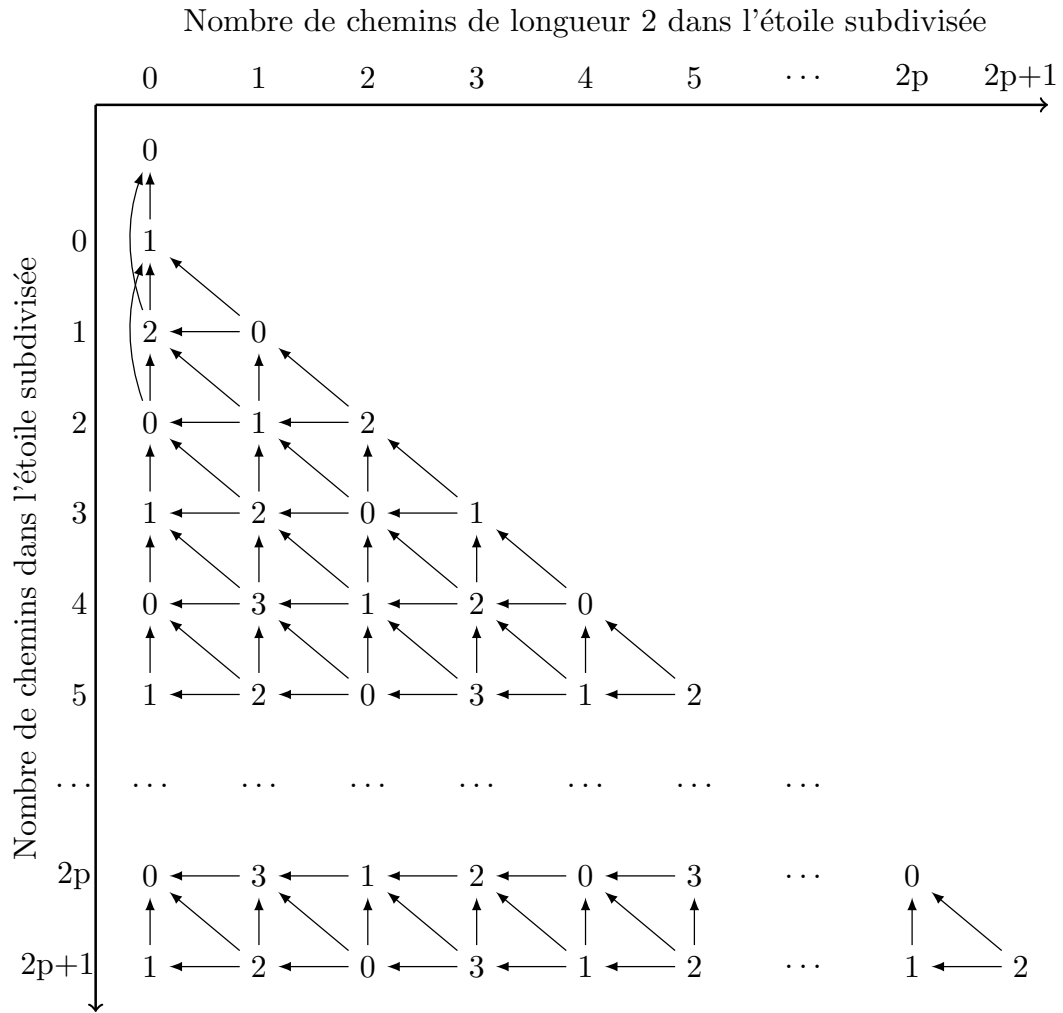
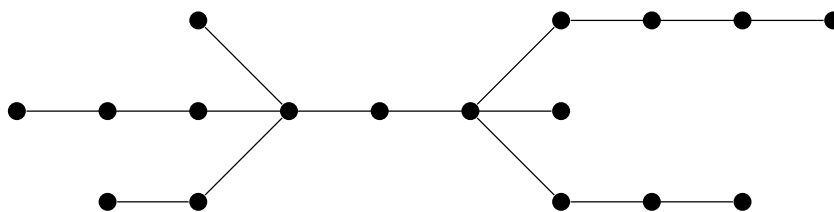


FIGURE 5.4 – Les six premières lignes et le cas général des valeurs de Grundy des étoiles subdivisées.

tion des valeurs de Grundy de ses deux étoiles qui la composent ainsi que de la longueur du chemin qui relie les deux centres.

### 5.3.1 Réduction des bi-étoiles subdivisées

Le but de cette sous-section est de prouver le Théorème 20. D'abord, nous montrons que l'on peut réduire le chemin qui relie les deux centres des étoiles.

FIGURE 5.5 – La bi-étoile subdivisée  $S_{1,2,3} \bullet^2 S_{1,3,4}$ .

**Lemme 14.** *Pour tout  $l_1, \dots, l_k, l'_1, \dots, l'_{k'}$ ,  $m$  entiers positifs, nous avons :*

$$\mathcal{G}(S_{l_1, \dots, l_k} \bullet^m S_{l'_1, \dots, l'_{k'}}) = \mathcal{G}(S_{l_1, \dots, l_k} \bullet^{m \bmod 3} S_{l'_1, \dots, l'_{k'}})$$

*Démonstration.* Soit  $S$  et  $S'$  deux étoiles subdivisées,  $m$  un entier positif. Notons  $B = S \bullet^m S'$  et  $B' = S \bullet^{m \bmod 3} S'$ .

Nous allons montrer que les valeurs de Grundy de  $B$  et de  $B'$  sont égales par induction sur la taille de  $B$ .

Il y a deux cas possibles pour le premier joueur. Soit il peut retirer un des sommets du chemin central, soit il ne peut pas. Dans le premier cas, on en déduit qu'au moins l'une des étoiles possède au plus un sommet. Dans ce cas, la bi-étoile subdivisée peut être vue comme une étoile subdivisée, et le chemin central est l'une de ses branches. On sait alors, d'après le Théorème 18, que  $B$  et  $B'$  sont équivalentes.

Dans le second cas, il est rapide de voir que  $B + B'$  est une  $\mathcal{P}$ -position. En effet, si le premier joueur joue un coup sur une des deux bi-étoiles subdivisées, alors le second joueur peut répliquer en jouant le même coup sur la seconde bi-étoile subdivisée (car la seule différence entre  $B$  et  $B'$  se situe au niveau du chemin central). Par hypothèse d'induction, on en déduit aussitôt que  $B + B'$  est une  $\mathcal{P}$ -position, et donc que  $B$  et  $B'$  sont équivalentes.  $\square$

**Remarque 16.** *Rappelons que  $m$  peut être égal à 0, auquel cas la bi-étoile subdivisée n'est alors en réalité qu'une étoile subdivisée. Par conséquent, si la longueur du chemin reliant les deux centres d'une bi-étoile subdivisée possède un nombre d'arête multiple de 3, on peut alors calculer la valeur de Grundy de cette bi-étoile subdivisée en utilisant le Théorème 19.*

Maintenant, avant de prouver que l'on peut aussi réduire modulo 3 les branches d'une bi-étoile subdivisée, nous allons montrer deux lemmes techniques.

**Lemme 15.** *Soit  $S$  une étoile subdivisée, et  $B = S \bullet S_{1,1}$ . Alors  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(B)$ .*

*Démonstration.* Nous montrons par induction sur la taille de  $S$  que  $S + B$  est une  $\mathcal{P}$ -position en montrant que quel que soit le coup du premier joueur, le second joueur a toujours un coup à répondre qui amène dans une  $\mathcal{P}$ -position.

Les cas de base correspondent soit au cas où  $S$  est vide, soit aux cas où le premier joueur retire le sommet central de  $S$  :

- Si  $S$  est vide, alors  $B = P_3$ , et est donc une  $\mathcal{P}$ -position.
- Si  $S$  a seulement un sommet central, alors  $B = S_{1,1,1}$ , et  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(B) = 1$ .
- Si  $S = P_2$ , alors  $B = S_{2,1,1}$ . D'après la Figure 5.4, on en déduit que  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(B) = 2$ .
- Si  $S = S_2$ , alors  $B = S_{1,1,3}$ , et d'après le Lemme 13,  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(B) = 0$ .
- Si  $S = S_{1,1}$ , alors  $B = S_{1,1} \bullet \bullet S_{1,1}$ . Le premier joueur ne peut retirer qu'un seul sommet d'un côté, et le second joueur peut alors enlever les deux autres sommets de ce même côté. Il reste alors  $P_3$  au premier joueur. On en déduit que  $\mathcal{G}(B) = 0 = \mathcal{G}(S)$ .
- Si  $S = S_l$  ou  $S = S_{1,l-1}$  pour  $l \geq 2$ , alors d'après l'Observation 1, le second joueur peut recopier le coup du premier joueur dans  $B$ . Par hypothèse d'induction, cette nouvelle position est perdante.

Dans le cas général, lorsque le premier joueur ne retire pas le sommet central de  $S$ , il reste trois coups à considérer, qui sont exposés dans la Figure 5.6.

□

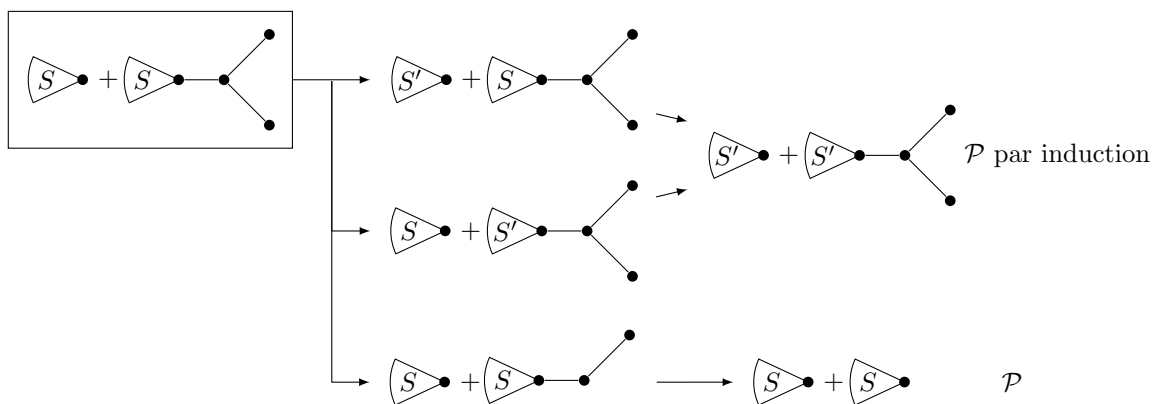


FIGURE 5.6 – Induction de la preuve du Lemme 15.

Soit  $S$  une étoile subdivisée. On note  $S \bullet \bullet = S \bullet \bullet \emptyset$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 16.** *Soit  $S$  une étoile subdivisée. On a  $\mathcal{G}(S \bullet \bullet) = \mathcal{G}(S \bullet^2 \bullet S_{1,1})$ .*

*Démonstration.* Notons  $B = S \bullet^2 \bullet S_{1,1}$ . On montre par induction sur la taille de  $S$  que  $S \bullet \bullet + B$  est une  $\mathcal{P}$ -position en exhibant quel que soit le coup du premier joueur, une réponse du second joueur qui amène dans une  $\mathcal{P}$ -position. Les cas de base correspondent soit au cas où  $S$  est vide, soit aux cas où le premier joueur retire le sommet central de  $S$  (avec éventuellement le sommet du chemin central) :

- Si  $S$  est vide, alors  $B = S_{1,1,1}$ . D'après le Lemme 12, on en déduit que  $\mathcal{G}(B) = 1 = \mathcal{G}(S \bullet \bullet)$ , donc que  $S \bullet \bullet + B$  est une  $\mathcal{P}$ -position.
- Si  $S$  est composée d'un seul sommet, alors  $B = S_{2,1,1}$  et d'après la Figure 5.4,  $\mathcal{G}(B) = 2 = \mathcal{G}(S \bullet \bullet)$  donc  $S \bullet \bullet + B$  est une  $\mathcal{P}$ -position.
- Si  $S = P_2$ , alors  $B = S_{1,1,3}$ , donc d'après le Lemme 13,  $\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(S_{1,1}) = 0$ . Donc  $\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(S \bullet \bullet)$  et  $S \bullet \bullet + B$  est une  $\mathcal{P}$ -position.
- Si  $S = S_{1,1}$  alors  $B = S_{1,1} \bullet^2 \bullet S_{1,1}$ . On peut rapidement voir que  $\mathcal{G}(B) = 1$ . En effet, le seul coup possible du premier joueur (qui consiste à enlever une des feuilles) laisse  $S_{1,1,3}$  au second joueur, dont on sait que  $\mathcal{G}(S_{1,1,3}) = \mathcal{G}(S_{1,1}) = 0$ . Comme  $S_{1,1,1} = 1$ , on en déduit que  $S \bullet \bullet + B$  est une  $\mathcal{P}$ -position.
- Si  $S = S_l$  ou  $S = S_{1,l-1}$  avec  $l \geq 2$ , alors d'après l'Observation 1, le second joueur pourra répliquer le coup du premier joueur dans  $B$ . La position obtenue est alors une  $\mathcal{P}$ -position, par hypothèse d'induction.

La Figure 5.7 montre le cas général, où le premier joueur joue sans retirer le sommet central de  $S$ . □

À l'aide de ces lemmes, nous pouvons maintenant montrer le résultat plus large suivant :

**Lemme 17.** *Pour tout  $l_1, \dots, l_k, l'_1, \dots, l'_{k'}, m$ , on a :*

$$\mathcal{G}(S_{l_1, \dots, l_k} \bullet^m \bullet S_{l'_1, \dots, l'_{k'}}) = \mathcal{G}(S_{l_1 \bmod 3, \dots, l_k \bmod 3} \bullet^m \bullet S_{l'_1 \bmod 3, \dots, l'_{k'} \bmod 3})$$

*Démonstration.* D'après le Lemme 14, il ne reste qu'à montrer le résultat pour les bi-étoiles subdivisées avec un chemin central de taille 1 ou 2. Soient  $S$  et  $S'$  deux étoiles subdivisées,  $B = S \bullet^i \bullet S'$ , avec  $i = 1$  ou  $i = 2$ , et  $B'$  la bi-étoile subdivisée obtenue en attachant un  $P_3$  à l'une des feuilles de  $B$  ou au sommet central de l'une des deux étoiles – sans perte de généralités, choisissons  $S'$ .

On montre par induction sur la taille de  $B$  que  $\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(B')$ .

Les cas de base correspondent soit au cas où  $S'$  est vide, soit aux cas où le premier joueur retire le sommet central de  $S'$  :

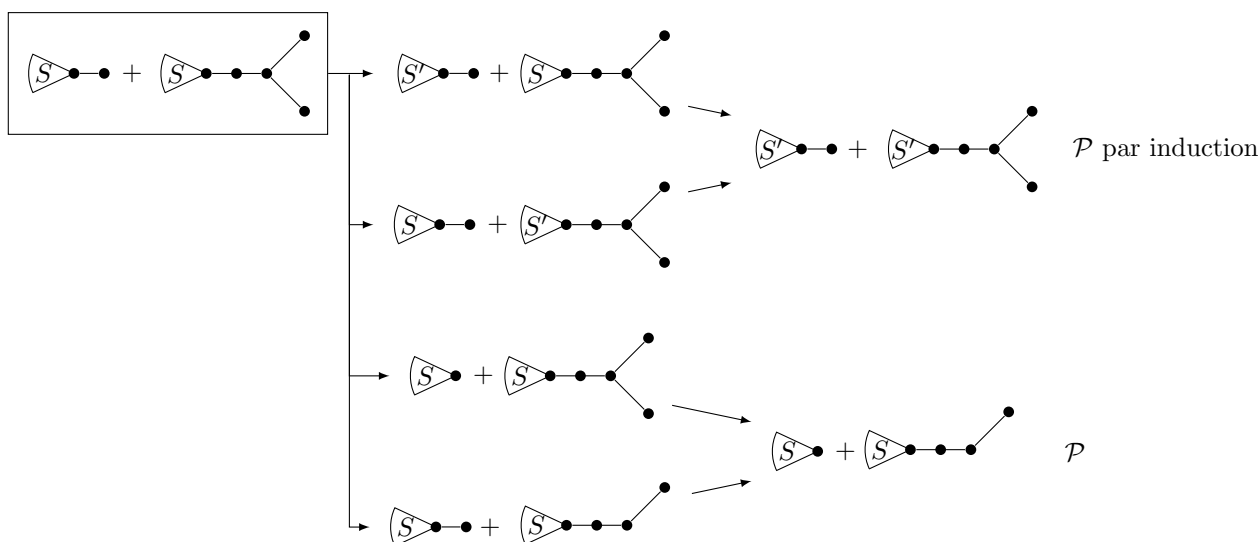


FIGURE 5.7 – Induction de la preuve du Lemme 16.

- Si  $S'$  est vide, alors  $B$  est une étoile subdivisée, et le résultat est déjà connu, d'après le Lemme 13.
- Si  $S' = P_2$  et que le premier joueur retire les deux sommets de  $S'$ , le second joueur peut alors retirer deux des sommets du  $P_3$  dans  $B'$ . D'après les Lemme 15 et Lemme 16, on en déduit alors que  $\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(B')$ .

Maintenant, nous regardons les cas où le premier joueur ne peut pas retirer le sommet central de  $S'$  :

- Si  $S'$  est un chemin d'au moins 2 sommets et que le  $P_3$  est attaché à son sommet central dans  $B'$  alors le second joueur pourra toujours copier le coup du premier joueur, ce qui amènera dans une  $\mathcal{P}$ -position par hypothèse d'induction.
- Si le premier joueur prend un ou deux sommets du  $P_3$  rajouté dans  $B'$ , alors le second joueur peut retirer ce qu'il reste de ce  $P_3$ , et donc laisser  $B + B$ , ce qui est une  $\mathcal{P}$ -position.
- Sinon, le premier joueur joue soit dans  $S$  soit dans  $S'$  dans l'une des deux bi-étoiles subdivisées, et le second joueur peut alors copier le même coup dans l'autre bi-étoile subdivisée. Par hypothèse d'induction, la position obtenue est alors perdante.

□

Le Théorème 20 découle alors des Lemmes 14 et 17. Comme pour le cas des étoiles subdivisées, il ne reste alors plus qu'une petite partie des bi-étoiles subdivisées à étudier. La sous-section suivante donne la valeur de Grundy d'une bi-étoile subdivisée en fonction des valeurs de Grundy de ses deux composantes et de la taille du chemin central.

### 5.3.2 Calcul des valeurs de Grundy des bi-étoiles subdivisées

Nous avons vu dans le Lemme 17 qu'il suffit de considérer des bi-étoiles subdivisées ayant un chemin central de taille 1 ou 2. Ces deux cas sont étudiés séparément.

#### Chemin central de taille 1

La plupart du temps, jouer sur une bi-étoile subdivisée avec un chemin central de taille 1 revient à jouer sur la somme des deux étoiles subdivisées (sans le chemin central). Dans ce cas ci, la valeur de Grundy de la bi-étoile subdivisée est donc la nim-somme des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées.

On étend la définition de la relation d'équivalence  $\equiv$  aux bi-étoiles subdivisées de la façon suivante : Soit  $S$  et  $S'$  deux étoiles subdivisées. On dit que  $S$  et  $S'$  sont  $\sim_1$ -équivalentes et l'on note  $S \sim_1 S'$  si et seulement si pour toute étoile subdivisée  $\hat{S}$ ,  $S \bullet \bullet \hat{S} \equiv S' \bullet \bullet \hat{S}$ . Remarquons que la valeur de Grundy de la bi-étoile subdivisée  $S \bullet \bullet S'$  ne dépend que des classes d'équivalence de  $S$  et de  $S'$  pour la relation  $\sim_1$ . De plus, cette relation d'équivalence est une généralisation de la relation  $\equiv$ , que l'on retrouve en prenant  $\hat{S} = \emptyset$ .

D'après le Lemme 15, on sait déjà que  $P_3 \sim_1 \emptyset$  et donc que  $S_2 \sim_1 \emptyset$  et  $S_{1,1} \sim_1 \emptyset$ .

Nous allons montrer qu'il n'existe en réalité que 8 classes d'équivalence différentes pour la relation  $\sim_1$ . Ces classes sont les suivantes :

- $\mathcal{C}_1^* = \{P_1, S_{2,1}, S_{2,2,2}\}$  qui ont toute une valeur de Grundy de 1.
- $\mathcal{C}_2^* = \{P_2, S_{2,2}\}$  qui ont toute une valeur de Grundy de 2.
- $\mathcal{C}_2^\square$  : les étoiles subdivisées qui contiennent un ou trois chemins de longueur 2, et ont une valeur de Grundy de 2.
- $\mathcal{C}_3^\square$  : les étoiles subdivisées qui contiennent un ou trois chemins de longueur 2, et ont une valeur de Grundy de 3.
- Pour  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{C}_i$  : les étoiles subdivisées ayant une valeur de Grundy de  $i$  et qui ne sont pas déjà dans une des classes précédentes.

La Figure 5.8 montre les classes d'équivalence des étoiles subdivisées.



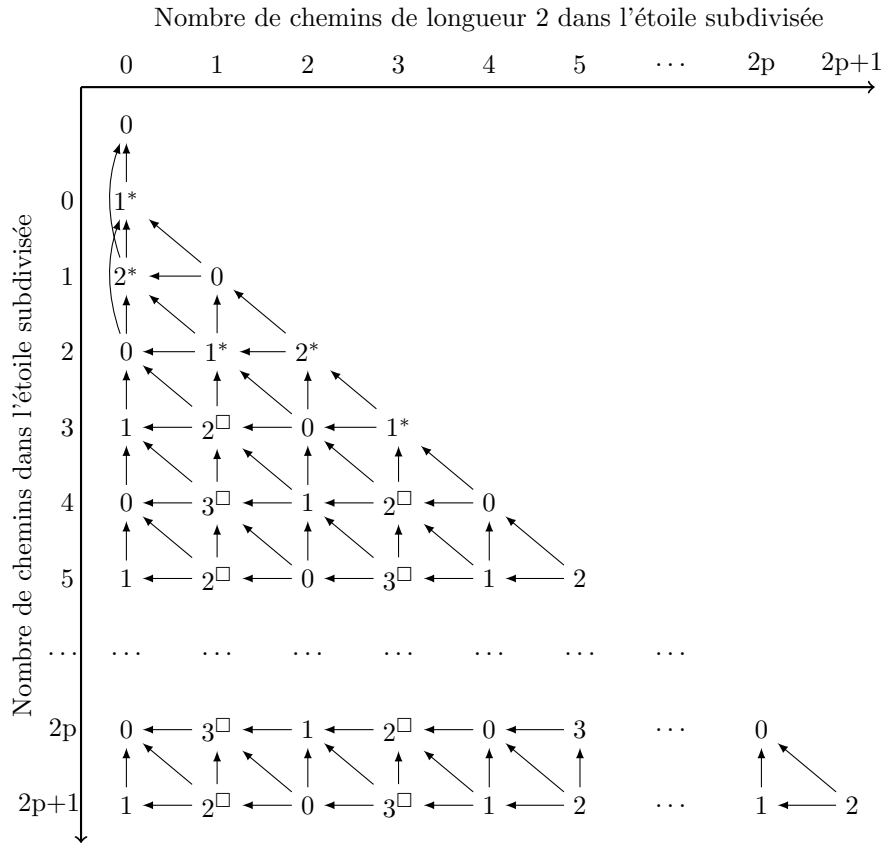


FIGURE 5.8 – Tableau des classes d'équivalence pour  $\sim_1$  des étoiles subdivisées. Les classes  $\mathcal{C}_i^*$ ,  $\mathcal{C}_i^\square$  et  $\mathcal{C}_i$  sont respectivement notées  $i^*$ ,  $i^\square$  et  $i$ .

**Théorème 21.** *Les classes d'équivalence associées à la relation  $\sim_1$  sont exactement  $\mathcal{C}_1^*$ ,  $\mathcal{C}_2^*$ ,  $\mathcal{C}_2^\square$ ,  $\mathcal{C}_3^\square$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ . De plus, la Figure 5.9 donne la valeur de Grundy de  $S \rightarrow S'$  en fonction des classes de  $S$  et de  $S'$ .*

Nous avons besoin de lemmes techniques pour prouver ce résultat.

**Lemme 18.** *On a :*

1.  $P_1 \sim_1 S_{2,1}$
2.  $P_2 \sim_1 S_{2,2}$
3.  $S_{1,1} \sim_1 S_{2,2,1}$
4.  $S_{2,1} \sim_1 S_{2,2,2}$

	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1^*$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_2^*$	$\mathcal{C}_2^\square$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_3^\square$
$\mathcal{C}_0$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_1$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_1^*$	$\oplus$	$\oplus$	2	$\oplus$	0	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_2^*$	$\oplus$	$\oplus$	0	$\oplus$	1	1	$\oplus$	0
$\mathcal{C}_2^\square$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	1	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_3$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_3^\square$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	0	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$

FIGURE 5.9 – Tableau des valeurs de Grundy de  $S \bullet \bullet S'$  en fonction des classes de  $S$  et  $S'$ .

De plus, deux éléments de  $\mathcal{C}_1^*$  (respectivement  $\mathcal{C}_2^*$ ) sont  $\sim_1$ -équivalents.

*Démonstration.* Ces équivalences seront toutes montrées de la même façon. Pour prouver que  $S \sim_1 S'$ , nous montrons que pour toute étoile subdivisée  $\hat{S}$ ,  $\mathcal{G}(\hat{S} \bullet \bullet S) = \mathcal{G}(\hat{S} \bullet \bullet S')$ , en raisonnant par induction sur la taille de  $\hat{S}$ . Les cas de base seront ceux où  $|\hat{S}| \in \{0, 1, 2\}$ , c'est-à-dire quand le premier joueur peut retirer le sommet central de  $\hat{S}$ . Chacun de ces cas correspond à une étoile subdivisée, dont la valeur de Grundy est connue et donnée dans la Figure 5.4. Pour l'induction, on doit montrer que pour chaque coup du premier joueur dans  $\hat{S} \bullet \bullet S + \hat{S} \bullet \bullet S'$ , le second joueur a une réponse qui amène dans une  $\mathcal{P}$ -position. Dès que le premier joueur joue dans  $\hat{S}$ , le second joueur peut alors copier le coup dans la seconde bi-étoile subdivisée. Nous ne regarderons donc que les cas où le premier joueur joue dans  $S$  ou dans  $S'$ .

**Cas 1 :**  $P_1 \sim_1 S_{2,1}$ . La Figure 5.10 montre les coups possibles sur  $P_1$  ou  $S_{2,1}$  et la réponse du deuxième joueur menant à une  $\mathcal{P}$ -position (par soucis de clarté dans la figure,  $\hat{S}$  est notée  $S$ ).

**Cas 2 :**  $P_2 \sim_1 S_{2,2}$ . Similairement, voir la Figure 5.11.

**Cas 3 :**  $S_{1,1} \sim_1 S_{2,2,1}$ . Similairement, voir la Figure 5.12.

**Cas 4 :**  $S_{2,1} \sim_1 S_{2,2,2}$ . Similairement, voir la Figure 5.13. □

**Lemme 19.** Soit  $S$  une étoile subdivisée qui n'appartient pas à  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$ .

Alors  $S_{1,1,1} \bullet \bullet S \equiv P_1 \bullet \bullet S$ .

*Démonstration.* On montre ce résultat par induction sur la taille de  $S$ . Les cas de base sont des étoiles subdivisées ayant une option dans  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$  :

1.  $S = \emptyset$  ; dans ce cas,  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = \mathcal{G}(S_{1,1,1}) = 1 = \mathcal{G}(P_1) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S)$ .

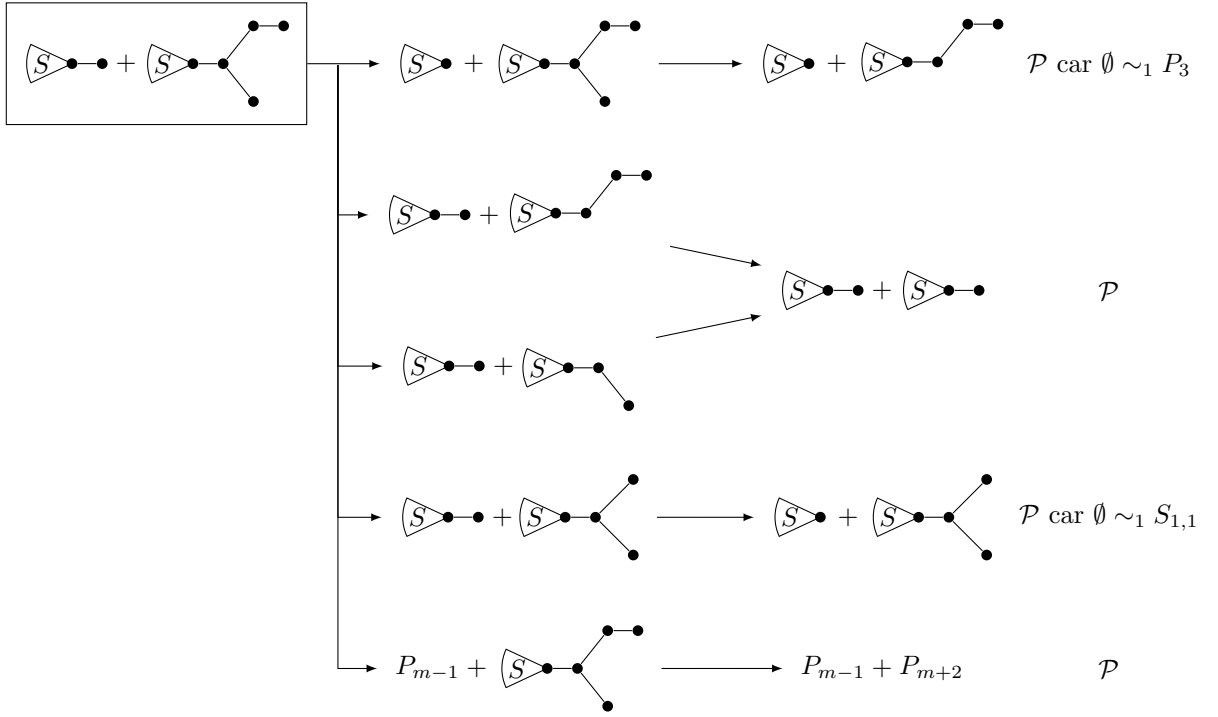


FIGURE 5.10 – Induction du cas 1 de la preuve du Lemme 18.

2.  $S = S_{1,1}$  ; dans ce cas, d'après le Lemme 18,  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = \mathcal{G}(S_{1,1,1})$ , et donc aussi égal à  $\mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S)$ .
3.  $S = S_{2,1,1}$  ; dans ce cas,  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = 3 = \mathcal{G}(S_{2,1,1,1}) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S)$ .
4.  $S = S_{2,2,1}$  ; dans ce cas, d'après le Lemme 18,  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = \mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S_{1,1}) = 1 = \mathcal{G}(S_{2,2,1,1}) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S)$ .
5.  $S = S_{2,2,2,1}$  ; dans ce cas,  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = 3 = \mathcal{G}(S_{2,2,2,1,1}) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S)$ .
6.  $S = S_{2,2,2,2}$  ; dans ce cas,  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = 1 = \mathcal{G}(S_{2,2,2,2,1}) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S)$ .

Toutes ces valeurs peuvent être calculées en considérant les valeurs de Grundy de toutes les options de  $S_{1,1,1} \bullet \bullet S$  et  $P_1 \bullet \bullet S$ . Nous prouvons maintenant que si  $S$  est une étoile subdivisée qui n'appartient pas à  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$  et qui n'a pas d'option dans  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$ , alors  $S_{1,1,1} \bullet \bullet S \equiv P_1 \bullet \bullet S$ . Remarquons que dans ce cas, le premier joueur ne peut pas retirer le sommet central de  $S$ . Nous montrons que quel que soit le coup du premier joueur dans  $S_{1,1,1} \bullet \bullet S + P_1 \bullet \bullet S$ , le second joueur a toujours un coup qui permet d'amener dans une  $\mathcal{P}$ -position. Si le premier joueur joue dans  $S$ , le second

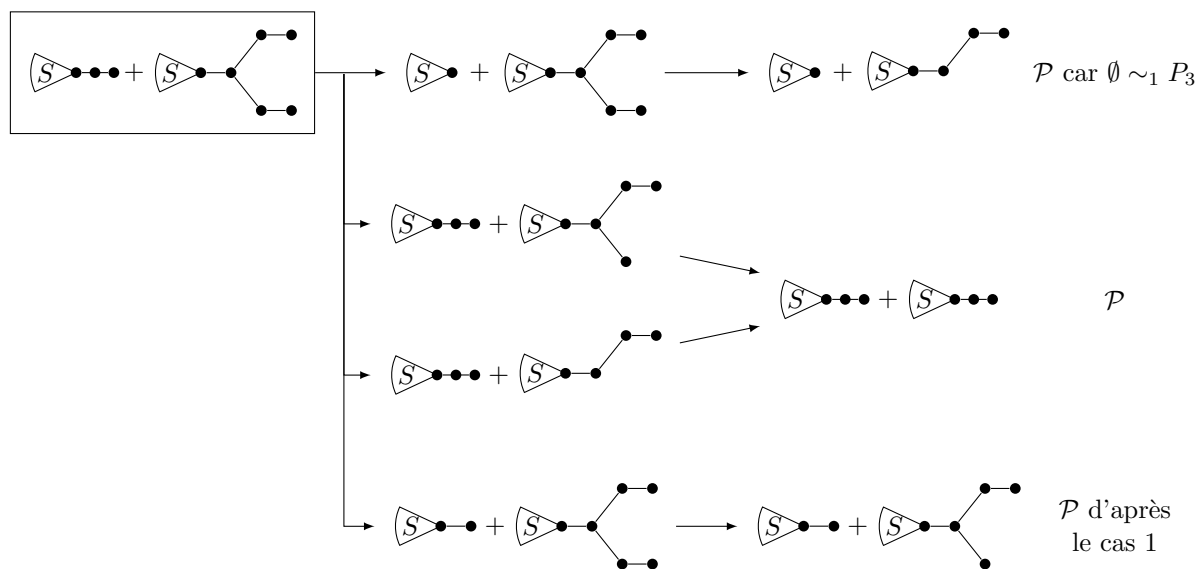


FIGURE 5.11 – Induction du cas 2 de la preuve du Lemme 18.

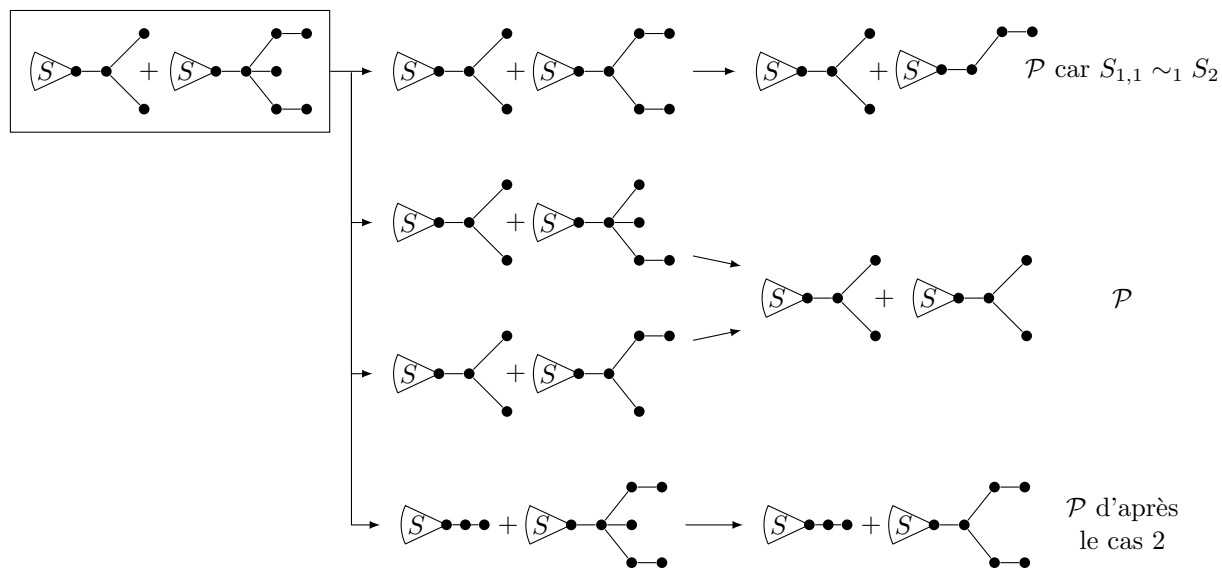


FIGURE 5.12 – Induction du cas 3 de la preuve du Lemme 18.

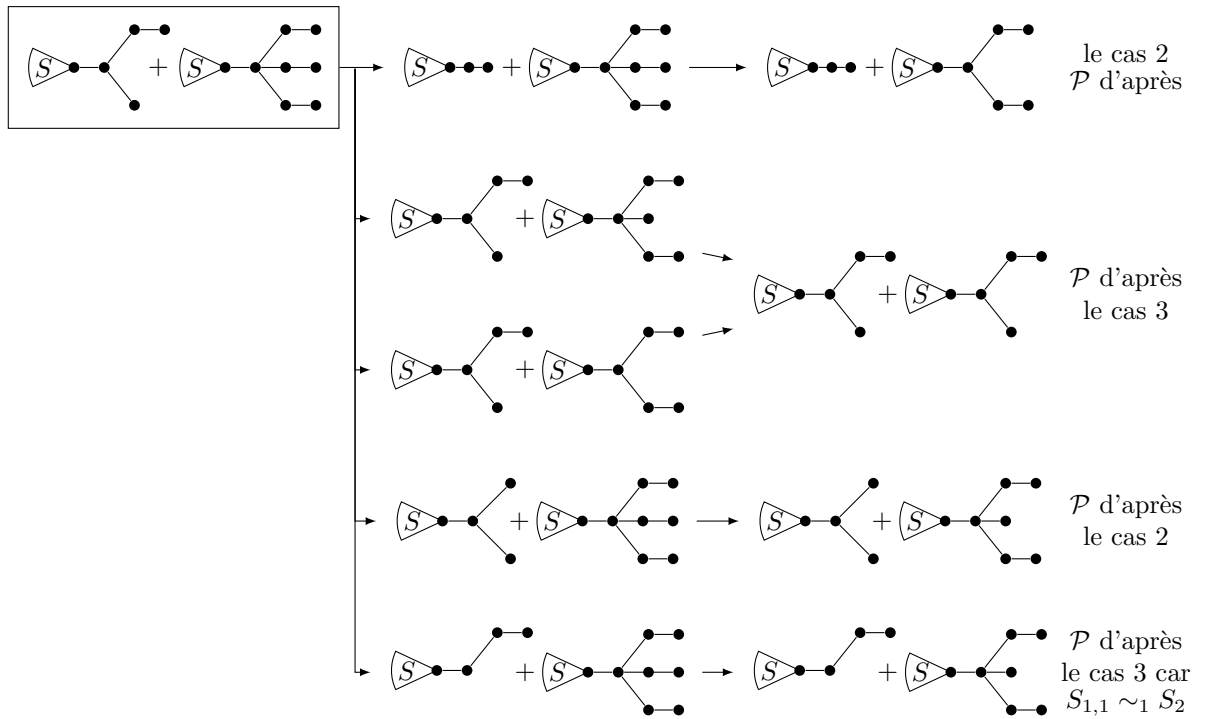


FIGURE 5.13 – Induction du cas 4 de la preuve du Lemme 18.

le joueur peut copier son coup, et il suffit d'alors d'utiliser l'hypothèse d'induction. La Figure 5.14 montre les cas où le premier joueur ne joue pas dans  $S$ , complétant ainsi la preuve.  $\square$

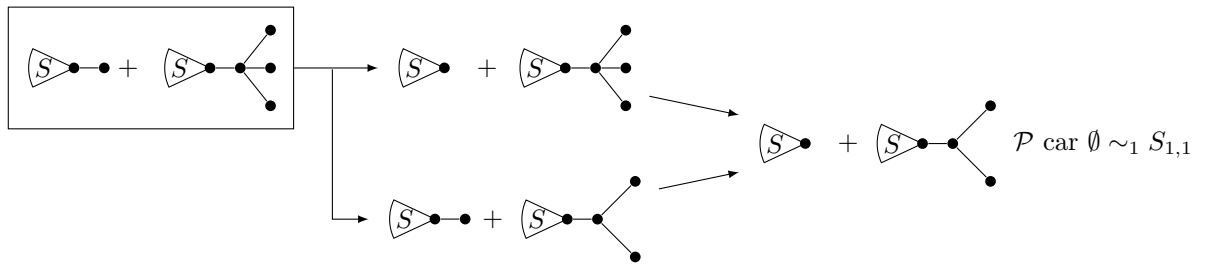


FIGURE 5.14 – Induction du cas général de la preuve du Lemme 19.

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 21.

*Démonstration.* On montre par induction sur le nombre total de sommet de  $S$  et  $S'$  que si  $S$  et  $S'$  sont dans le même ensemble  $\mathcal{C}_1^*$ ,  $\mathcal{C}_2^*$ ,  $\mathcal{C}_2^\square$ ,  $\mathcal{C}_3^\square$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  ou  $\mathcal{C}_3$ , alors elles sont  $\sim_1$ -équivalentes.

D'après le Lemme 18, c'est vrai si  $S$  et  $S'$  sont dans  $\mathcal{C}_1^*$  ou  $\mathcal{C}_2^*$ . C'est aussi vrai si  $\{S, S'\} = \{\emptyset, S_{1,1}\}$  d'après le Lemme 15 ou si  $\{S, S'\} = \{\emptyset, P_3\}$  puisque cela revient à attacher un  $P_3$  au sommet central d'une étoile subdivisée.

De plus, on peut facilement vérifier que les lignes correspondantes à  $\mathcal{C}_1^*$  et  $\mathcal{C}_2^*$  dans la Figure 5.9 sont correctes. Il suffit pour cela de considérer un représentant de la classe,  $P_1$  pour  $\mathcal{C}_1^*$  (respectivement  $P_2$  pour  $\mathcal{C}_2^*$ ); attacher  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) à une étoile subdivisée revient à se déplacer d'une ligne vers le bas (resp. une ligne vers le bas et une colonne à droite) dans la Figure 5.8. Par exemple, si on attache  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ) à l'étoile subdivisée  $S_{1,1,2,2}$ , on obtient l'étoile subdivisée  $S_{1,1,1,2,2}$  (resp.  $S_{1,1,2,2,2}$ ).

Supposons maintenant que  $S$  et  $S'$  appartiennent toutes les deux à une classe  $\mathcal{C}$ , avec  $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1^*$  et  $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_2^*$ . Alors  $S$  et  $S'$  sont toutes les deux soit vide soit différente d'un chemin. On prouve par induction sur la taille de  $\hat{S}$  que  $S \bullet \rightarrow \hat{S} \equiv S' \bullet \rightarrow \hat{S}$ , pour tout étoile subdivisée  $\hat{S}$ . Ce résultat est vrai si  $\hat{S} = \emptyset$  (car  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(S')$ ) ou si  $\hat{S} \in \mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$  (comme on vient de le voir). Nous pouvons donc supposer dans cette partie de la preuve que  $\hat{S} \notin \mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$  et que  $\hat{S}$  n'est pas un chemin. Montrons que  $S \bullet \rightarrow \hat{S} + S' \bullet \rightarrow \hat{S}$  est une  $\mathcal{P}$ -position. Le premier joueur ne peut pas jouer à la fois dans  $S$  et  $\hat{S}$ , ou dans  $S'$  et  $\hat{S}$ . Si le premier joueur joue dans  $\hat{S}$ , le second joueur peut copier son coup dans la seconde bi-étoile subdivisée, ce qui amène dans une  $\mathcal{P}$ -position par hypothèse d'induction. Dans le cas où le premier joueur joue dans  $S$  (le cas  $S'$  étant symétrique), nous devons trouver une réponse pour le second joueur. Notons  $T \bullet \rightarrow \hat{S} + S' \bullet \rightarrow \hat{S}$  la bi-étoile subdivisée obtenue après le coup du premier joueur.

1. S'il existe  $T'$  une option de  $T$  qui est dans la même classe que  $S$ , alors le second joueur peut jouer cette option. Par induction, il laisse alors une  $\mathcal{P}$ -position au premier joueur.
2. S'il existe  $T'$  une option de  $S'$  qui est dans la même classe que  $T$ , alors similairement, le résultat est correct.

Supposons finalement qu'aucun de ces deux cas ne se présente. Si  $\mathcal{G}(S) = 3$ , on retombe dans le cas 2, et si  $\mathcal{G}(S) = 0$ , alors on est dans le cas 1. Donc  $\mathcal{G}(S) \in \{1, 2\}$ .

Si  $\mathcal{G}(S) = 1$ , alors  $S, S' \in \mathcal{C}_1$ . Si  $\mathcal{G}(T) = 0$  alors on retombe dans le cas 2. Sinon,  $\mathcal{G}(T) > 1$  et on sait qu'il existe un coup de  $T$  à  $T' \in \mathcal{C}_1$ , et on retombe dans le cas 2.

Donc  $\mathcal{G}(S) = 2$ .

Si  $\mathcal{G}(T) = 0$  ou si  $T \in \mathcal{C}_1$ , alors on retombe dans le cas 2. Si  $\mathcal{G}(T) = 3$ , on retrouve le cas 1. Le seul cas restant est donc  $T \in \mathcal{C}_1^*$ . Il existe alors un coup de  $S'$  vers  $T'$  avec  $T' \in \mathcal{C}_1$ . Par induction,  $T' \bullet \hat{S} \equiv S_{1,1,1} \bullet \hat{S}$  (en effet, le nombre de sommets dans  $S$  et  $S'$  est strictement plus grand que le nombre de sommets dans  $T'$  et  $S_{1,1,1}$  car  $S$  possède au moins 5 sommets). D'après le Lemme 19,  $S_{1,1,1} \bullet \hat{S} \equiv P_1 \bullet \hat{S} \equiv T \bullet \hat{S}$  (car  $\hat{S} \notin \mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$ ). Par conséquent,  $T \bullet \hat{S} \equiv T' \bullet \hat{S}$  et  $T \bullet \hat{S} + T' \bullet \hat{S}$  est une  $\mathcal{P}$ -position.

Pour calculer les valeurs de la Figure 5.9, il suffit de considérer un représentant de chaque classe; par exemple,  $\emptyset$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $S_{1,1,1}$ ,  $S_{2,1,1}$ ,  $S_{2,1,1,1}$ ,  $S_{2,2,2,2,2}$ ,  $S_{2,2,2,2,2,1}$ , et de calculer les valeurs de Grundy.  $\square$

### Chemin central de taille 2

Le cas avec un chemin central de taille 2 est plus compliqué que le cas précédent. On définit une nouvelle relation d'équivalence  $\sim_2$ . Soit  $S$  et  $S'$  deux étoiles subdivisées. On dit que  $S$  et  $S'$  sont  $\sim_2$ -équivalentes et l'on note  $S \sim_2 S'$  si et seulement si pour tout étoile subdivisée  $\hat{S}$ , on a  $S \bullet \hat{S} \equiv S' \bullet \hat{S}$ .

D'après le Lemme 16, on sait déjà que  $P_3 \sim_2 \emptyset$  et donc que  $S_2 \sim_2 \emptyset$  et  $S_{1,1} \sim_2 \emptyset$ .

Nous allons montrer qu'il existe 10 classes d'équivalence pour la relation  $\sim_2$  :

- $\mathcal{D}_0^*$  : l'ensemble des étoiles subdivisées de valeur de Grundy 0 et qui possèdent 0 ou 2 chemins de longueur 2.
- $\mathcal{D}_1^* = \{P_1, S_{2,1}, S_{2,2,2}\}$  ; toutes ces étoiles subdivisées ont une valeur de Grundy de 1.
- $\mathcal{D}_1^\square$  : l'ensemble des étoiles subdivisées de valeur de Grundy 1 qui contiennent 0 ou 2 chemins de longueur 2 (à l'exception de  $P_1$ ).
- $\mathcal{D}_2^* = \{P_2, S_{2,2}\}$  ; ces deux étoiles subdivisées ont une valeur de Grundy de 2.
- $\mathcal{D}_2^\square$  : l'ensemble des étoiles subdivisées de valeur de Grundy 2 qui contiennent 0 ou 3 chemins de longueur 2.
- $\mathcal{D}_3^\square$  : l'ensemble des étoiles subdivisées de valeur de Grundy 3 qui contiennent 0 ou 3 chemins de longueur 2.
- Pour  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{D}_i$  : l'ensemble des étoiles subdivisées de valeur de Grundy  $i$  qui ne sont pas déjà dans une des classes précédentes.

La Figure 5.15 montre les classes d'équivalence des étoiles subdivisées.

**Théorème 22.** *Les classes d'équivalence pour la relation  $\sim_2$  sont exactement les ensembles  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_0^*$ ,  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_1^*$ ,  $\mathcal{D}_1^\square$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_2^*$ ,  $\mathcal{D}_2^\square$ ,  $\mathcal{D}_3$ , et  $\mathcal{D}_3^\square$ . De plus la Figure 5.16 décrit comment la valeur de Grundy de  $S \bullet \hat{S}$  peut être calculée en fonction des classes d'équivalence de  $S$  et de  $S'$ .*

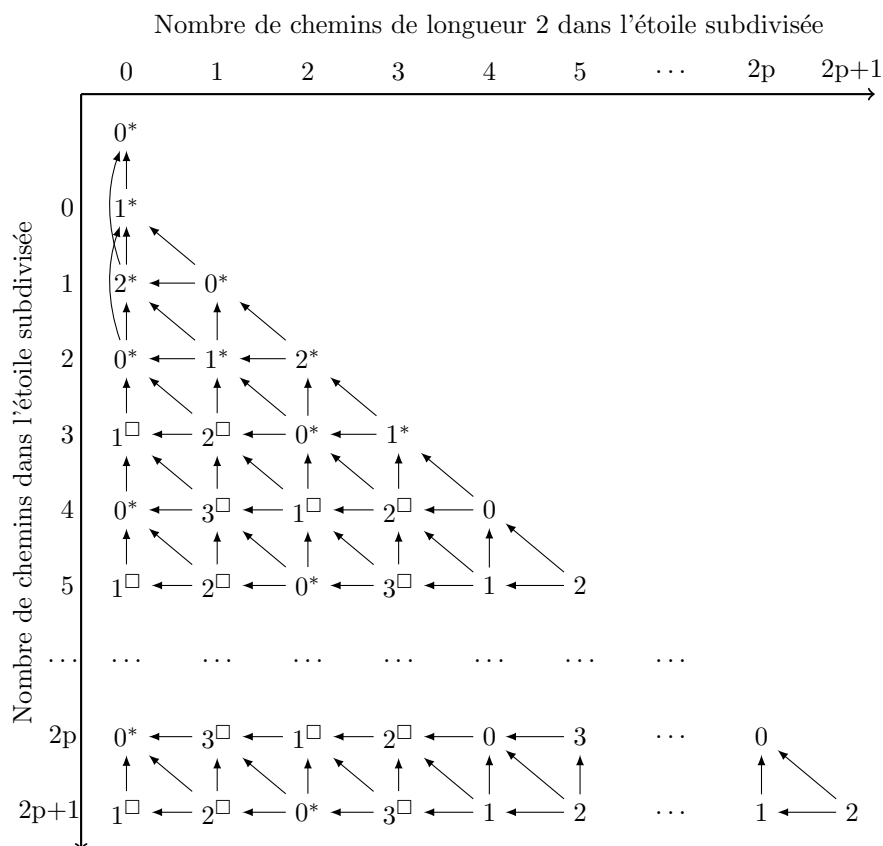


FIGURE 5.15 – Tableau des classes d'équivalence pour  $\sim_2$  des étoiles subdivisées. Les classes  $\mathcal{D}_i^*$ ,  $\mathcal{D}_i^\square$  et  $\mathcal{D}_i$  sont respectivement notées  $i^*$ ,  $i^\square$  et  $i$ .

Remarquons que quand les deux étoiles subdivisées sont assez grandes, elles sont dans les classes  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  ou  $\mathcal{D}_3$  et que la valeur de Grundy de  $S^{\bullet 2} \bullet S'$  est alors calculée par la nim-somme des valeurs des deux étoiles subdivisées. Pour la plupart des plus petites bi-étoiles subdivisées,  $\mathcal{G}(S^{\bullet 2} \bullet S') = \mathcal{G}(S) \oplus \mathcal{G}(S') \oplus 1$ .

Le lemme suivant prouve l'équivalence au sein de  $\mathcal{D}_1^*$  et  $\mathcal{D}_2^*$ . La preuve est similaire à celle du Lemme 18, et n'est pas donnée ici.

**Lemme 20.** *On a :*

1.  $P_1 \sim_2 S_{2,1}$
2.  $P_2 \sim_2 S_{2,2}$
3.  $S_{1,1} \sim_2 S_{2,2,1}$



	$\mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}_0^*$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1^*$	$\mathcal{D}_1^\square$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2^*$	$\mathcal{D}_2^\square$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_3^\square$
$\mathcal{D}_0$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	2	$\oplus_1$	$\oplus$	0	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_0^*$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	2	$\oplus_1$	$\oplus_1$	0	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_1$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	3	$\oplus_1$	$\oplus$	1	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_1^*$	2	2	3	0	3	0	1	1	1	0
$\mathcal{D}_1^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	3	$\oplus_1$	$\oplus_1$	1	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_2$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	0	$\oplus_1$	$\oplus$	2	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_2^*$	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3
$\mathcal{D}_2^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	1	$\oplus_1$	$\oplus_1$	2	0	$\oplus_1$	1
$\mathcal{D}_3$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	1	$\oplus_1$	$\oplus$	3	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_3^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	0	$\oplus_1$	$\oplus_1$	3	1	$\oplus_1$	0

FIGURE 5.16 – Tableau des valeurs de Grundy de  $S^{\bullet^2} \bullet S'$  en fonction des classes de  $S$  et  $S'$ . Le symbole  $\oplus_1$  est défini par :  $x \oplus_1 y = x \oplus y \oplus 1$ .

4.  $S_{2,1} \sim_2 S_{2,2,2}$

En particulier, tous les éléments de  $\mathcal{D}_1^*$  (respectivement  $\mathcal{D}_2^*$ ) sont  $\sim_2$ -équivalents.

Nous pouvons maintenant donner la preuve du Théorème 22.

*Démonstration.* Pour montrer ce théorème, nous montrons que la Figure 5.16 qui donne les valeurs de Grundy de  $S^{\bullet^2} \bullet S'$  est correcte. On peut commencer par vérifier que les lignes des classes  $\mathcal{D}_1^*$  et  $\mathcal{D}_2^*$  sont correctes, en utilisant un représentant,  $P_1$  et  $P_2$  (on sait déjà que ce sont effectivement des représentants, d'après le Lemme 20). Pour toute étoile subdivisée  $\hat{S}$ ,  $\hat{S}^{\bullet^2} \bullet P_1$  est  $\hat{S}$  avec un chemin de 2 sommets attaché à son sommet central. Il suffit alors de regarder dans la Figure 5.4 les valeurs en bas à droite de chacune des classes.

Si  $\mathcal{G}(\hat{S}) = 0$  alors  $\mathcal{G}(\hat{S}^{\bullet^2} \bullet P_1) = 2$ , si  $\hat{S} \in \mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3^\square$  alors  $\mathcal{G}(\hat{S}^{\bullet^2} \bullet P_1) = 0$ , si  $\hat{S} \in \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1^\square$  alors  $\mathcal{G}(\hat{S}^{\bullet^2} \bullet P_1) = 3$ , et sinon  $\mathcal{G}(\hat{S}^{\bullet^2} \bullet P_1) = 1$ .

Plus simplement,  $\hat{S}^{\bullet^2} \bullet P_2$  est un chemin de 3 sommets attaché au sommet central de  $\hat{S}$ , donc  $\mathcal{G}(\hat{S}^{\bullet^2} \bullet P_1) = \mathcal{G}(\hat{S})$ .

Maintenant, nous étudions la valeur de Grundy de  $S^{\bullet^2} \bullet S'$  en fonction des classes de  $S$  et de  $S'$ . D'après ce qu'on vient de voir, on peut supposer que  $S, S' \notin \mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2^*$ , et que ni  $S$  ni  $S'$  ne sont  $S_{1,1}$  ou  $P_3$ . Aucun coup de  $S^{\bullet^2} \bullet S'$  ne peut donc retirer un des sommets centraux de  $S$  ou de  $S'$ . Il est alors possible de calculer les valeurs de Grundy de  $S^{\bullet^2} \bullet S'$  en utilisant la Figure 5.16 et le fait que

$$\mathcal{G}(S^{\bullet^2} \bullet S') = \text{mex} \left( \mathcal{G}(T^{\bullet^2} \bullet S'), \mathcal{G}(S^{\bullet^2} \bullet T') : T \text{ option de } S, T' \text{ option de } S' \right)$$

□

## 5.4 Conclusion

Le but de cette partie était de généraliser la notion de jeu octal sur les graphes, et d'étudier un jeu particulier, appelé **0.33**. Nous avons vu comment calculer les valeurs de Grundy des étoiles subdivisées ainsi que celles des bi-étoiles subdivisées, à l'aide d'un résultat très utile qui nous permet de réduire les tailles des chemins modulo 3.

Cependant, il existe une frontière entre les arbres et les bi-étoiles subdivisées au delà de laquelle on ne peut plus faire cette réduction. En effet :

**Observation 2.** *On peut changer la valeur de Grundy d'un arbre en attachant un  $P_3$  à l'un de ses sommets. Par exemple, la bi-étoile subdivisée de la Figure 5.17 est une position gagnante ayant une valeur de Grundy de 2, mais en attachant un  $P_3$  au sommet  $u$ , elle devient une position perdante (et donc avec une valeur de Grundy de 0).*

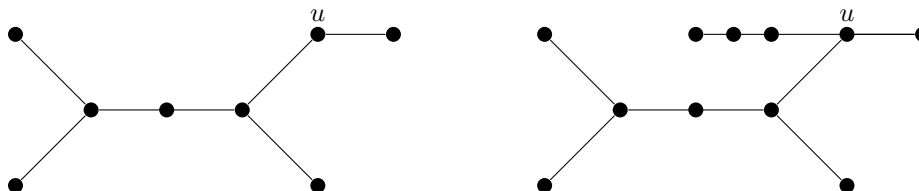


FIGURE 5.17 – Un contre-exemple à la généralisation du Théorème 20.

Nous avons même posé les deux conjectures suivantes (la deuxième étant plus forte que la première), qui nous sont apparues lors de nos recherches.

**Conjecture 2.** *Pour tout  $n \geq 4$ , il existe un arbre  $T$  tel que  $\mathcal{G}_{0.33}(T) = n$ .*

**Conjecture 3.** *Pour tout  $n \geq 4$ , il existe une chenille  $T$  tel que  $\mathcal{G}_{0.33}(T) = n$ .*

Par exemple, la valeur de Grundy – calculée par ordinateur – de la chenille de la Figure 5.18 est 11.



FIGURE 5.18 – Une chenille avec une valeur de Grundy de 10 pour le jeu **0.33**.

Même si ces résultats se généralisent mal aux arbres, on peut cependant les généraliser dans d'autres jeux octaux. Finalement, précisons qu'une piste intéressante

pour continuer ces travaux est de considérer les versions misère des jeux octaux sur les graphes.

# Bibliographie

- [1] Richard Adams, Janae Dixon, Jennifer Elder, Jamie Peabody, Oscar Vega, and Karen Willis. Combinatorial analysis of a subtraction game on graphs. *International Journal of Combinatorics*, 2016, 2016.
- [2] David Adjiashvili, Andrea Baggio, and Rico Zenklusen. Firefighting on trees beyond integrality gaps. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2017, Barcelona, Spain, Hotel Porta Fira, January 16-19*, pages 2364–2383, 2017.
- [3] Elliot Anshelevich, Deeparnab Chakrabarty, Ameya Hate, and Chaitanya Swamy. Approximability of the firefighter problem - computing cuts over time. *Algorithmica*, 62(1-2) :520–536, 2012.
- [4] David Auger, Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Complexity results for identifying codes in planar graphs. *International Transactions in Operational Research*, 17(6) :691–710, 2010.
- [5] Giorgio Ausiello and Luca Becchetti. On-line algorithms. In V. Th. Paschos, editor, *Paradigms of Combinatorial Optimization : Problems and New Approaches, Vol. 2*, chapter 15, pages 473–509. ISTE - WILEY, London - Hoboken, 2010.
- [6] Cristina Bazgan, Morgan Chopin, Marek Cygan, Michael R. Fellows, Fedor V. Fomin, and Erik Jan van Leeuwen. Parameterized complexity of firefighting. *Journal of Computer and System Sciences*, 80(7) :1285–1297, 2014.
- [7] Cristina Bazgan, Morgan Chopin, and Bernard Ries. The firefighter problem with more than one firefighter on trees. *Discrete Applied Mathematics*, 161(7-8) :899–908, 2013.
- [8] Elwyn R Berlekamp, John H Conway, and Richard K Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 3*. AK Peters/CRC Press, 2009.
- [9] Nathalie Bertrand, Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles. *European Journal of Combinatorics*, 25(7) :969–987, 2004.

- [10] Nicolas Bousquet, Aurélie Lagoutte, Zhentao Li, Aline Parreau, and Stéphan Thomassé. Identifying codes in hereditary classes of graphs and vc-dimension. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(4) :2047–2064, 2015.
- [11] Debra Boutin, Victoria Horan Goliber, and Mikko Pelto. Identifying codes on directed de bruijn graphs. *arXiv preprint arXiv :1412.5842*, 2014.
- [12] Leizhen Cai, Elad Verbin, and Lin Yang. Firefighting on trees :  $(1-1/e)$ -approximation, fixed parameter tractability and a subexponential algorithm. In *Algorithms and Computation, 19th International Symposium, ISAAC 2008, Gold Coast, Australia, December 15-17, 2008. Proceedings*, pages 258–269, 2008.
- [13] Irène Charon, Sylvain Gravier, Olivier Hudry, Antoine Lobstein, Michel Mollard, and Julien Moncel. A linear algorithm for minimum 1-identifying codes in oriented trees. *Discrete Applied Mathematics*, 154(8) :1246–1253, 2006.
- [14] Irene Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Identifying and locating-dominating codes : Np-completeness results for directed graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(8) :2192–2200, 2002.
- [15] Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein. Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is np-hard. *Theoretical Computer Science*, 290(3) :2109–2120, 2003.
- [16] Janka Chlebíková and Morgan Chopin. The firefighter problem : Further steps in understanding its complexity. *Theoretical Computer Science*, 676 :42–51, 2017.
- [17] Pierre Coupechoux. Extension of universal cycles for globally identifying colorings of cycles. *Discrete Mathematics*, 340(7) :1456–1466, 2017.
- [18] Mike Develin and Stephen G. Hartke. Fire containment in grids of dimension three and higher. *Discrete Applied Mathematics*, 155(17) :2257–2268, 2007.
- [19] Éric Duchêne, Sylvain Gravier, and Mehdi Mhalla. Scoring octal games on trees. *Unpublished*, 2016.
- [20] Danny Dyer, Eduardo Martínez-Pedroza, and Brandon Thorne. The coarse geometry of hartnell’s firefighter problem on infinite graphs. *Discrete Mathematics*, 340(5) :935–950, 2017.
- [21] Ohad N. Feldheim and Rani Hod.  $3/2$  firefighters are not enough. *Discrete Applied Mathematics*, 161(1-2) :301–306, 2013.
- [22] Stephen Finbow, Andrew King, Gary Macgillivray, and Romeo Rizzi. The firefighter problem for graphs of maximum degree three. *Discrete Mathematics*, 307(16) :2094–2105, 2007.

- [23] Stephen Finbow and Gary MacGillivray. The firefighter problem : a survey of results, directions and questions. *Australasian Journal of Combinatorics*, 43(6) :57–77, 2009.
- [24] Patricia Fogarty. *Catching the Fire on Grids, PhD thesis*. University of Vermont, 2003.
- [25] Fedor V. Fomin, Pinar Heggernes, and Erik Jan van Leeuwen. The firefighter problem on graph classes. *Theoretical Computer Science*, 613(C) :38–50, February 2016.
- [26] Florent Foucaud. The complexity of the identifying code problem in restricted graph classes. In *International Workshop on Combinatorial Algorithms*, pages 150–163. Springer, 2013.
- [27] Florent Foucaud, Iiro Honkala, Tero Laihonen, Aline Parreau, and Guillem Perarnau. Locally identifying colourings for graphs with given maximum degree. *Discrete Mathematics*, 312 :1832–1837, 2012.
- [28] Florent Foucaud, Reza Naserasr, and Aline Parreau. Characterizing extremal digraphs for identifying codes and extremal cases of bondy’s theorem on induced subsets. *Graphs and Combinatorics*, 29(3) :463–473, 2013.
- [29] Sylvain Gravier and Julien Moncel. Construction of codes identifying sets of vertices. *the electronic journal of combinatorics*, 12(1) :13, 2005.
- [30] Stephen G. Hartke. Attempting to narrow the integrality gap for the firefighter problem on trees. In *Discrete Methods in Epidemiology*, pages 225–232, 2004.
- [31] Bert Hartnell and Qiyang Li. Firefighting on trees : How bad is the greedy algorithm? *Congressus Numerantium*, pages 187–192, 2000.
- [32] Berth Hartnell. Firefighter! an application of domination. 1995. presented at the 10th Conference on Numerical Mathematics and Computing, University of Manitoba in Winnipeg, Canada.
- [33] Iiro Honkala and Tero Laihonen. On the identification of sets of points in the square lattice. *Discrete and Computational Geometry*, 29(1) :139–152, 2003.
- [34] Olivier Hudry. Complexity of voting procedures. In Robert A. Meyers, editor, *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pages 9942–9965. Springer, 2009.
- [35] Yutaka Iwaikawa, Naoyuki Kamiyama, and Tomomi Matsui. Improved approximation algorithms for firefighter problem on trees. *IEICE Transactions on Information and Systems*, E94.D(2) :196–199, 2011.
- [36] B. W. Jackson. Universal cycles of  $k$ -subsets and  $k$ -permutations. *Discrete Mathematics*, 117 :141–150, 1993.

- [37] Mark G. Karpovsky, Krishnendu Chakrabarty, and Lev B. Levitin. On a new class of codes for identifying properties in graphs. *IEEE transactions on information theory*, 44, 1998.
- [38] Mark G Karpovsky, Krishnendu Chakrabarty, and Lev B Levitin. On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(2) :599–611, 1998.
- [39] Gary MacGillivray and Ping Wang. On the firefighter problem. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 47 :83–96, 2003.
- [40] Margaret-Ellen Messinger. Average firefighting on infinite grids. *The Australasian Journal of Combinatorics*, 41 :15–28, 2008.
- [41] John W. Moon. Topics on tournaments. *Holt, Rinehart and Winston, New York*, 1968.
- [42] Aline Parreau. *Problèmes d’identification dans les graphes*. PhD thesis, Institut Fourier, 2012.
- [43] Sergey V Savchenko. On the number of 7-cycles in regular n-tournaments. *Discrete Mathematics*, 340(2) :264–285, 2017.
- [44] Thomas J Schaefer. On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2) :185–225, 1978.
- [45] Thomas Schwartz. Cyclic tournaments and cooperative majority voting : A solution. *Social Choice and Welfare*, 7(1) :19–29, 1990.
- [46] Ahmed Semri and Hillal Touati. Optimal identifying codes in oriented paths and circuits. In *Proceedings of the 2013 International Conference on Applied Mathematics and Computational Methods*, pages 123–128, 2013.
- [47] Richard Sprague. Über mathematische kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41 :438–444, 1935.
- [48] Ping Wang and Stephanie A. Moeller. Fire control on graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 41 :19–34, 2002.
- [49] Kirsti Anne Wash. *Identifying codes and domination in the product of graphs*. PhD thesis, Clemson University, 2014.