



**HAL**  
open science

# Contributions au guidage pour le rendez-vous spatial par résolution du problème de commande optimale impulsionnelle

Christophe Louembet

► **To cite this version:**

Christophe Louembet. Contributions au guidage pour le rendez-vous spatial par résolution du problème de commande optimale impulsionnelle. Automatique / Robotique. Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier), 2017. tel-01960763

**HAL Id: tel-01960763**

**<https://laas.hal.science/tel-01960763>**

Submitted on 19 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

de l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier

*par*

**Christophe LOUEMBET**

*Contributions au guidage pour le rendez-vous spatial  
par résolution du problème de commande optimale impulsionnelle*

soutenue le 14 juin 2017

Rapporteurs :	M. Nicolas LANGLOIS	Maître de conférences, ESIGELEC
	M. Nicolas PETIT	Professeur, Mines ParisTech
	M. Sorin OLARU	Professeur, Supelec
Examineurs :	M. Mazen ALAMIR	Directeur de recherche CNRS
	M. Denis ARZELIER	Directeur de recherche CNRS
	M. Patrick DANES	Professeur des universités, Université Toulouse 3
	Mme Aude RONDEPIERRE	Maîtresse de conférences, INSA
	M. Jean-Claude BERGÈS	Ingénieur, CNES (membre invité)



---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Formalisation du problème de rendez-vous orbital</b>	<b>5</b>
<b>2 Algorithmes indirectes pour le rendez-vous sans contraintes</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction . . . . .	9
2.2 Méthodes basées sur les conditions d’optimalité de Carter . . . . .	10
2.3 Résolution du problème de Neustadt : Approche par les moments et la programmation semi-infinie . . . . .	14
2.4 Application des algorithmes et analyse de cas . . . . .	24
2.5 Conclusions . . . . .	30
<b>3 Formalisation directe du problème de guidage en rendez-vous</b>	<b>31</b>
3.1 Introduction . . . . .	32
3.2 Paramétrage et discrétisation du problème d’optimisation . . . . .	34
3.3 Application au rendez-vous sous contraintes de saturation sur la commande . . . . .	36
3.4 Analyse numérique . . . . .	37
3.5 Conclusions . . . . .	40
<b>4 Guidage sous contraintes d’incertitudes et d’erreurs par programmation convexe robuste</b>	<b>43</b>
4.1 Introduction . . . . .	44
4.2 Optimisation convexe robuste . . . . .	45
4.3 Objectifs relâchés de rendez-vous : ensemble d’arrivée polytopique . . . . .	50
4.4 Guidage robuste aux incertitudes de navigation . . . . .	52
4.5 Guidage robuste aux erreurs d’exécution des manœuvres impulsives . . . . .	54
4.6 Etude numérique . . . . .	60
4.7 Conclusions . . . . .	66
<b>5 Guidage sous contraintes d’état</b>	<b>71</b>
5.1 Introduction . . . . .	72
5.2 Paramétrisation de la transition et transformation similaire . . . . .	72

5.3	Orbites relatives contraintes en espace . . . . .	77
5.4	Cas d'applications . . . . .	80
5.5	Conclusions . . . . .	87
<b>Conclusion générale : travaux en cours et perspectives de recherche</b>		<b>89</b>
1	Travaux en cours . . . . .	90
2	Axes de recherche à moyen terme . . . . .	94
3	Perspectives de recherche à long terme . . . . .	97
<b>Annexes</b>		<b>103</b>
<b>A Bilan d'activités de maître de conférences</b>		<b>103</b>
A.1	Bref Curriculum Vitae . . . . .	104
A.2	Activités d'enseignement . . . . .	105
A.3	Responsabilité et implication dans la vie de l'université . . . . .	107
A.4	Animation scientifique . . . . .	108
A.5	Encadrement et production scientifique . . . . .	108
A.6	Activités contractuelles . . . . .	111
<b>B Eléments de modélisation du mouvement relatif</b>		<b>113</b>
B.1	Introduction . . . . .	114
B.2	Mouvement képlérien de la cible . . . . .	114
B.3	Mouvement relatif cartésien . . . . .	116
<b>C Eléments de la théorie du primer vector</b>		<b>121</b>
C.1	Introduction . . . . .	122
C.2	Conditions d'optimalité de Carter . . . . .	122
C.3	Optimisation du nombre et des dates de poussées . . . . .	124
<b>D Approche de Neustadt pour la résolution du problème de rendez-vous</b>		<b>129</b>
D.1	Introduction . . . . .	130
D.2	Résolution dans l'espace des fonctions à variations bornées . . . . .	130
<b>E Recueil de missions de rendez-vous orbital</b>		<b>137</b>
E.1	Les missions PRISMA . . . . .	137
E.2	Les missions ATV . . . . .	138
E.3	La mission PROBA-3 . . . . .	140
<b>F Annexes au chapitre 4</b>		<b>141</b>
F.1	Alternatives à l'approche déterministe pour l'optimisation robuste . . . . .	142
F.2	Modéliser des ensembles d'incertitudes . . . . .	143
F.3	Analyse par intervalles . . . . .	144
<b>G Annexes au chapitre 5</b>		<b>147</b>
G.1	Propriétés des polynômes non-négatifs . . . . .	147
<b>Bibliographie</b>		<b>156</b>

---

# Introduction générale

---

Le 7 décembre 1961, la NASA annonçait le lancement du projet spatial GEMINI qui devait démontrer la faisabilité du rendez-vous en orbite piloté manuellement. Historiquement, ce lancement a été décidé après les projets emblématiques MERCURY (premier vol spatial pour un Américain) et APPOLO. L'agence américaine s'était en effet rendu compte de l'aspect crucial que revêtait le rendez-vous orbital dans la réussite de la mission APPOLO qui devait emmener les êtres humains sur la Lune.

Le principe du rendez-vous orbital a émergé dans les œuvres de K. Lasswitz [90] et K. Tsiolkovski [138] à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Selon eux, une escale pour ravitaillement était nécessaire pour permettre le voyage interplanétaire à moindre coût. Cette escale impliquait une station orbitale pour l'accueil des véhicules spatiaux. La problématique du rendez-vous orbital est ainsi née de ce besoin. Elle fut promue par les sociétés savantes Verein für Raumschiffahrt (Association pour les voyages dans l'espace) et la British Interplanetary Society dans la période de l'entre-deux-guerres. Le problème de rendez-vous orbital est officiellement reconnu comme un problème scientifique pertinent pour l'exploration spatiale lors du second congrès d'astronautique organisé à Londres en 1951 sous l'égide de la British Interplanetary Society. Dès lors, il fait l'objet de nombreux travaux scientifiques.

Une mission de rendez-vous réalise la jonction entre deux véhicules orbitaux à partir de leurs position et vitesse initiales en temps libre ou fixé. La première hypothèse est de considérer qu'un seul des deux véhicules possède les moyens de se mouvoir. Ce véhicule sera appelé tout au long de ce manuscrit, satellite *chasseur*. L'autre satellite évolue librement sur son orbite et est nommé satellite *cible*. Il servira notamment d'origine pour le repère local. Une mission complète de rendez-vous comporte différentes phases [57] :

- a. La phase de lancement correspond à l'injection sur le plan orbital de la cible et à l'obtention de conditions orbitales stables.
- b. Le phasage en navigation absolue télé opérée permet la réduction de l'angle de phase orbital entre la cible et le chasseur. Cette phase se termine avec l'acquisition de la cible par le chasseur. Cette visibilité entre les satellites permet ainsi une navigation relative.
- c. La phase de rendez-vous s'effectue en navigation relative. Cette phase se termine quand le chasseur a atteint les conditions terminales fixées en position et vitesse en proximité de la cible.
- d. Les opérations de proximité consistent à survoler la cible ou à procéder à des approches contraintes dans un voisinage proche (quelques dizaines de mètres).

- e. L'opération de capture traduit la manœuvre dans les derniers mètres. Cette phase reste exécutée manuellement pour les missions humaines.

Dans les études que nous avons menées, nous nous sommes concentrés sur la phase de rendez-vous en navigation relative et les opérations de proximité. Nous engloberons ces deux phases dans le terme de rendez-vous orbital.

Le rendez-vous orbital s'étudie dans le contexte local (rapport au véhicule cible) et non inertiel (rapport au centre de la Terre), exploitant ainsi la navigation relative. Dans ce contexte, le mouvement du satellite chasseur observé depuis la cible est appelé *mouvement relatif*. Sauf indications contraires, nous considérons que le véhicule chasseur est mû par des propulseurs à ergols chimiques. Les systèmes propulsifs spatiaux se caractérisant par l'éjection de matière (du gaz dans le cas de la propulsion chimique), le principe physique de conservation de la quantité de mouvement du système satellite/combustible nous indique que la poussée transmise à l'engin spatial est une réaction à l'éjection de matière [138]. Les systèmes de propulsion chimique fonctionnent par la combustion d'un carburant, appelé propergol ou ergol, qui crée un gaz à pression et température élevée. Ce gaz est ensuite éjecté par une tuyère convergente puis divergente afin d'augmenter la vitesse et la pression en sortie de tuyère. Le débit massique de ce type de tuyère étant important, les poussées développées le sont aussi. En contrepartie, ce type de propulsion ne peut être activé que sur de courts intervalles de temps sous peine de vider rapidement les réserves d'ergol et ainsi d'amener le véhicule en fin de vie. Si ces temps d'activation sont très petits devant la période de révolution orbitale, les poussées fortes permettent toutefois une évolution significative de la vitesse durant ces intervalles. La grande différence d'échelle entre la dynamique orbitale et celle de la vitesse nous amène à considérer que la propulsion chimique provoque des sauts de vitesse lorsque l'on s'intéresse au mouvement orbital. Selon cette hypothèse, la commande peut être modélisée par des fonctions de Dirac localisées en certains instants. Nous verrons plus tard dans ce manuscrit que cette hypothèse est corroborée mathématiquement lorsque l'optimalité en consommation d'ergol est recherchée.

Dans ce manuscrit, le problème de guidage en rendez-vous consiste à déterminer la loi de commande impulsionnelle, c.-à-d. écrite comme une combinaison linéaire de fonctions de Dirac, et optimale en consommation permettant au chasseur de rallier une position et une vitesse finales à partir de conditions initiales en temps fixé.

Le rendez-vous orbital est une thématique de recherche du LAAS-CNRS depuis 2007. Elle s'est matérialisée par un premier projet de Recherches & Technologies (R&T) sous la convention CNES 71372/00 entre 2007 et 2009. Cette action tripartite a impliqué le Centre National d'Études Spatiales (CNES), le commanditaire, et les co-contractants, AIRBUS Defense & Space (anciennement Astrium) et le LAAS-CNRS représenté par Denis Arzelier et Alain Théron. Parallèlement à ce projet de R&T, la thèse de Mounir Kara-Zaitri fut encadrée par D. Arzelier et A. Théron. Ces deux actions complémentaires comportaient deux volets : la modélisation du mouvement relatif et le guidage de ce mouvement. J'ai intégré la thématique de recherche sur le volet guidage dès ma prise de fonction en 2008. De plus, j'ai participé marginalement à l'encadrement des travaux de thèse de M. Kara-Zaitri. Plusieurs actions de R&T impliquant les mêmes acteurs ont suivi. Elles se sont focalisées sur le problème de guidage et les outils nécessaires à sa résolution : (i) Etude Métier (convention CNES 104057/00) sur les algorithmes d'optimisation linéaire en vue de l'embarcation (2011), (ii) Projet R&T (convention CNES 104148/00) sur les algorithmes de résolution optimale et robuste (2010-2013), (iii) Projet R&T (convention CNES 130841/00) sur les opérations de proximité et le mouvement relatif en 6 degrés de liberté (2013-2015). Ces actions ont permis de travailler sur des problématiques industrielles dont nous souhaitons montrer l'intérêt scientifique dans ce manuscrit. En parallèle à ces projets, plusieurs thèses ont été cofinancées par le CNES et un tiers industriel ou institutionnel. A la suite des travaux de M. Kara-Zaitri, Georgia Deaconu a ainsi travaillé sur la problématique du rendez-vous sous contrainte et la commande prédictive lors de sa thèse entre

2010 et 2013. J'ai personnellement encadré cette thèse en demandant une dérogation d'encadrement à mon université. Alain Théron, professeur agrégé en poste au lycée Fermat de Toulouse, a participé à cet encadrement sur son temps libre. Deux thèses supplémentaires, soutenues par une convention de cofinancement CNES, ont démarré en 2013 et 2014. Toutes deux sont encadrées par Denis Arzelier et moi-même. La première, menée par Laura Sofia Urbina-Iglesias, porte sur le couplage des mouvements relatifs en translation et rotation et les méthodes de guidage et contrôle pour les manœuvres de proximité. Clément Gazzino bénéficie de la seconde bourse de thèse. Son sujet de recherche porte sur le maintien à poste des satellites de télécommunication en orbite géostationnaire avec une propulsion électrique. Enfin, Paulo Arantes-Gilz a démarré en 2015 une thèse soutenue par le projet ANR FASTRelax sur la thématique des algorithmes de commande prédictive et leur certification numérique. Cette thèse est encadrée par Mioara Joldes et moi-même. Ainsi, une majorité des travaux présentés dans ce manuscrit ont bénéficié du soutien financier d'actions menées en partenariat avec le CNES. Par ailleurs, la thématique du rendez-vous orbital au LAAS ne se limite pas aux actions citées précédemment. Les problématiques du calcul de risque de collision en orbite et des manœuvres d'évitement sont ainsi actuellement étudiées. Une thèse dans un cadre de financement équivalent a été soutenue et des actions de R&T impliquant Denis Arzelier, Mioara Joldes, Jean Bernard Lasserre et Aude Rondepierre sont en cours.

Le problème de guidage en rendez-vous orbital énoncé plus haut est décrit comme un problème de commande optimale. Dans le contexte des phases de rendez-vous en navigation relative et des opérations de proximité, le mouvement relatif est astreint à satisfaire un ensemble de conditions d'ordre technologique. Parmi ces contraintes, nous pouvons citer les limites physiques des propulseurs, les conditions de visibilité entre véhicules et les contraintes de sécurité (notamment l'évitement de collision). Il faut aussi envisager la possibilité d'erreur dans la chaîne de navigation ou de propulsion. Tenant compte de toutes ces conditions, le problème de rendez-vous requiert la résolution d'un problème de commande optimale sous contraintes sur la commande et l'état.

La résolution du problème de commande optimale peut être abordée suivant deux grandes classes complémentaires de méthodes : les *méthodes indirectes* et les *méthodes directes*.

La littérature oppose souvent ces deux classes de méthodes [136]. Les méthodes indirectes permettent de caractériser la solution optimale et offrent des stratégies de calcul de celle-ci. En contrepartie, les conditions d'optimalité deviennent difficilement exploitables lorsque des contraintes doivent être appliquées (notamment sur l'état). A l'opposé, les méthodes directes prennent les contraintes sur l'état et la commande plus facilement en considération, mais ne fournissent qu'une approximation de la solution optimale.

Dans le contexte du guidage impulsif en rendez-vous, les méthodes indirectes sont essentiellement employées pour résoudre le problème de rendez-vous sans contraintes. Précisons que nous entendons par «méthode indirecte» toute méthode qui résout le problème par l'étude d'un signal annexe puis reconstruit la commande optimale à partir de cette information. La résolution de ce type de problème peut alors passer par l'écriture et l'exploitation de conditions d'optimalité (application du calcul variationnel et du principe du maximum de Pontryagin) ou par le transport du problème par isomorphismes successifs et dualité vers un problème d'optimisation semi-infinie.

Les méthodes directes transforment, quant à elles, le problème initial en un problème d'optimisation statique par le biais d'une paramétrisation et/ou d'une discrétisation. En d'autres termes, les méthodes directes aboutissent à des problèmes approchant le problème initial et dont les solutions sont sous-optimales. Elles seront ainsi employées pour prendre en compte les contraintes sur la commande et l'état citées plus haut. Nous prendrons toutefois soin, dans les méthodes développées, de nous assurer que les solutions obtenues satisfont les contraintes initiales.

Le manuscrit couvre essentiellement les travaux réalisés lors des projets de R&T cités précédemment ainsi que les résultats des thèses de M. Kara-Zaitri et G. Deaconu. Il se concentre donc sur la résolution

du problème de commande optimale et impulsionnelle avec et sans contraintes.

Après avoir présenté le problème de rendez-vous orbital comme un problème de commande optimale (chapitre 1), nous consacrerons le chapitre 2 au problème de rendez-vous sans contraintes résolu par des méthodes indirectes. Puis, après avoir introduit le principe et exposé la démarche des méthodes directes pour le rendez-vous en considérant des bornes sur les actionneurs, le chapitre 3 propose une comparaison entre les résultats obtenus par une méthode directe et une méthode indirecte issue du chapitre 2. Nous aborderons ensuite la problématique de la robustesse du plan de guidage vis-à-vis des erreurs de navigation et d'actionnement des propulseurs dans le chapitre 4. Le terme de robustesse est entendu ici au sens de l'insensibilisation des plans de guidage. Nous chercherons à répondre à la question suivante : existe-t-il un plan permettant la moindre dispersion des états finaux sous incertitudes ou erreurs ? Dans le chapitre 5, nous proposerons un algorithme qui permet de calculer un plan de guidage et la trajectoire associée respectant formellement des contraintes linéaires sur l'état. Rappelons que les techniques de discrétisation usuelles dans le champ des méthodes directes ne permettent pas le respect formel des contraintes.

Nous concluons finalement par un état des travaux en cours (essentiellement les thèses en cours de L.S. Urbina, C. Gazzino et P. Arantes-Gilz) et des perspectives de recherche à moyen et long termes.

---

# Formalisation du problème de rendez-vous orbital

---

Le problème de rendez-vous spatial consiste essentiellement à calculer les profils de trajectoires d'état et de commande qui permettent de relier une position relative à vitesse donnée à partir d'un état relatif de départ.

Ces trajectoires relatives satisfont la dynamique relative linéarisée décrite par une équation différentielle linéaire de premier ordre (cf. l'annexe B) :

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \bar{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\bar{u}(t). \quad (1.1)$$

$\bar{X} \in \mathbb{R}^6$  est l'état relatif du chasseur par rapport à la cible et le signal de commande  $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$  représente la poussée rapportée à la masse du véhicule,

$$\bar{u}(t) = \frac{F(t)}{m(t)} \quad (1.2)$$

où la fonction  $F(t) = [F_x, F_y, F_z]^T \in \mathbb{R}^3$  représente la poussée des actionneurs et  $m(t)$  la masse instantanée du véhicule. Le rendez-vous est précisé par les conditions initiale et finale :

$$\bar{X}(t_0) = \bar{X}_0 \text{ et } \bar{X}(t_f) = \bar{X}_f. \quad (1.3)$$

Si cette manœuvre peut se réaliser en temps fixe ou en temps libre, l'objectif prioritaire est qu'elle soit effectuée à consommation minimale. Dans le cadre des véhicules spatiaux, nous pouvons définir la consommation comme la masse d'ergols (carburant/comburant) éjectée par le véhicule afin de créer une poussée. Ainsi, le débit massique d'ergols est directement lié à la poussée :

$$\frac{d}{dt}m(t) = -\frac{\|F(t)\|_p}{gI_{sp}}. \quad (1.4)$$

où  $g$  est la constante gravitationnelle et  $I_{sp}$  l'impulsion spécifique de l'ergol et moteur considérés. La fonction  $\mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}, y \mapsto l_q(y) = \|y\|_p$  représente la norme d'ordre  $p$  telle que

$$\|y\|_p = \left( \sum_{j=1}^r |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.5)$$

où  $y \in \mathbb{R}^r$ . La masse d'ergols encore présente dans le véhicule est alors décrite par :

$$m(t) = m(t_0) - \frac{1}{gI_{sp}} \int_{t_0}^t \|F(t)\|_p dt.$$

Ainsi, l'objectif de consommation minimale implique la minimisation du terme  $J_F$  :

$$J_F = \int_{t_0}^{t_f} \|F(t)\|_p dt. \quad (1.6)$$

La consommation représentée par la fonction objective (1.6) définit aussi une norme sur  $\mathcal{L}_p^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^r)$ .  $\mathcal{L}_p^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^r)$  désigne ici l'ensemble des fonctions de  $[t_0, t_f]$  dans  $\mathbb{R}^r$  et de norme  $l_p$  intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Nous noterons cette norme fonctionnelle de type intégrale  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p^1}$  telle que

$$\forall y \in \mathcal{L}_p^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^r), \quad \|y(t)\|_{\mathcal{L}_p^1} = \int_{t_0}^{t_f} \left( \sum_{j=1}^r |y_j(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} dt \quad (1.7)$$

L'ordre  $p$  de la norme utilisée dans les expressions du débit massique d'ergols (1.4) et dans la fonction objective (1.6) est généralement précisé par la géométrie du véhicule. Dans nos travaux, nous considérons deux cas de figure représentés sur les figures 1.1.

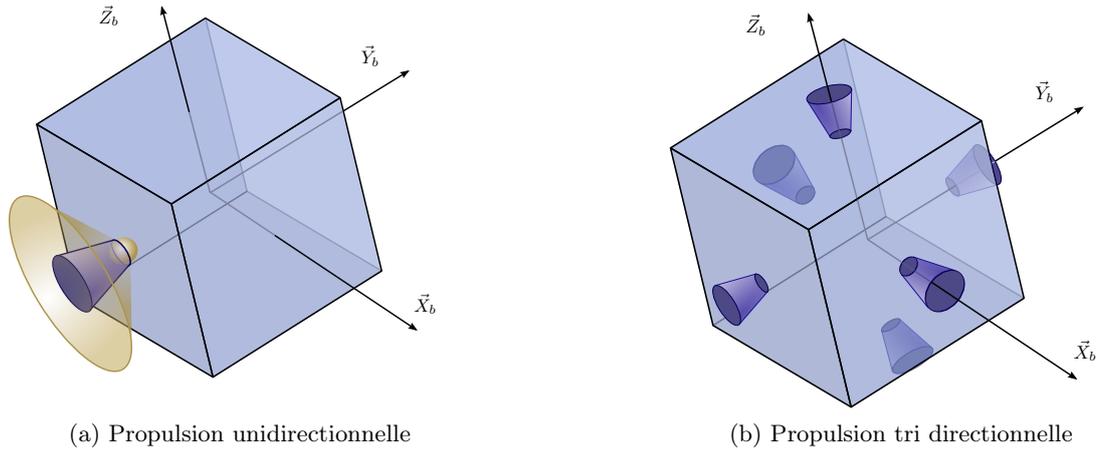


FIGURE 1.1 – Configurations envisagées d'implantation de propulseurs

Dans le premier cas, une seule tuyère, possédant une petite capacité d'orientation, est fixée sur le corps du satellite. La poussée étant unidirectionnelle, l'orientation de la poussée nécessite la réorientation du satellite préalablement à la manœuvre (figure 1.1a). Dans ce cas, la norme du vecteur de poussée est donnée par la norme d'ordre  $p = 2$ ,

$$\|F\|_2 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.8)$$

Dans le second cas, un satellite dispose de six propulseurs, ce qui lui autorise un contrôle dans les trois directions de l'espace (figure 1.1b). Dans ce cas, la norme est d'ordre  $p = 1$  et fait intervenir la valeur absolue des composantes de  $F$  :

$$\|F\|_1 = |F_x| + |F_y| + |F_z|. \quad (1.9)$$

Par ailleurs, l'hypothèse selon laquelle la masse totale du véhicule varie peu malgré les poussées permet de considérer la masse  $m$  constante lors d'une manœuvre. Cette hypothèse se justifie notamment par les valeurs élevées d'impulsion spécifique. Elle permet d'écrire la fonction objective équivalente à (1.6) et dépendante du signal de commande  $u$  :

$$J_{\bar{u}} = \int_{t_0}^{t_f} \|\bar{u}(t)\|_p dt = \|\bar{u}(t)\|_{\mathcal{L}_p^1}. \quad (1.10)$$

Des contraintes d'origine technologique peuvent être ajoutées au problème, telles que les capacités des actionneurs ou des contraintes de visibilité sur la trajectoire. Cependant, ces contraintes ne seront abordées et détaillées que dans la seconde partie de ce manuscrit.

En résumé, le problème de rendez-vous peut être formalisé comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle  $\mathcal{L}_1$  sous contraintes. Ces contraintes sont composées de la dynamique propre au système et des conditions aux bords telles que :

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}} J_{\bar{u}} \quad & \begin{cases} \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\bar{u}(t), & \text{contrainte dynamique,} \\ \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0, \quad \bar{X}(t_f) = \bar{X}_f, & \text{conditions initiale et finale.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nous verrons dans la suite de nos travaux que les méthodes de résolution du problème (1.11) font un usage intensif de la transition d'état. Dans le cadre du mouvement képlérien général, cette transition peut être décrite formellement à la suite d'un changement de variable indépendante. Ainsi, dans les développements à venir, la variable indépendante temporelle,  $t$ , sera remplacée par l'anomalie vraie du véhicule cible,  $\nu$ . Ce changement de variable, décrit précisément dans l'annexe B.3, amène à réécrire la dynamique relative en fonction à l'anomalie vraie,  $\nu$  :

$$\frac{d}{d\nu}X(\nu) = X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu)u(\nu) \quad (1.12)$$

ainsi que les conditions de rendez-vous équivalentes aux conditions (1.3)

$$X(\nu_0) = X_0 \text{ et } X(\nu_f) = X_f. \quad (1.13)$$

Après le passage de variable indépendante de  $t$  à  $\nu$ , le problème de commande optimale (1.11) est reformulé

$$\begin{aligned} \min_u J_u \quad & \begin{cases} X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu)u(\nu), & \text{contrainte dynamique,} \\ X(\nu_0) = X_0, \quad X(\nu_f) = X_f, & \text{conditions initiale and finale.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.14)$$

où la fonction objective est donnée par :

$$J_u = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \|u(\nu)\|_p d\nu = \|u\|_{\mathcal{L}_p^1}. \quad (1.15)$$

Dans ce manuscrit, nous nous intéresserons exclusivement au rendez-vous en temps fixé : les instants initial  $t_0$  et final  $t_f$  ainsi que les positions associées de la cible  $\nu_0$  et  $\nu_f$  seront des paramètres d'entrée du problème de rendez-vous.



---

# Algorithmes indirectes pour le rendez-vous sans contraintes

---

## 2.1 Introduction

Le problème de guidage en rendez-vous est un problème typique de génération de trajectoires. Un tel problème peut se formaliser comme un problème de commande optimale : nous souhaitons calculer les profils de commande permettant de rallier un état relatif visé depuis un état relatif courant. Lawden a étudié spécifiquement ce problème dans les années 50 dans une série de travaux [93, 94, 95, 92] en déployant la théorie de la commande optimale développée quelques années auparavant. Faisant l'hypothèse forte d'une commande impulsionnelle, il a adapté les résultats de Pontryagin et obtenu un corpus de résultats que l'on nommera théorie du *primer vector*. Les résultats de Lawden se résument en un ensemble de conditions de régularité sur l'évolution du vecteur des états adjoints associés à la vitesse, appelé primer vector, et en une contrainte de borne sur la norme de ce vecteur. Ces conditions, nécessaires et suffisantes uniquement dans un contexte d'orbites circulaires (excentricité nulle), proposent un cadre pour la construction du primer vector. Une fois le primer vector obtenu, le plan de guidage optimal peut être reconstruit. Nous qualifierons d'indirectes l'ensemble des méthodes qui se basent sur la construction d'un signal contraint pour déduire ensuite le plan de guidage optimal.

Dans ce premier chapitre, nous nous intéresserons à trois méthodes de construction du primer vector ou signal équivalent dans un contexte de mouvement relatif képlérien (l'orbite de la cible est possiblement elliptique).

Dans la section 2.2, deux méthodes, issues de [79, 7] d'une part et [79, 8] d'autre part, mettent en jeu les conditions nécessaires et suffisantes de T. Carter (exposées dans l'annexe C). Si les résultats de Lawden ont un intérêt historique indéniable, nous leur préférons les travaux plus récents de Carter qui fournissent des conditions équivalentes, mais élargies aux orbites elliptiques. Les deux méthodes exploitent ces conditions d'optimalité en les couplant à un algorithme de sélection de dates d'impulsions et à des techniques de résolution de systèmes polynomiaux. Notons que ces travaux ont fait l'objet des projets de R&T CNES 71372/00 et R&T CNES 104148/00 entre 2008 et 2012 ainsi que de la thèse de M. Kara-Zaïtri.

Dans la section 2.3, nous prenons le parti de nous baser sur les résultats de Neustadt. Ces derniers se

distinguent des résultats de Lawden ou Carter. Neustadt identifie dans le problème de rendez-vous comme un problème d'optimisation sous contraintes de moments sur la commande [113]. Si les travaux de Claeys *et al.* [42, 43] utilisent les méthodes de relaxation de Lasserre [89] pour résoudre ce problème de moments, nous proposons ici de revisiter les travaux de Neustadt pour en déduire une méthode alternative. Sans faire plus d'hypothèses sur la nature de la commande, Neustadt montre que le problème de moments a une contrepartie sous forme de programme mathématique de dimension semi-infinie. A l'occasion de cette démonstration, il montre le bien fondé de solutions optimales impulsionnelles ainsi que l'existence d'une borne sur le nombre d'impulsions optimales nécessaires. Cependant, la résolution du programme semi-infini soutenant la méthode est laissée à la charge de son lecteur. Notre contribution consiste alors à démontrer que ce problème peut être résolu par des algorithmes spécifiques. Nous exposons cette démarche récente [6] plus en détail dans la section 2.3.

Nous conclurons ce chapitre avec une comparaison des algorithmes présentés dans les sections 2.2.2 et 2.3 au travers de différents scénarios de rendez-vous.

## 2.2 Méthodes basées sur les conditions d'optimalité de Carter

Nous proposons, dans cette section, deux approches basées sur les conditions d'optimalité de T. Carter exposées dans l'annexe C . Nous en rappelons ici simplement le théorème principal.

**Théorème 1 (CNS de Carter [35, 40]).** — *Soient les impulsions décrites par leurs vecteurs directeurs  $\beta(\nu_i) \in \mathbb{R}^m$  tels que  $\beta^T \beta = 1$  et leurs amplitudes  $\Delta v_i$ . Soit la matrice  $Y(\nu)$  liée à la matrice fondamentale  $\phi(\nu)$  de la dynamique par*

$$Y(\nu) = \phi^{-1}(\nu)B \quad (2.1)$$

*On suppose que le vecteur  $\phi^{-1}(t_f)X_f - \phi^{-1}(t_1)X_1 = c_f$  est non nul.*

*Alors, les variables*

$$(\nu_1, \dots, \nu_r, \Delta v_1, \dots, \Delta v_r, \beta(\nu_1), \dots, \beta(\nu_r))$$

*sont des solutions normales du problème d'optimisation de Carter (cf. (C.6)) si et seulement s'il existe un vecteur non nul  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  tel que les conditions ci-dessous sont vérifiées.*

**CNS 1** *Les directions de poussée optimales sont déterminées par :*

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \beta(\nu_i) = Y^T(\nu_i)\lambda, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

**CNS 2** *Les poussées optimales sont effectuées quand  $\lambda$  et  $\nu_i$  vérifient :*

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \lambda^T Y(\nu_i)Y(\nu_i)^T \lambda = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

**CNS 3** *Les instants de poussée optimaux intérieurs  $\nu_i$  (i.e.  $\nu_0 < \nu_i < \nu_f$ ) vérifient :*

$$\begin{aligned} \Delta v_{k_i} = 0 \text{ ou } \nu_i = \nu_0 \text{ ou } \nu_i = \nu_f \text{ ou} \\ \lambda^T \frac{dY(\nu_i)}{d\nu} Y(\nu_i)^T \lambda = 0, \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

**CNS 4** *Les poussées optimales doivent vérifier le problème aux deux bouts défini par les conditions initiales et finales :*

$$\sum_{i=1}^N [Y(\nu_i)Y^T(\nu_i)] \lambda \Delta v_i = c_f \quad (2.5)$$

**CNS 5** *L'amplitude des poussées optimales doit être positive ou nulle :*

$$\Delta v_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.6)$$

**CNS 6** *La consommation totale doit être positive :*

$$\sum_{i=1}^N \Delta v_i = c_f^T \lambda > 0 \quad (2.7)$$

**CNS 7**  *$-c_f^T \lambda$  est un minimum sur l'ensemble :*

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \text{CN1} - \text{CN6 sont valides}\} \quad (2.8)$$

**CNS 8** *La norme du premier vector  $\lambda_v(\nu) = Y^T(\nu)\lambda$  est inférieure ou égale à 1 sur la durée du rendez-vous :*

$$\|\lambda_v(\nu)\| \leq 1 \quad \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f] \quad (2.9)$$

### 2.2.1 Approche par optimisation polynomiale et recherche combinatoire de dates

Cette sous-section revient brièvement sur les publications [79, 7] qui sont une première approche pour résoudre les problèmes de commande optimale proposé dans le chapitre 1. Ces travaux exploitent les conditions (2.3), (2.4) et (2.9) de T. Carter (cf. annexe C) sont vues comme un ensemble de contraintes à satisfaire.

En rappelant que les variables à déterminer sont le vecteur de paramètres  $\lambda$  ainsi que les dates de poussée  $\{\nu_i\}$ , les conditions (2.3) et (2.4) forment un système d'équations non linéaires

$$\begin{cases} \lambda^T Y(\nu_i) Y(\nu_i)^T \lambda = 1, & \forall i = 1, \dots, N \\ \lambda^T \frac{dY(\nu_i)}{d\nu} Y(\nu_i)^T \lambda = 0, & \forall i = 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

et la condition (2.9) est une inégalité de dimension semi-infinie

$$\|\lambda_v(\nu)\| \leq 1 \quad \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f] \quad (2.11)$$

Rappelons que la matrice  $Y(\nu)$  est donnée par  $Y(\nu) = \phi^{-1}(\nu)B$  où  $\phi(\nu)$  est la matrice fondamentale de la dynamique. Une fois  $\lambda$  et  $\{\nu_k\}$  déterminés, les directions et les amplitudes de poussée, respectivement  $\beta(\nu_i)$  et  $\Delta v_i$ , peuvent être reconstruites grâce, notamment, aux conditions (2.2) et (2.5). Notons que dans l'approche décrite ici,  $\beta(\nu_i)$  et  $\Delta v_i$  ne sont pas considérées comme des paramètres de décision. La résolution de (2.10) et (2.11) s'avère difficile en raison de la structure de ces conditions. En effet, les dates d'impulsions,  $\{\nu_k\}$ , et le vecteur  $\lambda$  interviennent respectivement dans (2.10) et (2.11) de façon transcendantale et polynomiale.

Afin de surmonter cette difficulté, l'approche suivie dans [79] et [7] a été de relâcher certaines conditions. Dans un premier temps, le nombre d'impulsions est fixé. Dans un second temps, il est nécessaire de se départir de la nature transcendantale des conditions (2.10) et (2.11) en imposant, a priori, les dates d'impulsions. Dans ce contexte, les contraintes (2.10) et (2.11) sont respectivement un système d'équations polynomiales et une condition polynomiale de positivité en  $\lambda$ . Ce problème est ensuite résolu par des techniques d'optimisation polynomiale globale basées sur une hiérarchie de relaxations de Lasserre [88] et la librairie Gloptipoly [68].

La démarche décrite dans [79, 7] propose par ailleurs de coupler à cette résolution polynomiale un algorithme de recherche de nombre et de dates optimales d'impulsions. Cette recherche de dates est réalisée par un balayage de combinaisons de dates prélevées sur une grille temporelle. Une telle approche comporte plusieurs inconvénients majeurs. Le premier vient du fait que, si le problème polynomial formé

de (2.10) et (2.11) peut être résolu globalement en théorie, la résolution numérique par les solveurs appropriés se heurte rapidement à des problèmes de dimensions trop importantes. Dans ce cas fréquent, nous ne pouvons pas conclure à l'existence ou non de solutions. Par ailleurs, en plus d'être coûteuse, la recherche de dates est réalisée sur une grille temporelle qui ne comporte peut-être pas formellement les dates optimales.

Cependant, si elle n'est pas sans défauts, l'approche proposée dans [79] et [7] met en avant la structure polynomiale des conditions de Carter par un découplage entre l'optimisation des dates d'impulsions  $\{\nu_k\}$  et le calcul du paramètre de Lagrange  $\lambda$ .

### 2.2.2 Approche par la résolution de systèmes polynomiaux et heuristiques de sélection de dates

Cette section expose la contribution des travaux publiés dans [79] et [8] et s'appuie essentiellement sur les résultats énoncés dans l'annexe C. L'algorithme itératif proposé est constitué de deux étapes : (i) sélection des dates d'impulsion candidates, (ii) construction du profil de primer vector compatible avec les dates sélectionnées et analyse des conditions d'optimalité. La principale différence avec les travaux de la section précédente provient du remplacement de la recherche combinatoire de dates par l'algorithme *ad hoc* présenté ci-après.

#### Sélection de dates

L'algorithme de sélection de dates proposé construit itérativement une séquence de dates candidates. Il démarre d'un plan à deux impulsions initiale et finale et ajoute/déplace/fusionne des impulsions intermédiaires à chaque itération, en fonction des règles vues dans la section C.3. Dans un premier temps, la logique de l'algorithme consiste à ajouter une impulsion intermédiaire à la date

$$\nu_m = \text{Arg} \left[ \max_{\nu_0 \leq \nu \leq \nu_f} (\|\lambda_\nu(\nu)\|) \right] \quad (2.12)$$

tant que  $\|\lambda_\nu(\nu_m)\| > 1$  et tant que la borne supérieure sur le nombre d'impulsions, définie par le théorème 11, n'a pas été atteinte. Une fois cette borne atteinte, une analyse des conditions associées à la trajectoire courante permet d'énoncer l'action à produire parmi les deux actions élémentaires : (i) déplacement d'une impulsion ; (ii) fusion de deux impulsions. La fusion ou le déplacement des impulsions s'effectuent à partir des conditions calculées sur les anomalies voisines,  $\nu_a$  et  $\nu_b$  de  $\nu_m$  avec les résultats énoncés dans la section d'annexe C.3. Soient les anomalies  $\nu_a$  et  $\nu_b$  correspondant aux dates d'impulsions voisines de  $\nu_m$  telles que

$$\|\lambda_\nu(\nu_a)\| = \|\lambda_\nu(\nu_b)\| = 1 \quad (2.13)$$

et  $dp_a$  et  $dp_b$  les dérivées de la norme du primer vector évaluées en ces instants telles que  $dp_a = \frac{d\|\lambda_\nu\|}{d\nu}(\nu_a)$  et  $dp_b = \frac{d\|\lambda_\nu\|}{d\nu}(\nu_b)$ . La logique de l'algorithme est présentée au graphe 2.1 où  $T_{imp}$  représente l'ensemble courant des dates de poussée.

**Remarque 1:** L'analyse des différents chemins montre que la séquence de coût associé est monotone non croissante à l'exception d'un chemin pour lequel il n'y a pas de stratégie optimale. En effet, quand les conditions  $\frac{d\|\lambda_\nu\|}{d\nu}(\nu_a) < 0$  et  $\frac{d\|\lambda_\nu\|}{d\nu}(\nu_b) > 0$  sont conjointement vérifiées et que  $N = N_{max}$ , il n'existe pas a priori de stratégie permettant de diminuer le coût à l'itération suivante.

#### Calcul du vecteur $\lambda$ et reconstruction du primer vector

Contrairement à la section précédente, seule la condition (2.3) est ici exploitée dans un premier temps pour évaluer des vecteurs candidats  $\lambda$ . La contrainte (2.3),

$$\lambda^T Y(\nu_i) Y(\nu_i)^T \lambda = 1, \quad \forall \nu_i \in T_{imp}, \quad (2.14)$$

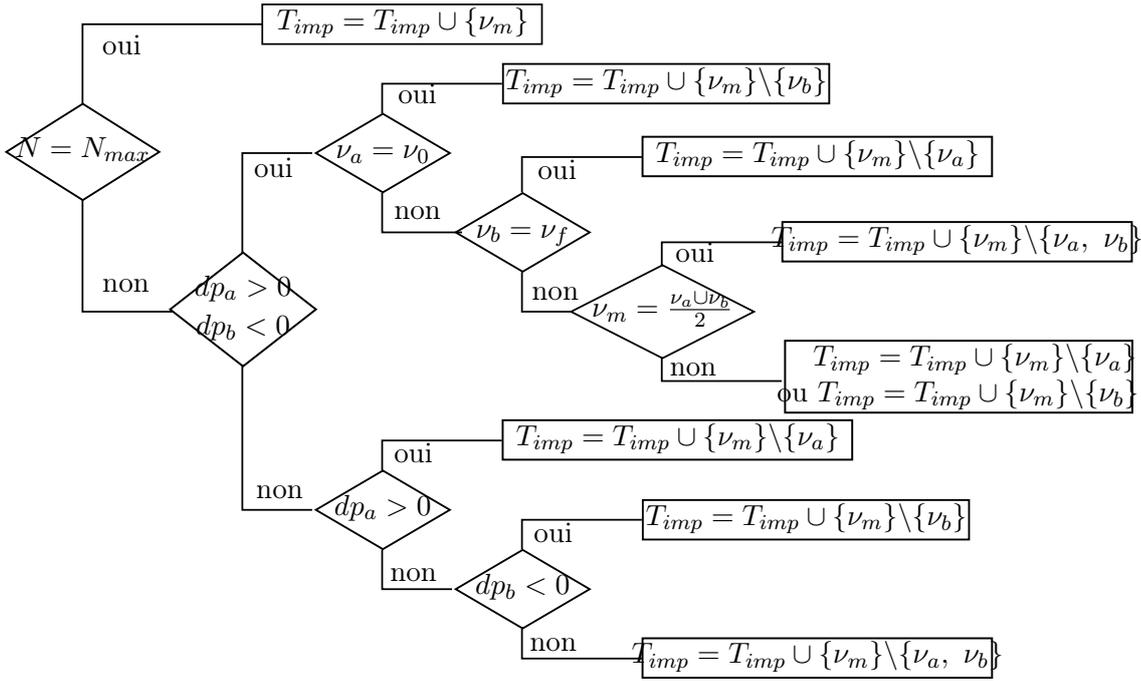


FIGURE 2.1 – Arbre de décision pour la sélection des dates

est un système d'équations multivariées quadratiques en fonction des éléments de  $\lambda$ . La résolution d'un tel système d'équation nécessite des outils spécifiques tels que PHCPack, un outil de résolution d'équation polynomiale par continuation homotopique développé par J. Verschelde [139]. La résolution de l'équation (2.14) produit un ensemble, noté  $\Lambda$ , de 8 solutions appartenant à l'ensemble de nombres complexes :

$$\Lambda = \{\lambda^i \mid (\lambda^i)^T Y(\nu_i) Y(\nu_i)^T \lambda^i = 1\}. \quad (2.15)$$

Certains éléments de  $\Lambda$  doivent être éliminés afin de ne retenir que les solutions réelles pouvant avoir un sens physique. Cet ensemble de solutions  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  est tel que

$$\Lambda_{\mathbb{R}} = \{\lambda^i \in \Lambda \mid \lambda^i \in \mathbb{R}^m\}. \quad (2.16)$$

A chaque élément de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$ , une amplitude de poussée  $\Delta v_i$  peut être associée grâce à la condition de Carter 4 (2.5) :

$$\sum_{i=1}^N [Y(\nu_i) Y^T(\nu_i)] \lambda \Delta v_i = c_f.$$

La résolution de (2.5) avec certains éléments de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  peut produire des jeux d'impulsions  $\{\Delta v_i\}$  ne vérifiant pas la condition 5 de Carter (2.6)

$$\Delta v_i \geq 0, \quad \forall i.$$

Nous définissons alors l'ensemble des solutions  $\Lambda_{\mathbb{R}+}$  tel que

$$\Lambda_{\mathbb{R}+} = \{\lambda^i \in \Lambda_{\mathbb{R}} \mid \Delta v_i \text{ vérifie (2.6)}\}. \quad (2.17)$$

Enfin, parmi les éléments de  $\Lambda_{\mathbb{R}+}$ , la solution minimisant le critère de consommation (2.7),  $\sum_{i=1}^N \Delta v_i = \lambda^T u_f$  est sélectionnée :

$$\lambda^{*i} = \arg \left[ \min_{\lambda^i \in \Lambda_{\mathbb{R}+}} c_f^T \lambda^i \right]. \quad (2.18)$$

$\lambda^{*i}$  permet par propagation d'obtenir le primer vector sur l'intervalle de la mission :

$$\lambda_v(\nu) = Y^T(\nu) \lambda^{*i}, \quad \nu \in [\nu_0, \nu_f]. \quad (2.19)$$

La condition 8 de carter (2.9) ,  $\|\lambda_v\| \leq 1$ , peut, ensuite, être analysée sur l'évolution du primer vector (2.19). Si cette condition est vérifiée, alors les valeurs de  $\lambda^{*i}$  et les dates d'impulsions associées sont optimales. Les impulsions optimales sont alors reconstruites en associant aux amplitudes de poussée calculées précédemment les directions de poussée calculées grâce à la condition 1 de Carter (2.2) :

$$\beta(\nu_i) = Y^T(\nu_i)\lambda, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Si la condition (2.9) n'est pas validée avec la valeur de  $\lambda^{*i}$  sélectionnée, nous cherchons une autre combinaison de dates en suivant la logique exposée dans le paragraphe (C.3).

En pratique, la condition (2.9),  $\|\lambda_v\| \leq 1$ , est remplacée par  $\|\lambda_v\| \leq 1 + \epsilon$ ,  $\epsilon$  définissant le critère d'arrêt de l'algorithme.

La démarche algorithmique complète est proposée à la figure 2.2. Cette démarche itérative doit être initialisée par un ensemble de dates  $T_{imp} = \{\nu_0, \nu_f\}$ . Dans les exemples illustratifs qui vont suivre, la séquence initiale sera  $T_{imp} = \{\nu_0, \nu_f\}$ .

## 2.3 Résolution du problème de Neustadt : Approche par les moments et la programmation semi-infinie

Dans cette section, nous présentons une approche récente [6] qui se fonde sur les résultats de L. Neustadt [113]. Nous donnons les grandes lignes de sa démarche qui traite le problème de rendez-vous comme un problème de moments. Les détails de cette approche sont donnés dans l'annexe D. Puis, nous proposons une méthode de programmation semi-infinie [124] pour résoudre le problème d'optimisation obtenu mais non résolu par Neustadt.

### 2.3.1 Formulation du problème de guidage comme un problème de moments

La formulation du problème de rendez-vous comme un problème de moments a été proposée en 1964 par Lucien Neustadt dans [113]. Le problème de rendez-vous décrit dans sa forme la plus générique (1.14) est repris :

$$\begin{aligned} \min_u J_u \quad & \begin{cases} X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu)u(\nu). & \text{contrainte dynamique} \\ \text{sous : } X(\nu_0) = X_0, \quad X(\nu_f) = X_f & \text{conditions initiale and finale} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

L'utilisation de la matrice de transition  $\Phi(\nu, \nu_0) = \phi(\nu)\phi^{-1}(\nu_0)$  (cf. annexe B) permet d'associer la contrainte de la dynamique aux conditions aux bords afin d'en tirer une unique contrainte de rendez-vous :

$$X_f = \phi(\nu_f)\phi^{-1}(\nu_0)X_0 + \int_{\nu_0}^{\nu_f} \phi(\nu_f)\phi^{-1}(\nu)B(\nu)u(\nu)d\nu \quad (2.21)$$

En déclarant la variable additionnelle  $c$ , la condition de rendez-vous (2.21) peut être réécrite en mettant en exergue le terme intégral :

$$c = \phi^{-1}(\nu_f)X(\nu_f) - \phi^{-1}(\nu_0)X(\nu_0) = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \phi^{-1}(\nu)B(\nu)u(\nu)d\nu. \quad (2.22)$$

Le vecteur  $c$  représente les conditions de rendez-vous et est totalement décrit par la connaissance des états relatifs initial et final ainsi que les instants initial et final de la manœuvre. Par ailleurs, en posant  $Y(\nu) = \phi^{-1}(\nu)B(\nu)$ , il vient que la contrainte de rendez-vous (2.21) peut s'écrire comme une contrainte de moments :

$$\int_{\nu_0}^{\nu_f} Y(\nu)u(\nu)d\nu = c. \quad (2.23)$$

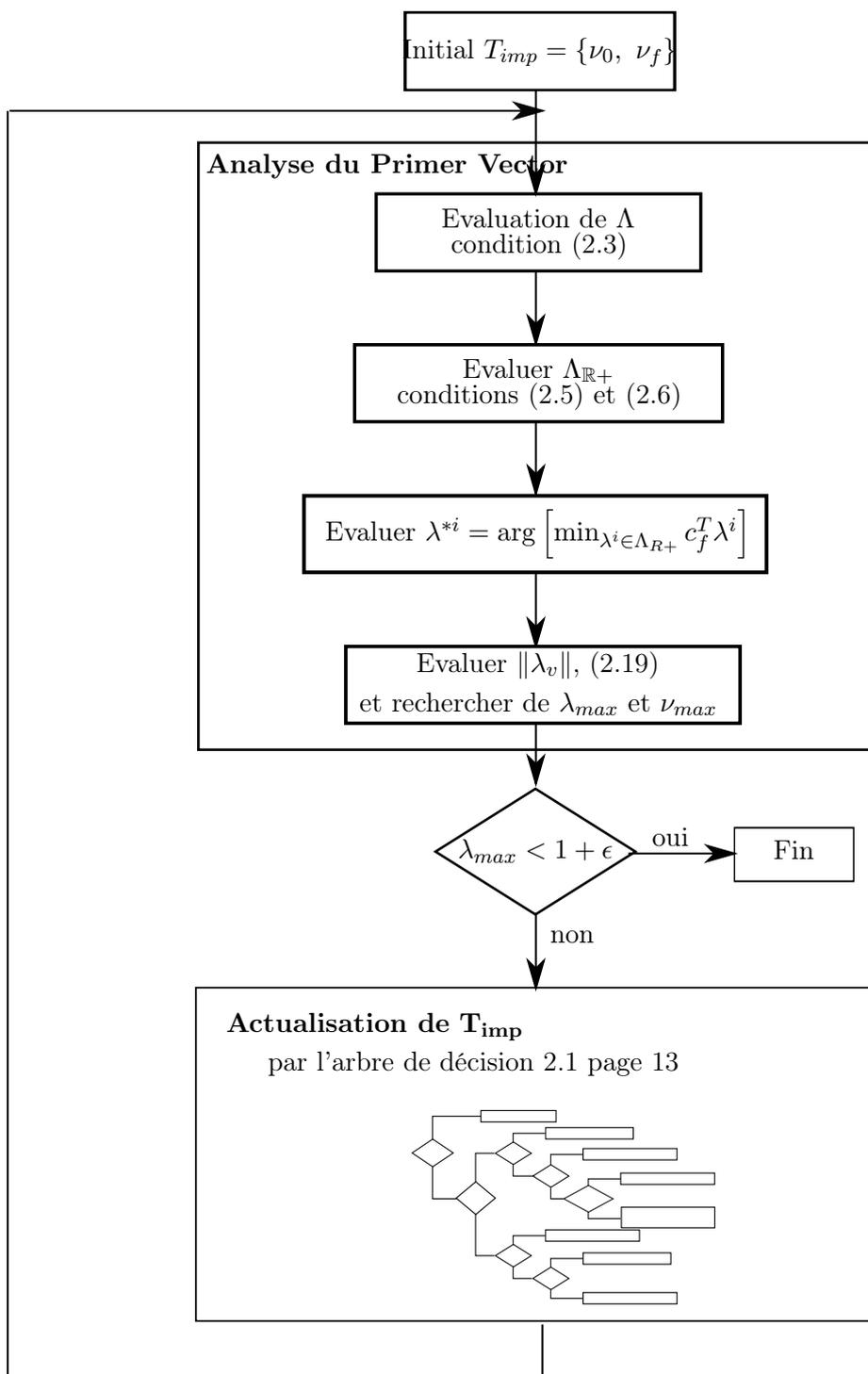


FIGURE 2.2 – Synoptique de l’algorithme, où  $\lambda_{max} = \max_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} \|\lambda_v(\nu)\|_2$

**Problème 1 (Problème de moments):**

Le problème de rendez-vous (2.20) peut alors se reformuler comme un problème de norme minimale sous une contrainte de moments :

$$\min_u \|u\|_{\mathcal{L}_p^1} \text{ sous } \int_{\nu_0}^{\nu_f} Y(\nu)u(\nu)d\nu = c. \quad (2.24)$$

où la norme  $\|u\|_{\mathcal{L}_p^1}$  est définie par

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p^1} = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \left( \sum_{j=1}^m |u_j(\nu)|^p \right)^{\frac{1}{p}} dt \quad (2.25)$$

*Remarque 2:* Il est intéressant de noter que l'ordre de la norme,  $p$ , n'est pas spécifié. Cela ouvre la possibilité de considérer chacune des deux configurations d'actionneurs présentées dans le chapitre 1. Alors que les approches précédentes ne sont valides que dans une configuration mono-propulseur ( $p = 2$ ).

En envisageant la contrainte de moments (2.23) comme un ensemble de contraintes scalaires :

$$\int_{\nu_0}^{\nu_f} y_i(\nu)u(\nu)d\nu = c_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

où les  $c_i$  sont les composantes de  $c$ , le problème (2.24) consiste ainsi à chercher la fonction intégrable au sens de Lebesgue,  $u(\nu)$ , de norme minimale, définissant la fonctionnelle linéaire  $f \mapsto \int_{\nu_0}^{\nu_f} f^T(\nu)u(\nu)d\nu$  qui envoie chaque vecteur  $y_i$  vers  $c_i$ .

**2.3.2 Transformation du problème de moments par isomorphismes et principe de dualité**

Neustadt apporte une contribution majeure dans [113] en résolvant le problème 1 par l'intermédiaire d'un problème d'optimisation paramétrique semi-infinie. La contribution de Neustadt est détaillée dans l'annexe D. Nous rappelons toutefois les grandes lignes ici.

Le premier constat établi par [113] est que le problème 1 ne trouve généralement pas de solutions si l'espace de recherche est l'ensemble des fonctions de norme intégrable au sens de Lebesgue,  $\mathcal{L}_p^1([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$ .

L'idée de Neustadt est alors de plonger le problème 1 dans un espace de recherche plus "complet" au sens où celui-ci serait équivalent par isométrie à un espace de Banach doté d'un espace dual. Le problème (2.24) trouvera ainsi dans ces deux espaces des transcriptions duale et primale concordantes. Cette démarche de transport du problème est résumée par le schéma 2.3. L'espace de recherche d'une solution optimale est maintenant celui des fonctions à variations bornées, noté  $\mathcal{G}_p$ . Il est équivalent à l'espace des fonctionnelles linéaires, noté  $\mathcal{C}^*$ . L'espace  $\mathcal{C}^*$  et l'isomorphisme le liant à l'espace  $\mathcal{G}_p$  sont définis précisément dans l'annexe D. Enfin, Neustadt démontre que le problème des moments retranscrit dans l'espace  $\mathcal{C}^*$  possède un problème primal dans l'espace des fonctions engendrées par les lignes de la matrice  $Y(\nu)$ .

**Problème 2 (Problème d'optimisation semi-infinie):**

Le problème 1 possède une contrepartie paramétrique qui est un problème d'optimisation convexe de dimension infinie :

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & -\lambda^T c \\ \text{sous} \quad & \|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le caractère infini du problème (2.27) provient de la dépendance de la contrainte en  $\nu$ . Celle-ci doit être vérifiée pour toute valeur de  $\nu \in [\nu_0, \nu_f]$  et donne lieu à un ensemble d'inégalités infiniment nombreuses.

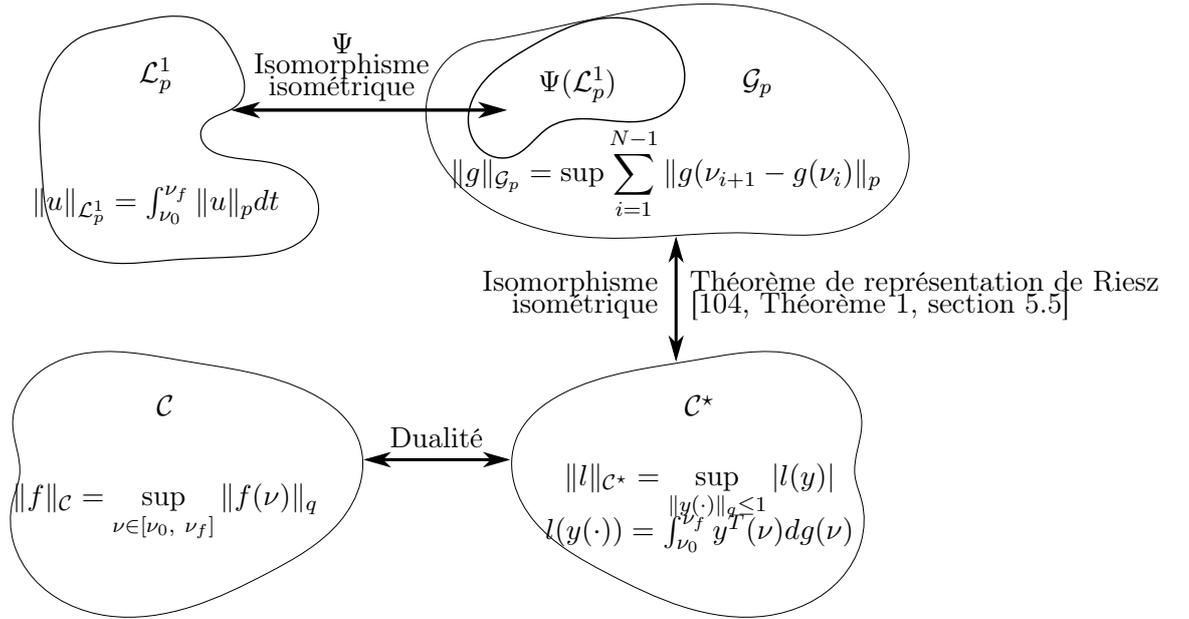


FIGURE 2.3 – Analyse topologique de la démarche de résolution de Neustadt

Si une solution au problème primal est obtenue, il reste à reconstruire la commande optimale  $u^*(\nu)$  (cf. annexe D.2.4). Nous pouvons montrer que la commande est non nulle uniquement si  $\|Y(\nu)^T \lambda\| = 1$ . Soit le sous-ensemble fermé de l'intervalle  $[\nu_0, \nu_f]$  défini par

$$\Gamma = \{\nu \mid \|Y^T(\nu)\lambda\|_q = 1, \nu \in [\nu_0, \nu_f]\} \quad (2.28)$$

Cet ensemble dont on peut prouver qu'il est non vide comporte des dates isolées et/ou des intervalles. Les instants d'impulsions correspondent aux dates isolées de  $\Gamma$ . Dans le cas où  $\Gamma$  ne comporte que des dates isolées, il est montré formellement dans [113] que leur nombre  $\eta$  est borné par  $n$ , la dimension de l'état. Les impulsions sont ensuite calculées par inversion du système :

$$c = \sum_{i=1}^{\eta} Y(\nu_i^*) \Delta V(\nu_i^*) \quad (2.29)$$

Notre contribution, exposée dans la sous-section suivante, consiste à proposer une méthode de résolution du problème 2.

### 2.3.3 Résolution du problème d'optimisation semi-infinie

Les paragraphes précédents ont retranscrit le problème de commande optimale (2.20) comme un problème d'optimisation paramétrique (2.27). Malgré un travail complet et rigoureux, Neustadt laisse à ses lecteurs le soin de résoudre le problème 2 d'optimisation semi-infinie. Notre contribution, publiée dans [6], consiste à fournir une approximation de la solution optimale. Notre méthodologie a l'avantage de garantir l'erreur commise et ainsi de permettre la localisation de la solution optimale à une précision près fixée par l'utilisateur.

L'approche développée ici s'appuie sur une méthode décrite dans [124] et propose d'approcher la solution d'un problème de programmation semi-infinie par une séquence de solutions à des problèmes d'optimisation de dimension finie. Ces problèmes sont, dans les faits, des discrétisations du problème semi-infini. Dans [124], il est montré que, sous certaines conditions, un choix approprié des programmes discrétisés permet la convergence globale de la méthode.

### Programmation semi-infinie et autres définitions

Dans ce chapitre, un problème d'optimisation semi-infinie est défini comme suit [124] :

**Définition 1 (Problème d'optimisation semi-infinie).** — Soient  $x$  un vecteur de variables de décision et,  $l$  un vecteur de paramètres. On considère le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{sous} \quad & g(x, l) \leq 0, \quad l \in L \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $f(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  et  $g(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times L, \mathbb{R})$  sont des fonctions continues définies sur l'ensemble de leurs domaines respectifs. Si l'ensemble de paramètres  $L$  est un ensemble compact non réduit à un singleton ou un ensemble de singletons, le problème (2.30) est appelé problème d'optimisation semi-infinie. Dans le cas contraire, le problème d'optimisation est un problème de dimension finie.

Le problème (2.27), noté par la suite  $P(\mathcal{V})$ ,

$$\begin{aligned} \mu = \min_{\lambda} \quad & -\lambda^T c \\ \text{sous} \quad & \|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1 \end{aligned} \quad (P(\mathcal{V}))$$

correspond à cette définition des problèmes semi-infinis. En particulier, le problème  $P(\mathcal{V})$  est un problème d'optimisation paramétrique en  $\lambda$  car il consiste à minimiser un coût linéaire sous une contrainte convexe de norme bornée. De plus, le paramètre temporel du problème,  $\nu$ , appartenant à l'intervalle  $\mathcal{V} = [\nu_0, \nu_f]$ , la contrainte de norme bornée doit être vérifiée sur un continuum de valeur de  $\nu$  et donne donc lieu à un ensemble de contraintes infiniment nombreuses. Dans ce contexte, nous noterons  $M(\mathcal{V})$  l'espace admissible associé au problème  $P(\mathcal{V})$ ,

$$M(\mathcal{V}) = \{\lambda \mid \|Y^T(\nu)\lambda\|_q \leq 1, \quad \nu \in \mathcal{V}\} \quad (2.31)$$

La définition suivante décrit les problèmes discrétisés et sous-optimaux associés à  $P(\mathcal{V})$

**Définition 2 (Problème d'optimisation discrétisé).** — Soient le vecteur de variable de décision  $\lambda$  et le paramètre temporel  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{V}_s$  un sous-ensemble discret (i.e. constitué de singletons) de  $\mathcal{V}$ . On nomme  $P(\mathcal{V}_s)$  le problème d'optimisation paramétrique de dimension finie suivant :

$$\begin{aligned} \mu^s = \min_{\lambda} \quad & -\lambda^T c \\ \text{sous} \quad & \|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1, \nu \in \mathcal{V}_s. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dans notre cas, l'ensemble discret  $\mathcal{V}_s$ , appelé aussi grille de discrétisation, peut être par exemple donné par  $\mathcal{V}_s = \{\nu_1, \dots, \nu_s\}$  tel que

$$\nu_0 \leq \nu_1 < \dots < \nu_s \leq \nu_f. \quad (2.33)$$

L'espace admissible associé au problème discrétisé (2.32) est noté

$$M(\mathcal{V}_s) = \{\lambda \mid \|Y^T(\nu)\lambda\|_q \leq 1, \quad \nu \in \mathcal{V}_s\} \quad (2.34)$$

**Définition 3 (Ensemble de niveau).** — Soient  $\bar{\lambda}$  un point admissible  $M(\mathcal{V})$ , s'il existe, et un ensemble  $\mathcal{V}_s$  tel que  $\mathcal{V}_s \subseteq \mathcal{V}$ . On définit  $\Lambda(\cdot)$ , l'ensemble de niveau

$$\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_s) = M(\mathcal{V}_s) \cap \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid c^T \lambda \leq c^T \bar{\lambda}\}. \quad (2.35)$$

### 2.3.4 Grille initiale $\mathcal{V}_0$ et ensemble de niveau $\Lambda(\cdot, \mathcal{V}_0)$ circonscrit

La méthode proposée dans [124] se base sur un algorithme itératif qui résout une séquence de problèmes discrétisés,  $P(\mathcal{V}_s)$ , dont les solutions doivent tendre vers celle du problème originel,  $P(\mathcal{V})$ . La convergence de cet algorithme est assurée si l'ensemble de niveau  $\Lambda(\cdot, \mathcal{V}_0)$  est borné :

**Hypothèse 1:** *Il existe une solution admissible  $\bar{\lambda} \in M(\mathcal{V})$  et une grille  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$  telles que l'ensemble de niveau  $\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_0)$  est borné.*

L'hypothèse 1 nécessite à son tour que l'ensemble  $M(\mathcal{V}_0)$  soit borné. Afin de vérifier que  $M(\mathcal{V}_0)$  est borné, il nous faut étudier la contrainte  $\|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1$  où  $\nu \in \mathcal{V}_0$ . Nous détaillerons plus particulièrement les cas  $q = 2$  et  $q = \infty$  qui correspondent respectivement aux cas d'un satellite mono propulseur ( $p = 2$  et  $q = 2$ ) et d'un satellite propulsé suivant chacun des axes ( $p = 1$  et  $q = \infty$ ).

#### Cas $q = \infty, p = 1$

Dans le cas où la consommation est donnée par la norme d'ordre 1 ( $p = 1, q = \infty$ ), la contrainte de dimension finie du problème  $P(\mathcal{V}_0)$  s'écrit :

$$\|Y^T(\nu)\lambda\|_\infty \leq 1 \iff |y_j^T(\nu)\lambda| \leq 1 \iff \begin{cases} y_j^T(\nu)\lambda \leq 1 \\ -y_j^T(\nu)\lambda \leq 1 \end{cases}, \quad \nu \in \mathcal{V}_0 \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.36)$$

où  $y_j(\nu) \in \mathbb{R}^n$  sont les  $m$  colonnes de la matrice  $Y(\nu)$ . Nous pouvons démontrer que les colonnes  $y_j$  sont linéairement indépendantes (le rang de la matrice  $Y$  est égal à  $m$ ) par analyse du Wronskien de la matrice  $Y$  :

$$W(\nu) = \det \left( \begin{bmatrix} Y & \frac{dY}{d\nu} \end{bmatrix} \right) \neq 0, \quad \forall \nu. \quad (2.37)$$

La condition (2.36) contient  $2m \cdot \text{card}(\mathcal{V}_0)$  contraintes linéaires. Or, afin de définir un polytope borné de dimension  $n, n + 1$  plans sont nécessaires. Si  $\mathcal{V}_0$  contient une seule valeur, le nombre de contraintes linéaires (2.36) égale la dimension ce qui est insuffisant pour définir un polytope borné. Ainsi, la grille  $\mathcal{V}_0$  doit comporter un minimum de deux éléments dans l'objectif de définir un ensemble  $M(\mathcal{V}_0)$  borné :  $\mathcal{V} = \{\nu', \nu''\}$ .

Cette première condition nécessaire vérifiée, les contraintes linéaires (2.36) sont au nombre de  $4m$ . Une condition suffisante pour que le polytope  $M(\mathcal{V}_0)$  soit borné est que ces contraintes soient linéairement indépendantes. Ce fait peut être vérifié si

$$\det([Y(\nu') \quad Y(\nu'')]) \neq 0 \quad (2.38)$$

Cette condition est vérifiée si  $\nu'' - \nu' \neq k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Les colonnes de la matrice  $Y(\nu)$  sont indépendantes. Ainsi il suffit que  $Y(\nu') \neq Y(\nu'')$  pour la matrice  $[Y(\nu') \quad Y(\nu'')]$  soit de rang plein. Or, les premières lignes de  $Y(\nu)$  comportent le terme divergent et monotone  $J(\nu)$  parmi les autres termes trigonométriques (cf. annexe B). Ainsi si  $\nu' \neq \nu''$ , alors  $Y(\nu') \neq Y(\nu'')$ .

#### Cas $q = 2, p = 2$

Le cas  $q = 2$  est plus difficile à traiter. Afin de simplifier l'analyse, le découplage du mouvement relatif en un mouvement dans le plan d'orbite (plan  $xz$ ) et un mouvement hors du plan (axe  $y$ ) est exploité.

$$\|Y^T(\nu)\lambda\|_2 \leq 1 \iff \lambda^T Y(\nu) Y^T(\nu) \lambda \leq 1, \quad \nu \in \mathcal{V}_0 \quad (2.39)$$

Dans le cadre du mouvement dans le plan d'orbite, la matrice  $Y(\nu) \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (m-1)}$  est de rang  $m - 1 = 2$  et, par conséquent, la matrice  $Y Y^T$  est aussi de rang de  $m - 1 = 2$ . D'un point de vue géométrique, le fait que la matrice  $Y(\nu') Y^T(\nu')$  ne soit pas de rang plein indique que l'ellipsoïde décrit par (2.39) est

dégénérée et correspond à un cylindre de l'espace de  $\mathbb{R}^4$  contenant 0 et ouvert dans deux directions de cet espace. Ainsi, à l'instar du cas  $q = \infty$ , l'espace admissible  $M(\mathcal{V}_0)$  ne peut être borné si  $\mathcal{V}_0$  ne contient qu'un seul instant  $\nu'$ .

Considérons maintenant le cas où  $\mathcal{V}_0 = \{\nu', \nu''\}$ . Nous savons que pour chaque élément de  $\mathcal{V}_0$ , la contrainte  $\lambda^T Y(\nu) Y^T(\nu) \lambda \leq 1$  décrit un cylindre ouvert. Intuitivement, il suffit que les directions d'ouverture des deux cylindres ne soient pas colinéaires pour que leurs intersections forment un ensemble borné.

Par la suite, nous prouvons que pour toutes valeurs  $\nu', \nu'' \in [\nu_0, \nu_f]$  telles que  $\nu'' - \nu' \neq \pi[\pi]$ ,  $M(\mathcal{V}_0)$  est un ensemble borné.

**Proposition 1.** — Soient  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et les formes quadratiques  $q_1(\xi) = \xi^T Q_1 \xi$  et  $q_2(\xi) = \xi^T Q_2 \xi$ . Les matrices  $Q_1$  et  $Q_2$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sont semi-définies positives. Si  $\ker(Q_1) \cap \ker(Q_2) = \{0\}$  alors l'intersection  $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid q_1(\xi) \leq 1\} \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid q_2(\xi) \leq 1\}$  est bornée.

*Démonstration.* Soient les ensembles  $E_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid q_1(\xi) \leq 1\}$ ,  $E_2 = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid q_2(\xi) \leq 1\}$  et un vecteur  $\bar{\xi}$  appartenant à leur intersection,  $\bar{\xi} \in E_1 \cap E_2$ . Considérons, de plus la boule unité en dimension  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}(0, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\|_2 \leq 1\}$  et la sphère associée  $\mathcal{S}(0, 1) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi\|_2 = 1\}$ . Définissons la fonction  $f$  telle que

$$\begin{aligned} f : \mathcal{S}(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto f(\xi) = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{q_1(\xi)}}, \frac{1}{\sqrt{q_2(\xi)}} \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Par ailleurs, en prenant pour hypothèse que  $\ker(Q_1) \cap \ker(Q_2) = \{0\}$ , il vient que seul un vecteur  $\xi$  nul permet d'annuler les formes quadratiques  $q_1$  et  $q_2$  car les matrices  $Q_i$  sont semi-définies positives et non nulles pour  $i = 1, 2$ . Ainsi, pour tout vecteur  $\xi \in \mathcal{S}$ , nous avons  $f(\xi) > 0$ . En effet, la fonction  $f$  étant continue sur le compact  $\mathcal{S}$ , il existe une constante  $w > 0$  telle que

$$\forall \xi \in \mathcal{S}, \quad f(\xi) \geq w \quad (2.41)$$

Nous pouvons déduire de l'assertion précédente qu'il existe une constante  $r = \frac{1}{\sqrt{c}}$  telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\| > r \Rightarrow \begin{cases} \xi^T Q_1 \xi \\ \text{ou} \\ \xi^T Q_2 \xi \end{cases} > r^2 w = 1 \quad (2.42)$$

La conclusion de cette preuve est que l'intersection  $E_1 \cap E_2 \subseteq \mathcal{B}(0, r)$  et est en conséquence bornée.  $\square$

La proposition 1 nous indique que l'ensemble admissible  $M(\mathcal{V}_0)$  est borné si l'intersection des espaces noyaux de  $D' = Y(\nu') Y^T(\nu')$  et  $D'' = Y(\nu'') Y^T(\nu'')$  se résume au vecteur nul.

Nous pouvons montrer que l'espace noyau de  $D$ , s'écrit

$$\ker(D) = \{v \in \mathbb{R}^6, D(\nu)v = 0\} = \{\lambda_1 e_1(\nu) + \lambda_2 e_2(\nu) + \lambda_3 e_3(\nu), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}, \quad (2.43)$$

**Proposition 2.** — Soit  $\nu', \nu'' \in [\nu_0, \nu_f]$ . Si  $\nu' - \nu'' \neq k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  alors  $\ker(D(\nu')) \cap \ker(D(\nu'')) = \{0\}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord par définition, le vecteur nul appartient aux deux noyaux  $\ker(D(\nu'))$  et  $\ker(D(\nu''))$ . Si  $\ker(D(\nu')) \cap \ker(D(\nu'')) \neq \{0\}$  alors il est possible de définir des constantes

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \quad (2.44)$$

telles que

$$\alpha_1 e_1(\nu') + \alpha_2 e_2(\nu') + \alpha_3 e_3(\nu') = \beta_1 e_1(\nu'') + \beta_2 e_2(\nu'') + \beta_3 e_3(\nu'') \Leftrightarrow$$

$$[e_1(\nu') \ e_2(\nu') \ e_3(\nu') \ e_1(\nu'') \ e_2(\nu'') \ e_3(\nu'')] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.45)$$

Si  $\delta = \det([e_1(\nu') \ e_2(\nu') \ e_3(\nu') \ e_1(\nu'') \ e_2(\nu'') \ e_3(\nu'')])$  est différent de zéro alors nous avons une solution triviale en 0. Après calculs, nous pouvons montrer que  $\delta$  s'annule uniquement si et seulement si  $\bar{\nu} = \nu'' - \nu' \neq k\pi$ . □

Grâce aux propositions 1 et 2, nous venons de montrer que tout choix de grille initiale  $\mathcal{V}_0 = \{\nu', \nu''\} \in [\nu_0, \nu_f]$  telle que  $\nu'' - \nu' \neq \pi[\pi]$ , permet de définir  $M(\mathcal{V}_0)$  comme un ensemble admissible initial borné.

### 2.3.5 Approximation de $P(\mathcal{V})$ par une séquence de problèmes discrétisés

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que, pour le problème considéré, l'hypothèse 1 pouvait toujours être validée avec un choix adéquat de  $\mathcal{V}_0$ . Notons que, dans le cadre de l'optimisation convexe l'hypothèse 1 permet, de conclure à l'existence d'une solution optimale au problème 2 d'optimisation semi-infinie. En effet, pour tout vecteur admissible  $\bar{\lambda} \in M(\mathcal{V})$  et une grille  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ , il vient que  $\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}) \subseteq \Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_0)$ . Ainsi l'hypothèse 1 implique que l'espace admissible  $M(\mathcal{V})$  est borné et non vide :

**Théorème 2.** — *Si l'hypothèse 1 est satisfaite, le problème  $P(\mathcal{V})$  possède une solution,  $\lambda^*$ .*

L'approche développée dans [124] consiste à résoudre une séquence de problèmes discrétisés (2.32),  $P(\mathcal{V}_s)$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , à l'aide d'outils spécifiques d'optimisation convexe. Sous certaines conditions, notamment la construction des grilles  $\mathcal{V}_s$ , il peut être alors démontré que la séquence de solutions  $\lambda^{s*}$  générée possède un point d'accumulation  $\hat{\lambda}$ . Ce point d'accumulation est solution du problème originel  $P(\mathcal{V})$ .

En premier lieu, posons les contraintes sur la construction des grilles  $\mathcal{V}_s$ . La première condition est que la grille  $\mathcal{V}_s$  tende à recouvrir le domaine du paramètre temporel  $\mathcal{V}$  avec l'indice  $s$  croissant :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathcal{V}_s, \mathcal{V}) = 0. \quad (2.46)$$

Les grilles seront construites de manière cumulative

$$\mathcal{V}_s \subseteq \mathcal{V}_{s+1} \subseteq \mathcal{V}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

De plus, nous pouvons garantir l'existence de solutions pour les problèmes discrétisés  $P(\mathcal{V}_s)$ .

**Lemme 1.** — *Si  $\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V})$  est bornée pour un vecteur  $\bar{\lambda} \in M(\mathcal{V})$  et s'il existe une séquence de grilles  $\{\mathcal{V}_s\} \in \mathcal{V}$  telle que (2.46) est vérifiée, alors, pour un indice  $s$  suffisamment grand, l'ensemble de niveau  $\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_s)$  est compact et le problème  $P(\mathcal{V}_s)$  admet une solution.*

Ce lemme peut être facilement démontré en s'appuyant sur l'existence d'un ensemble de niveau  $\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_0)$  borné (démontré dans le paragraphe précédent) et sur les assertions (d) et (e) de la référence [124, Lemme 2.4].

En s'appuyant sur les conditions (2.46) et (2.47), nous proposons l'algorithme délivrant la séquence des solutions  $\{\lambda^{s*}\}$ .

Un choix possible de récurrence pour la construction des grilles est donné par :

$$\mathcal{V}_{s+1} = \mathcal{V}_s \cup \left\{ \arg \left[ \max_{\nu \in \bar{\mathcal{V}}} \|Y^T(\nu)\lambda\|_q \right] \right\} \quad (2.48)$$

La grille  $\bar{\mathcal{V}}$  représente l'intervalle  $\mathcal{V}$  à la résolution numérique près de l'outil de calcul. L'introduction de  $\bar{\mathcal{V}}$  à la place de l'intervalle  $\mathcal{V}$  va permettre de démontrer la convergence de l'algorithme de résolution dans un contexte numérique. On pourra alors observer que les conditions de convergence ne sont pas dégradées au regard des résultats exposés dans [124].

**Théorème 3 ([124]).** — *En considérant vérifiée l'hypothèse 1 d'ensemble de niveau  $\Lambda(\cdot, \mathcal{V}_0)$  borné, l'algorithme 2.3.1 génère une séquence de solutions  $\{\lambda^{s*}\}$  ayant un point d'accumulation  $\hat{\lambda}$  qui est la solution  $\lambda^*$  du problème originel  $P(\mathcal{V})$  si  $\hat{\lambda} \in M(\mathcal{V})$ . De plus, la séquence de coût associé  $\{\mu^s\}$  aux problèmes  $P(\mathcal{V}_s)$  croît de façon monotone vers le coût optimal  $\mu$  associé à  $P(\mathcal{V})$ .*

**Entrées :** Intervalle  $\mathcal{V} = [\nu_0, \nu_f]$ , matrice  $Y(\nu)$ , conditions aux bords  $c$ , tolérance  $\epsilon$

**Sorties :**  $\mu^s$  et  $\lambda^{s*}$

**Initialisation :**

(i)  $i \leftarrow 0$ ;

(ii)  $\mathcal{V}_0 \leftarrow \{\nu_1, \nu_2\}$  tel que  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{V}$  et  $\nu_2 - \nu_1 \neq \pi[\pi]$ ;

(iii) Calculer la commande  $\Delta V$  à partir de la condition de rendez-vous (2.22) :

$$c = \sum_{i=1}^{\text{card}\mathcal{V}_0} Y(\nu_i)\Delta V(\nu_i), \nu_i \in \mathcal{V}_0;$$

(iv) Calculer  $\lambda^0$  à partir du système d'équations :

$$Y^T(\nu)\lambda^0 = \frac{\Delta V(\nu)}{\|\Delta V(\nu)\|_p}, \quad \nu \in \mathcal{V}_0$$

**1 tant que**  $\max_{\nu \in \bar{\mathcal{V}}} \|Y^T(\nu)\lambda^i\|_q - 1 > \epsilon$  **faire**

—  $i \leftarrow i + 1$ ;

—  $\mathcal{V}_i \leftarrow \mathcal{V}_{i-1} \cup \left\{ \arg \left[ \max_{\nu \in \bar{\mathcal{V}}} \|Y^T(\nu)\lambda^i\|_q \right] \right\}$

— Résoudre le problème discrétisé (2.32) :

$$\begin{array}{ll} \min_{\lambda} & -\lambda^T c \\ \text{sous} & \|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1, \nu \in \mathcal{V}_i \end{array}$$

**2 fin**

**3 retourner**  $\mu^i, \lambda^i$

**Algorithme 2.3.1 :** Algorithme des discrétisations convergentes [124]

*Démonstration.* Soit un vecteur admissible  $\bar{\lambda} \in M(\mathcal{V})$ . La grille de recouvrement  $\bar{\mathcal{V}}$  étant inclus par définition dans  $\mathcal{V}$ , il vient :

$$\{\bar{\lambda}\} \subseteq \Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}) \subseteq \Lambda(\bar{\lambda}, \bar{\mathcal{V}}) \subseteq \Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_{s+1}) \subseteq \Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_s) \subseteq \Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_0) \quad (2.49)$$

Par hypothèse,  $\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_s)$  est compact et le problème  $P(\mathcal{V}_s)$  admet une solution dans l'ensemble  $\Lambda(\bar{\lambda}, \mathcal{V}_0)$ . De plus de part les inclusions successives (2.49), nous avons  $c^T \lambda^{s*} \leq c^T \lambda^{s+1*} \leq c^T \lambda^*$ . Ainsi, la séquence

de solutions  $\{\lambda^{s*}\}$  converge vers un point d'accumulation  $\hat{\lambda}$  tel que  $c^T \hat{\lambda} \leq c^T \lambda^*$ . De même, si  $\hat{\lambda}$  vérifie  $\|Y^T(\nu)\hat{\lambda}\|_q \leq 1$ , alors  $\hat{\lambda}$  est solution de  $P(\mathcal{V})$ .

Par ailleurs, nous pouvons définir deux séquences d'instantanés  $\{\nu'_s\}$  et  $\{\nu''_s\}$  appartenant à la grille de recouvrement  $\bar{\mathcal{V}}$  telles qu'elles tendent respectivement vers les valeurs  $\hat{\nu}'$  et  $\hat{\nu}''$  appartenant à l'intervalle continu  $\mathcal{V}$ . En posant  $\|Y^T(\nu'_s)\lambda^s\|_q \leq \|Y^T(\nu''_s)\lambda^s\|_q$ , il vient  $\|Y^T(\hat{\nu}')\hat{\lambda}\|_q \leq \|Y^T(\hat{\nu}'')\hat{\lambda}\|_q$ . De plus, si  $\|Y^T(\nu''_s)\hat{\lambda}\|_q \leq 1$  pour  $s$  suffisamment grand, alors nous pouvons conclure que  $\|Y^T(\hat{\nu}'')\hat{\lambda}\|_q \leq 1$  ce qui implique  $\|Y^T(\hat{\nu}')\hat{\lambda}\|_q \leq 1$ .  $\square$

### 2.3.6 Analyse de précision des sorties

L'un des principaux intérêts de la méthode est de permettre une analyse rigoureuse et certifiée de la précision de la solution  $\lambda^i$  extraite de l'algorithme 2.3.1. Cette analyse se concrétise par un bornage certifié du coût optimal  $\mu$  en fonction des sorties de l'algorithme 2.3.1.

Dans un premier temps, une borne supérieure sur le coût optimal peut être évaluée en remarquant que la discrétisation du problème (2.27) lui procure des approximations extérieures. En effet, l'espace admissible  $M(\mathcal{V})$  est inclus dans l'espace admissible du problème discrétisé  $M(\mathcal{V}_s)$ . Ce fait indique que la solution  $\lambda^{s*}$  au problème  $P(\mathcal{V}_s)$  n'est généralement pas une solution admissible pour le problème  $P(\mathcal{V})$  et qu'elle vérifie

$$\mu^s = \inf_{\lambda \in M(\mathcal{V}_s)} -c^T \lambda \leq \mu^* = \inf_{\lambda \in M(\mathcal{V})} -c^T \lambda \quad (2.50)$$

On en déduit la borne supérieure sur le terme  $c^T \lambda^*$  :

$$c^T \lambda^* \leq -\mu^i \quad (2.51)$$

Dans un second temps, une borne inférieure sur le coût optimal peut être certifiée.

**Lemme 2.** — *Supposons que l'algorithme 2.3.1 délivre une solution  $\lambda^s$  vérifiant rigoureusement*

$$\|Y^T(\nu)\lambda^s\|_q \leq 1 + \epsilon \quad (2.52)$$

où  $\epsilon$  représente la tolérance définie par l'utilisateur. Il vient alors

$$-\frac{\mu^s}{1 + \epsilon} \leq -c^T \lambda^* \quad (2.53)$$

*Démonstration.* La preuve consiste simplement à remplacer le problème (2.27) par

$$-\min_{\|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1 + \epsilon} \frac{\lambda^T c}{1 + \epsilon} \geq -\frac{c^T \lambda^s}{1 + \epsilon} \quad (2.54)$$

Ce qui mène à la conclusion :

$$-\frac{c^T \lambda^s}{1 + \epsilon} \leq -\frac{c^T \lambda^*}{1 + \epsilon} \leq -c^T \lambda^* \quad (2.55)$$

$\square$

### 2.3.7 Reconstruction des impulsions

Une fois l'ensemble  $\Gamma = \{\nu_1^*, \dots, \nu_\eta^*\}$  calculé, la condition de rendez-vous,

$$c = \sum_{i=1}^{\eta} Y(\nu_i^*) \Delta V(\nu_i^*), \quad (2.56)$$

doit permettre de reconstruire l'ensemble des impulsions  $\Delta V(\nu_i^*)$ . Nous pouvons remarquer que l'équation (2.56) est sous déterminée au delà de  $\eta = 2$  impulsions. En effet,  $c \in \mathbb{R}^n$  et  $\Delta V_i \in \mathbb{R}^m$  où  $m = n/2$ . Cette indétermination sera levée par la résolution du problème d'optimisation paramétrique suivant

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V_i} \quad & \sum_{i=1}^{\eta} \|\Delta V_i\|_p \\ \text{sous} \quad & c = \sum_{i=1}^{\eta} Y(\nu_i^*) \Delta V_i, \end{aligned} \quad (2.57)$$

Si  $p = 1$ , le problème (2.57) pourra être réduit à un problème de programmation linéaire. Dans le cas où  $p = 2$ , ce problème est un problème de programmation conique d'ordre 2 qui peut être résolu efficacement avec des algorithmes de point intérieur par exemple.

## 2.4 Application des algorithmes et analyse de cas

Dans cette section, nous analysons les résultats obtenues pour plusieurs missions par les deux algorithmes décrits dans les sections 2.2.2 et 2.3 afin de valider et comparer les méthodologies. Ainsi, nous fixerons  $p = 2$  pour nous situer dans le même contexte. le cas  $p = 1$  sera abordé dans le chapitre suivant à des fins de comparaison. La notation  $\lambda_{max}$  correspond dans le cas de l'algorithme de la section 2.2.2 à

$$\lambda_{max} = \max_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} \|\lambda_v(\nu)\|_2. \quad (2.58)$$

Dans le cas du second algorithme, la valeur de  $\lambda_{max}$  est donnée par

$$\lambda_{max} = \max_{\nu \in \bar{\mathcal{V}}} \|Y^T(\nu)\lambda^i\|_2 \quad (2.59)$$

Dans les deux cas, ce paramètre permet d'évaluer la transgression des contraintes  $\|\lambda_v\|_2 \leq 1$  ou  $\|Y^T(\nu)\lambda^i\|_2$  selon l'algorithme.

### PRISMA 1

La mission PRISMA 1 est décrite au tableau E.1 page 137. Les résultats de chacune des méthodes sont compilés dans le tableau 2.1. La méthode de la section 2.2.2 proposent une solution à 4 impulsions pour un coût de  $43.257 \text{ cm/s}$ . L'algorithme 2.3.1 permet d'obtenir les figures 2.4. Pour une précision attendue de  $10^{-2}$ , l'algorithme 2.3.1 obtient une solution à 4 impulsions réparties de manière symétrique dans le temps une à chaque extrémité et deux impulsions intermédiaires. Les impulsions aux extrémités de la manoeuvre concentrent la majeure partie de la consommation. Les solutions des deux méthodes sont équivalentes à la fois en termes de consommation et de structure de plan de guidage mais aussi en termes de trajectoire obtenue (non reproduite ici).

Tandis que l'algorithme de la section 2.2.2 ne permet pas d'obtenir une précision inférieure à  $5 \cdot 10^{-3}$ , l'algorithme développé dans la section 2.3 délivre toujours une solution à la précision  $\epsilon$  près au prix d'une accumulation de contraintes. Nous avons ainsi étudié l'influence du paramètre d'arrêt  $\epsilon$  sur les résultats (cf. tableau 2.1). Lorsque la tolérance  $\epsilon$  est réduite à  $10^{-4}$ , le plan de guidage présente toujours quatre impulsions mais la structure est transformée. En effet, la première impulsion est déplacée vers l'intérieur de l'intervalle de temps. La seconde impulsion s'est fortement rapproché de l'emplacement de la troisième qui s'est aussi légèrement décalée vers  $\nu_f$ . Seul l'instant de l'impulsion terminal n'est pas modifié. Nous pouvons remarquer que le coût en consommation a augmenté avec la précision. En effet, l'algorithme approche le coût optimal par valeur inférieure. Enfin, lorsque  $\epsilon = 10^{-6}$ , la solution calculée est très proche de la solution optimale car  $\lambda_{max} = 1$  à la précision machine près. Nous obtenons alors un plan de guidage à 3 impulsions (voir les figures 2.4c et 2.4d) : les première et dernière impulsions sont situées autour de  $0.2 \text{ rad}$  et en  $\nu_f$  comme précédemment. Les deux impulsions intermédiaires ont fusionné : la nouvelle impulsion se situe entre les deux emplacements précédents. Dans cette configuration,

le coût est légèrement amélioré. Alors que l'on s'attend à une dégradation du coût en raison de l'ajout de contraintes, il s'avère que le comportement observé correspond aux résultats de Lion et Handelsmann sur l'amélioration du coût d'une trajectoire (cf. la section C.3).

Paramètre d'arrêt $\epsilon$	Algo. section 2.2.2		Algo. section 2.3					
	$10^{-2}$		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
Nb. d'itérations	6		6		10		14	
$\nu_i$ [rad]	$\left\{ \begin{array}{cc} 0, & 1.09095, \\ 18.29646, & 19.36220 \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{cc} 0, & 1.08196, \\ 18.29658, & 19.36240 \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{cc} 0.20993, & 18.49036, \\ 18.60341, & 19.36240 \end{array} \right\}$		$\left\{ 0.19378, 18.51459, 19.36240 \right\}$	
$\Delta V(\nu_1)^T$ [cm/s]	17.048	0 -0.252	17.041	0 -0.25	18.392	0 -0.340	18.387	0 -0.335
$\Delta V(\nu_2)^T$ [cm/s]	1.297	0 -0.043	1.303	0 -0.040	-3.911	0 -0.072	-4.765	0 -0.091
$\Delta V(\nu_3)^T$ [cm/s]	-6.086	0 -0.207	-6.079	0 -0.211	-0.441	0 -0.007	-20.182	0 -0.461
$\Delta V(\nu_4)^T$ [cm/s]	-18.819	0 -0.218	-18.826	0 -0.200	-20.602	0 -0.473	× × ×	
Coût [cm/s]	43.257		43.257		43.355		43.344	
$\lambda_{max}$	1.005638		1.005581		1.000045		$1 - 7 \cdot 10^{-16}$	

TABLE 2.1 – Résultats pour le cas PRISMA 1

### ATV 3

La mission ATV 3 présentée dans le tableau E.5 page 140 consiste en une manœuvre d'approche de 30 km à 100 m. La durée de cette manœuvre est de 10 orbites. L'algorithme de la section 2.2.2 donne une solution à 3 impulsions qui a la caractéristique d'être distribuée principalement sur l'impulsion initiale et suivant l'axe  $x$  (cf. tableau 2.2). Cette solution est obtenue après 6 itérations pour une précision  $\epsilon = 10^{-4}$ . L'erreur commise sur la condition  $\lambda_{max} \leq 1$  est de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-5}$ . Avec l'algorithme 2.3.1, le problème est résolu en 5 itérations avec une erreur sur la condition  $\|Y(\nu)\lambda\|_q \leq 1$  de l'ordre de  $10^{-5}$ . Une sixième itération permet d'assurer numériquement cette même condition. Le plan obtenu comporte trois impulsions dont deux sont situées aux extrémités  $\nu_0$  et  $\nu_f$ . De nouveau, La première impulsion concentre la plus grande partie de la consommation. Les deux dernières impulsions, de plus faible amplitude, sont situés en fin de mission. Pour cette mission, les solutions fournies par les deux algorithmes sont équivalentes en termes de consommation et de structure de plan de guidage. Les résultats graphiques () sont donnés par les figures 2.5.

Paramètre d'arrêt $\epsilon$	Algo. section 2.2.2		Algo. section 2.3					
	$10^{-2}$		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
Nb. d'itérations	6		2		5		6	
$\nu_i$ [rad]	$\left\{ 0, 59.8868, 62.8313 \right\}$		$\left\{ 0, 59.68730, 62.83149 \right\}$		$\left\{ \begin{array}{cc} 0, & 59.84451, \\ 59.94931, & 62.83149 \end{array} \right\}$		$\left\{ 0, 59.89691, 62.83149 \right\}$	
$\Delta V(\nu_1)^T$ [m/s]	-7.55418	0 0.23360	-7.55414	0 0.23633	-7.55410	0 0.23877	-7.55410	0 0.23877
$\Delta V(\nu_2)^T$ [m/s]	0.14408	0 0.00103	0.14263	00.00262	0.06001	0 0.00039	0.14422	0 0.00086
$\Delta V(\nu_3)^T$ [m/s]	0.04166	0 0.00129	0.04406	0 0.00104	0.08444	0 0.00039	0.04147	0 0.00130
$\Delta V(\nu_4)^T$ [m/s]	× × ×		× × ×		0.04121	0 0.00130	× × ×	
Coût [m/s]	7.74356		7.74397		7.74357		7.74356	
$\lambda_{max}$	1.000068		1.007312		$1 + 6 \cdot 10^{-5}$		$1 - 2 \cdot 10^{-10}$	

TABLE 2.2 – Résultats pour le cas ATV 3

### ATV 2

Dans la variation courte de la mission ATV, la durée du rendez-vous est ramenée à 2 heures soit 1.3 période d'orbite. Les conditions initiale et finale sont identiques à la mission précédente. Cette mission

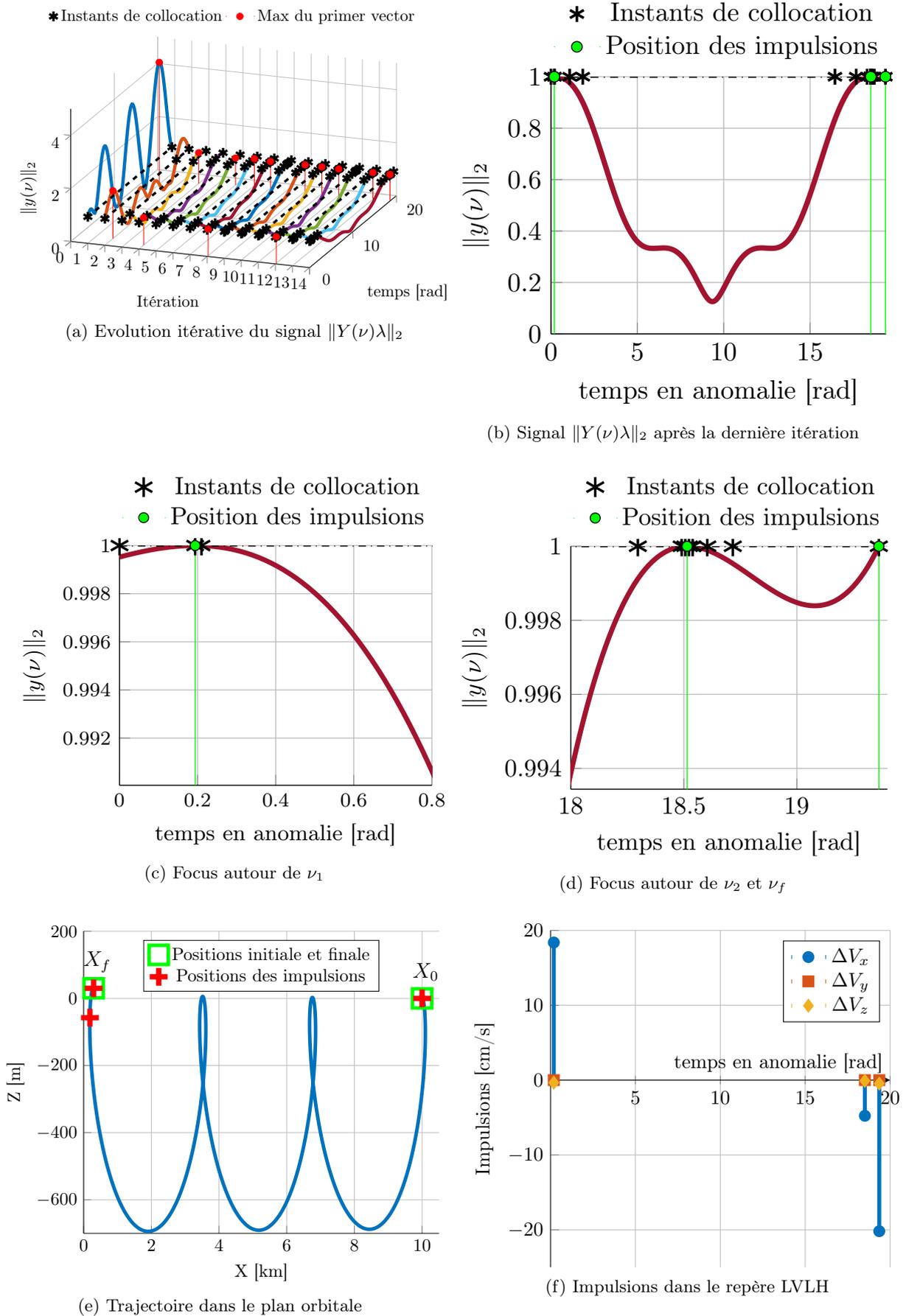


FIGURE 2.4 – Résolution du cas PRISMA 1

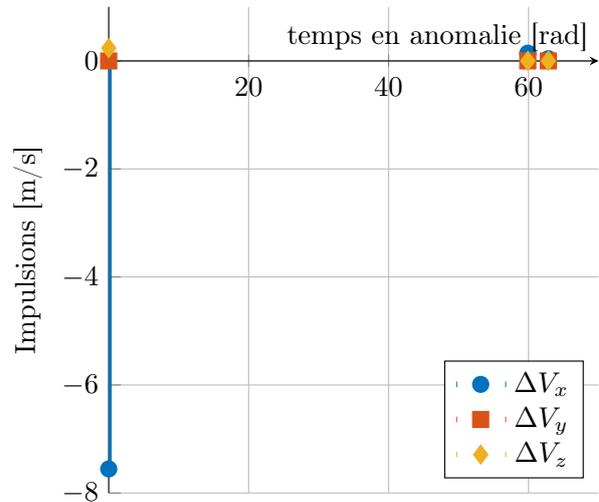
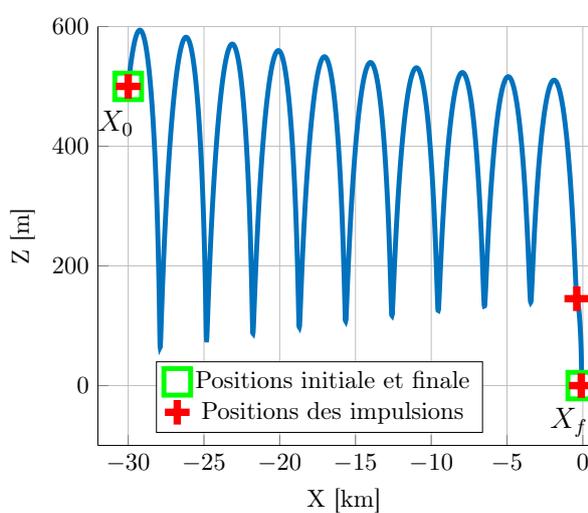
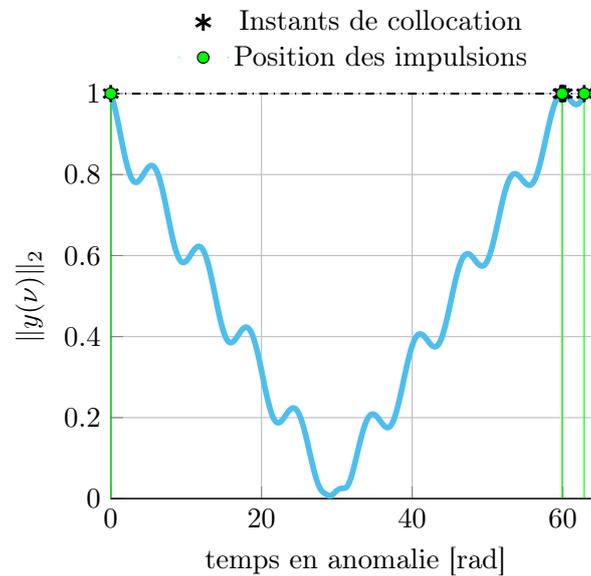
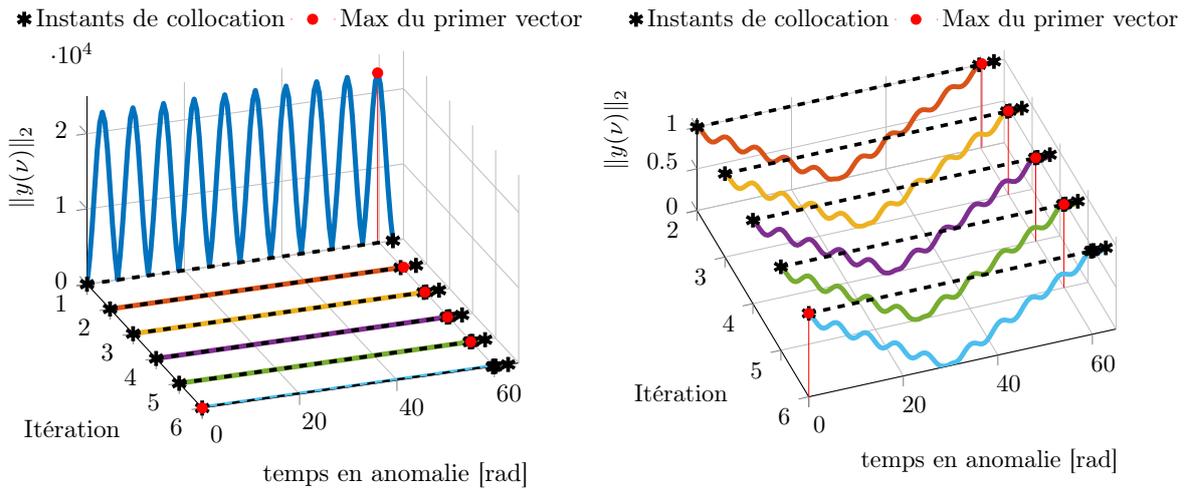


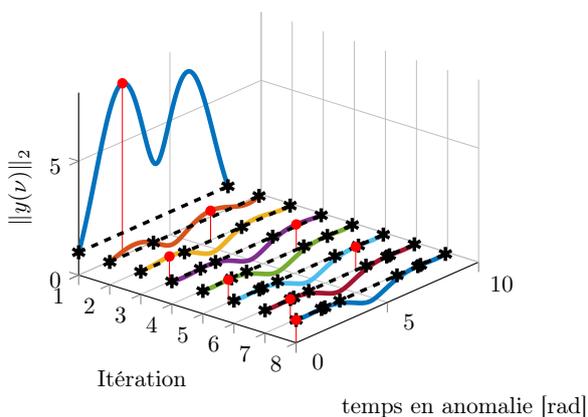
FIGURE 2.5 – Résolution du cas ATV 3

ATV 2 est décrite en annexe à la page 139. L'algorithme de la section 2.2.2 ne parvient pas à trouver une solution acceptable. En effet, à la troisième itération, la valeur de  $\lambda_{max}$  est clairement supérieure à 1 (voir tableau 2.3). Cependant, à la quatrième itération, le solveur polynomial n'a pu fournir de solution appartenant à  $\Lambda_{\mathbb{R}^+}$  à savoir des solutions  $\lambda$  réelles vérifiant la condition de Carter CNS5 ( $\Delta v_i \geq 0 \forall i$ ). En d'autres termes, il n'existe pas de contrôle exécuté aux instants représentés sur la figure 2.6c permettant de remplir la condition de rendez-vous (2.5). Par ailleurs, l'algorithme de la section 2.3 permet de calculer des solutions qui sont exposées dans le tableau 2.3. Les figures 2.6 reproduisent la solution calculée avec  $\epsilon = 10^{-6}$ . Cette solution obtenue après 8 itérations vérifie numériquement la condition  $\|Y(\nu)\lambda\|_q \leq 1$ . La structure optimale du plan de guidage comporte quatre impulsions réparties de manière grossièrement symétrique sur la durée de la mission : deux impulsions sont positionnées en  $\nu_0$  et  $\nu_f$  et les deux impulsions intermédiaires sont situées à distances équivalentes de ces extrémités. La consommation se réalise majoritairement lors des deux premières impulsions.

Paramètre d'arrêt $\epsilon$	Algo. section 2.2.2		Algo. section 2.3					
	$10^{-2}$		$10^{-2}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$	
Nb. d'itérations	3		5		7		8	
$\nu_i$ [rad]	$\left\{ \begin{array}{l} 0, \quad 2.39457, \\ 5.53231, \quad 8.18283 \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} 0, \quad 1.56973 \\ 6.81808, \quad 8.18306 \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} 0, \quad 1.39228, \\ 6.66792, \quad 8.18305 \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} 0, \quad 1.38545, \\ 6.66792, \quad 8.18305 \end{array} \right\}$	
$\Delta V(\nu_1)^T$ [m/s]	-8.45481	0 0.54169	-7.38310	0 0.67563	-7.53677	0 0.70244	-7.53902	0 0.70317
$\Delta V(\nu_2)^T$ [m/s]	-0.70285	0 0.16458	-1.67822	0 0.13203	-1.52296	0 0.09271	-1.52074	0 0.09163
$\Delta V(\nu_3)^T$ [m/s]	0.85472	0 0.19205	0.35575	0 0.01306	0.64735	0 0.03204	0.65621	0 0.03250
$\Delta V(\nu_4)^T$ [m/s]	0.93528	0 0.10461	1.33841	0 0.15255	1.04505	0 0.11875	1.03622	0 0.11770
Coût [m/s]	11.01117		10.80040		10.79516		10.79515	
$\lambda_{max}$	1.112288		1.00254		$1 + 1 \cdot 10^{-6}$		$1 - 3 \cdot 10^{-10}$	

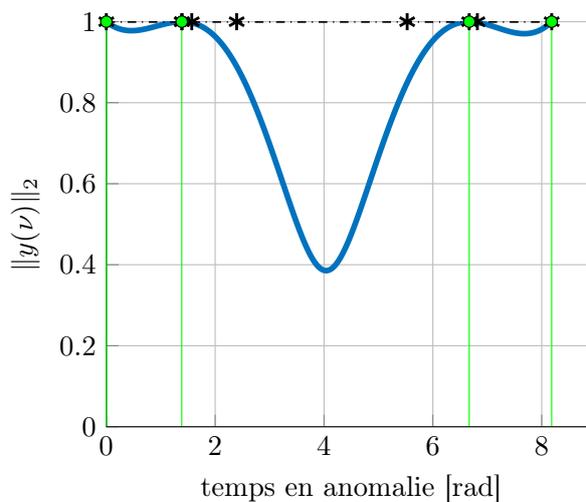
TABLE 2.3 – Résultats pour le cas ATV 2

\* Instants de collocation • Max du premier vector



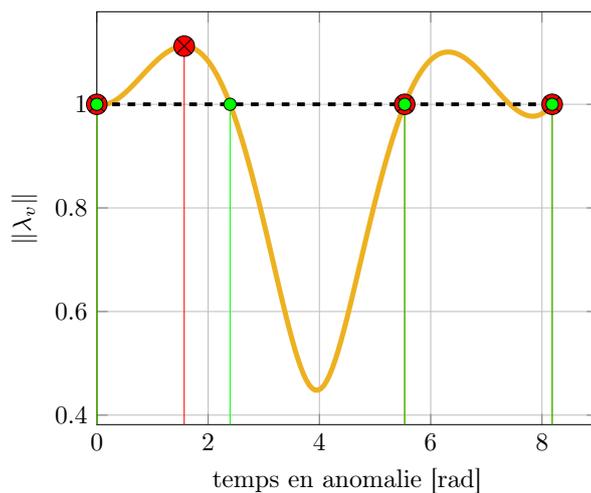
(a) Evolution itérative du signal  $\|Y(\nu)\lambda\|_2$

\* Instants de collocation • Position des impulsions

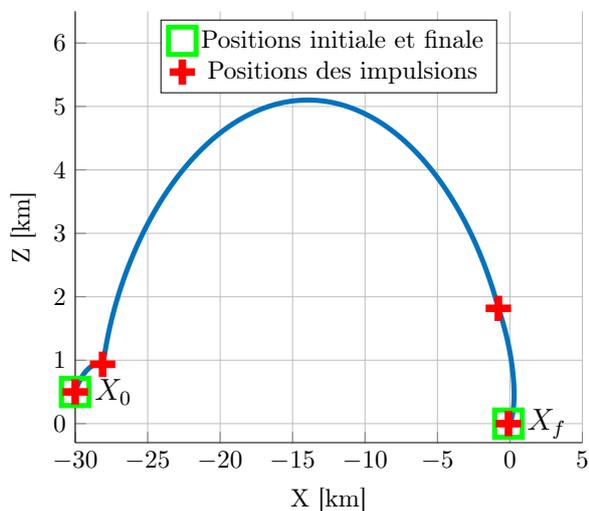


(b) Signal  $\|Y(\nu)\lambda\|_2$  après la dernière itération

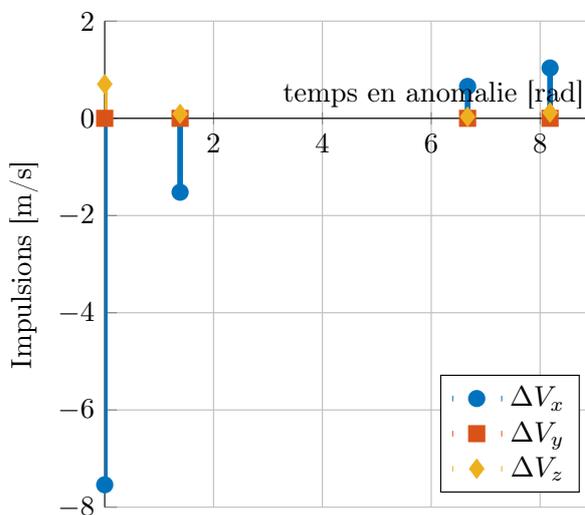
• Position hypothétique des impulsions • Position retenue des impulsions



(c) Norme du premier vector après l'itération 3 de l'algo. de la section 2.2.2



(d) Trajectoire dans le plan orbitale



(e) Impulsions dans le repère LVLH

FIGURE 2.6 – Résolution du cas ATV 2

## 2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons parcouru diverses méthodes indirectes pour la résolution du problème de commande optimale impulsionnelle. Les deux premières exploitent les conditions d'optimalité développées par Carter à nombre et dates d'impulsions fixés. En particulier, la seconde méthode leur associe un algorithme de sélection des dates coordonnant des actions d'ajout, déplacement et fusion de dates. Testé sur différentes missions, l'algorithme s'est montré efficace. Il échoue toutefois à trouver une solution optimale pour la mission ATV 2. Malheureusement, cet algorithme de sélection de dates ne permet pas de couvrir tous les cas possibles et peut conduire à des impasses. Cela semble s'expliquer par le fait que nous imposons la condition  $\|\lambda_v(\nu_i)\| = 1$  (condition CNS2) pour chaque instant de la sélection  $T_{imp}$ . Ainsi pour certains ensembles  $T_{imp}$ , l'ensemble  $\Lambda_{\mathbb{R}^+}$  (cf. (2.17)) est vide. Une piste à explorer est la relaxation de cette contrainte en imposant la condition CNS2 sur un sous-ensemble de  $T_{imp}$  en cas d'échec puis réinitialiser  $T_{imp}$  à partir d'une séquence d'instant  $\{\nu_i\}$  délivrant un ensemble  $\Lambda_{\mathbb{R}^+}$  non vide.

Nous avons ensuite développé une méthodologie complète permettant de résoudre le problème de commande impulsionnelle optimale lié au rendez-vous orbital en revisitant les travaux de Neustadt. Dans cette approche le problème de rendez-vous est formalisé comme un problème de moment pour lequel une contrepartie sous la forme un programme mathématique de dimension semi-infinie.

L'une des forces de cette approche est de pouvoir optimiser indifféremment la consommation au sens  $\mathcal{L}_1^1$  et  $\mathcal{L}_2^1$  de telle sorte que différentes configurations de propulseurs peuvent être envisagées.

Notre contribution originale consiste à proposer une séquence de programmes en dimension finie dont les solutions tendent de façon monotone vers la solution optimale du programme semi-infini. De plus, la solution optimale étant approchée par l'extérieur, nous montrons que l'erreur commise sur la solution optimale et le conservatisme sur le coût optimal peuvent être certifiés.

Si la méthodologie proposée ici semble donner satisfaction, elle produit une séquence de programme fini dont la taille augmente à chaque itération en raison l'addition de contraintes supplémentaires. La solution étant obtenue à la limite, il est possiblement nécessaire d'accumuler un très grand nombre de contraintes afin de converger vers la solution. Aussi il peut être judicieux de travailler avec un nombre fixe de contraintes que l'algorithme chercherait à placer de façon opportune.

---

# Formalisation directe du problème de guidage en rendez-vous

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3.2</b>	<b>Paramétrage et discrétisation du problème d'optimisation . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>Application au rendez-vous sous contraintes de saturation sur la commande</b>	<b>36</b>
<b>3.4</b>	<b>Analyse numérique . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>40</b>

---

### 3.1 Introduction

Rappelons qu'étant données la vitesse et la masse du véhicule chasseur à un instant spécifié, le problème de guidage en rendez-vous consiste à déterminer la loi de propulsion amenant le satellite chasseur à un état terminal (position et vitesse) à une date terminale fixée. L'objectif principal étant de minimiser la consommation de carburant durant la manœuvre, le problème de guidage se formalise comme un problème de commande optimale :

$$\min_{\bar{u}} J_{\bar{u}} \quad \begin{cases} \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\bar{u}(t). & \text{contrainte dynamique} \\ \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0, \quad \bar{X}(t_f) = \bar{X}_f & \text{conditions initiale et finale} \\ \gamma(t, \bar{X}(t), \bar{u}(t)) \preceq 0 & \text{contraintes sur la commande et la trajectoire} \end{cases} \quad (3.1)$$

La formulation (3.1) est enrichie vis-à-vis de la formulation initiale (1.11) par l'addition d'une contrainte statique supplémentaire sur l'état et la commande  $\gamma(\cdot) \preceq 0$  définie par la fonction  $\gamma(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . L'opérateur  $\preceq$  représente l'inégalité élément par élément. La fonction  $\gamma$  permet de regrouper sous une même abstraction l'ensemble des contraintes d'ordre technologique. Le problème de guidage sous contraintes a été abordé par R.G. Brusch à la fin des années 70 [34], puis, par l'équipe de J.P. How du MIT depuis la fin des années 90 [127, 134, 135].

Si la première contrainte considérée est liée aux limites des actionneurs [34], les autres émanent des conditions technologiques sur la mission telles que la sécurité [125] ou la visibilité entre les véhicules [28, 51]. Nous verrons que la robustesse du plan de guidage à l'imprécision des chaînes de mesures et d'actuation peut aussi être abordée comme une contrainte incertaine à satisfaire.

Les méthodes directes visent à transformer le problème initial (3.1), problème dynamique et de dimension infinie, en un problème d'optimisation paramétrique, de dimension finie si possible. Contrairement aux méthodes indirectes qui énoncent des conditions d'optimalité au problème de commande optimale, les méthodes directes ont pour objectif de calculer une séquence de solutions pour des problèmes d'optimisation approchant le problème de commande optimale et conduisant à une décroissance stricte du critère d'optimisation [24].

De façon plus générale, la transformation d'un problème de commande optimale en un problème d'optimisation paramétrique s'obtient en deux étapes :

- a. Paramétrage des variables du système et de leur évolution : les paramètres sont ensuite utilisés comme les variables d'optimisation.
- b. Discrétisation de l'horizon temporel : les contraintes dynamiques et statiques sur la trajectoire sont prises en compte uniquement sur cette grille de discrétisation.

Concrètement, les méthodes directes utilisent les algorithmes de programmation mathématique et les conditions d'optimalité (par exemple, les conditions Karush-Kuhn-Tucker) pour :

- a minimiser la fonction de coût ;
- b vérifier les conditions aux limites et les contraintes sur la trajectoire ;
- c assurer la bonne intégration de la dynamique pour le cas des méthodes de transcription.

Les méthodes directes présentent un certain nombre d'avantages sur les méthodes indirectes [136]. Les premières ne mettent pas en jeu d'état adjoint. Par conséquent, leur mise en œuvre est plus simple. Elles sont, en général, numériquement robustes et peu sensibles au choix de l'itéré initial pour le problème d'optimisation paramétrique. Enfin, contrairement aux méthodes indirectes, il est assez simple de prendre en compte des contraintes sur la trajectoire. La contrepartie est que, si elle est généralement admissible, la solution produite peut ne pas correspondre à la solution optimale, voire en être éloignée. En effet, dans le cas d'un problème d'optimisation non linéaire, il peut exister plusieurs minima locaux vers lesquels l'algorithme peut converger. De plus, la discrétisation du problème tend à rendre moins précise la solution

obtenue, même en cas de raffinement de la grille de vérification des contraintes. Betts en fait un inventaire assez complet dans [23]. On distingue deux familles de méthodes directes qui se différencient notamment par les méthodes de paramétrage [72] et d'intégration de la dynamique [24, section 3.5] utilisées :

- Pour les **méthodes de tirs** [73, 34, 22], seules les entrées de commande sont considérées comme des variables d'optimisation et discrétisées. Les trajectoires sont alors propagées de façon analytique ou grâce à des schémas explicites d'intégration numérique [26].
- Pour les **méthodes de transcription** [115], les états et les commandes sont considérés comme inconnus et discrétisés, l'intégration de la dynamique étant prise en charge par des techniques numériques et implicites d'intégration de type Runge-Kutta [67, 56, 10] ou par interpolation de Legendre [54].

Comme dans les travaux de la première partie de ce manuscrit, nous nous appuyerons sur la connaissance formelle de la transition d'état. Cette connaissance permet d'exploiter au mieux les méthodes de tirs tandis que les méthodes de transcription constituent un meilleur choix si une solution formelle à la dynamique ne peut être écrite.

***Remarque 3 (Commentaires sur les méthodes de transcription pour le guidage impulsif):** Les méthodes de transcription ont été largement étudiées et plusieurs techniques ont même abouti à la distribution de librairies logicielles libres et commerciales. Toutes se basent sur un algorithme de programmation non linéaire. On peut notamment citer le logiciel OTIS [67] qui implante la méthode de collocation basée sur le schéma d'intégration implicite d'Hermite-Simpson [52]. Il permet de résoudre de nombreux problèmes liés à la thématique spatiale [23]. Plus récentes, les librairies BOCOP [133], ACADO [70] peuvent aussi être citées.*

*A notre connaissance, il n'existe pas de travaux appliquant des méthodes de transcription au problème de rendez-vous dans le cadre de poussées impulsives, tandis que la littérature est riche d'exemples liés à la poussée continue.*

*La thématique du transfert orbital a donné lieu à la résolution de plusieurs problèmes intéressants : les travaux de Enright et Conway [55] font référence. Ils appliquent au problème de transfert orbital la méthode de collocation d'Hermite-Simpson. Dans [83], plusieurs logiciels ont été comparés pour le problème de transfert orbital avec des poussées faibles. La problématique des trajectoires de lanceurs a aussi été abordée du point de vue des méthodes de transcription. Une librairie a notamment été développée pour le compte de l'ESA [128].*

*L'absence de travaux dans le cadre impulsif peut se justifier comme suit. Les méthodes directes de transcription ont pris leur essor en résolvant des problèmes non linéaires pour lesquels le principe du maximum de Pontryagin est difficile à appliquer, notamment parce que la transition ne peut être obtenue formellement. Or, dans les travaux sur le problème du rendez-vous orbital, le modèle de dynamique relative et issu d'une linéarisation possède un modèle de transition formellement décrit.*

Les méthodes de tirs se distinguent des méthodes de transcription par le fait que seules les commandes sont paramétrées et que la trajectoire est obtenue par propagation des équations différentielles de la dynamique à partir des conditions initiales. Or, lorsque la transition est formellement exprimée, l'intégration numérique n'est plus nécessaire, ce qui rend ces méthodes particulièrement efficaces en ce qui concerne le temps de calcul. Dans le contexte du mouvement relatif entre deux véhicules en orbite, la dynamique est généralement linéarisée et les matrices de transition ont pu être développées (cf. l'annexe B). Nous verrons dans ce chapitre comment les méthodes de tirs permettent d'établir le problème de guidage pour le rendez-vous orbital sous contraintes de bornes sur la commande en un problème de programmation linéaire.

### 3.2 Paramétrage et discrétisation du problème d'optimisation

Le problème de commande optimale, exprimé avec l'anomalie vraie comme variable indépendante et les contraintes sur l'état et la commande apparaîtront de manière distincte :

$$\min_u J_u \quad \begin{cases} X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu)u(\nu). & \text{contrainte dynamique} \\ X(\nu_0) = X_0, \quad X(\nu_f) = X_f & \text{conditions initiale et finale} \\ |u(\nu)| \leq u_{max} & \text{contrainte sur la commande} \\ \gamma(\nu, X(\nu), u(\nu)) \leq 0 & \text{contraintes sur la trajectoire} \end{cases} \quad (3.2)$$

Ici, nous faisons l'hypothèse d'une commande impulsionnelle décrite par

$$u(\nu) = \sum_{i=1}^N \Delta V_i \delta(\nu - \nu_i) \quad (3.3)$$

où  $\Delta V_i \in \mathbb{R}^3$  représente le saut de vitesse consécutive à la propulsion,  $\delta(\nu - \nu_i)$  la fonction de Dirac aux  $N$  instants de poussée  $\nu_i$  et  $N$  étant fixés *a priori*.

En se référant aux critères de Betts [23], les méthodes de tirs semblent ici tout particulièrement adaptées. En effet, le nombre de variables d'optimisation est limité aux variables  $\Delta V_i$ ,  $\nu_i$ .

Dans ce chapitre et les suivants, la contrainte dynamique issue de (3.2) est donnée par les équations de Tschauner-Hempel; celles-ci décrivent le mouvement relatif sur la base d'orbites képlériennes dont l'excentricité est possiblement non nulle. Pour cette modélisation du mouvement relatif, une formulation analytique de la transition peut être écrite :

$$X(\nu) = \Phi(\nu, \nu_0)X(\nu_0) + \sum_{i=1}^N \Phi(\nu, \nu_i)B(\nu_i)\Delta V_i, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

où  $\nu_i \leq \nu$  et  $\Phi(\nu, \nu_i)$  est la matrice de transition de  $\nu_i$  à l'instant  $\nu$  (cf. annexe B.3.2).

**Remarque 4:** *Le choix du modèle dynamique de Tschauner-Hempel et de la matrice de transition associée n'est pas un facteur de restriction du champ applicatif des méthodes développées ci-après. Tout modèle de dynamique relative dont la transition est formellement décrite est éligible à l'application des techniques présentées ci-après.*

La première étape consiste ainsi à substituer dans (3.2) la contrainte dynamique par la relation de transition (3.4). Dans ce cadre, les valeurs optimales  $\Delta V_i^*$ ,  $\nu_i^*$  sont alors calculées par résolution du programme non linéaire :

$$\min_{\Delta V_i, \nu_i} J_u \quad \begin{cases} X(\nu) = \Phi(\nu, \nu_0)X(\nu_0) + \sum_{i=1}^N \Phi(\nu, \nu_i)B(\nu_i)\Delta V_i, & \text{transition forcée} \\ X(\nu_0) = X_0, \quad X(\nu_f) = X_f, & \text{conditions initiale et finale} \\ |\Delta V_i| \leq \Delta V_{max}, \quad i = 1, \dots, N & \text{, contrainte sur la commande,} \\ \gamma(\nu, X(\nu), \Delta V(\nu_i)) \leq 0, & \text{contraintes sur la trajectoire.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Notons que  $\Delta V_{max}$  n'est généralement pas une valeur constante. En effet, la contrainte sur la commande est généralement exprimée en  $m/s$  en considérant le temps  $t$  comme variable indépendante. Or, le passage de la variable indépendante du temps à l'anomalie se traduit par

$$\Delta V(\nu_i) = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{n(1 + e \cos \nu_i)} \Delta \bar{V}(t_i) \quad (3.6)$$

où  $n$  est le mouvement moyen de l'orbite de la cible,  $\Delta\bar{V}$  l'impulsion de commande exprimée en  $m/s$ . Ainsi, la borne sur l'impulsion  $\Delta V_{max}$  dépend de la position de la cible sur son orbite :

$$\Delta V_{i,max} = \Delta V_{max}(\nu_i) = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{n(1 + e \cos \nu_i)} \Delta\bar{V}_{max} \quad (3.7)$$

Une simplification intervient lorsque la séquence des instants  $\{\nu_i\}$  est fixée *a priori*. Le problème (3.5) devient alors linéaire en fonction des variables  $\Delta V_i$ .

La seconde étape de la méthode de tirs consiste à transformer le problème (3.5) de dimension semi-infinie en problème de programmation non linéaire par discrétisation du problème de satisfaction de contraintes  $\gamma(\cdot) \leq 0$ . On entend ici par discrétisation, l'imposition des contraintes en un ensemble fini d'instants  $\{\tau_i\}$ , appelé grille de discrétisation, et non sur le continuum de temps  $[\nu_0, \nu_f]$ . La grille  $\{\tau_i\}$  doit vérifier :

$$\nu_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_\tau} \leq \nu_f \quad (3.8)$$

Le nombre  $N_\tau$  et la distribution des instants  $\{\tau_j\}$  sont des degrés de liberté de la résolution choisis indépendamment des instants d'impulsion  $\{\nu_i\}$ . Il vient que le problème discrétisé de satisfaction de contraintes prend la forme :

$$\gamma(\tau_j, X(\tau_j), \Delta V_i) \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_\tau \quad (3.9)$$

où les états aux instants de collocation  $X(\tau_j)$  sont donnés par

$$\begin{bmatrix} X(\tau_1) \\ X(\tau_2) \\ \vdots \\ X(\tau_j) \\ X(\tau_{j+1}) \\ \vdots \\ X(\tau_{N_\tau}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi(\tau_1, \nu_0) \\ \Phi(\tau_2, \nu_0) \\ \vdots \\ \Phi(\tau_j, \nu_0) \\ \Phi(\tau_{j+1}, \nu_0) \\ \vdots \\ \Phi(\tau_{N_\tau}, \nu_0) \end{bmatrix}}_{\Phi_1} X(\nu_0) + \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi(\tau_1, \nu_1)B & 0 & \dots & 0 \\ \Phi(\tau_2, \nu_1)B & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi(\tau_j, \nu_1)B & \Phi(\tau_j, \nu_2)B & \dots & 0 \\ \Phi(\tau_{j+1}, \nu_1)B & \Phi(\tau_{j+1}, \nu_2)B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi(\tau_{N_\tau}, \nu_1)B & \Phi(\tau_{N_\tau}, \nu_2)B & \dots & \Phi(\tau_{N_\tau}, \nu_N)B \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \vdots \\ \Delta V_N \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

On pourra écrire de manière compacte l'équation (3.10) sous la forme

$$\mathbf{X} = \Phi_1 X(\nu_0) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{V} \quad (3.11)$$

où

$$\mathbf{X} = [X^T(\tau_1) \ X^T(\tau_2) \ \dots \ X^T(\tau_{N_\tau})]^T \quad (3.12)$$

et

$$\Delta \mathbf{V} = [\Delta V_1^T \ \Delta V_2^T \ \dots \ \Delta V_N^T]^T \quad (3.13)$$

En particulier, la condition de rendez-vous pourra être décrite en utilisant la notation adaptée suivante :

$$X(\nu_f) = \Phi(\nu_f, \nu_0) X(\nu_0) + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V} \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{B}_f = [\Phi(\nu_f, \nu_1)B \ \Phi(\nu_f, \nu_2)B \ \dots \ \Phi(\nu_f, \nu_N)B]$ . En associant (3.14) aux conditions initiale et finale,  $X(\nu_0) = X_0$ ,  $X(\nu_f) = X_f$ , il vient une condition synthétique de rendez-vous :

$$X_f = \Phi(\nu_f, \nu_0) X_0 + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V}. \quad (3.15)$$

L'introduction du schéma de discrétisation ((3.8), (3.10)) présenté ci-dessus dans le problème (3.5), aboutit au problème d'optimisation de dimension finie :

$$\begin{array}{l} \min_{\Delta \mathbf{V}} J \\ \text{sous :} \end{array} \begin{cases} X_f = \Phi(\nu_f, \nu_0)X_0 + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V} & \text{condition de rendez-vous} \\ |\Delta V_i| \leq \Delta V_{i,max} & \text{contrainte sur la commande, } i = 1, \dots, N \\ \gamma_j(\tau_j, \mathbf{X}, \Delta \mathbf{V}) \leq 0 & \text{contrainte sur la trajectoire, } j = 1, \dots, N_\tau \end{cases} \quad (3.16)$$

Remarquons que la qualité du problème d'optimisation est liée à la fonction de coût  $J$  et aux fonctions contraintes  $\gamma_j \in \mathbb{R}^{n_\gamma}$  en  $\Delta \mathbf{V}$ . S'il s'avère que ces applications sont linéaires, alors le problème (3.16) est un problème d'optimisation linéaire.

*Remarque 5:* Par la suite, nous parlerons de solutions optimales au sens du programme (3.16). Cependant, nous oublions pas que les solutions calculées sont sous-optimales au sens du programme (3.5).

### 3.3 Application au rendez-vous sous contraintes de saturation sur la commande

Les méthodes directes de tirs amènent à traiter le problème de guidage en rendez-vous comme un problème d'optimisation (3.16). L'intérêt d'une telle reformulation est de fournir des certificats d'optimalité sur les résultats obtenus tout en ayant une charge numérique raisonnable. De plus, si la fonction de coût et les contraintes sur la trajectoire sont linéaires, elles représentent une solution numériquement attractive, car le problème (3.16) peut alors se réécrire en termes de programmation linéaire.

A ce stade, nous pouvons préciser la fonction de coût. Nous situons les travaux de ce chapitre et des suivants dans le contexte d'un satellite chasseur disposant de six propulseurs lui autorisant un contrôle dans les trois directions de l'espace (cf figure 1.1b page 6). Le coût associé à cette configuration est donc une norme d'ordre 1 sur le vecteur des impulsions de contrôle,  $\Delta \mathbf{V}$  :

$$J = \|\Delta \mathbf{V}\|_1 = \sum_{i=1}^N |\Delta V_{i,x}| + |\Delta V_{i,y}| + |\Delta V_{i,z}|. \quad (3.17)$$

Par ailleurs, dans ce chapitre, le problème de guidage sera traité en considérant uniquement les contraintes sur la commande représentant les limites physiques des actionneurs :

$$\begin{array}{l} \min_{\Delta \mathbf{V}} \|\Delta \mathbf{V}\|_1 \\ \text{sous :} \end{array} \begin{cases} X_f = \Phi(\nu_f, \nu_0)X_0 + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V} & \text{condition de rendez-vous} \\ |\Delta V_i| \leq \Delta V_{i,max} & \text{contrainte sur la commande, } i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.18)$$

Les contraintes sur la trajectoire seront plus particulièrement abordées dans le chapitre 5.

Nous allons maintenant montrer que le problème (3.18) est équivalent à un problème de programmation linéaire de la forme

$$\begin{array}{l} \min_Y \quad C'Y \\ \text{sous} \quad \begin{cases} A_{eg}Y = b_{eg} \\ A_{in}Y \leq b_{in} \end{cases} \end{array} \quad (3.19)$$

Le problème (3.18) ne répond pas *a priori* à cette définition notamment à cause de la fonction de coût,  $\|\Delta \mathbf{V}\|_1$  qui est une fonction linéaire par morceaux. Il est ramené à la formulation linéaire classique par l'utilisation d'un vecteur de variables additionnelles  $Z \in \mathbb{R}^{3N}$  qui vérifie [21] :

$$\begin{array}{l} \Delta V_i \leq Z_i \\ -\Delta V_i \leq Z_i \end{array}, \quad \forall i = 1, \dots, 3N \quad (3.20)$$

On notera  $\Delta V_l$  et  $Z_l$  le  $i^{\text{ème}}$  élément du vecteur  $\Delta \mathbf{V}$  et  $Z$  respectivement.

Le problème (3.18) se reformule alors

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{V}, Z} \sum_{i=1}^{3N} Z_i \quad & \begin{cases} X_f = \Phi(\nu_f, \nu_0)X_0 + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V} & \text{condition de rendez-vous} \\ \Delta V_l \leq Z_l, \quad -\Delta V_l \leq Z_l & \text{contraintes sur la commande, } l = 1, \dots, 3N \\ \|[Z_{3j+1}, Z_{3j+2}, Z_{3j+3}]^T\|_\infty \leq \Delta V_{j+1, \max}, & \text{contraintes sur la commande, } j = 0, \dots, N-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

**Remarque 6:** Les problèmes (3.18) et (3.21) sont équivalents au sens où ils ont le même optimum et si l'un est non réalisable, l'autre ne l'est pas non plus. A cet optimum, nous avons  $\Delta V_i = Z_i$  où  $\Delta V_i = -Z_i$ .

Le problème (3.21) peut maintenant être reformulé sous la forme (3.19) en reconstruisant les matrices et vecteurs  $A_{eg}$ ,  $b_{eg}$ ,  $A_{in}$ ,  $b_{in}$  et  $C$ . Pour ce faire, posons le vecteur de variables de décision  $Y$  tel que

$$Y = \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Le coût (3.21) s'écrit au format matriciel :

$$\sum_{i=1}^{3N} Z_i = \begin{bmatrix} I_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 3N} \end{bmatrix} Y \quad (3.23)$$

où  $0_{\xi \times \eta} \in \mathbb{R}^{\xi \times \eta}$  est la matrice nulle, la notation  $0_\xi$  désignant la matrice carrée de dimension  $\xi$ .  $I_{\xi \times \eta} \in \mathbb{R}^{\xi \times \eta}$  est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1. De plus, les trois contraintes du problème (3.21) se réécrivent respectivement :

$$\begin{bmatrix} \Phi(\nu_f, \nu_1)B & \dots & \Phi(\nu_f, \nu_N)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3N} & I_{3N} \end{bmatrix} Y = \tilde{X}(\nu_f) - \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \end{bmatrix} Y \leq 0_{3N \times 1} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} I_{3N} & 0_{3N} \end{bmatrix} Y \leq \begin{bmatrix} \Delta V_{1, \max} I_{3 \times 1} \\ \vdots \\ \Delta V_{N, \max} I_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \Delta V_{\max} \otimes I_{3 \times 1} \quad (3.26)$$

où l'opérateur  $\otimes$  représente le produit de Kronecker et  $I_\xi$  la matrice identité de dimension  $\xi$ . Nous pouvons maintenant écrire le programme linéaire associé à (3.21) :

$$\begin{aligned} \min_Y \quad & \begin{bmatrix} I_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 3N} \end{bmatrix} Y \\ \text{sous} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} \Phi(\nu_f, \nu_1)B & \dots & \Phi(\nu_f, \nu_N)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3N} & I_{3N} \end{bmatrix} Y = X(\nu_f) - \Phi(\nu_f, \nu_1)X(\nu_1) \\ \begin{bmatrix} -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \\ I_{3N} & 0_{3N} \end{bmatrix} Y \leq \begin{bmatrix} 0_{3N \times 1} \\ 0_{3N \times 1} \\ \Delta V_{\max} \otimes I_{3 \times 1} \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.4 Analyse numérique

Dans cette section, nous étudierons trois missions particulières, PRISMA 1, PRISMA 2 et PROBA3 (voir l'annexe E pour le détail des missions). Le premier objectif est d'exposer les résultats obtenus par résolution du problème (3.21) et du programme linéaire associé (3.27). Le second objectif est de comparer ces résultats à ceux que nous obtenons en appliquant par la méthode de résolution du problème

de moments développé dans la section 2.3. Nous considérerons un satellite mû suivant les trois directions de l'espace ( $p = 1$  et  $q = \infty$  dans la méthode de la section 2.3). Pour ces trois exemples, nous fixons le nombre d'impulsions  $N$  à 500. En conséquence, le programme (3.27) comporte 3000 variables de décision et les matrices  $A_{eg}$  et  $A_{in}$  sont respectivement de dimensions  $(6 \times 3000)$  et  $(4500 \times 3000)$ . Ces dimensions sont tout à fait acceptables pour un solveur de programmation linéaire. Cependant, une restriction sur  $N$  doit être faite. En effet, lorsque  $N$  augmente, les deux matrices  $\Phi(\nu_f, \nu_i)$  et  $\Phi(\nu_f, \nu_{i+1})$  vont tendre l'une vers l'autre. Ce fait peut poser des problèmes numériques dans la résolution de la condition de rendez-vous (3.24).

### PRISMA 1

Le plan de guidage et les trajectoires de rendez-vous associées obtenus par résolution du programme (3.27) sont exposés aux figures 3.1. Malgré le nombre important de variables d'optimisation (500 impulsions possibles), la résolution de (3.27) met en exergue uniquement quatre impulsions non nulles. Ce constat est cohérent avec la condition d'un nombre d'impulsions limité énoncée dans la section d'annexe D.2.4. Les figures 3.1 montrent un plan de guidage à quatre impulsions dans la seule direction  $x$ . Les première et dernière impulsions concentrent la grande majorité de la consommation. Les deux impulsions intermédiaires consécutives, et situées peu de temps avant la fin de mission, laissent apparaître une longue période de dérive libre. A l'instar des résultats observés dans le chapitre précédent, la première impulsion intervient après une courte période de dérive et non au début de la mission. Les coûts optimaux sont par ailleurs équivalents. Les structures des plans de guidage sont très semblables. Dans ce cas de mission, l'approche directe fournit une bonne approximation de la solution optimale identifiée par le biais du problème de moments et de la programmation semi-infinie.

Algorithme	Pb. de moments et Prog. Semi-infinie	Méthode directe
$\nu_i$ [rad]	$\begin{Bmatrix} 0.16791 & 18.48405 \\ 18.49697 & 19.36240 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.15520 & 18.46994 \\ 18.50875 & 19.36240 \end{Bmatrix}$
$\Delta V(\nu_1)^T$ [cm/s]	18.330 0 0	18.329 0 0
$\Delta V(\nu_2)^T$ [cm/s]	-3.640 0 0	-1.535 0 0
$\Delta V(\nu_3)^T$ [cm/s]	-1.026 0 0	-3.458 0 0
$\Delta V(\nu_4)^T$ [cm/s]	-20.225 0 0	-19.898 0 0
Coût [cm/s]	43.22017	43.22027

TABLE 3.1 – Plan de guidage pour la mission PRISMA 1 ( $\Delta V_{max} = 26cm/s$ )

### PROBA 3

La mission PROBA 3 est une mission à forte excentricité et un demi-grand axe important. Cela conduit à une dilatation importante du temps vis-à-vis de l'anomalie vraie, notamment à l'approche de l'apogée. Les figures 3.2 illustrent le plan de guidage calculé par programmation linéaire et la trajectoire associée. La résolution de (3.27) met en exergue un plan de guidage à trois impulsions. Si les structures de plan de guidage sont équivalentes, le coût obtenu ici est légèrement supérieur au coût optimal certifié. De nouveau, l'approche directe délivre une bonne approximation du plan optimal.

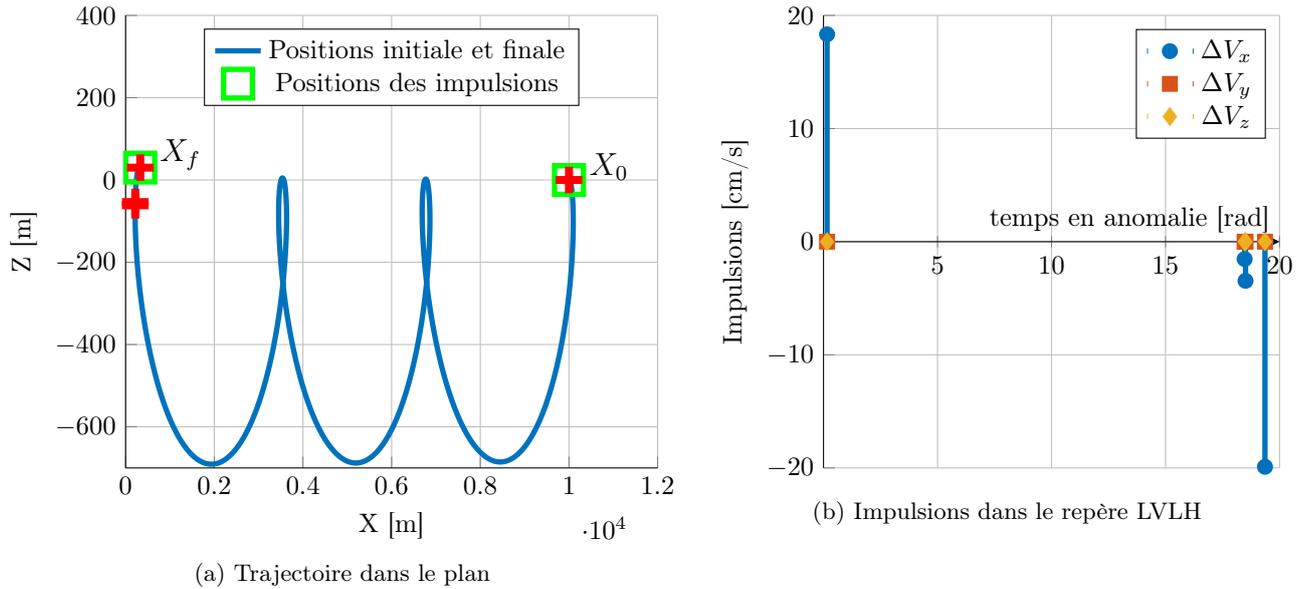


FIGURE 3.1 – Plan de guidage et trajectoires pour la mission PRISMA 1

Algorithme	Pb. de moments et Prog. Semi-infinie	Méthode directe
$\nu_i$ [rad]	2.04204 2.94820 3.14024	2.04204 2.92896 3.14024
$\Delta V(\nu_1)^T$ [cm/s]	-22.717 0 58.740	-21.181 0 59.728
$\Delta V(\nu_2)^T$ [cm/s]	-24.591 0 0	-25.475 0 0
$\Delta V(\nu_3)^T$ [cm/s]	0 0 8.289	0 0 0.07975
Coût [cm/s]	114.34	114.36

TABLE 3.2 – Plan de guidage pour la mission PROBA 3 ( $\Delta V_{max} = 26\text{cm/s}$ )

## PRISMA 2

Dans les cas précédents, les plans de guidage permettent de réaliser le rendez-vous sans saturer les impulsions. Pour la mission PRISMA 2, le plan de guidage optimal est constitué de deux impulsions aux instants initial et terminal (voir tableau 3.3). Ces impulsions optimales sont légèrement supérieures à la capacité des actionneurs fixée à 26 cm/s. Lorsque le problème (3.18) est résolu, le plan contraint de guidage obtenu est un plan à quatre impulsions (figures 3.3b). Ces impulsions sont groupées par paires en début et fin de manœuvres. Pour chaque paire, les instants d'impulsions sont des instants consécutifs sur la grille de discrétisation. Il est intéressant de remarquer que la consommation optimale est répartie sur chacune des paires d'impulsions du plan contraint.

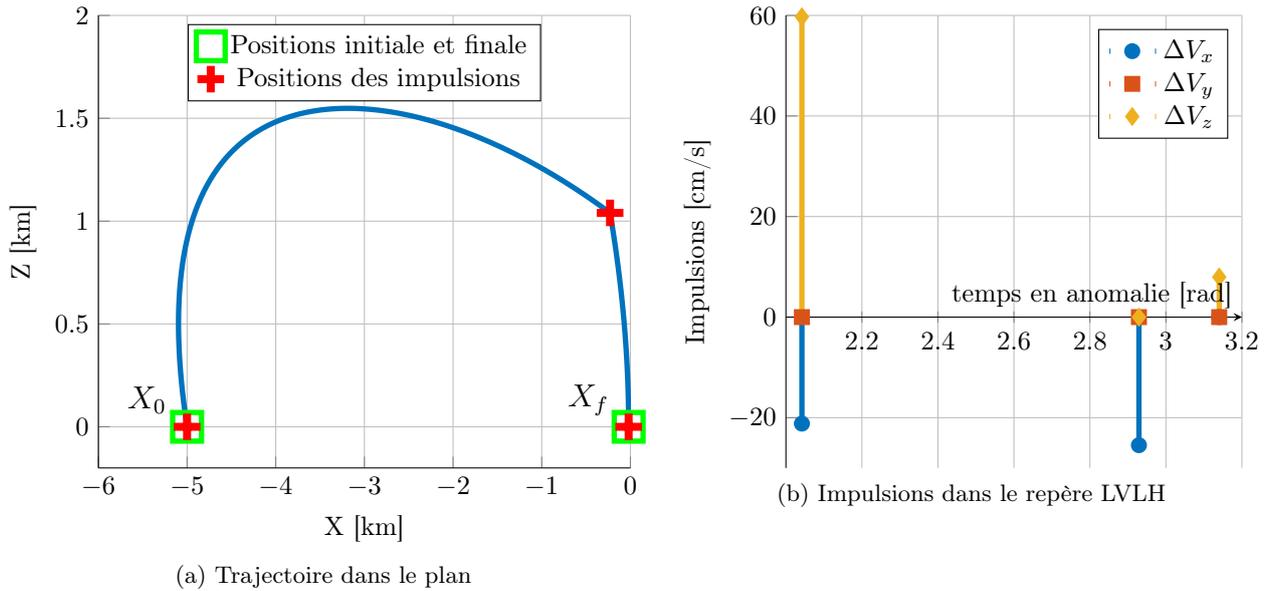


FIGURE 3.2 – Plan de guidage et trajectoires pour la mission PROBA 3

Algorithme	Pb. de moments et Prog. Semi-infinie	Méthode directe
$\nu_i$ [rad]	$\begin{bmatrix} 0 & 0.86647 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.7381 \cdot 10^{-3} \\ 0.86473 & 0.86647 \end{bmatrix}$
$\Delta V(\nu_1)^T$ [cm/s]	$\begin{bmatrix} -27.571 & 0 & -25.524 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25.999 & 0 & -25.523 \end{bmatrix}$
$\Delta V(\nu_2)^T$ [cm/s]	$\times \times \times$	$\begin{bmatrix} -1.5754 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\Delta V(\nu_3)^T$ [cm/s]	$\times \times \times$	$\begin{bmatrix} 1.5302 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\Delta V(\nu_4)^T$ [cm/s]	$\begin{bmatrix} 27.525 & 0 & -25.487 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 26.000 & 0 & -25.486 \end{bmatrix}$
Coût [cm/s]	106.11	106.12

TABLE 3.3 – Plan de guidage pour la mission PRISMA 2 ( $\Delta V_{max} = 26 \text{ cm/s}$ )

### 3.5 Conclusions

Ce chapitre a démontré qu'il était possible d'utiliser les méthodes directes pour résoudre le problème de commande optimale. Ces méthodes fournissent une solution admissible, mais généralement sous-optimale. Rappelons que les méthodes directes consistent à transformer le problème d'optimisation en dimension infinie sous contrainte dynamique en un problème de programmation mathématique. Dans le cadre du rendez-vous, cette transformation est possible grâce à la connaissance formelle d'un modèle de propagation du mouvement relatif. Selon ses hypothèses, les méthodes directes présentent les qualités d'être suffisamment flexibles pour appréhender des contraintes sur l'état relatif et/ou la commande et de proposer des algorithmes de complexité numérique faible lorsque la structure (nombre et répartition des impulsions) du plan de guidage est connue. Dans les chapitres suivants, nous nous appuierons sur ce programme et nous l'enrichirons de contraintes d'incertitude dans le chapitre 4 et de contraintes sur la trajectoire dans le chapitre 5.

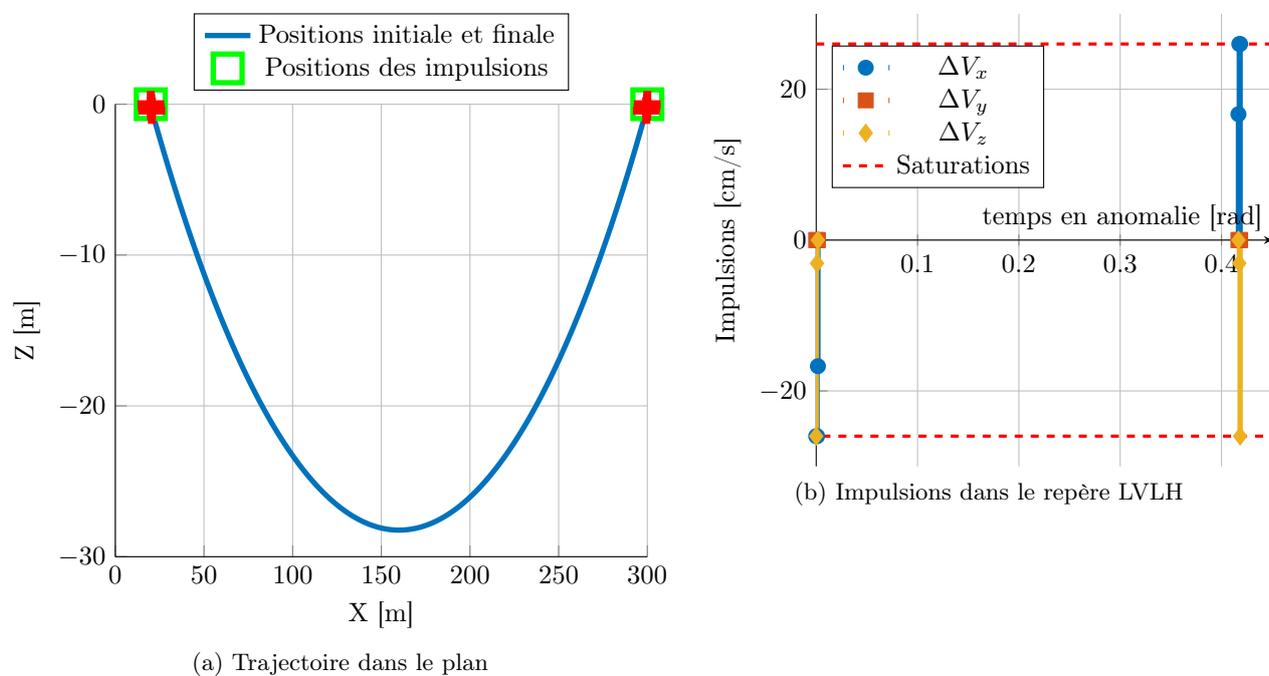


FIGURE 3.3 – Plan de guidage et trajectoires pour la mission PRISMA 2



---

# Guidage sous contraintes d'incertitudes et d'erreurs par programmation convexe robuste

---

## Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>4.2 Optimisation convexe robuste</b> . . . . .	<b>45</b>
4.2.1 Programmation incertaine . . . . .	45
4.2.2 Contrepartie robuste : formulation <i>min-max</i> . . . . .	46
4.2.3 Programmation linéaire robuste . . . . .	46
4.2.4 Ensembles d'incertitudes et contreparties robustes . . . . .	48
<b>4.3 Objectifs relâchés de rendez-vous : ensemble d'arrivée polytopique</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.4 Guidage robuste aux incertitudes de navigation</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.5 Guidage robuste aux erreurs d'exécution des manœuvres impulsives</b> . . . . .	<b>54</b>
4.5.1 Incertitudes sur la date d'application . . . . .	54
4.5.2 Erreurs de réalisation des impulsions . . . . .	57
<b>4.6 Etude numérique</b> . . . . .	<b>60</b>
4.6.1 Incertitudes sur les instants d'impulsions . . . . .	61
4.6.2 Erreurs de réalisation des impulsions . . . . .	64
<b>4.7 Conclusions</b> . . . . .	<b>66</b>

---

## 4.1 Introduction

Le chapitre 3 a montré que le problème de commande optimale formalisant le guidage en rendez-vous orbital se prêtait avantageusement à une résolution par des méthodes directes. De fait, un plan de guidage prenant en compte les limites en amplitude des impulsions peut être calculé grâce à la résolution d'un programme linéaire.

Ce chapitre pose le problème de la robustesse de l'algorithme de guidage vis-à-vis d'éventuelles perturbations non modélisées initialement. En effet, les différents aléas technologiques peuvent amener un plan initialement optimal à ne plus remplir les objectifs du rendez-vous (voir les résultats du projet CNES R&T 71372/00 [82] et la publication associée [25]). Les aléas suivants ont été identifiés parmi les causes d'incertitudes les plus influentes sur le déroulement du plan de guidage :

**Les erreurs de navigation** rendent incertaines la position et la vitesse relatives au moment de l'appel à la fonction de guidage. Elles sont liées à la chaîne de mesures et de reconstruction de l'état.

**Les erreurs d'application des manœuvres** sont liées aux erreurs d'interprétation et d'exécution des commandes calculées par le module de propulsion. Elles prennent différentes formes : l'anticipation ou le retard de l'instant d'exécution de la manœuvre et la corruption possible de l'amplitude et de l'orientation de chaque impulsion commandée.

Par ailleurs, nous pouvons citer les erreurs de modélisation qui peuvent être vues comme des incertitudes sur la transition utilisée dans le cadre du problème de guidage.

Toutes ces erreurs ont pour conséquence de générer des incertitudes dans les données du programme développé. Il est pourtant nécessaire de trouver une solution de consommation minimale qui garantisse un niveau de précision vis-à-vis des objectifs initiaux.

L'objectif de ce chapitre est donc de conférer à l'algorithme initial des propriétés de robustesse face à de variations paramétriques dans les données du problème d'optimisation.

Nous parlerons ici de robustesse du plan de guidage comme l'insensibilisation de la commande de boucle ouverte aux erreurs décrites antérieurement. Cette notion se rapproche de la notion de commande robuste largement étudiée et enseignée par la communauté des automaticiens et qui tend à rejeter grâce, à une contre-réaction, les perturbations dans un problème de stabilisation par exemple. Ici, nous nous attardons uniquement sur la boucle ouverte et l'existence d'une commande qui minimise la propagation des erreurs.

Si la robustesse des plans de guidage a été peu abordée dans la littérature, les erreurs de navigation (i.e. les erreurs sur l'état initial) l'ont été à plusieurs reprises. Dans cette catégorie, on note les travaux de How et Tillerson [71] d'une part et les travaux plus récents de Mueller et Larsson [109] d'autre part. Bien entendu, dans le cadre d'une commande impulsionnelle en boucle fermée, la robustesse aux erreurs de navigation a été étudiée plus largement et le lecteur pourra se référer notamment à [29, 50]. Par ailleurs, les erreurs d'exécution des impulsions ont été abordées par Luo *et al.* dans [105] sur la base d'une modélisation stochastique.

Plusieurs techniques sont envisageables pour fournir une solution fiable à un problème d'optimisation affecté par des données incertaines : la programmation stochastique et la programmation convexe robuste sont les méthodes les plus connues.

La programmation stochastique [20] permet de prendre en compte des incertitudes lorsque celles-ci sont modélisées par des variables aléatoires dès lors que leur loi de distribution est connue ou estimable. Les solutions alors obtenues sont généralement admissibles vis-à-vis des contraintes et des objectifs pour une majorité des cas de perturbation sans être garanties pour l'ensemble des réalisations d'incertitude. Au contraire, s'il est possible de borner les incertitudes, une approche déterministe, appelée dans la littérature «optimisation convexe robuste», permet d'obtenir, une solution satisfaisant l'ensemble des contraintes et objectifs, quel que soit le scénario de perturbation rencontré [15].

Nous proposons, ici, de traiter les incertitudes de guidage par la méthode d'optimisation convexe

robuste pour plusieurs raisons. Tout d'abord, cette méthode fournit un certificat de réussite global de la mission pour n'importe quelle combinaison d'incertitudes. De plus, elle ne nécessite pas de connaissance approfondie du comportement statistique des différentes incertitudes auxquelles nous devons faire face : seules les bornes sont nécessaires. Notons toutefois que ces bornes peuvent être déduites d'une description statistique de l'incertitude (voir F.2). Enfin, l'optimisation robuste permet de considérer, à partir du programme nominal de guidage, les problèmes de programmation convexe (programmation linéaire, programmation sur le cône de second ordre et programmation semi-définie) pour une majorité de structures classiques d'incertitudes (polytopique et ellipsoïdale). D'un point de vue numérique, cela permet de proposer des algorithmes attractifs pour la résolution du problème de guidage sous incertitudes.

Dans un premier temps, nous présenterons le concept d'optimisation robuste ainsi que les principaux résultats utilisés par la suite. Puis, nous aborderons notre contribution : le problème de guidage en rendez-vous sera résolu en tenant compte des erreurs de navigation et d'exécution de la commande. Enfin, nous proposerons des exemples numériques qui mettront en lumière qu'un choix approprié permet d'insensibiliser le plan de guidage et de réduire l'impact des incertitudes. La contribution de ce chapitre a donné lieu à une communication [101] et une version améliorée et étendue a été publiée en journal [100].

## 4.2 Optimisation convexe robuste

Cette section présente le concept d'optimisation robuste, ainsi que les formes convexes de programme robuste qui pourront être employées dans des algorithmes de guidage robuste.

### 4.2.1 Programmation incertaine

Le principe d'optimisation robuste met en jeu la notion de programme incertain. Elle est déduite de la définition de programme paramétré.

**Définition 4 (Programme paramétré).** — Soit le problème d'optimisation paramétré suivant :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f_0(x) \\ \text{sous} \quad & f_i(x, u_i(p_i)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ici,  $x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur des variables de décision. Les fonctions  $f_0$  et  $f_i$  nous donnent la structure usuelle du problème, et  $p_i \in \mathbb{R}^k$  est un vecteur de paramètres influençant les données du problème,  $u_i$ .

La forme standardisée (4.1) veut que les données de la fonction objectif  $f_0$  soient parfaitement connues et non sujettes à des incertitudes au moment du calcul. Si ce n'est pas le cas, il est toujours possible d'utiliser une variable de décision additionnelle,  $t$ , qui sera minimisée et d'augmenter le problème avec la contrainte  $t - f_0(x, u_0) \geq 0$ .

Un programme incertain est un programme paramétré (4.1) dont la structure est fixée et dont les données  $u_i$ , inconnues, appartiennent à un ensemble fermé  $\mathcal{U}_i$  telles que  $u_i \in \mathcal{U}_i$ . Nous appellerons *ensemble d'incertitudes* l'ensemble  $\mathcal{U}$  tel que  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$  où  $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{R}^k$ . Les variables  $p_i$  paramétrant les données  $u_i$  seront nommées *variables de perturbations*. Ces variables de perturbations  $p_i$  appartiennent à des ensembles de perturbations fermés,  $\mathcal{P}_i$ .

**Définition 5 (Programme incertain).** — Il se définit comme la collection des programmes (4.1) :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f_0(x) \\ \text{sous} \quad & f_i(x, u_i(p_i)) \leq 0, \quad \forall u_i \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ces notions générales d'optimisation robuste peuvent être illustrées par l'exemple de la programmation linéaire

$$\min_x \{ \gamma^T x : Ax \leq b \}.$$

Si la structure de ce programme est donnée par les dimensions de la matrice  $A$ , les données du problème  $u$  sont les valeurs des singletons du triplet  $(\gamma, A, b)$ . Le programme linéaire incertain est alors la collection des problèmes  $\min_x \{\gamma^T x : Ax \leq b\}$  pour lequel  $(A, b) \in \mathcal{U}$  :

$$\min_x \{\gamma^T x : Ax \leq b\}, \quad (A, b) \in \mathcal{U}.$$

#### 4.2.2 Contrepartie robuste : formulation *min-max*

L'approche déterministe peut se définir par opposition aux approches probabilistes et stochastiques présentées succinctement dans l'annexe F.1 grâce à l'analyse pire-cas qu'elle réalise. Conceptuellement, l'optimisation robuste déterministe repose sur trois hypothèses au moment de la prise de décision et du calcul des variables de décision [17, page xii] :

- Les variables de décision  $x$  doivent être déterminées par résolution du problème (4.2) avant que les données réelles du problème ne soient révélées.
- Les garanties qui peuvent être obtenues ne sont valables que si les données du problème  $u_i$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{U}_i$ .
- Les variables de décision doivent satisfaire les contraintes  $f_i(x, u_i(p_i)) \leq 0$  dans tous les cas possibles de réalisation de valeurs de  $u_i$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{U}_i$ .

Sous ces hypothèses, la résolution du problème (4.2) permet d'obtenir une solution dite «immunisée face aux incertitudes des données du problème». En effet, si la première hypothèse relève de la nature incertaine du problème, les deux autres indiquent que toute solution admissible doit garantir sans faille les contraintes, quelle que soit la réalisation d'incertitudes  $u_i$  inscrite dans l'ensemble d'incertitudes  $\mathcal{U}_i$ . Une telle solution est appelée solution admissible robuste [15]. Enfin, pour une solution admissible robuste donnée, la valeur du critère correspond au coût de la réalisation d'incertitudes la plus défavorable :  $\max_{u_i} \{f_0(x) : u_i \in \mathcal{U}_i, \forall i\}$ . Ce dernier fait illustre l'*approche pire cas* utilisée dans l'optimisation robuste. Ainsi, optimiser de manière robuste consiste à obtenir la meilleure solution admissible robuste grâce à une architecture de programmation *min-max* .

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \max_{u_i \in \mathcal{U}_i} f_0(x) \\ \text{sous} \quad & f_i(x, u_i(p_i)) \leq 0, \quad \forall u_i \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le problème (4.3) est appelé, dans la littérature, contrepartie robuste au programme incertain (4.2). L'ensemble des solutions admissibles du problème (4.3) forme l'ensemble admissible robuste  $\mathcal{X}(\mathcal{U})$  tel que

$$\mathcal{X}(\mathcal{U}) = \{x \mid f_i(x, u_i(p_i)) \leq 0, \quad \forall u_i \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (4.4)$$

La(les) meilleure(s) solution(s) est(ont) appelée(s) solution(s) optimale(s) robuste(s).

En considérant que le problème de guidage (3.21) est un problème d'optimisation linéaire, nous abordons plus particulièrement la programmation linéaire robuste et proposons des formulations convexes du problème (4.3) dans la suite de la section.

#### 4.2.3 Programmation linéaire robuste

La programmation linéaire affectée de données incertaines a été étudiée dans [131]. Le problème de programmation linéaire s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \gamma^T x \\ \text{sous} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les incertitudes portent sur les données du programme linéaire à savoir la paire  $(A, b) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m$ . Nous parlerons de programme linéaire incertain :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \gamma^T x \\ \text{sous} \quad & Ax \leq b, \quad [A; b] \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Afin de décrire les contreparties robustes associées au programme incertain (4.6), il est maintenant nécessaire de préciser la structure de l'ensemble  $\mathcal{U}$ .

Dans la suite de ce chapitre, les ensembles d'incertitudes sont paramétrés de manière affine en  $p \in \mathbb{R}^k$ , le vecteur des variables de perturbations :

$$\mathcal{U} = \left\{ [A; b] = [A^0; b^0] + \sum_{j=1}^k p_j [A^j; b^j], \quad p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^k \right\} \quad (4.7)$$

où  $\mathcal{P}$ , l'*espace de perturbation*, est l'ensemble dans lequel les variables de perturbations évoluent. La paire  $(A^0, b^0)$  représente les données nominales et les paires  $(A^j, b^j)$  caractérisent les dépendances vis-à-vis des variables de perturbations.

En nous reportant aux notions présentées dans la section précédente, nous pouvons établir les définitions suivantes. Un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  représente une solution admissible robuste du problème (4.6) s'il vérifie les contraintes pour toutes les réalisations d'incertitudes :

$$Ax \leq b \quad \forall (A, b) \in \mathcal{U} \quad (4.8)$$

On notera  $\mathcal{X}(\mathcal{U})$  l'espace admissible robuste tel que

$$\mathcal{X}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \quad \forall [A; b] \in \mathcal{U}\} \quad (4.9)$$

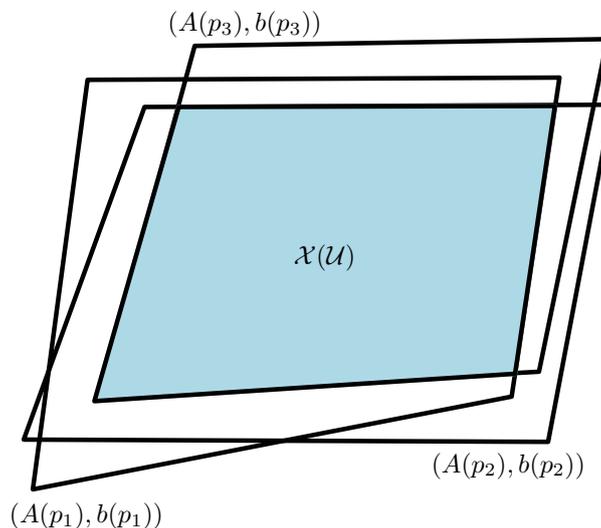


FIGURE 4.1 – Espace linéaire admissible et robuste à trois réalisations de perturbations  $p_1, p_2, p_3$  dans un cas polytopique

La contrepartie robuste au programme incertain (4.6) est alors le problème d'optimisation *min-max* suivant :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \max_{(A,b) \in \mathcal{U}} \gamma^T x \\ \text{sous} \quad & Ax \leq b, \end{aligned} \quad (4.10)$$

En pratique, la construction de la contrepartie robuste d'un programme linéaire incertain est obtenue contrainte par contrainte. En remarquant que  $(Ax \leq 0) \Leftrightarrow (a_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m)$ ,  $a_i$  étant la  $i^{\text{ème}}$  ligne

de la matrice  $A$ , nous pouvons réécrire la contrepartie robuste :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \max_{(A,b) \in \mathcal{U}} \gamma^T x \\ \text{sous} \quad & a_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall (a_i, b_i) \in \mathcal{U}_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

où  $\mathcal{U}_i$  est la projection de l'ensemble d'incertitudes  $\mathcal{U}$  sur l'espace des données de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$  et du vecteur  $b$ . La reformulation (4.11) a l'avantage d'apporter de la flexibilité dans la description de  $\mathcal{U}$  en autorisant notamment que chaque contrainte  $a_i x \leq b_i$  puisse être affectée par son propre ensemble d'incertitudes  $\mathcal{U}_i$  affines en fonction des variables de perturbations  $p_i$  :

$$\mathcal{U}_i = \left\{ [a_i, b_i] = [a_i^0, b_i^0] + \sum_{j=1}^k p_j^i [a_i^j, b_i^j], \quad p^i \in \mathcal{P}_i \right\} \quad (4.12)$$

et  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$ . Une fois la structure des ensembles d'incertitudes fixée, l'élément déterminant pour l'existence et la construction d'une contrepartie robuste numériquement efficace est la structure de l'ensemble de perturbations  $\mathcal{P}_i$ .

#### 4.2.4 Ensembles d'incertitudes et contreparties robustes

Les études menées dans la suite de ce chapitre se basent sur les ensembles d'incertitudes dits ellipsoïdaux. Ces derniers ont été étudiés parallèlement par Ben-Tal et Nemirovski [15] d'une part et El Ghaoui *et al.* [53] d'autre part dans le but de développer des contreparties robustes.

**Définition 6 (Ensemble ellipsoïdal d'incertitudes [15]).** — Soit l'ensemble de perturbations  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^k$  décrit par la boule unité,

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|_2 \leq 1\}, \quad (4.13)$$

on définit par ensemble d'incertitudes ellipsoïdal l'ensemble  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m$  tel que

$$\mathcal{U} = \{(A, b) = \Pi(p), \|p\|_2 \leq 1\} \quad (4.14)$$

où  $p \mapsto \Pi(p)$  est une application affine de  $\mathbb{R}^k$  vers  $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m$  qui peut prendre la forme particulière (4.7) ou encore (4.12).

Cette définition permet, notamment par un choix judicieux de l'application  $\Pi(p)$ , de décrire des ensembles  $\mathcal{U}$ , dits plats, qui décrivent le cas où certaines données du problème sont connues avec précision ou encore des ensembles  $\mathcal{U}$ , dits cylindriques, où chaque condition ellipsoïdale affecte seulement un sous-ensemble des éléments de  $p$  [15]. Par exemple, un ensemble d'intervalles d'incertitudes est l'intersection de  $k$  cylindres ellipsoïdaux [16].

Trois cas présents dans la littérature sont exposés ci-après.

#### Cas d'un seul ellipsoïde d'incertitudes $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$

**Théorème 4 ([14]).** — Soit l'ensemble  $\mathcal{U}_i$ , associé à la contrainte  $a_i x \leq b_i$ , et donné par

$$\mathcal{U}_i = \left\{ [a_i, b_i] = [a_i^0, b_i^0] + \sum_{j=1}^k p_j [a_i^j, b_i^j], \quad \|p\|_2 \leq 1 \right\} \quad (4.15)$$

La contrepartie robuste s'écrit alors

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma^T x \\ \text{sous} \quad & a_i^0 x + b_i^0 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k (a_i^j x + b_i^j)^2}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.16)$$

Différentes démonstrations pour le cas d'un ellipsoïde simple sont détaillées dans [14, 16, 53].

Cas de l'intersection de plusieurs ellipsoïdes  $\mathcal{U} = \bigcap_{l=0}^s \mathcal{U}_l$

**Théorème 5 ([16]).** — *Soit l'ensemble*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_l &= \left\{ [A; b] = [A^{l0}, b^{l0}] + \sum_{j=1}^{k_l} u_j [A^{lj}, b^{lj}], \|p\|_2 \leq 1 \right\} \\ &= \mathcal{U}_{l,1} \times \cdots \times \mathcal{U}_{l,m} \end{aligned} \quad (4.17)$$

où chaque ensemble  $\mathcal{U}_{l,j}$  répond à la définition (4.15). Pour ce cas, la contrepartie robuste est équivalente au programme suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma^T x \\ \text{sous} \quad & a_i^{00} x + b_i^{00} + \sum_{l=1}^s \left( \text{tr} [(a_i^{l0} - a_i^{00})^T \lambda_i^l] + (b^{l0} - b^{00})^T \mu_i^l \right) \\ & \leq \left\| \begin{pmatrix} a_i^{01} x + b_i^{01} - \sum_{l=1}^s \left( \text{tr} [(A^{01})^T \lambda_i^l] + (b^{01})^T \mu_i^l \right) \\ \vdots \\ A_i^{0k_l} x + b_i^{0k_l} - \sum_{l=1}^s \left( \text{tr} [(A^{0k_l})^T \lambda_i^l] + (b^{0k_l})^T \mu_i^l \right) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ & + \sum_{l=1}^s \left\| \begin{pmatrix} \text{tr} (A^{l1} \lambda_i^l) + (b^{l1})^T \mu_i^l \\ \vdots \\ \text{tr} (A^{lk_l} \lambda_i^l) + (b^{lk_l})^T \mu_i^l \end{pmatrix} \right\|_2, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.18)$$

avec  $\lambda_i^l \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\mu_i^l \in \mathbb{R}^m$ .

Une preuve pour ce second cas est disponible dans les annexes de [16].

### Cas particulier des intervalles de perturbation

Considérons à présent une contrainte  $ax \leq b$  pour laquelle les perturbations sont contenues dans une boîte, i.e. tous les éléments de  $u$  appartiennent à des intervalles :

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^k : \|p\|_\infty \leq 1\}. \quad (4.19)$$

Les intervalles sur  $\mathbb{R}$  peuvent être envisagés comme la projection des ellipsoïdes sur la droite réelle. Ainsi, un espace de perturbations sous la forme (4.19) peut être vu comme le produit cartésien d'ellipsoïdes n'ayant d'effet que sur une seule des composantes du vecteur de perturbation simultanément. Dans ce cadre, la contrainte robuste issue de (4.11) se réécrit

$$\begin{aligned} a^0 x + \sum_{j=1}^k u_j a^j x &\leq b^0 + \sum_{j=1}^k p^j b^j & |p_j| \leq 1, \forall j \\ \Leftrightarrow a^0 x + \sum_{j=1}^k p_j (a^j x - b^j) &\leq b^0 & |p_j| \leq 1, \forall j \\ \Leftrightarrow a^0 x + \max_{\|p\|_\infty \leq 1} \left( \sum_{j=1}^k p_j (a^j x - b^j) \right) &\leq b^0 \end{aligned}$$

En remarquant que  $\max_{\|p\|_\infty \leq 1} \left( \sum_{j=1}^k u_j (a^j x - b^j) \right) = \sum_{j=1}^k |a^j x - b^j|$ , il vient alors une nouvelle représentation convexe de la contrainte robuste du problème (4.11) :

$$a^0 x + \sum_{j=1}^k |a^j x - b^j| \leq b^0 \quad (4.20)$$

Cette dernière forme peut aussi s'écrire à l'aide d'inégalités linéaires :

$$\begin{cases} a^0 x + \sum_{j=1}^k y_j \leq b^0 \\ -y_j \leq a^j x - b^j \leq y_j, \quad j = 1, \dots, k \\ 0 \leq y_j, \quad j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (4.21)$$

**Théorème 6 ([18]).** — *Lorsque les incertitudes sur les données évoluent dans des intervalles, alors la contrepartie robuste du problème (4.11) est équivalente au programme linéaire suivant :*

$$\begin{array}{l} \min_x \quad \gamma^T x \\ \text{sous} \quad \begin{cases} a_i^0 x + \sum_{j=1}^k y_{ij} \leq b_i^0 \\ -y_{ij} \leq a_i^j x - b_i^j \leq y_{ij}, \quad j = 1, \dots, k \\ 0 \leq y_{ij}, \quad j = 1, \dots, k \end{cases} \end{array} \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.22)$$

Ce dernier problème est un programme linéaire de  $n + k \cdot m$  variables et  $(2k + 1)m$  contraintes. Le schéma d'optimisation robuste (4.22) est à rapprocher de celui obtenu par Soyster au début des années 70 [131]. Il a été démontré dans [16] que le cas d'incertitudes polyédrales peut être perçu comme un cas particulier d'incertitudes ellipsoïdales.

Les outils présentés dans cette section vont être exploités pour développer des algorithmes de calcul de plan de guidage robuste.

### 4.3 Objectifs relâchés de rendez-vous : ensemble d'arrivée polytopique

Si des incertitudes et erreurs doivent être prises en considération lors de la synthèse du plan de guidage, il devient impossible d'assurer que le rendez-vous s'effectuera en un point particulier de l'espace d'état. Il nous faut alors considérer des objectifs de rendez-vous relâchés au sens où l'état final devra appartenir à un sous-ensemble dit de tolérance.

Nous proposons de considérer une condition finale dite polytopique au sens où l'état final  $X(\nu_f)$  doit appartenir à un sous-ensemble polytopique de l'espace d'état (cf. figure 4.2). Cette condition va s'exprimer sous la forme d'une inégalité matricielle linéaire :

$$HX(\nu_f) \leq K \Leftrightarrow H(\mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V} + \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0)) \leq K \quad (4.23)$$

$H$  et  $K$  représentent les coordonnées cartésiennes du polytope de tolérance.

Le problème (3.21) est ainsi modifié :

$$\begin{array}{l} \min_{\Delta \mathbf{V}, Z} \sum_{i=1}^{3N} Z_i \\ \text{sous :} \end{array} \quad \begin{cases} H(\Phi(\nu_f, \nu_0)X_0 + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V}) \leq K & \text{condition polytopique de rendez-vous} \\ \Delta V_i \leq Z_i, \quad -\Delta V_i \leq Z_i & \text{contraintes sur la commande, } i = 1, \dots, 3N \\ \|[Z_{3j+1}, Z_{3j+2}, Z_{3j+3}]^T\|_\infty \leq \Delta V_{j+1, \max} & \text{contraintes sur la commande, } j = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4.24)$$

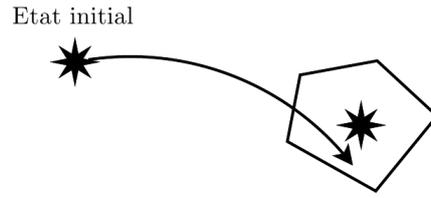


FIGURE 4.2 – Schéma d'un rendez-vous vers un ensemble d'arrivée polytopique

Cela aboutit au programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{V}, Z} & \begin{bmatrix} I_{3N} & 0_{1 \times 3N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} \\ \text{sous} & \begin{cases} H \left( \mathbf{B}_f \begin{bmatrix} \mathbb{O} & I_{3N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} + \Phi(\nu_f, \nu_0) X(\nu_0) \right) \leq K \\ \begin{bmatrix} -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \\ I_{3N} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0_{3N \times 1} \\ 0_{3N \times 1} \\ \Delta V_{max} \otimes I_3 \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Par la suite, nous nous intéresserons à un programme différent par le coût qu'il minimise. Ce nouveau programme doit mettre en avant, non plus l'objectif de consommation minimale, mais celui de précision maximale. L'intérêt de ce changement est multiple. Cela décharge l'utilisateur du choix de la zone de tolérance à modifier itérativement en fonction de la nature et de l'amplitude des erreurs et perturbations considérées. De plus, en recherchant la plus petite région de tolérance, nous calculerons la structure de plan de guidage la moins sensible aux incertitudes considérées ainsi qu'une prédiction certifiée de la dispersion des trajectoires due aux erreurs éventuelles.

Afin de mettre en place ce nouveau programme, nous allons préciser les coordonnées du polytope de tolérance de manière à décrire un parallélogramme :

$$H = \begin{bmatrix} I_6 \\ -I_6 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \Gamma + X_f \\ \Gamma - X_f \end{bmatrix} \text{ avec } \Gamma \in \mathbb{R}^6 \quad (4.26)$$

Le vecteur de paramètres  $\Gamma$  vient augmenter l'ensemble des variables de décision déjà présentes dans le programme (4.25) et le critère de coût est donné par

$$\sum_{i=1}^6 \Gamma_i. \quad (4.27)$$

Cependant, la consommation ne peut être négligée au vu des enjeux. Ainsi, il est décidé d'imposer une contrainte supplémentaire de budget telle que

$$\|\Delta \mathbf{V}\|_1 \leq \sum_{i=1}^{3N} Z_i \leq M_{\Delta V} \quad (4.28)$$

$M_{\Delta V}$  étant le quota autorisé pour la manœuvre. Le problème (4.24) est ainsi remplacé par

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{V}, Z, \Gamma} & \sum_{i=1}^{3N} \Gamma_i \\ \text{sous :} & \begin{cases} \begin{bmatrix} I_6 \\ -I_6 \end{bmatrix} (\Phi(\nu_f, \nu_0) X_0 + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V}) \leq \begin{bmatrix} \Gamma + X_f \\ \Gamma - X_f \end{bmatrix} & \text{condition polytopique de rendez-vous} \\ 0 \leq \Gamma & \\ \Delta V_i \leq Z_i, \quad -\Delta V_i \leq Z_i & \text{contraintes sur la commande, } i = 1, \dots, 3N \\ \|[Z_{3j+1}, Z_{3j+2}, Z_{3j+3}]^T\|_\infty \leq \Delta V_{j+1, max}, & \text{contraintes sur la commande, } j = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{3N} Z_i \leq M_{\Delta V} & \text{contrainte de budget} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le problème garde une structure linéaire et peut être programmé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta \mathbf{V}, Z, \Gamma} \begin{bmatrix} 0_{3N} & 0_{1 \times 3N} & I_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \\ \Gamma \end{bmatrix} \\
 & \text{sous} \begin{bmatrix} 0_{6 \times 3N} & \mathbf{B}_f & -\mathbb{I}_6 \\ 0_{6 \times 3N} & -\mathbf{B}_f & -\mathbb{I}_6 \\ -\mathbb{I}_{3N} & \mathbb{I}_{3N} & 0_6 \\ -\mathbb{I}_{3N} & -\mathbb{I}_{3N} & 0_6 \\ \mathbb{I}_{3N} & 0_{3N} & 0_6 \\ 0_{3N} & 0_{3N} & -\mathbb{I}_6 \\ I_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \\ \Gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} X_f - \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) \\ -X_f - \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) \\ 0_{3N \times 1} \\ 0_{3N \times 1} \\ \Delta V_{max} \otimes I_3 \\ 0_{1 \times 6} \\ M_{\Delta V} \end{bmatrix} \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation linéaire (4.29) et le programme associé (4.30) deviendront par la suite le problème de référence pour lequel nous envisagerons les différentes incertitudes présentées en introduction.

#### 4.4 Guidage robuste aux incertitudes de navigation

L'algorithme de génération de plan de guidage, tel qu'il est envisagé jusqu'à présent, nécessite une connaissance précise des conditions initiales composées par la position et la vitesse relatives initiales. Ces données sont généralement estimées par le module de navigation à partir des mesures de capteurs. La reconstruction de l'état étant soumise aux bruits et aux biais de mesure, le module de navigation fournit l'état estimé à un écart-type près.

Dans [71], une approche dite «multimodèle» est décrite. Cette méthode consiste à calculer un plan de guidage qui satisfait les contraintes et objectifs simultanément pour différents états relatifs initiaux. Si les garanties de robustesse de cette technique n'ont pas été prouvées dans [71], elle semble efficace en pratique. En fait, la linéarité de la propagation du mouvement relatif et des contraintes explique l'efficacité de cette méthode. En effet, si les objectifs de rendez-vous sont assurés pour un certain nombre d'états initiaux, ils le sont aussi pour tout état initial appartenant à l'enveloppe convexe des états initiaux testés pour la robustesse.

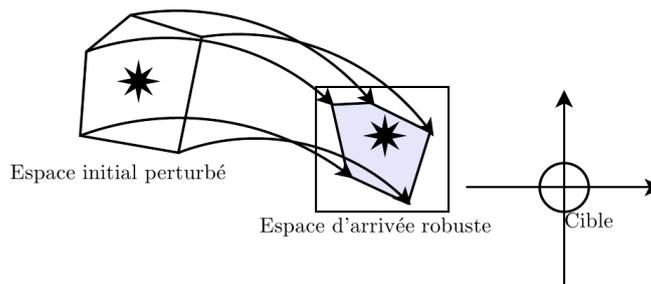


FIGURE 4.3 – Schématisation de l'approche multimodèle d'un rendez-vous

Mueller et Larsson considèrent, quant à eux, que les erreurs sur l'état initial sont confinées dans un ellipsoïde [109]. Ils ont ainsi pu utiliser les résultats de Ben-Tal et Nemirovski [15] pour décrire un algorithme robuste aux erreurs de navigation basé sur la résolution d'un programme linéaire. Même si le comportement statistique des erreurs de navigation est généralement connu, la description déterministe de l'ensemble d'erreurs proposée dans [109] est préférée, notamment parce qu'une relation entre les descriptions déterministe et statistique existe (voir l'annexe F.2). Soient les états initiaux probables appartenant à un ellipsoïde d'incertitudes tels que

$$X(\nu_0) = X^0(\nu_0) + Rp, \quad \|p\|_2 \leq 1 \quad (4.31)$$

où  $X^0$  est l'estimation de l'état,  $R$  la matrice décrivant l'ellipsoïde d'incertitudes<sup>1</sup> et  $p$  la variable de perturbations.

Il est possible de décrire un algorithme de calcul d'un plan robuste de guidage comme dans [109]. Cependant, nous pouvons montrer que tout plan de guidage propagera l'ellipsoïde d'incertitudes (4.31) vers une seconde ellipsoïde contenant l'ensemble des points d'arrivée possibles. De plus, nous montrerons ultérieurement que le plan de guidage n'a pas d'influence sur la dispersion des points d'arrivée et que celle-ci est uniquement déduite du temps de propagation.

Reprenons la condition de rendez-vous exacte (3.14) et la description des erreurs de navigation (4.31). Il vient une description de l'ensemble des points d'arrivée probables :

$$\mathcal{E}_f = \{X | X = \Phi(\nu_f, \nu_0)(X^0(\nu_0) + Rp) + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V}, \quad \|p\|_2 \leq 1\}, \quad X(\nu_f) \in \mathcal{E} \quad (4.37)$$

L'équation précédente décrit  $\mathcal{E}_f$  comme étant l'image de la boule unité par une application linéaire. Ainsi  $\mathcal{E}_f$  est un ellipsoïde. Le théorème suivant permet par ailleurs de décrire formellement  $\mathcal{E}_f$ .

**Théorème 7 (Image d'un ellipsoïde par une application affine [129]).** — *Soit l'application affine  $x \in \mathbb{R}^m \mapsto y \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $Ax + Cy + d = 0$  tel que  $\text{rang}(A) = \text{rang}(C) = r = \min\{n, m\}$ . L'image d'un ellipsoïde  $\mathcal{E}_1(x_0, Q_1) \in \mathbb{R}^m$ , de centre  $x_0$  et définie par la matrice semi-définie positive  $Q_1$ , par cette application affine est l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_2(y_0, Q_2) \in \mathbb{R}^n$  telle que*

$$Ax_0 + Cy_0 + d = 0 \quad (4.38)$$

$$Q_2 = C^T (A^r)^T (Q_1 - Q_1 N_A (N_A^T Q_1 N_A)^{\perp} N_A^T Q_1) A^r C \quad (4.39)$$

où  $A^r = A^T (AA^T)^{-1}$  est l'inverse à droite de la matrice  $A$  de rang plein,  $(\cdot)^{\perp}$  désigne la matrice pseudo-inverse et  $N_A$  est le noyau de  $A$  tel que  $AN_A = 0$ .

Dans notre cas, l'application affine est composée par

$$\begin{aligned} A &= \Phi(\nu_f, \nu_0)R \\ C &= \mathbb{I}_n \\ d &= \Phi(\nu_f, \nu_0)X^0(\nu_0) + \mathbf{B}_f \Delta \mathbf{V} \end{aligned} \quad (4.40)$$

L'ellipsoïde  $\mathcal{E}_1$  centré autour de l'état initial  $X^0(\nu_0)$  correspond à l'ellipsoïde d'incertitudes défini par la matrice  $Q_1 = R^{-2}$ . En remarquant que dans notre cas  $A^r = A^{-1}$  et  $N_A$  est une matrice vide, il vient

$$\begin{aligned} Q_2 &= (\Phi(\nu_f, \nu_0)^{-1})^T R^{-2} \Phi(\nu_f, \nu_0)^{-1} \\ &= (\Phi(\nu_f, \nu_0)^T R^T R \Phi(\nu_f, \nu_0))^{-1} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ce dernier résultat permet de conclure que la propagation de l'ellipsoïde d'incertitudes donne lieu à un autre ellipsoïde dont la forme est indépendante du plan de guidage. L'ellipsoïde d'arrivée est donc l'image par la transition de l'ellipsoïde d'incertitudes centré par le plan de guidage autour du point d'arrivée nominal.

1. Un ellipsoïde  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  défini comme suit

$$\mathcal{E}(x_c, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q x + 2x^T q + s \leq 0\} \quad (4.32)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_c)^T Q (x - x_c) \leq 1\} \quad (4.33)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n | \|P(x - x_c)\| \leq 1\} \quad (4.34)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n | x = Ry + x_c, \quad y^T y \leq 1\} \quad (4.35)$$

On peut noter la relation entre les matrices  $P$ ,  $Q$ , et  $R$

$$Q^{1/2} = P = R^{-1} \quad (4.36)$$

**Remarque 7 (Rejet des incertitudes de navigation par commande prédictive):** Si les erreurs de navigation ne peuvent être rejetées par aucune loi de commande en boucle ouverte, il est possible d'en minimiser les effets à l'horizon particulier de la mission. En ce sens, nous avons développé dans [50] une loi de commande prédictive combinant une commande en boucle ouverte et une loi par retour d'information en exploitant les techniques de commande prédictive basée sur la notion de tube [85]. Notons que, dans le cadre du rendez-vous autour d'une orbite circulaire (dynamique linéarisée invariante), les méthodes classiques de commande prédictive [106] permettent de maintenir toutes les trajectoires perturbées dans un tube autour de la trajectoire nominale. Dans le cadre générique des orbites elliptiques, les gains de la loi par retour d'information et de la trajectoire nominale doivent être calculés simultanément. Ce problème est généralement difficile à résoudre de par sa non-converxité. Toutefois, en imposant une structure affine pour le retour d'information, le problème devient convexe [65]. Dans [46, chapitre 5], G. Deaconu met en œuvre et compare deux variantes de cette méthodologie. La première combine la commande nominale en boucle ouverte et un retour d'état tandis que la seconde combine la commande nominale avec un retour des effets de la propagation des incertitudes sur l'intervalle entre deux impulsions. En outre, cette dernière variante a fait l'objet de la publication [50].

## 4.5 Guidage robuste aux erreurs d'exécution des manœuvres impulsives

Jusqu'à présent, le plan de guidage est idéalisé, ce qui se traduit par l'hypothèse selon laquelle les différentes impulsions sont réalisées avec une extrême précision. En pratique, cet objectif de réalisation parfaite des impulsions est impossible à tenir pour plusieurs raisons. Tout d'abord, l'hypothèse de commandes purement impulsives se trouve invalidée dès la simulation du rendez-vous lorsque chaque impulsion est modélisée par une fonction porte. De plus, dans la réalité, le module de propulsion fournira un profil de poussée avec des régimes transitoires. Ensuite, les impulsions étant calculées dans un repère local lié à la position de la cible (LVLH dans nos travaux), le satellite doit souvent adopter l'attitude nécessaire avant de solliciter les différents propulseurs qui ne sont généralement pas alignés sur un repère orthogonal. Enfin, les coordonnées impulsives sont souvent calculées avec une précision numérique importante (précision flottante) qui ne peut pas être reproduite par le module de propulsion qui introduira une erreur de quantification dans l'exécution. Il apparaît donc nécessaire de prendre en compte dans l'algorithme les erreurs de modélisation de la commande ainsi que les erreurs de quantification et de réalisation. Celles-ci seront étudiées sous deux formes : les erreurs sur la date d'impulsion d'une part, les erreurs sur l'amplitude et l'orientation des impulsions d'autre part.

### 4.5.1 Incertitudes sur la date d'application

#### Modélisation des incertitudes

Les incertitudes sur la date d'impulsion se traduisent par des erreurs sur la date réelle d'application de l'impulsion exprimée en anomalie vraie :

$$\nu_i = \nu_i^0 + p_i \delta \nu_i, \quad \|p_i\|_\infty \leq 1, \quad (4.42)$$

On note ici  $\nu^0 \in \mathbb{R}^N$  le vecteur des dates nominales d'application des impulsions,  $p \in \mathbb{R}^N$  le vecteur des variables de perturbations et  $\delta \nu_i$  la perturbation maximale attendue. Nous supposons que les variables de perturbations sont indépendantes les unes des autres. Une telle perturbation provoque deux effets indésirables. Tout d'abord, la matrice de transition  $\Phi$  étant dépendante de l'anomalie vraie d'impulsion, elle devient aussi incertaine. Ensuite, les valeurs des saturations,  $\Delta V_{i,max}$ , s'exprimant en fonction de l'anomalie vraie (voir équation (3.6)), s'en trouvent aussi affectées. Cependant, dans la suite de l'étude, seules les incertitudes sur les matrices de transition seront étudiées. L'incertitude sur les valeurs de

saturation peut être simplement appréhendée par l'utilisation de la borne la plus restrictive sur l'intervalle de perturbation.

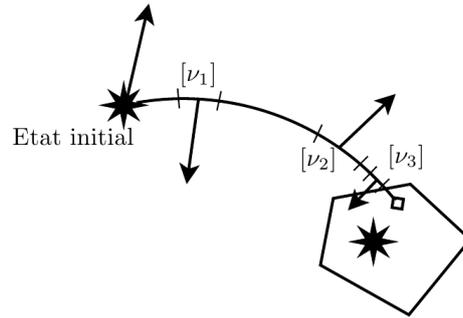


FIGURE 4.4 – Rendez-vous avec incertitudes sur les dates d'impulsion et ensemble d'arrivée polytopique

Dans un souci de cohérence, les bornes sur l'intervalle de perturbation sont d'abord exprimées en secondes puis traduites séparément en anomalie vraie par résolution de l'équation de Kepler (cf équation (B.6)). Les dates nominales en anomalie,  $\nu_i^0$ , sont alors le centre de l'intervalle en anomalie dont les bornes ont été calculées précédemment. Ainsi, les dates nominales en anomalie ne correspondent pas en général aux dates nominales temporelles d'impulsions. Les rayons,  $\delta\nu_i$ , sont exactement la moitié de l'intervalle de perturbation en anomalie.

La variation de l'instant d'impulsion implique une variation de la matrice de transition. Afin de construire la contrepartie robuste, il est nécessaire d'encadrer *a minima* les variations de la matrice de transition. A cet effet, l'analyse par intervalles permet un calcul d'une fonction d'inclusion de la matrice de transition (cf. l'annexe F.3). Nous noterons  $[\Phi](\nu_f, [\nu_i])$  la fonction d'inclusion de la matrice de transition  $\Phi$  entre l'instant incertain  $[\nu_i]$  et l'instant final  $\nu_f$ . Cette fonction d'inclusion est calculée par la méthode de la fonction d'inclusion centrée (cf. (F.21)).

### Contrepartie robuste au problème de rendez-vous polytopique

Si les dates d'impulsion  $\{\nu_i\}_{i=1,\dots,N}$  sont affectées par des incertitudes, alors le problème de rendez-vous (4.24) devient incertain, car la matrice  $\mathbf{B}_f$  de ce problème est une matrice inconnue appartenant à la matrice d'intervalles  $[\mathbf{B}_f]$  donnée par

$$[\mathbf{B}_f] = \begin{bmatrix} [\Phi](\nu_f, [\nu_0])B & \dots & [\Phi](\nu_f, [\nu_N])B \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Ainsi, la condition incertaine de rendez-vous est donnée par

$$H \left( \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) + \sum_{i=1}^N \Phi(\nu_f, \nu_i)B\Delta V(\nu_i) \right) \leq K \quad (4.44)$$

où

$$[\Phi](\nu_f, [\nu_i]) \ni \Phi(\nu_f, \nu_i) = \Phi^0(\nu_f, \nu_i) + \delta\Phi(\nu_f, \nu_i)$$

La matrice  $\Phi^0(\nu_f, \nu_i)$  est la matrice milieu de la matrice d'inclusion  $[\Phi](\nu_f, [\nu_i])$ . La matrice de perturbation  $\delta\Phi(\nu_f, \nu_i)$  appartient à la matrice d'intervalles  $[-\overline{\delta\Phi}_i, \overline{\delta\Phi}_i]$  où  $\overline{\delta\Phi}_i$  est la matrice rayon de  $[\Phi](\nu_f, [\nu_i])$ . Dans le cadre posé, nous pouvons définir l'ensemble d'incertitudes  $\mathcal{U}$  tel que

$$\mathcal{U} = \{\Phi(\nu_f, \nu_i) | \Phi(\nu_f, \nu_i) = \Phi^0(\nu_f, \nu_i) + u_i \overline{\delta\Phi}_i, |u_i| \leq 1, i = 1, \dots, N-1\}. \quad (4.45)$$

Il vient alors la formulation du problème de rendez-vous incertain :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{V}, Z, \Gamma} \sum_{i=1}^{3N} \Gamma_i \\ & \text{sous} \begin{cases} H \left( \sum_{i=1}^N \{(\Phi^0(\nu_f, \nu_i) + p_i \overline{\delta \Phi_i}) B \Delta V(\nu_i)\} + \Phi(\nu_f, \nu_0) X(\nu_0) \right) \leq K, \\ \|p\|_\infty \leq 1 \\ \Delta V(\nu_i) \leq Z_i, \quad -\Delta V(\nu_i) \leq Z_i \\ [Z_{3i+1}, Z_{3i+2}, Z_{3i+3}]^T \leq \Delta V_{max, i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{3N} Z_i \leq M_{\Delta V} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.46)$$

où  $H$  et  $K$  sont donnés par (4.26). Selon [18], la contrepartie robuste de la condition incertaine de rendez-vous (4.44) peut s'écrire sous la forme suivante

$$H \left( \Phi(\nu_f, \nu_0) X(\nu_0) + \sum_{i=1}^N \Phi^0(\nu_f, \nu_i) B \Delta V(\nu_i) + \max_{u_i} \{u_i \overline{\delta \Phi_i} B \Delta V(\nu_i)\} \right) \leq K \quad (4.47)$$

En notant que le terme de maximisation  $\max_{u_i} \{u_i \overline{\delta \Phi_i} B \Delta V(\nu_i)\}$  vérifie

$$\max_{u_i} \{u_i \overline{\delta \Phi_i} B \Delta V(\nu_i)\} = |\overline{\delta \Phi_i} B \Delta V(\nu_i)| \quad (4.48)$$

et que les variables  $Z_i$  vérifient  $|\Delta V(\nu_i)| \leq Z_i$ , nous obtenons une formulation linéaire de la contrepartie robuste au problème (4.46) :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{V}, Z, \Gamma} \sum_{i=1}^{3N} \Gamma_i \\ & \text{sous} \begin{cases} H \Phi(\nu_f, \nu_0) X(\nu_0) + H \left[ \sum_{i=1}^N \Phi^0(\nu_f, \nu_i) B \Delta V(\nu_i) + |\overline{\delta \Phi_i} B| Z_i \right] \leq K \\ \Delta V_i \leq Z_i, \quad -\Delta V_i \leq Z_i \\ [Z_{3i+1}, Z_{3i+2}, Z_{3i+3}]^T \leq \Delta V_{max, i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{3N} Z_i \leq M_{\Delta V} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Le problème (4.49) est en fait le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{V}, Z, \Gamma} \begin{bmatrix} 0_{3N} & 0_{1 \times 3N} & I_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \\ \Gamma \end{bmatrix} \\ & \text{sous} \begin{bmatrix} \overline{\delta \Phi} \bar{B} & \mathbf{B}_f & -\mathbb{I}_6 \\ -\overline{\delta \Phi} \bar{B} & -\mathbf{B}_f & -\mathbb{I}_6 \\ -\mathbb{I}_{3N} & \mathbb{I}_{3N} & 0_6 \\ -\mathbb{I}_{3N} & -\mathbb{I}_{3N} & 0_6 \\ \mathbb{I}_{3N} & 0_{3N} & 0_6 \\ 0_{3N} & 0_{3N} & -\mathbb{I}_6 \\ I_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta V \\ \Gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} X_f - \Phi(\nu_f, \nu_0) X(\nu_0) \\ -X_f - \Phi(\nu_f, \nu_0) X(\nu_0) \\ 0_{3N \times 1} \\ 0_{3N \times 1} \\ \Delta V_{max} \otimes I_3 \\ 0_{1 \times 6} \\ M_{\Delta V} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$

où

$$\overline{\delta \Phi} = \left[ |\overline{\delta \Phi_1}| \quad \dots \quad |\overline{\delta \Phi_N}| \right], \quad (4.51)$$

$$\Phi^0 = \left[ \Phi^0(\nu_f, \nu_0) \quad \dots \quad \Phi^0(\nu_f, \nu_N) \right], \quad (4.52)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ & \ddots \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

## 4.5.2 Erreurs de réalisation des impulsions

### Modélisation des erreurs

Chaque impulsion calculée doit être réalisée par le module de propulsion. Cette réalisation nécessite une attitude particulière du véhicule ainsi que la répartition de la commande calculée dans le repère LVLH sur les différents moteurs. Ainsi, une erreur de pointage est toujours possible et la répartition de la poussée peut introduire un biais. Cette incertitude sur l'impulsion réellement appliquée peut se modéliser comme une erreur en amplitude et en orientation (voir figure 4.5) :

$$\Delta V_i = (1 + \lambda_i) M_{ci} \Delta V_i^0 \quad (4.54)$$

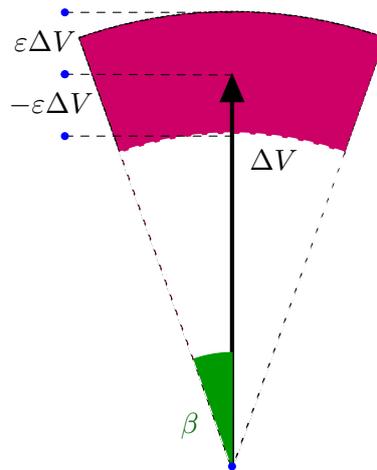


FIGURE 4.5 – Erreur de réalisation d'une impulsion

où le paramètre de dilatation  $\lambda_i$  est compris dans l'intervalle  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  et la matrice de rotation de Cardan,  $M_{ci}$ , permet de modéliser l'erreur d'orientation. La matrice de Cardan dépend de trois angles,  $\psi_i, \theta_i, \phi_i$  qui décrivent la rotation schématisée aux figures 4.6. Dès lors que ces angles restent petits, à savoir bornés par l'amplitude angulaire  $\beta$ ,

$$|\psi_i| \leq \beta, |\theta_i| \leq \beta, |\phi_i| \leq \beta, \quad (4.55)$$

la matrice de Cardan,  $M_{ci}$ , peut s'approcher au premier ordre :

$$M_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & -\psi_i & \theta_i \\ \psi_i & 1 & -\phi_i \\ -\theta_i & \phi_i & 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Définissons maintenant la matrice de perturbation  $M_i$  telle que

$$M_i = (1 + \lambda_i) M_{ci} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_i & -(1 + \lambda_i)\psi_i & (1 + \lambda_i)\theta_i \\ (1 + \lambda_i)\psi_i & 1 + \lambda_i & -(1 + \lambda_i)\phi_i \\ -(1 + \lambda_i)\theta_i & (1 + \lambda_i)\phi_i & 1 + \lambda_i \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Les paramètres incertains de dilatation,  $\lambda_i$  et d'orientation,  $\psi_i, \theta_i, \phi_i$ , appartenant à leurs intervalles respectifs, la matrice  $M_i$  peut se réécrire en fonction de quatre variables de perturbation,  $p_{ij}$

$$M_i = \mathbb{I}_3 + \sum_{j=1}^4 p_{ij} M^j, \quad |p_{ij}| \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.58)$$

où les matrices  $M_i$  sont données par

$$M^1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, M^2 = \begin{bmatrix} 0 & -(1+\varepsilon)\beta & 0 \\ (1+\varepsilon)\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1+\varepsilon)\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ -(1+\varepsilon)\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\varepsilon)\beta \\ 0 & (1+\varepsilon)\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

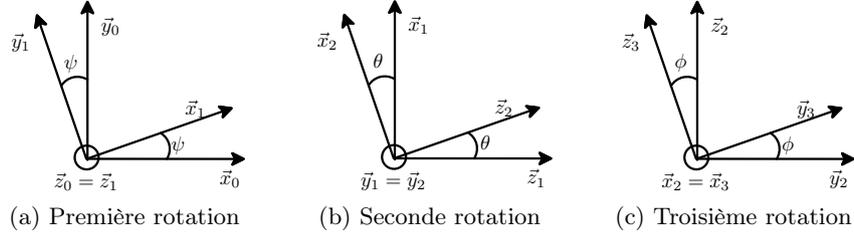


FIGURE 4.6 – Angle de Cardan

### Contrepartie robuste

Le problème de guidage sous contrainte d'erreurs de réalisation des impulsions est illustré sur la figure 4.7.

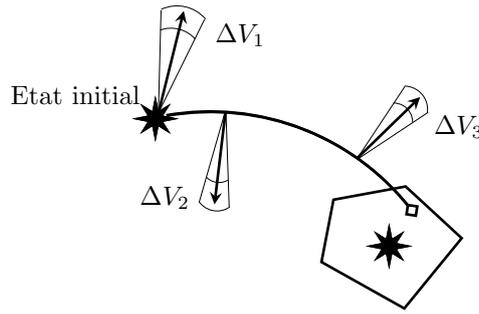


FIGURE 4.7 – Schéma de manœuvre de rendez-vous sous erreurs de réalisation de la commande

La condition polytopique de rendez-vous tenant compte des erreurs de réalisation de la commande s'écrit

$$H\Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) + HB_f\mathbf{M}(p)\Delta\mathbf{V} \leq \mathbf{K} \quad (4.60)$$

où

$$\mathbf{M}(p) = \text{diag}(\{M_1, \dots, M_N\}) = \mathbb{I}_{3N} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_j^4 p_{1j}M^j & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_j^4 p_{Nj}M^j \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{M}}(p)}, \quad \|p\|_\infty \leq 1 \quad (4.61)$$

Nous en déduisons le problème de rendez-vous sous erreurs de réalisation de la commande

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta\mathbf{V}, Z, \Gamma} \sum_{i=1}^{3N} \Gamma_i \\ \text{sous} & \begin{cases} H\Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) + HB_f\mathbf{M}(p)\Delta\mathbf{V} \leq \mathbf{K}, \\ \|p\|_\infty \leq 1 \\ \Delta V(\nu_i) \leq Z_i, \quad -\Delta V(\nu_i) \leq Z_i \\ [Z_{3i+1}, Z_{3i+2}, Z_{3i+3}]^T \leq \Delta V_{max, i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{3N} Z_i \leq M_{\Delta V} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.62)$$

La condition robuste de rendez-vous associée à la condition incertaine (4.60) peut être formulée en exploitant les résultats issus de [17]

$$H\Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) + H\mathbf{B}_f\Delta\mathbf{V} + \max_{\|p\|_\infty \leq 1} \{H\mathbf{B}_f\widehat{\mathbf{M}}(p)\Delta\mathbf{V}\} \leq K \quad (4.63)$$

Le terme à maximiser dans la condition robuste (4.63) trouve une expression analytique :

$$\max_{\|p\|_\infty \leq 1} \{H\mathbf{B}_f\widehat{\mathbf{M}}(p)\Delta\mathbf{V}\} = \max_{\|p\|_\infty \leq 1} \left\{ \sum_{i=1}^N H\Phi(\nu_f, \nu_i)B \left( \sum_{j=1}^4 p_{ij}M^j \right) \Delta V_i \right\} \quad (4.64)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 \max_{\|p\|_\infty \leq 1} \{H\Phi(\nu_f, \nu_i)BM^j \Delta V_i p_{ij}\} \quad (4.65)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 |H\Phi(\nu_f, \nu_i)BM^j \Delta V_i| \quad (4.66)$$

A partir de l'expression (4.66), la contrepartie robuste au problème (4.62) est finalement donnée par

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta\mathbf{V}, Z, \Gamma} \sum_{i=1}^6 \Gamma_i \\ \text{sous} & \begin{cases} \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) + H\mathbf{B}_f\Delta\mathbf{V} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 |H\Phi(\nu_f, \nu_i)BM^j \Delta V_i| \leq K \\ \Delta V(\nu_i) \leq Z_i, \quad -\Delta V(\nu_i) \leq Z_i \\ [Z_{3i+1}, Z_{3i+2}, Z_{3i+3}]^T \leq \Delta V_{max, i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{3N} Z_i \leq M_{\Delta V} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Posons le vecteur de variables additionnelles  $Y \in \mathbb{R}^{24N}$ . Ces variables nous permettront d'encadrer les termes de la somme (4.66) afin de linéariser l'expression de la condition robuste de rendez-vous du problème (4.67) :

$$-Y_{ij} \leq \Phi(\nu_f, \nu_i)BM^j \Delta V_i \leq Y_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (4.68)$$

Le problème (4.67) trouve alors une forme linéaire

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta\mathbf{V}, \Gamma, Z, Y} \sum_{i=1}^6 \Gamma_i \\ \text{sous} & \begin{cases} \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) + H\mathbf{B}\Delta\mathbf{V} + H \sum_{l=1}^{4N} Y_l \leq K \\ -Y_{ij} \leq H\Phi(\nu_f, \nu_i)BM^j \Delta V_i \leq Y_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ \Delta V(\nu_i) \leq Z_i, \quad -\Delta V(\nu_i) \leq Z_i, \\ [Z_{3i+1}, Z_{3i+2}, Z_{3i+3}]^T \leq \Delta V_{max, i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^{3N} Z_i \leq M_{\Delta V} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Le problème (4.69) peut être programmé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \min_{\Delta \mathbf{V}, Z, \Gamma, Y} \begin{bmatrix} 0_{3N} & 0_{1 \times 3N} & I_6 & 0_{1 \times 24N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \\ \Gamma \\ Y \end{bmatrix} \\
\text{sous} & \begin{bmatrix} 0_{6 \times 3N} & \mathbf{B}_f & -\mathbb{I}_6 & I_{1 \times 4N} \otimes \mathbb{I}_6 \\ 0_{6 \times 3N} & -\mathbf{B}_f & -\mathbb{I}_6 & -I_{1 \times 4N} \otimes \mathbb{I}_6 \\ -\mathbb{I}_{3N} & \mathbb{I}_{3N} & 0_6 & 0_{6 \times 24N} \\ -\mathbb{I}_{3N} & -\mathbb{I}_{3N} & 0_6 & 0_{6 \times 24N} \\ \mathbb{I}_{3N} & 0_{3N} & 0_6 & 0_{6 \times 24N} \\ 0_{3N} & 0_{3N} & -\mathbb{I}_6 & 0_{6 \times 24N} \\ I_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 3N} & 0_{1 \times 6} & 0_{6 \times 24N} \\ 0_{24N \times 3N} & \overline{\Phi} & 0_{24N \times 6} & -\mathbb{I}_{24N} \\ 0_{24N \times 3N} & -\overline{\Phi} & 0_{24N \times 6} & -\mathbb{I}_{24N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Delta \mathbf{V} \\ \Gamma \\ Y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} X_f - \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) \\ -X_f - \Phi(\nu_f, \nu_0)X(\nu_0) \\ 0_{3N \times 1} \\ 0_{3N \times 1} \\ \Delta V_{max} \otimes I_3 \\ 0_{1 \times 6} \\ M_{\Delta V} \\ 0_{24N \times 1} \\ 0_{24N \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.70)
\end{aligned}$$

où  $\overline{\Phi}$  est la matrice donnée par le produit de Kronecker suivant

$$\overline{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi(\nu_f, \nu_1)B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi(\nu_f, \nu_2)B & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi(\nu_f, \nu_N)B \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} M^1 \\ M^2 \\ M^3 \\ M^4 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

## 4.6 Etude numérique

Cette section a pour objet, non seulement la validation numérique des résultats présentés précédemment, mais aussi la comparaison des plans robustes de guidage vis-à-vis de plans «nominaux» afin d'évaluer la pertinence de cette approche. Le protocole d'étude comprend en plusieurs étapes. La première consiste à calculer les plans nominaux et robustes par la résolution respective de (3.21) d'une part et de (4.50) ou (4.70) d'autre part. Les missions sont ensuite simulées dans un environnement képlérien prenant en compte les perturbations sur la commande énoncées plus haut. Lors de la simulation, la perturbation est tirée aléatoirement à chaque impulsion dans les bornes  $\delta\nu_i$ ,  $\varepsilon$  et  $\beta$ . Les erreurs sur l'instant d'impulsion  $\delta\nu_i$  correspondent à une seconde d'avance ou de retard. Les erreurs d'amplitude et d'orientation sur les manœuvres sont respectivement fixées à  $\varepsilon = 0.1\%$  et  $\beta = 1^\circ$ . Pour chaque plan de guidage, 500 simulations dans l'environnement décrit ci-dessus sont réalisées en boucle ouverte afin de ne pas masquer l'effet des perturbations. Nous comparons ainsi la dispersion des états en fin de mission lorsqu'ils sont conduits par un plan robuste et un plan à consommation minimale. Les principaux critères d'analyse seront le coût optimisé,  $\sum_{i=1}^6 \Gamma_i$ , qui représente une dispersion maximale garantie et la dispersion effective des états finaux. Cette dispersion effective est calculée en sommant les dimensions du plus petit paralléloïde incluant le nuage de points. Ce calcul permettra la comparaison avec le coût.

Dans ce contexte, l'influence du budget alloué sera analysée. Rappelons que ce budget est calculé comme une portion de la consommation optimale,  $J^*$ , obtenue par la résolution (3.21) :

$$M_{\delta V} = \alpha J^* \quad (4.72)$$

Par ailleurs, si le nombre d'impulsions  $N$  est fixé nominalement à 50, l'incidence de ce nombre sera toutefois évaluée sur les critères précédents. Dans ce cas d'étude, la contrainte de budget sera relâchée et la consommation sera un critère supplémentaire d'analyse.

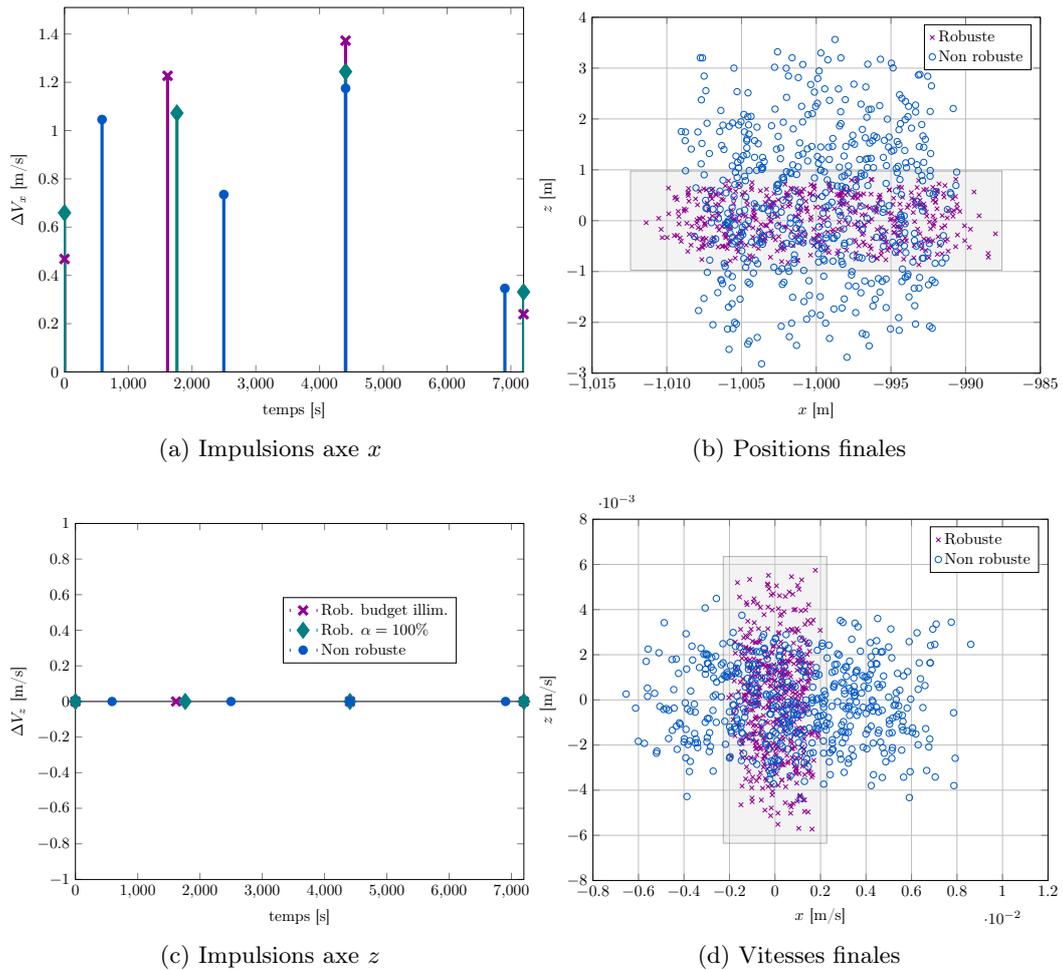


FIGURE 4.8 – Rendez-vous sous incertitudes de dates : mission ATV 2

### 4.6.1 Incertitudes sur les instants d'impulsions

#### ATV 2

La mission ATV2 présente un plan optimal à quatre impulsions. Lorsque le programme robuste (4.50) est résolu, un plan de guidage à quatre impulsions est également obtenu avec ou sans contrainte de budget (voire figures 4.8a et 4.8c). Notons que  $\alpha = 100\%$  indique que la consommation du plan robuste est égale à celle du plan optimal. S'ils présentent le même nombre d'impulsions, les deux plans robustes de guidage ont tendance à avancer les deux premières impulsions et retarder la dernière. De plus, la seconde impulsion prend une part plus importante de la consommation.

Les figures 4.8b et 4.8d montrent aussi la dispersion des états finaux en position et en vitesse ainsi que la boîte de tolérance calculée. Comme attendu, le plan robuste permet une dispersion moins importante des états finaux perturbés notamment dans les directions  $z$  en position et  $x$  en vitesse.

D'autres informations peuvent être tirées de la figure 4.9. Cette dernière expose, pour des budgets différents, les niveaux de tolérance garantie et de dispersion effective pour les plans robustes ainsi que la dispersion effective pour le plan nominal. L'ensemble des chiffres est normalisé à la valeur de coût obtenu pour un budget égal à la consommation du plan nominal. Le premier constat est qu'en pratique, les plans robustes permettent une dispersion moins importante que le plan nominal. Cependant, pour garantir ce résultat, un budget au moins égal à celui du plan nominal est nécessaire. Dans ce cas, le gain est de 10% entre la dispersion effective nominale et la dispersion garantie. Il est intéressant d'observer que pour cette mission particulière le gain en robustesse n'implique pas une augmentation de la consommation.

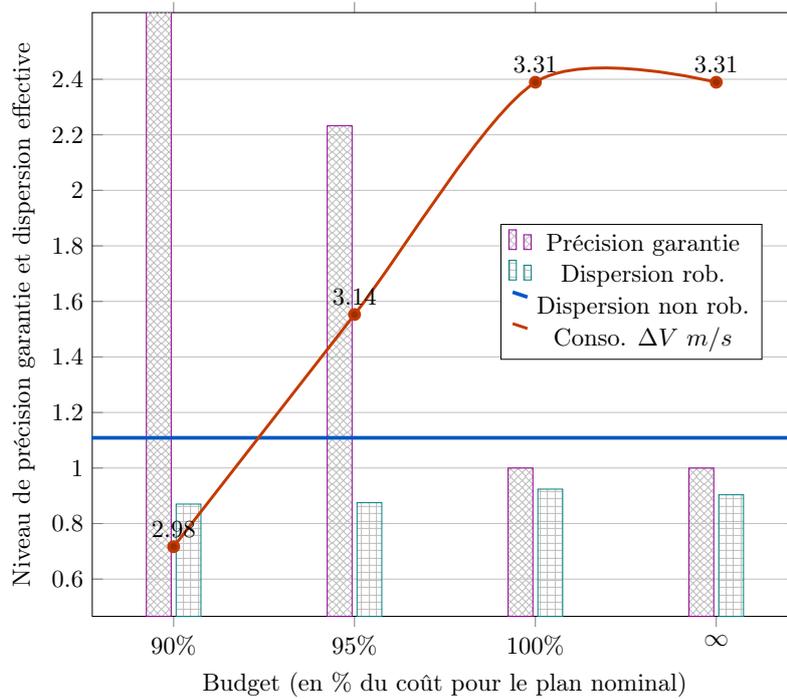


FIGURE 4.9 – Rendez-vous sous incertitudes de dates : mission ATV 2

### PROBA 3

L'intérêt d'une approche robuste est plus manifeste dans le cas de la mission PROBA 3. Les figures 4.10b et 4.10d montrent une dispersion très importante des états finaux obtenus par propagation du plan nominal. La dispersion de près de 1800m en position et 5m/s en vitesse ne permet plus d'assurer le rendez-vous. Dans le même temps, le plan robuste permet de certifier une précision de 1 et 7 m en position et de 20 mm/s et 1 mm/s en vitesse, suivant les axes  $x$  et  $z$  en position respectivement. Cette précision est obtenue grâce à un changement de structure du plan de guidage. D'un plan nominal à quatre impulsions, les plans robustes proposés passent à sept et cinq impulsions respectivement pour un budget illimité et égal à la consommation du plan nominal (voir figures 4.10a et 4.10c). Dans le cas nominal, les deux impulsions centrales sont prépondérantes. Tandis que la consommation est plus répartie pour les plans robustes, le graphe 4.11 permet d'observer que la tolérance garantie et la dispersion effective sont liées à la consommation. Ainsi les performances observées à la figure 4.11 sont réalisées au prix d'une consommation triplée par rapport à la consommation nominale. Cependant, dans le cadre de cette mission, un compromis est possible entre une précision garantie satisfaisante et une consommation moindre. Le graphe indique aussi le niveau de dispersion 80.5 pour le plan nominal par un triangle. Cela correspond aux observations de la figure 4.10.

### Incidence du nombre d'impulsions

Dans le but d'évaluer l'incidence du nombre d'impulsions sur les résultats, nous avons fait varier  $N$  entre 10 et 200 unités (50 correspondant aux résultats analysés ci-dessus). Pour cette expérience, le budget est illimité. Nous obtenons les graphiques 4.12a et 4.12b. Dans le cas de la mission ATV 2, la consommation ne semble pas affectée par le nombre d'impulsions et le niveau de précision et la dispersion ne sont que peu améliorés. La mission PROBA 3 peut être encore plus précise si l'on accepte une augmentation du nombre d'impulsions et de la consommation. L'amélioration peut aller jusqu'à 40 % en multipliant par 4 le nombre d'impulsions et en doublant la consommation.

Enfin, sur l'ensemble des graphiques, nous pouvons observer un certain conservatisme entre la pré-

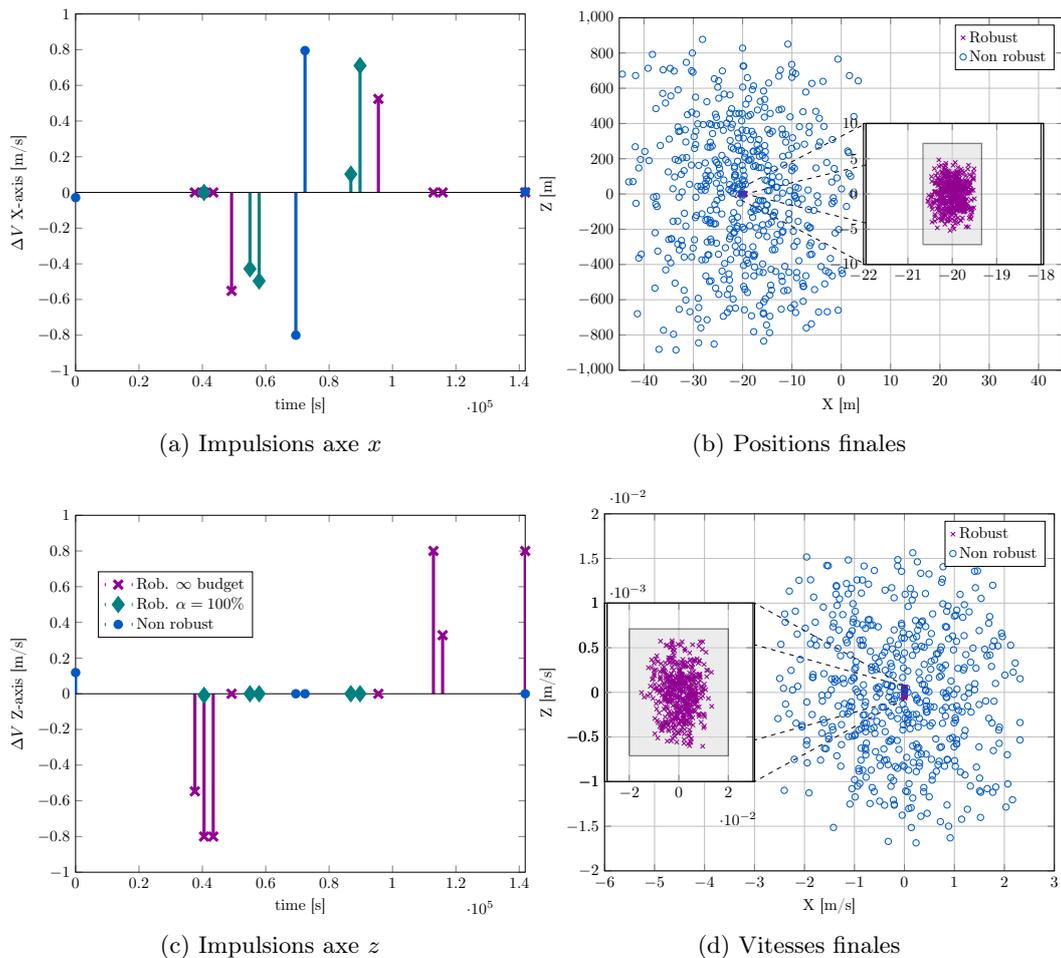


FIGURE 4.10 – Rendez-vous sous incertitudes de dates : mission PROBA 3

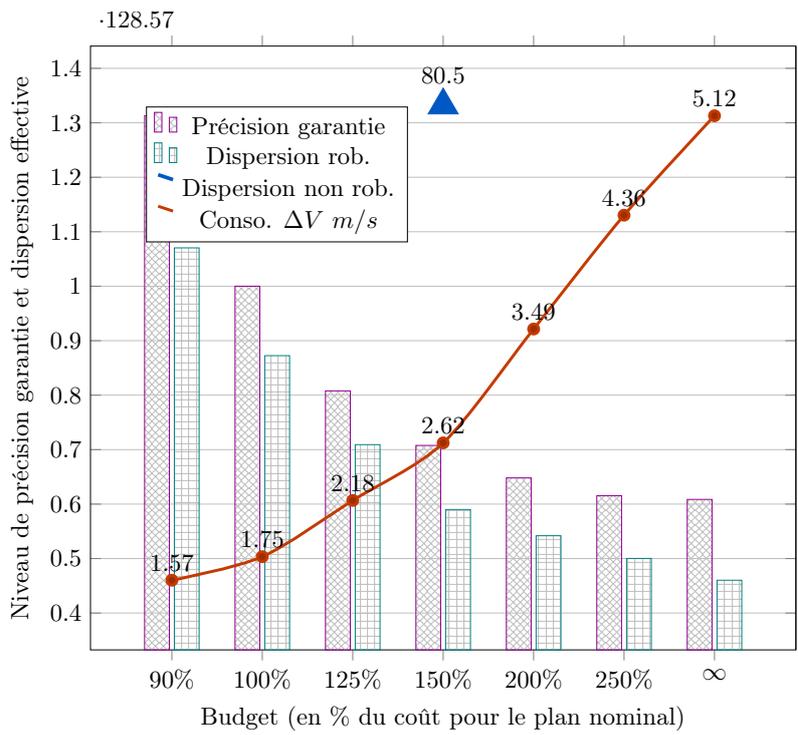


FIGURE 4.11 – Rendez-vous sous incertitudes de dates : mission PROBA 3

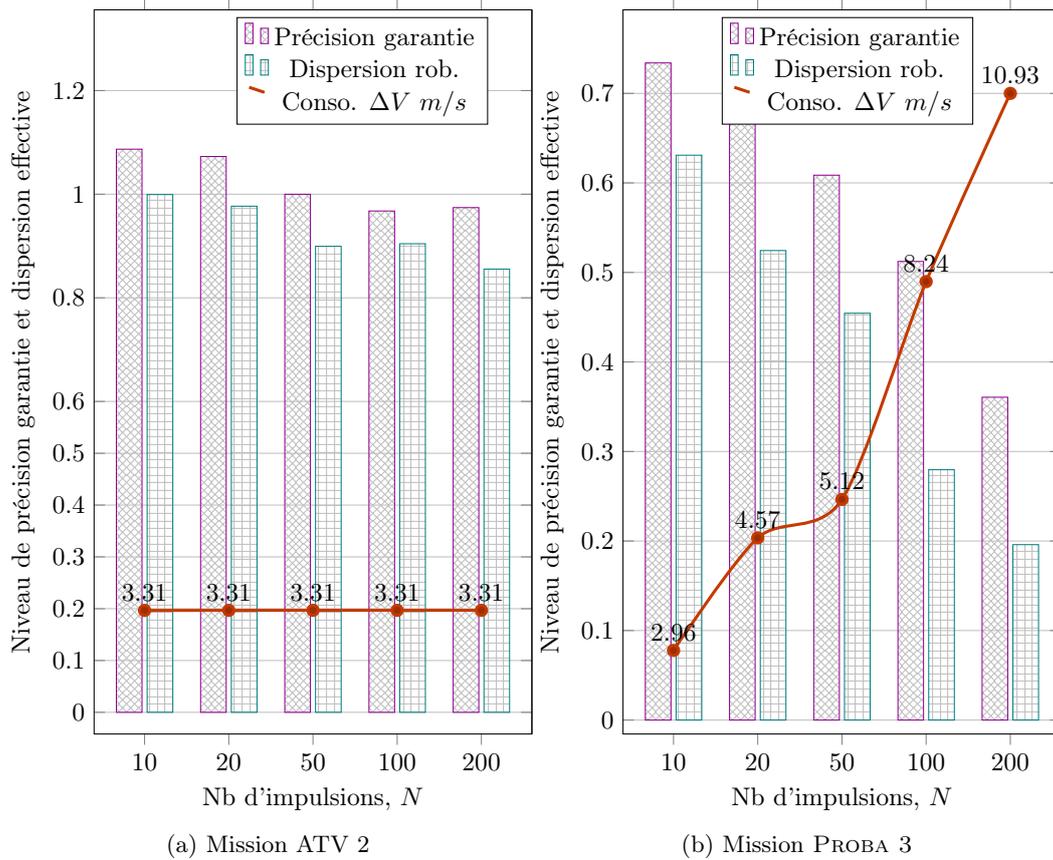


FIGURE 4.12 – Rendez-vous sous incertitudes de dates : Influence du nombre d'impulsions

cision garantie et la dispersion effective. L'écart entre les deux valeurs se situe autour de 10 points de pourcentage.

#### 4.6.2 Erreurs de réalisation des impulsions

Afin d'illustrer les caractéristiques du programme (4.70), nous considérons sur chaque impulsion des erreurs d'amplitude et d'orientation bornées respectivement par  $\varepsilon = 0.001$  et  $\beta = 1^\circ$ . Lors des simulations, les paramètres d'erreurs  $\lambda_i$ ,  $\psi_i$ ,  $\theta_i$  et  $\phi_i$  sont tirés aléatoirement dans leurs intervalles respectifs. Puis, les impulsions perturbées  $\Delta V_i$  sont calculées selon l'équation (4.54). Remarquons que, si les résultats sont présentés uniquement dans le plan d'orbite, les erreurs de réalisation vont amener les manœuvres à sortir de ce plan.

#### ATV 1

La résolution des programmes (3.21) et (4.70) permet d'obtenir les résultats exposés sur les figures 4.13a et 4.13c. Leurs simulations produisent les figures 4.13b et 4.13d. Nous savons que le plan nominal est une structure à quatre impulsions avec une longue période de dérive libre entre la seconde et la troisième impulsions. Avec un budget illimité, l'algorithme robuste délivre lui aussi un plan de guidage à 4 impulsions. La seconde impulsion de forte amplitude est placée à la mi-temps de la mission. Si l'on intègre une contrainte sur la consommation, le plan robuste montre une stratégie légèrement différente en remplaçant l'impulsion centrale par deux impulsions de moindre amplitude. Il semble donc préférable d'avoir des manœuvres autour de la mi-temps de la mission plutôt qu'une longue période de dérive si l'on cherche à robustifier le plan de guidage. Nous pouvons aussi observer une dispersion importante du plan nominal de l'ordre de 500 m suivant l'axe  $x$ , contre une dispersion effective de l'ordre de 150 m pour le

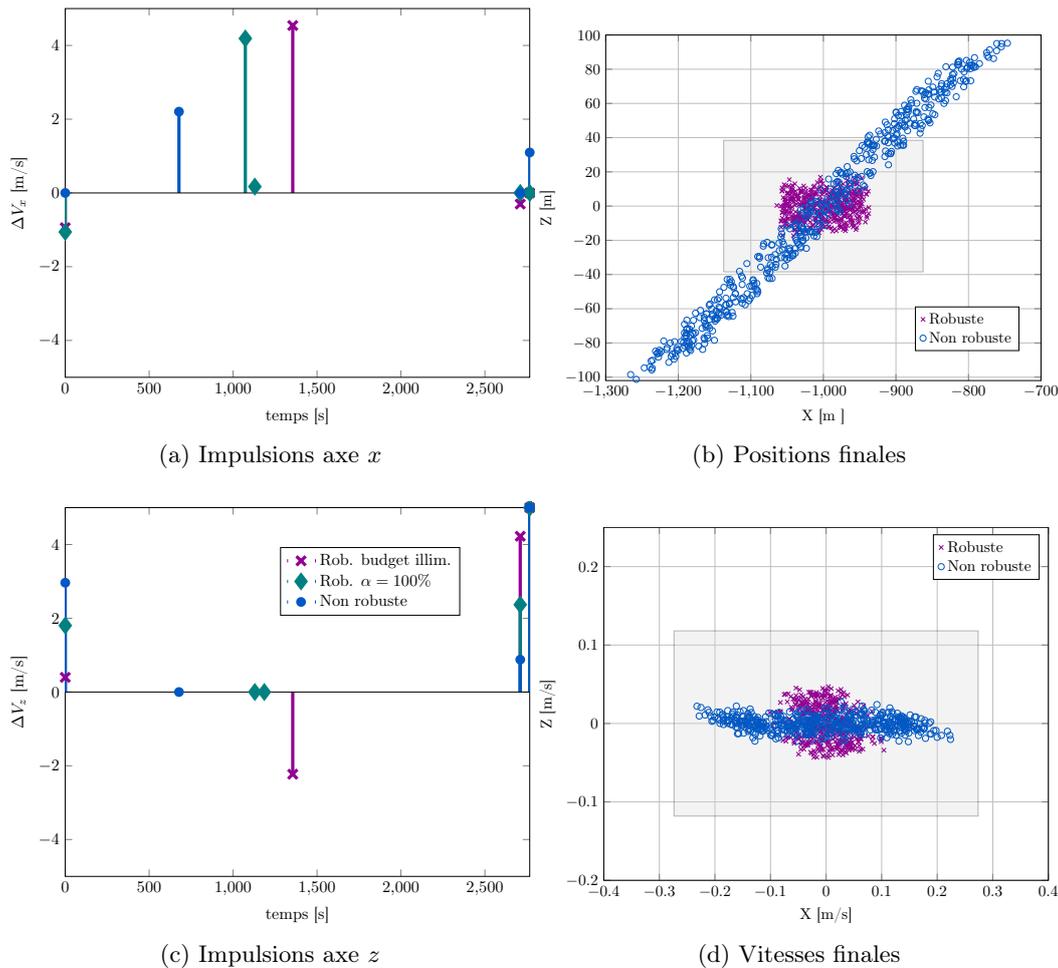


FIGURE 4.13 – Rendez-vous sous erreurs de réalisation : mission ATV 1

plan robuste. On peut ici constater un écart conséquent en la précision garantie et la dispersion effective aussi bien en position qu'en vitesse.

Ce constat est confirmé sur le graphique 4.14 qui montre une différence importante entre les deux valeurs allant d'un facteur 2 à 3 suivant le budget alloué. En conséquence, il n'est pas possible de garantir une meilleure précision que celle obtenue avec le plan nominal, même si pratiquement les dispersions effectives sont meilleures. On peut toutefois observer que la propriété de robustesse n'implique pas une surconsommation. Il est même possible d'obtenir de meilleures dispersions avec une consommation moindre. Ce fait est imputable à diverses causes. La première est sans doute liée au conservatisme engendré dans l'analyse par intervalle, à l'instar de ce qui a été observé dans la section 4.6.1. La seconde réside dans le couplage du mouvement dans et hors du plan d'orbite impliqué par les erreurs d'orientation. En effet, celles-ci transforment toute impulsion dans le plan en impulsion tridimensionnelle par exemple.

### PROBA 3

De nouveau, les résultats sur la mission PROBA 3 sont plus explicites. Ils sont présentés aux figures 4.15b et 4.15d ainsi que sur le graphique 4.16. Lorsqu'il est perturbé, le plan nominal ne permet plus de réaliser le rendez-vous. L'approche robuste permet de fournir des bornes certifiées assez lâches (750 m suivant l'axe  $x$ ), mais la dispersion reste raisonnable avec une dispersion effective d'environ 320 m. Le plan robuste sans condition de budget propose une structure à cinq impulsions dont les trois dernières sont situées en fin de mission (voir les figures 4.15a et 4.15c). Si l'on tient compte de la contrainte de budget de consommation, quatre impulsions sont nécessaires. Il est intéressant d'observer sur le graphe 4.16 que,

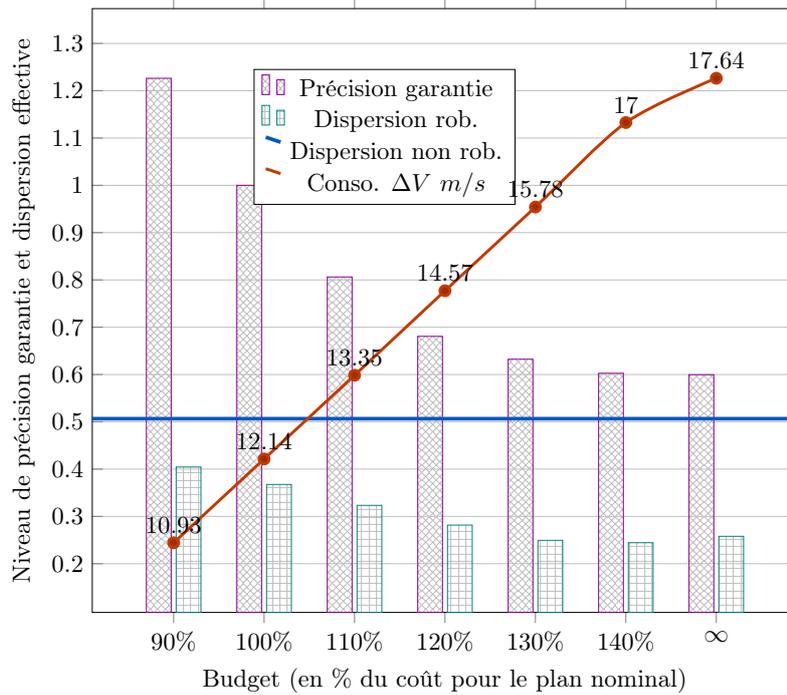


FIGURE 4.14 – Rendez-vous sous erreurs de réalisation : mission ATV 1

si l'augmentation du budget, et donc de la consommation, permet de resserrer les bornes certifiées sur la dispersion, elle entraîne une détérioration sensible de la dispersion effective. Cela s'explique par le fait que les perturbations sont induites par la consommation de  $\Delta V$ .

### Incidence du nombre d'impulsions

L'influence du nombre d'impulsions a été analysée et les résultats sont reportés sur les graphiques 4.17. Dans le cas de la mission ATV 1, l'augmentation du nombre d'impulsions s'accompagne d'une amélioration de la précision garantie et de la dispersion effective ainsi que d'une diminution de la consommation. Dans le cadre de cette mission de durée relativement courte, le nombre d'impulsions permet d'affiner la position des impulsions robustes. Dans le cas de la mission PROBA 3, si augmenter  $N$  permet une amélioration significative de la précision garantie et de la dispersion, cela implique aussi une augmentation de la consommation. En effet, pour cette mission de longue durée, cela permet de déclencher plus d'impulsions aux instants stratégiques du point de vue de la robustesse

## 4.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons abordé dans ce chapitre la robustesse des plans de guidage aux erreurs d'exécution. Nous avons montré que, s'il n'est pas possible de rejeter ces perturbations sans boucle fermée, il est toutefois envisageable de calculer un plan de guidage en boucle ouverte qui soit le moins sensible possible à ces erreurs bornées. Nous avons pu observer qu'en pratique les plans robustes améliorent sensiblement les performances en termes de dispersions des états finaux (précision).

Cependant, le conservatisme important entre la mesure de dispersion effective et les tolérances garanties ne permet pas toujours d'anticiper ces bons résultats.

Ce conservatisme est propre aux méthodes d'optimisation pire-cas employées dans ce chapitre. Aussi, une approche probabiliste de type «Chance-constraints» est une piste à explorer si l'on souhaite réduire ce conservatisme. Si elle nécessite la connaissance des lois de probabilité pour chaque incertitude, elle implique que l'on accepte la satisfaction des contraintes à une probabilité près.

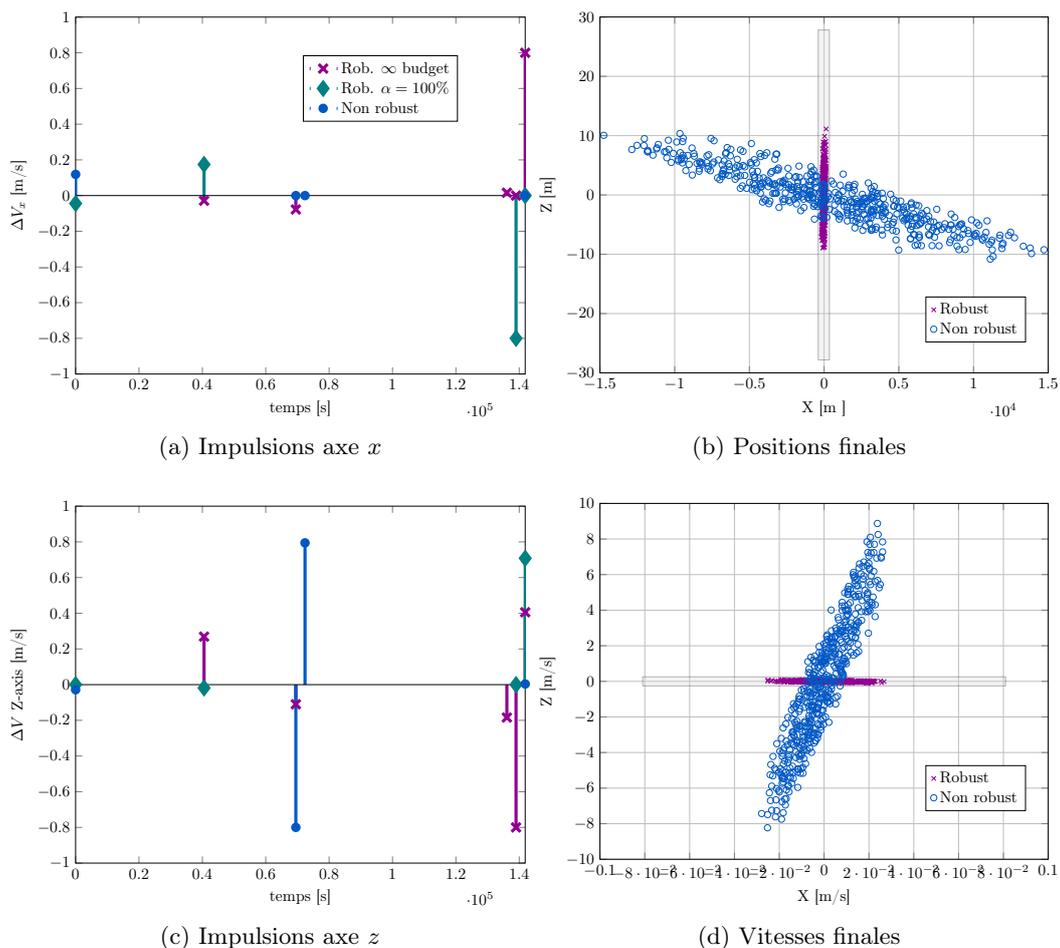


FIGURE 4.15 – Rendez-vous sous erreurs de réalisation : mission PROBA 3

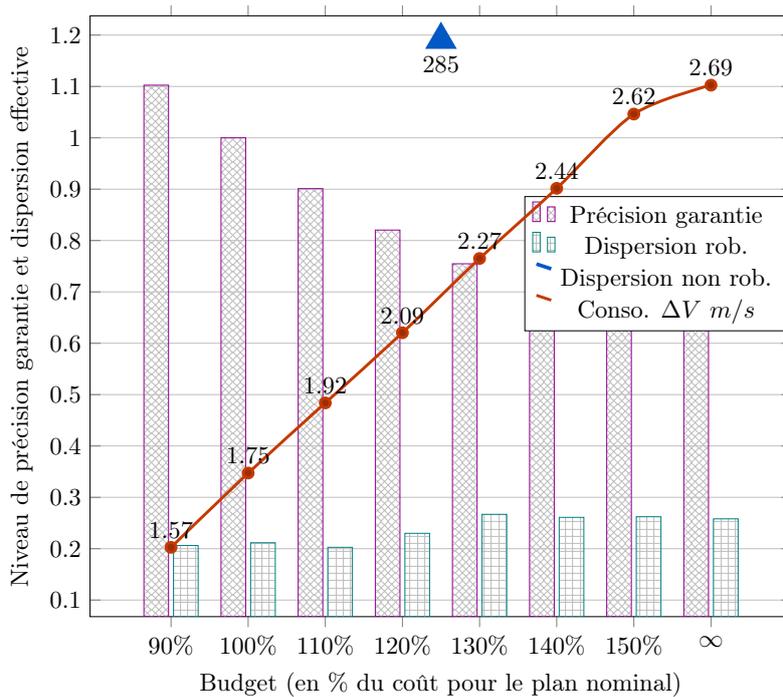


FIGURE 4.16 – Rendez-vous sous erreurs de réalisation : mission PROBA 3

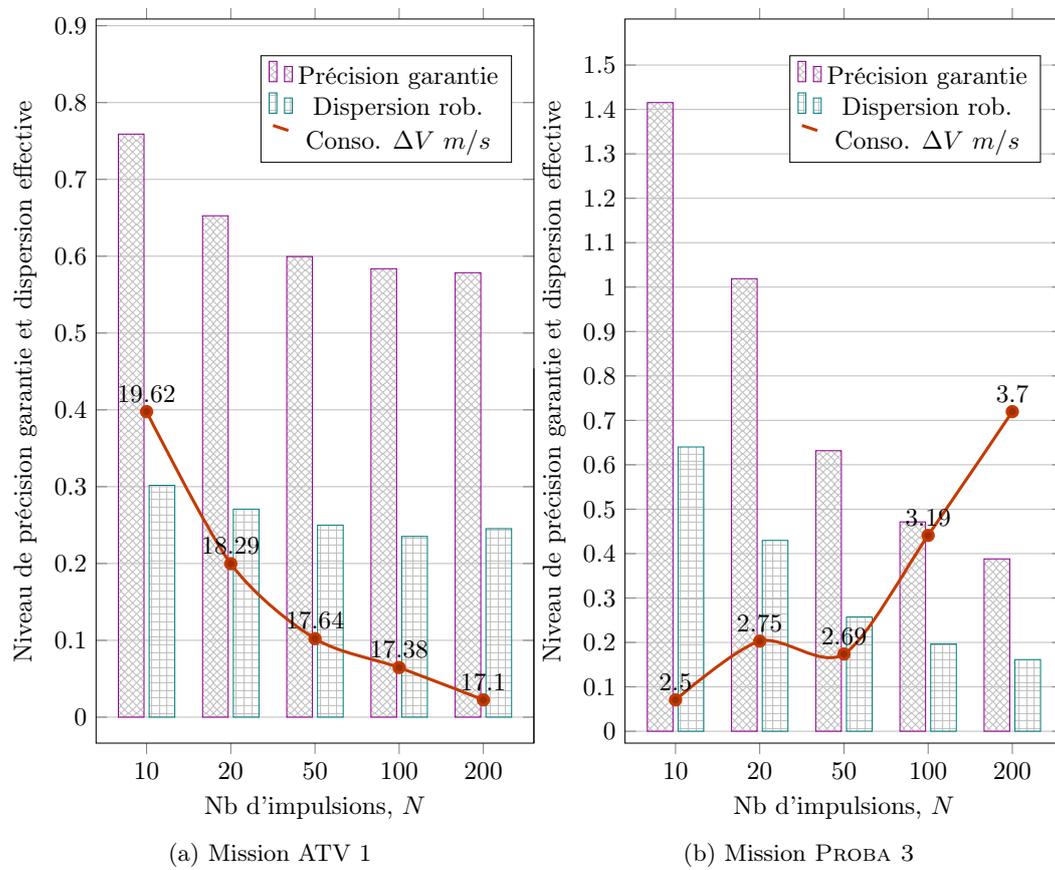


FIGURE 4.17 – Rendez-vous sous erreurs de réalisation : Influence du nombre d'impulsions

---

Une autre source de conservatisme est liée aux outils utilisés pour encadrer les données incertaines telles que l'analyse par intervalles pour le calcul des matrices de transition perturbées notamment. Les techniques d'intégration certifiée peuvent éventuellement encadrer plus finement ces matrices perturbées.

Enfin, nous pouvons nous demander quel peut être l'impact positif de ces algorithmes robustes dans un schéma de commande prédictive.



---

# Guidage sous contraintes d'état

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>72</b>
<b>5.2</b>	<b>Paramétrisation de la transition et transformation similaire</b>	<b>72</b>
5.2.1	Expressions rationnelles du mouvement relatif	75
<b>5.3</b>	<b>Orbites relatives contraintes en espace</b>	<b>77</b>
5.3.1	Contraintes sur la trajectoire libre	77
5.3.2	Description finie des trajectoires admissibles à l'aide de polynômes non négatifs	77
5.3.3	Caractérisation des orbites périodiques contraintes	79
<b>5.4</b>	<b>Cas d'applications</b>	<b>80</b>
5.4.1	Rendez-vous orbital sous contraintes de visibilité	80
5.4.2	Rendez-vous orbital sous conditions de sécurité passive	83
<b>5.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>87</b>

---

## 5.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre le problème des contraintes sur la trajectoire. Comme il a été vu dans le chapitre 3, lorsque des contraintes sur la trajectoire sont considérées, l'usage est de les discrétiser dans l'application des méthodes directes. Cette procédure consiste à vérifier leur satisfaction sur un ensemble discret d'instant, appelé grille de discrétisation, plutôt que sur le continuum de temps. L'avantage d'une telle démarche est d'obtenir un programme de dimension finie lorsque le problème originel est généralement de dimension semi-infinie (cf. la méthode de programmation semi-infinie de la section 2.3). La démarche mise en place dans ce chapitre est donc différente, et se base sur l'analyse de la transition. En remarquant que le rendez-vous est une succession d'arcs libres, nous proposons de caractériser les conditions initiales de ces arcs de propagation libre afin qu'ils vérifient les contraintes. Remarquons que la commande impulsionnelle correspond alors à la différence entre l'état final et l'état initial de deux arcs successifs (il n'y a bien entendu pas de saut en position, mais seulement en vitesse). Dans ce chapitre nous exprimerons cette caractérisation au travers de conditions de positivité polynomiale et exploiterons les résultats de Nesterov [112] afin de fournir une description finie des trajectoires admissibles. Notre approche a permis de proposer des solutions garanties sur un intervalle de temps lorsque les méthodes directes classiques ne permettent pas d'assurer la satisfaction des contraintes que de manière discrète. Cette contribution issue des travaux de thèse de Georgia Deaconu a fait l'objet de deux communications [47, 48] et d'une publication en journal [51].

Dans la section 5.2, nous analyserons les expressions de la transition afin de mettre en exergue un vecteur d'état particulier dont l'intérêt est de pouvoir décrire les orbites relatives sur une base particulière. Nous en déduirons les expressions rationnelles des trajectoires. Puis, dans la section 5.3, nous décrirons les contraintes sur la trajectoire comme un problème de positivité polynomiale pour lequel il existe une contrepartie sous forme de programmation semi-définie positive. Enfin, la section 5.4 proposera différents scénarios dans lesquels nous exploiterons les résultats établis.

## 5.2 Paramétrisation de la transition et transformation similaire

Rappelons que sous hypothèse képlérienne, la dynamique du mouvement linéarisé est représentée sous la forme des équations de Tschauner-Hempel (cf. l'annexe ??),

$$X' = A(\nu)X,$$

où

$$A(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{1 + e \cos \nu} & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Si généralement les systèmes dynamiques linéaires à temps variant ne possèdent pas de solution de forme close, plusieurs méthodes décrites dans la littérature [36, 140, 60, 33, 107] ont permis d'exprimer une solution formelle aux équations de Tschauner-Hempel. Cette solution formelle permet la propagation de l'état relatif depuis l'instant  $\nu_0$  jusqu'à l'instant courant  $\nu$  à partir d'une condition initiale arbitraire,  $X(\nu_0)$  :

$$X(\nu) = \Phi(\nu, \nu_0)X(\nu_0), \quad \nu \geq \nu_0.$$

La position relative courante peut alors s'exprimer explicitement :

$$\begin{aligned} x(\nu) &= (2 + e \cos \nu)(d_1 \sin \nu - d_2 \cos \nu) + d_3 + 3d_0 J(\nu)(1 + e \cos \nu)^2 \\ y(\nu) &= d_4 \cos \nu + d_5 \sin \nu \\ z(\nu) &= (1 + e \cos \nu)(d_2 \sin \nu + d_1 \cos \nu) - 3ed_0 J(\nu) \sin \nu (1 + e \cos \nu) + 2d_0 \end{aligned} \quad , \nu \geq \nu_0 \quad (5.2)$$

où les scalaires  $d_i$  représentent les constantes d'intégration et le terme  $J(\nu)$  est donné par

$$J(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\tau}{(1 + e \cos \tau)^2} = \left[ \frac{2e \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{(e^2 - 1) \left( (1 - e) \tan\left(\frac{x}{2}\right)^2 + e + 1 \right)} - \frac{2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{e-1}}{\sqrt{e+1}}\right)}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right]_{\nu_0}^{\nu} \frac{n(t - t_0)}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (5.3)$$

Ainsi, en posant le vecteur de ces constantes d'intégration,

$$D(\nu_0) = \left[ d_0(\nu_0) \quad d_1(\nu_0) \quad d_2(\nu_0) \quad d_3(\nu_0) \quad d_4(\nu_0) \quad d_5(\nu_0) \right]^T, \quad (5.4)$$

nous introduisons un vecteur de paramétrisation de la trajectoire en position de l'état relatif. Notons que, par dérivation, nous pouvons obtenir de la même manière la paramétrisation de la trajectoire en vitesse.

Cette paramétrisation présente l'intérêt d'autoriser une interprétation physique associant directement les valeurs à la configuration de l'orbite relative. En effet, les paramètres  $d_1$  et  $d_2$  modifient l'amplitude de la composante périodique du mouvement relatif.  $d_3$  représente par ailleurs le biais de ce mouvement suivant l'axe  $x$ . Nous retrouvons la nature purement périodique du mouvement hors plan tandis que l'amplitude de ce mouvement est fixée par les constantes  $d_4$  et  $d_5$ . Enfin, le paramètre  $d_0$  vient pondérer l'apport du terme intégral  $J(\nu)$  sur le mouvement dans le plan d'orbite en même temps qu'il caractérise le biais de ce dernier suivant l'axe  $z$ . En remarquant que  $J(\nu)$  est strictement croissant en fonction du temps  $t$ , la présence d'une constante  $d_0$  de valeur non nulle assure la divergence du mouvement relatif.

Il est aussi possible de montrer que les constantes  $d_i$  sont ici directement liées aux conditions initiales  $X(\nu_0)$  par la relation linéaire

$$D(\nu_0) = C(\nu_0)X(\nu_0). \quad (5.5)$$

La matrice  $C(\nu) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est définie en fonction de l'excentricité de l'orbite de la cible et de l'anomalie vraie courante :

$$C(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-(3e \cos \nu + e^2 + 2)}{e^2 - 1} & \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{e^2 - 1} & 0 & \frac{-e \sin \nu (1 + e \cos \nu)}{e^2 - 1} \\ 0 & 0 & \frac{3(e + \cos \nu)}{e^2 - 1} & \frac{-(2 \cos \nu + e \cos^2 \nu + e)}{e^2 - 1} & 0 & \frac{\sin \nu (1 + e \cos \nu)}{e^2 - 1} \\ 0 & 0 & \frac{3 \sin \nu (1 + e \cos \nu + e^2)}{(e^2 - 1)(1 + e \cos \nu)} & \frac{-\sin \nu (2 + e \cos \nu)}{e^2 - 1} & 0 & \frac{-(\cos \nu + e \cos^2 \nu - 2e)}{e^2 - 1} \\ 1 & 0 & \frac{-3e \sin \nu (2 + e \cos \nu)}{(e^2 - 1)(1 + e \cos \nu)} & \frac{e \sin \nu (2 + e \cos \nu)}{e^2 - 1} & 0 & \frac{e^2 \cos^2 \nu + e \cos \nu - 2}{e^2 - 1} \\ 0 & \cos \nu & 0 & 0 & -\sin \nu & 0 \\ 0 & \sin \nu & 0 & 0 & \cos \nu & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

La matrice  $C$  présente la propriété d'avoir un déterminant non nul,

$$\det(C(\nu)) = \frac{1}{1 - e^2} \neq 0, \quad \forall 0 \leq e < 1, \quad (5.7)$$

et d'être ainsi inversible pour toute valeur d'anomalie. Ce fait notable permet d'affirmer que la relation (5.5) est une transformation similaire variant dans le temps et de conclure que le vecteur  $D$  est un vecteur d'état.

La transformation inverse est donnée par

$$X(\nu) = C^{-1}(\nu)D(\nu) = F(\nu)D(\nu) \quad (5.8)$$

où  $F(\nu) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est définie par

$$F(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & \sin \nu(2 + e \cos \nu) & -\cos \nu(2 + e \cos \nu) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \nu & \sin \nu \\ 2 & \cos \nu(1 + e \cos \nu) & \sin \nu(1 + e \cos \nu) & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2e \cos^2 \nu + 2 \cos \nu - e & 2 \sin \nu(1 + e \cos \nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \nu & \cos \nu \\ -\frac{3e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} & -\sin \nu(1 + 2e \cos \nu) & 2e \cos^2 \nu - e + \cos \nu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Nous pouvons ainsi définir une équation dynamique pour le vecteur d'état  $D$  tel que

$$D' = A_D(\nu)D(\nu) \quad (5.10)$$

où la matrice dynamique  $A_D$  est décrite par

$$A_D(\nu) = C'(\nu)C^{-1}(\nu) + C(\nu)A(\nu)C^{-1}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3e}{(1 + e \cos \nu)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3e}{(1 + e \cos \nu)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

La structure creuse de  $A_D$  permet le calcul de la transition

$$D(\nu) = \Phi_D(\nu, \nu_0)D(\nu_0) \quad (5.12)$$

où

$$\Phi_D(\nu, \nu_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3eJ(\nu, \nu_0) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3J(\nu, \nu_0) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

De nouveau, nous retrouvons les propriétés du mouvement relatif qui seront exploitées par la suite. Tout d'abord, les paramètres  $d_4$  et  $d_5$  qui décrivent le mouvement hors plan sont constants dans le temps, ce qui implique que cette composante du mouvement est bornée et périodique. Si les états  $d_0$  et  $d_1$  sont aussi constants dans le temps, l'évolution de  $d_2$  et  $d_3$  est conditionnée par la valeur de  $d_0$  (et linéaire en fonction du temps). Il vient alors que tout état  $D$  est un point d'équilibre du modèle (5.10),  $D' = 0$ , s'il vérifie

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}, \forall d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \in \mathbb{R} \quad (5.14)$$

Si l'on reprend les expressions des trajectoires en position en considérant un vecteur d'état à l'équilibre vérifiant (5.14), le terme  $J(\nu)$  disparaît et la trajectoire est décrite par

$$\begin{aligned} x(\nu) &= (2 + e \cos \nu)(d_1 \sin \nu - d_2 \cos \nu) + d_3 \\ y(\nu) &= d_4 \cos \nu + d_5 \sin \nu \\ z(\nu) &= (1 + e \cos \nu)(d_2 \sin \nu + d_1 \cos \nu) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Les expressions (5.15) montrant une périodicité de  $2\pi$ , les positions propagées décrivent des orbites relatives périodiques. Ce constat mène à la conclusion que les états d'équilibre,  $\bar{D}$ , représentent des orbites périodiques.

En observant la transition de l'état  $D$ , nous pouvons analyser que la constance de  $d_0$  dans le temps a une autre implication forte. Les trajectoires propagées à partir d'une condition initiale  $D_0$  arbitrairement proche d'un état d'équilibre vérifiant (5.14), divergeront naturellement de cet état d'équilibre. Ainsi, les points d'équilibre de l'équation dynamique (5.10) sont instables.

### 5.2.1 Expressions rationnelles du mouvement relatif

Dans notre démarche, nous devons réécrire chaque contrainte sur la trajectoire en conditions de positivité polynomiale. Nous montrons ici que la transition peut s'exprimer en termes rationnels notamment grâce à une approximation des termes qui ne s'expriment pas dans la base appropriée.

En effet, l'observation des équations (5.2) montre que les trajectoires s'expriment principalement en termes de polynômes trigonométriques auxquels s'ajoute un terme intégral  $J(\nu)$  défini par (5.3). La présence du terme de dérive  $J(\nu)$  nous pose alors problème puisqu'il ne s'écrit pas dans la base des polynômes trigonométriques. Ce problème particulier sera résolu en remplaçant le terme  $J(\nu)$  par une approximation polynomiale certifiée sur un intervalle fini. La certification sur l'erreur commise par l'approximation sera utilisée dans le problème de guidage.

#### Changement de variable

Soit le changement de variable transformant les termes trigonométriques en termes rationnels dans l'expression de la transition (5.2) :

$$w = \tan\left(\frac{\nu}{2}\right), \quad \cos \nu = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad \sin \nu = \frac{2w}{1 + w^2}, \quad (5.16)$$

Notons que ce changement de variable possède une singularité en  $\pi[2\pi]$ . Cela implique que l'intervalle de travail  $[\nu_0, \nu_f]$  doit être inclus dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  ou, à défaut, être translaté.

À partir de (5.16) et (5.2), il vient les expressions suivantes pour les positions relatives :

$$\begin{aligned} x(w) &= \frac{1}{(1 + w^2)^2} [P_x(w) + 3 d_0 P_{J_x}(w) J(w)] \\ y(w) &= \frac{1}{1 + w^2} P_y(w) \\ z(w) &= \frac{1}{(1 + w^2)^2} [P_z(w) + 2 d_0 P_{J_z}(w) J(w)] \end{aligned} \quad , w \geq w_0 \quad (5.17)$$

où le terme  $J(w)$  est obtenu en introduisant le changement de variable (5.16) dans (5.3) :

$$J(w) = \int_{w_0}^w \frac{2\tau^2 + 2}{((1 - e)\tau^2 + e + 1)^2} d\tau \quad (5.18)$$

Les polynômes  $P_x(w)$ ,  $P_y(w)$  et  $P_z(w)$  sont donnés par

$$P_x(w) = \sum_{i=0}^4 p_{xi} w^i \quad P_y(w) = \sum_{i=0}^2 p_{yi} w^i \quad P_z(w) = \sum_{i=0}^4 p_{zi} w^i \quad (5.19)$$

Les vecteurs de coefficients,

$$\begin{aligned} p_x &= [p_{x0} \quad p_{x1} \quad p_{x2} \quad p_{x3} \quad p_{x4}]^T \\ p_y &= [p_{y0} \quad p_{y1} \quad p_{y2}]^T \\ p_z &= [p_{z0} \quad p_{z1} \quad p_{z2} \quad p_{z3} \quad p_{z4}]^T \end{aligned} \quad (5.20)$$

dépendent linéairement du vecteur de paramètres  $D(\nu_0)$  :

$$p_x = C_x D(\nu_0) \quad p_y = C_y D(\nu_0) \quad p_z = C_z D(\nu_0) \quad (5.21)$$

Les matrices  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$  dépendent seulement de l'excentricité de l'orbite de référence et sont données par :

$$C_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2-e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-e & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_z = \begin{bmatrix} 0 & e+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Les polynômes  $P_{J_x}(w)$  et  $P_{J_z}(w)$ , quant à eux, dépendent uniquement de l'excentricité de l'orbite de la cible :

$$P_{J_x}(w) = ((1+e) + (1-e)w^2)^2 \quad (5.23)$$

$$P_{J_z}(w) = -3e((1-e)w + (1-e)w^3) \quad (5.24)$$

### Approximation polynomiale du terme intégral $J(w)$

A la suite du changement de variable (5.16), les expressions des positions relatives (5.17) montrent une structure rationnelle si nous faisons abstraction du terme intégral  $J(w)$  qui possède une forme close transcendantale

$$J(w) = \left[ \frac{2ew}{(e^2-1)(e+1+(1-e)w^2)} - \frac{2\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{e+1}}w\right)}{\sqrt{(e^2-1)^3}} \right]_{w_0}^w \quad (5.25)$$

L'approximation polynomiale de ce dernier terme permettrait d'obtenir une expression complètement rationnelle pour les positions relatives.

Nous utiliserons ici des résultats issus du calcul formel et certifié afin d'obtenir cette approximation [77]. Ces résultats, ainsi que la librairie SOLLYA [41], nous permettront de calculer, sur l'intervalle  $[w_0, w_f]$ , une approximation polynomiale de degré fixé ainsi que l'erreur d'approximation maximale certifiée associée.

Soit  $\Theta_q(w)$  un polynôme de degré  $q$  tel que :

$$\Theta_q(w) - \varepsilon \leq J(w) \leq \Theta_q(w) + \varepsilon, \quad \forall w \in [w_0, w_f], \quad (5.26)$$

où  $\varepsilon$  représente l'erreur maximale d'approximation dans l'intervalle. À partir de (5.26), nous pouvons définir deux bornes polynomiales du terme  $J(w)$  dans l'intervalle  $[w_0, w_f]$  :

$$\Theta_u(w) = \Theta_q(w) + \varepsilon, \quad \Theta_l(w) = \Theta_q(w) - \varepsilon. \quad (5.27)$$

Ces bornes polynomiales peuvent être combinées avec les expressions (5.17) afin d'obtenir un encadrement rationnel pour la trajectoire relative dans le plan  $xz$  :

$$\begin{aligned} x_l(w) &\leq x(w) \leq x_u(w) \\ z_l(w) &\leq z(w) \leq z_u(w) \end{aligned}, \quad \forall w \in W \quad (5.28)$$

où

$$\begin{aligned} x_\alpha(w) &= \frac{1}{(1+w^2)^2} [P_x(w) + 3d_0 P_{J_x}(w) \Theta_\alpha(w)] \\ z_\alpha(w) &= \frac{1}{(1+w^2)^2} [P_z(w) + 2d_0 P_{J_z}(w) \Theta_\alpha(w)] \end{aligned}, \quad \forall w \in [w_0, w_f], \quad \alpha \in \{l, u\} \quad (5.29)$$

Dans la section suivante, nous nous intéresserons à définir une caractérisation des orbites relatives appartenant à un sous-ensemble de l'espace. Pour ce faire, nous nous appuierons sur la propriété de la transition à pouvoir être écrite sous forme rationnelle.

### 5.3 Orbites relatives contraintes en espace

Cette section propose une description mathématique formelle des orbites relatives incluses dans un sous-espace polytopique. Nous étudierons successivement le cas des orbites génériques puis le cas des orbites périodiques après avoir formalisé les contraintes sur ces trajectoires. Les descriptions développées ci-après se basent sur une analyse de la positivité des polynômes univariés.

#### 5.3.1 Contraintes sur la trajectoire libre

Nous souhaitons contraindre les trajectoires d'état à l'intérieur d'une région polytopique de l'espace d'état possiblement non borné. Ces régions polytopiques sont décrites par un ensemble de contraintes linéaires telles que

$$H(\nu)X(\nu) \leq K(\nu), \quad \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f]. \quad (5.30)$$

*Remarque 8:* La notation des contraintes (5.30) laisse la possibilité de considérer une dépendance en temps des coordonnées cartésiennes du polytope qui sera à caractériser.

L'ensemble des trajectoires incluses dans le polytope donné par  $(H, V)$  durant l'intervalle de temps  $[\nu_0, \nu_f]$  est noté

$$S(H, V, \nu_0, \nu_f) = \{X(\nu) \in \mathbb{R}^6 \mid X'(\nu) = A(\nu)X(\nu), X(\nu_0) = X_0, H(\nu)X(\nu) \leq K(\nu), \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f]\}. \quad (5.31)$$

En rappelant qu'un arc de propagation libre est entièrement décrit par ses conditions initiales, il vient que qualifier les trajectoires appartenant à un polytope donné équivaut à définir l'ensemble des conditions initiales telles que les trajectoires propagées soient d'intérêt. Nous allons alors donner une seconde description de l'ensemble des trajectoires satisfaisant (5.30) :

$$S(H, V, \nu_0, \nu_f) = \{X_0 \in \mathbb{R}^6 \mid X(\nu) = \Phi(\nu, \nu_0)X_0, H(\nu)X(\nu) \leq K(\nu), \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f]\}. \quad (5.32)$$

Enfin, une forme équivalente à (5.32) mettant en jeu le vecteur d'état  $D$  peut être définie par

$$S_D(H, V, \nu_0, \nu_f) = \{D_0 \in \mathbb{R}^6 \mid D(\nu) = \Phi_D(\nu, \nu_0)D_0, H(\nu)F(\nu)D(\nu) \leq K(\nu), \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f]\}. \quad (5.33)$$

où la matrice  $F(\nu)$  est définie par (5.9).

Notre objectif est maintenant de calculer les trajectoires définies sur l'intervalle  $[\nu_0, \nu_f]$  qui respectent les contraintes (5.30) sur le continuum de temps. Cette condition implique la vérification de l'inégalité matricielle en un nombre infini d'instant  $\nu$  en fonction d'un nombre fini de variables (soit  $X_0$  pour (5.32) ou  $D$  pour l'ensemble  $S_D$ , (5.33)). Nous faisons ainsi face à une condition semi-infinie pour laquelle nous souhaitons écrire une contrepartie formelle permettant la discrimination et le calcul de trajectoires satisfaisant (5.30).

#### 5.3.2 Description finie des trajectoires admissibles à l'aide de polynômes non négatifs

Nous souhaitons produire une description d'arcs de trajectoire admissibles qui puisse être plus facilement utilisable dans le problème de guidage. Cette description doit permettre, avec un nombre de paramètres fini, de satisfaire les contraintes (5.30). Notre démarche consistera à exploiter la structure de

la transition du mouvement relatif afin de transformer les contraintes sur l'état en problème de positivité polynomiale,

$$\Gamma(w) = \sum_{i=0}^d \gamma_i(d^i)w^i \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{W} = [w_0, w_f], \quad (5.34)$$

pour lequel Nesterov a montré qu'il était équivalent à un problème de définition positive de matrices [112].

### Contraintes sur la position et polynômes non négatifs

Afin de développer notre approche, nous allons considérer des contraintes uniquement sur la position relative sans perte de généralité. Ainsi, l'inclusion de la trajectoire à l'intérieur d'une région polytopique s'écrit, en intégrant le changement de variable (5.16), comme l'ensemble de contraintes

$$h_{i,1}x(w) + h_{i,2}y(w) + h_{i,3}z(w) \leq \frac{1+e+(1-e)w^2}{1+w^2} v_i, \quad \forall w \in [w_0, w_f], \quad i = 1 \dots s, \quad (5.35)$$

où  $h_{i,j}$  et  $v_i$  sont les éléments des matrices  $H$  et  $V$  qui définissent le polytope et  $s$  est le nombre de contraintes.

Soient les expressions  $\Xi_i(w)$  telles que les contraintes (5.35) peuvent s'écrire implicitement  $\Xi_i \geq 0$  :

$$\Xi_i(w) = -h_{i,1}x(w) - h_{i,2}y(w) - h_{i,3}z(w) + \frac{1+e+(1-e)w^2}{1+w^2} v_i, \quad i = 1 \dots s. \quad (5.36)$$

En réduisant les termes au plus petit diviseur commun, une forme compacte peut être obtenue pour  $\Xi_i(w)$  :

$$\Xi_i(w) = \frac{1}{(1+w^2)^2} \Gamma_i(w), \quad i = 1 \dots s \quad (5.37)$$

où les polynômes  $\Gamma_i(w)$  sont définis par

$$\Gamma_i(w) = -h_{i,1} [P_x(w) + 3d_0 P_{Jx}(w) J(w)] - h_{i,2} \bar{P}_y(w) - h_{i,3} [P_z(w) + 2d_0 P_{Jz}(w) J(w)] + v_i T(w) \quad (5.38)$$

où  $\bar{P}_y(w) = (1+w^2)P_y(w)$  et  $T(w) = \sum_{i=0}^4 t_i w^i = (1-e)w^4 + 2w^2 + 1 + e$ . Les coefficients des autres polynômes de (5.38) dépendent du vecteur de paramètres  $D$  (cf. (5.21)). Le terme  $(1+w^2)^2$  dans les expressions (5.37) étant non-négatif pour tout  $w \in \mathbb{R}$ , il vient

$$0 \leq \Xi_i(w) \Leftrightarrow 0 \leq \Gamma_i(w), \quad w \in [w_0, w_f]. \quad (5.39)$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs d'état  $D(w_0)$  donnant lieu aux trajectoires admissibles peut être décrit par

$$S_D(H, V, w_0, w_f) = \{D(w_0) \in \mathbb{R}^6 \mid \Gamma_i(w) \geq 0, \quad \forall w \in [w_0, w_f], \quad i = 1 \dots s\}. \quad (5.40)$$

L'ensemble  $S_D$  est difficile à décrire du fait de la présence du terme  $J(w)$ . En remplaçant ce terme intégral  $J(w)$  par ses bornes certifiées  $\Theta_l$  et  $\Theta_u$  dans les expressions  $\Gamma_i(w)$ , il vient un encadrement polynomial certifié des fonctions  $\Gamma_i$  :

$$\Gamma_i^l(w) \leq \Gamma_i(w) \leq \Gamma_i^u(w) \quad (5.41)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_i^l(w) &= -h_{i,1} [P_x(w) + 3d_0 P_{Jx}(w) \Theta_l(w)] - h_{i,2} \bar{P}_y(w) - h_{i,3} [P_z(w) + 2d_0 P_{Jz}(w) \Theta_l(w)] + v_i T(w) \\ \Gamma_i^u(w) &= -h_{i,1} [P_x(w) + 3d_0 P_{Jx}(w) \Theta_u(w)] - h_{i,2} \bar{P}_y(w) - h_{i,3} [P_z(w) + 2d_0 P_{Jz}(w) \Theta_u(w)] + v_i T(w) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Remarquons que le degré des polynômes  $\Gamma_i^l(w)$  et  $\Gamma_i^u(w)$  dépend du degré de l'approximation polynomiale de  $J(w)$ . De plus, nous pouvons noter que les coefficients des polynômes (5.42),  $\gamma_i^l$  et  $\gamma_i^u$  respectivement, dépendent linéairement des valeurs du vecteur d'état  $D$  en  $w_0$ .

En étudiant la positivité des bornes polynomiales  $\Gamma_i^l(w)$  et  $\Gamma_i^u(w)$ , nous pourrions conclure à la positivité des polynômes  $\Gamma_i(w)$  :

$$\Gamma_i^l(w) \geq 0, \text{ et } \Gamma_i^u(w) \geq 0 \Rightarrow \Gamma_i(w) \geq 0. \quad (5.43)$$

L'ensemble des vecteurs d'état  $D(w_0)$  permettant la satisfaction de  $\Gamma_i^l(w) \geq 0$  et  $\Gamma_i^u(w) \geq 0$ , est noté

$$\tilde{S}_D(H, V, w_0, w_f) = \left\{ D(w_0) \in \mathbb{R}^6 \mid \Gamma_i^l(w) \geq 0, \Gamma_i^u(w) \geq 0, \forall w \in [w_0, w_f], i = 1 \dots s \right\} \quad (5.44)$$

Il faut noter que  $\tilde{S}_D \subset S_D$  du fait de l'implication dans l'assertion (5.43).

Nous exploitons maintenant le lien entre les polynômes positifs et les matrices semi-définies positives décrites dans [112]

**Théorème 8 (Non-négativité des polynômes sur un intervalle fini [112]).** — Soit  $\mathcal{K}_{a,b}$  le cône convexe, fermé et pointé des coefficients des polynômes non négatifs sur un intervalle fini  $[a, b] \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{K}_{a,b} = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1}, P(w) = \sum_{i=0}^n p_i w^i \geq 0, \forall w \in [a, b] \right\} \quad (5.45)$$

Un polynôme  $P(w)$ , représenté par son vecteur de coefficients  $p = [p_0 \dots p_n]^T$ , appartient à  $\mathcal{K}_{a,b}$  si et seulement s'il existe deux matrices symétriques semi-définies positives  $Y_1$  et  $Y_2$  telles que :

$$p \in \mathcal{K}_{a,b} \Leftrightarrow \exists Y_1, Y_2 \succeq 0 / p = \Lambda^*(Y_1, Y_2) \quad (5.46)$$

La définition de l'opérateur linéaire  $\Lambda^*$  et les dimensions des matrices  $Y_1$  et  $Y_2$  dépendent de la parité du degré du polynôme  $P(w)$  (voir l'annexe G.1 pour plus de détails).

Nous pouvons maintenant donner une nouvelle description de l'ensemble  $\tilde{S}_D$  :

$$S_D(H, V, w_0, w_f) = \left\{ D(w_0) \in \mathbb{R}^6 \mid \begin{array}{l} \exists Y_{i1}^l, Y_{i2}^l \succeq 0 \text{ t.q. } \gamma_i^l(D) = \Lambda^*(Y_{i1}^l, Y_{i2}^l) \\ \exists Y_{i1}^u, Y_{i2}^u \succeq 0 \text{ t.q. } \gamma_i^u(D) = \Lambda^*(Y_{i1}^u, Y_{i2}^u) \end{array}, \forall i = 1 \dots s \right\}. \quad (5.47)$$

Cette description est finie, au sens où le nombre de conditions à satisfaire est fini comme le nombre de variables de décision. En effet, chaque contrainte de non-négativité polynomiale a été remplacée par une contrainte d'inégalité matricielle linéaire.

### 5.3.3 Caractérisation des orbites périodiques contraintes

La description des trajectoires admissibles est simplifiée dans les cas du mouvement relatif périodique. En effet, dans le cas d'orbite périodique, le terme intégral  $J(\nu)$  disparaît de l'expression de la transition (cf. (5.15)). Ainsi, la démarche précédente peut être appliquée en omettant l'étape d'approximation. Dans le cas périodique, les expressions (5.38) deviennent :

$$\Gamma_i^p(w) = -h_{i,1} P_x(w) - h_{i,2} \bar{P}_y(w) - h_{i,2} P_z(w) + v_i T(w). \quad (5.48)$$

Nous en déduisons une première description de l'ensemble des trajectoires périodiques appartenant à un polytope en termes de contraintes de non-négativité de polynômes :

$$S_D^p(H, V) = \left\{ D \in \mathbb{R}^6 \mid d_0 = 0, \Gamma_i^p(w) \geq 0, \forall w \in \mathbb{R}, i = 1 \dots s \right\}. \quad (5.49)$$

La non-négativité des polynômes  $\Gamma_i^p(w)$  doit être vérifiée sur la droite réelle une fois le changement de variable (5.16) effectué. En effet, ce changement de variable envoie l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  vers  $\mathbb{R}$ .

De nouveau, nous mettons à profit les résultats de Nesterov [112] afin d'écrire une description finie de  $S_D^p$ .

**Théorème 9 (Non-négativité d'un polynôme sur  $\mathbb{R}$  [112]).** — Soit  $\mathcal{K}_\infty$  le cône convexe, fermé et pointé des coefficients des polynômes non négatifs sur  $\mathbb{R}$  :

$$\mathcal{K}_\infty = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1}, P(w) = \sum_{i=0}^n p_i w^i \geq 0, \forall w \in \mathbb{R} \right\} \quad (5.50)$$

Un polynôme  $P(w)$  est non-négatif sur  $\mathbb{R}$  si et seulement s'il existe une matrice symétrique semi-définie positive  $Y \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$  telle que  $p$ , le vecteur des coefficients de  $P(w)$ , vérifie :

$$p \in \mathcal{K}_\infty \Leftrightarrow \exists Y \succeq 0 / p = \Lambda^*(Y) \quad (5.51)$$

L'opérateur linéaire  $\Lambda^*$  est défini par :

$$\Lambda^*(Y)(j) = \text{tr}(Y H_{m,j}), \quad j = 1 \dots 2m + 1 \quad (5.52)$$

où  $H_{m,i}$  sont des matrices de Hankel décrites par les expressions (G.3).

## 5.4 Cas d'applications

Nous proposons dans cette section deux applications possibles de la méthodologie présentée ci-dessus. Le premier scénario est une mission de rendez-vous sous contraintes de visibilité. Dans ce scénario, le véhicule doit atteindre une position proche de la cible tout en maintenant sa position à l'intérieur d'un cône de visibilité. Ce cône de visibilité lié aux capteurs de la cible (caméra, etc.) permet notamment d'assurer la continuité de la communication entre les satellites. Le second scénario met en jeu la sécurité passive pour une manœuvre d'approche. La sécurité passive est entendue ici comme la garantie que même en cas de problème déclenchant la désactivation du système propulsif, le satellite chasseur ne viendra pas percuter la cible. Ces deux scénarios sont issus de [28, 57].

### 5.4.1 Rendez-vous orbital sous contraintes de visibilité

Pour ce scénario, nous devons résoudre un problème de rendez-vous pour lequel nous imposons au satellite chasseur de rester dans une sous-région de l'espace durant l'ensemble de la mission. En rappelant que le nombre  $N$  et les instants d'impulsion  $\nu_i$  sont fixés *a priori*, ce problème particulier se formalise de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V} \quad & \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \\ \text{tel que} \quad & \begin{cases} X_f = \Phi(\nu, \nu_0) X_0 + \sum_{i=1}^N \Phi(\nu, \nu_i) B(\nu_i) \Delta V_i \\ \|\Delta V_i\| \leq \Delta V_{i,max}, \quad \forall i = 1 \dots N \\ (x(\nu), y(\nu), z(\nu)) \in \mathcal{X}_{vis}, \quad \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f] \end{cases} \end{aligned} \quad (5.53)$$

L'ensemble  $\mathcal{X}_{vis}$  décrivant le cône de visibilité est donné ici par un polytope non borné situé derrière le satellite cible (voir figure 5.1). Ce cône est décrit par un angle au centre  $\beta$  et une distance de sécurité  $x_{safe}$  entre le centre de masse du satellite cible et le port d'accroche. La condition de visibilité peut s'écrire comme une contrainte linéaire matricielle

$$H_{vis} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \leq K_{vis} \quad (5.54)$$

où

$$H_{vis} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho \\ 1 & 0 & -\rho \\ 1 & \rho & 0 \\ 1 & -\rho & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{safe} \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

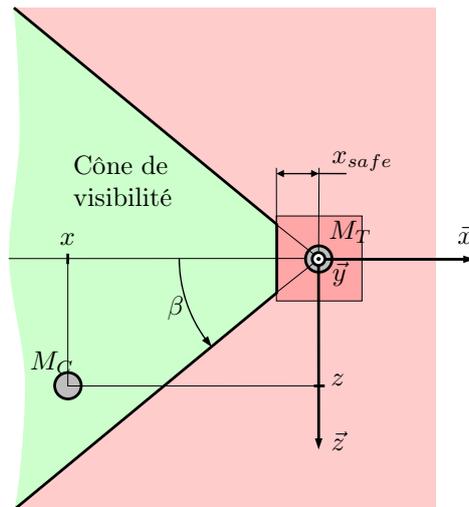


FIGURE 5.1 – Schéma du cône de visibilité

et  $\rho = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ .

Nous allons maintenant dérouler la procédure de résolution du problème (5.53).

Tout d'abord, afin de mettre en place la méthodologie présentée dans ce chapitre, nous allons considérer la contrainte de visibilité sur chaque segment de propagation libre délimité par les instants d'impulsion.

$$(x(\nu), y(\nu), z(\nu)) \in \mathcal{X}_{\text{vis}}, \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f] \iff \begin{cases} (x(\nu), y(\nu), z(\nu)) \in \mathcal{X}_{\text{vis}}, \forall \nu \in [\nu_0, \nu_1], \\ (x(\nu), y(\nu), z(\nu)) \in \mathcal{X}_{\text{vis}}, \forall \nu \in [\nu_1, \nu_2], \\ \vdots \\ (x(\nu), y(\nu), z(\nu)) \in \mathcal{X}_{\text{vis}}, \forall \nu \in [\nu_{N-1}, \nu_N], \\ (x(\nu), y(\nu), z(\nu)) \in \mathcal{X}_{\text{vis}}, \forall \nu \in [\nu_N, \nu_f]. \end{cases} \quad (5.56)$$

Sans perte de généralité, nous imposons dans la suite  $\nu_0 = \nu_1$  et  $\nu_f = \nu_N$ . Nous allons détailler le processus de transformation d'une contrainte de visibilité en contrainte LMI. En particulier, nous nous concentrons sur la première contrainte de visibilité :

$$-x(\nu) - \rho z(\nu) \geq 0, \quad \forall \nu \in [\nu_i, \nu_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (5.57)$$

En exploitant les changements de variables (5.16) et les expressions associées de la transition (5.17), la contrainte (5.57) peut se réécrire :

$$\Gamma^i(w) \geq 0, \quad \forall w \in [w_i, w_{i+1}], \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad (5.58)$$

où l'indice  $i$  indique le segment temporel et

$$\Gamma^i(w) = - [P_x^i(w) + 3 d_0^i P_{J_x}(w) J_\nu^i(w)] - \rho [P_z^i(w) + 2 d_0^i (P_{J_z}(w) J_\nu^i)] \geq 0, \forall w \in [w_i, w_{i+1}], \forall i = 1 \dots N-1 \quad (5.59)$$

Le terme intégral  $J(w)$  est remplacé sur chaque segment  $[w_i, w_{i+1}]$  par ses bornes d'approximation  $\Theta_u^i(w)$  et  $\Theta_l^i(w)$  dans l'expression de  $\Gamma_1^i(w)$  afin d'obtenir les contraintes de positivité polynomiale suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^i(w) &= - [P_x^i(w) + \rho P_z^i(w)] - d_4 [3 P_{J_x}(w) + 2 \rho P_{J_z}] \Theta_l^i(w) \geq 0 \\ \Gamma_u^i(w) &= - [P_x^i(w) + \rho P_z^i(w)] - d_4 [3 P_{J_x}(w) + 2 \rho P_{J_z}] \Theta_u^i(w) \geq 0 \end{aligned}, \quad \forall w \in [w_i, w_{i+1}], \quad \forall i = 1 \dots N-1 \quad (5.60)$$

Le degré des polynômes (5.60) est  $q + 4$  où  $q$  est le degré du polynôme d'approximation  $\Theta_q^i(w)$  de  $J(w)$  sur le segment  $[w_i, w_{i+1}]$ . Les vecteurs de coefficients  $\gamma_u^i$  et  $\gamma_l^i$  des polynômes respectifs  $\Gamma_u^i(w)$  et  $\Gamma_l^i(w)$

Excentricité	0.023776
Demi-grand axe [km]	7 011
Anomalie initiale $\nu_0$	$\frac{-p^i}{2}$
Anomalie finale $\nu_f$	$\frac{p^i}{2}$
Etat initial [m, m/s]	$[-50; -10; 15; 0; 0; 0]^T$
Etat final [m, m/s]	$[-6; 0; 0; 0; 0; 0]^T$

TABLE 5.1 – Données de la mission sous contraintes de visibilité

sont linéairement liés aux coefficients de  $P_x^i(w)$ ,  $P_z^i(w)$  (cf. (5.42)). De plus, les vecteurs de coefficients  $p_x^i$  et  $p_z^i$  dépendent de l'état après l'impulsion :

$$p_x^i = C_x D^+(\nu_i) = C_x C(\nu_i) X_i^+ = C_x C(\nu_i) (\mathbf{A}_i \Delta V^i + \mathbf{B}_i) \quad (5.61)$$

$$p_z^i = C_z D^+(\nu_i) = C_z C(\nu_i) X_i^+ = C_z C(\nu_i) (\mathbf{A}_i \Delta V^i + \mathbf{B}_i) \quad (5.62)$$

où  $^+$  indique l'état après l'impulsion et

$$\mathbf{A}_i = [\Phi_{\nu_1}^{\nu_i} B \dots \Phi_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} B B] \quad \mathbf{B}_i = \Phi_{\nu_1}^{\nu_i} X(\nu_1) \quad \Delta V^i = [\Delta V_1 \dots \Delta V_i]^T, i = 1 \dots N \quad (5.63)$$

Par conséquent, les vecteurs  $\gamma_u^i$  et  $\gamma_l^i$  sont aussi liés linéairement aux variables de décision  $\Delta V$ . Ce fait implique qu'un choix approprié de  $\Delta V$  doit permettre de vérifier la contrainte de positivité (5.58) s'il satisfait au théorème 8 de positivité sur un segment :

$$\begin{aligned} \gamma_l^i &= \Lambda^*(Y_{1l}^i, Y_{2l}^i) \text{ où } (Y_{1l}^i \succeq 0, Y_{2l}^i \succeq 0) \\ \gamma_u^i &= \Lambda^*(Y_{1u}^i, Y_{2u}^i) \text{ où } (Y_{1u}^i \succeq 0, Y_{2u}^i \succeq 0) \end{aligned}, \forall i = 1 \dots N-1 \quad (5.64)$$

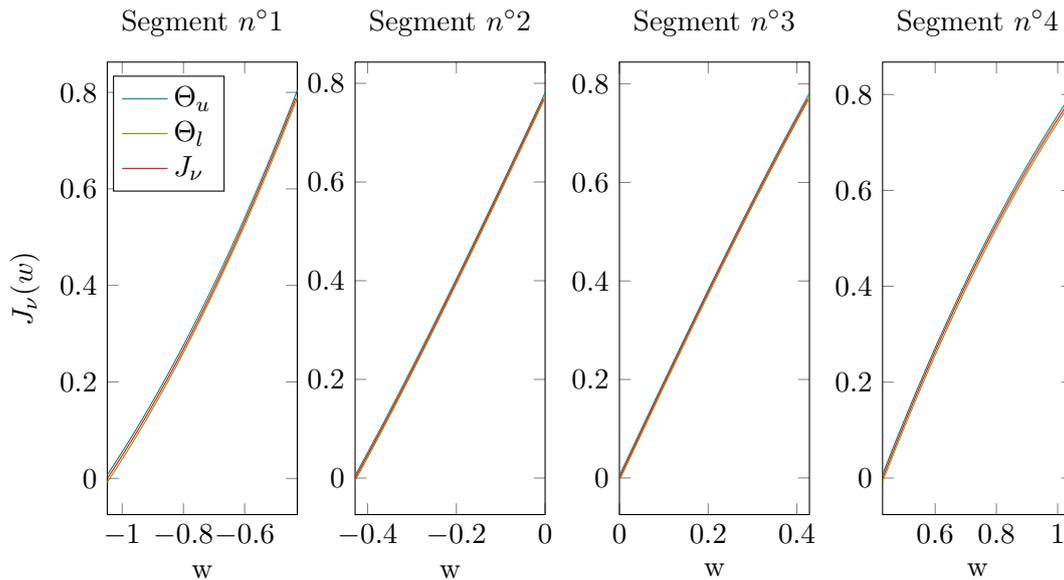
Finalement, le problème contraint peut être réécrit comme la compilation de condition LMI (5.64) pour chaque contrainte de visibilité et pour chaque segment temporel  $[w_i, w_{i+1}]$  :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V, Z} \quad & \sum_{i=1}^N Z_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} X_f = \Phi(\nu, \nu_0) X_0 + \sum_{i=1}^N \Phi(\nu, \nu_i) B(\nu_i) \Delta V_i \\ -Z_i \leq \Delta V_i \leq Z_i, \quad Z_i \leq \Delta V_{i, \max}, \quad \forall i = 1 \dots N \\ \gamma_{jl}^i = \Lambda^*(Y_{j1l}^i, Y_{j2l}^i), Y_{j1l}^i \succeq 0, Y_{j2l}^i \succeq 0 \\ \gamma_{ju}^i = \Lambda^*(Y_{j1u}^i, Y_{j2u}^i), Y_{j1u}^i \succeq 0, Y_{j2u}^i \succeq 0 \end{cases}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1, \forall j = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Les coordonnées de la mission considérée sont renseignées dans le tableau 5.1. L'approximation du terme intégral  $J(\nu)$  a été réalisée à l'aide de la librairie SOLLIA [41] qui permet de fixer *a priori* le degré d'approximation et de garantir une erreur minimale. Ici, nous avons choisi  $q = 2$  et en avons obtenu une erreur maximale certifiée de 0.25% (figure 5.2)

Les solutions obtenues par résolution de (5.65) ont été comparées à celles calculées avec les méthodes classiques (i.e. basées sur la discrétisation des contraintes telles qu'elles ont été présentées dans le chapitre 3).

Les figures 5.3 et 5.4 exposent les tracés obtenus avec la méthode développée dans ce chapitre et avec la méthode discrétisée avec 10 points de collocation équitablement répartis. Nous avons produit, ici, une trajectoire respectant continûment la contrainte de visibilité. En comparaison, l'algorithme discrétisé fournit une trajectoire qui transgresse le cône de visibilité entre certains points de collocation. Pour parer à cet inconvénient, il apparaît naturel d'augmenter le nombre de points de collocation afin d'éliminer l'excursion. Les résultats de cette expérience sont reportés dans le tableau 5.2. Il est intéressant de noter qu'avec l'augmentation du nombre de points de collocation, le coût du problème discrétisé tend vers celui du programme (5.65). Ce fait rappelle que les problèmes discrétisés résolus sont des relaxations du problème (5.53).

FIGURE 5.2 – Approximation du terme intégral  $J(w)$  par segment

	Prog. (5.65)	Pb. discret 5 pts	Pb. discret 10 pts	Pb. discret 20 pts	Pb. discret 50 pts
Consommation [m/s]	10.99	9.33	10.67	10.97	10.98
Durée d'excursion [s]	0	1 133	307	249	47

TABLE 5.2 – Comparaison entre les différentes méthodes

### 5.4.2 Rendez-vous orbital sous conditions de sécurité passive

Une part essentielle de l'autonomie des satellites durant le rendez-vous vient de leur capacité à gérer les comportements anormaux du système. La sécurité passive est une manière d'aborder un grand nombre de problèmes sur les chaînes d'actuation ou de navigation. Par sécurité passive, nous entendons le calcul de trajectoires qui, en cas d'apparition de défauts amenant à l'arrêt de tous les propulseurs, garantissent l'évitement de collision [28]. Pour ce faire, la contrainte de sécurité doit être vérifiée à la fois sur la trajectoire nominale, mais aussi sur les trajectoires éventuelles après apparition de défauts. Nous proposons d'imposer, sur les  $S$  dernières étapes du rendez-vous, que la trajectoire après l'impulsion soit périodique et évolue dans une sous-région sûre de l'espace. En considérant les contraintes de bornes sur la commande, le problème de sécurité passive peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta V} \quad \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \\
 & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \|\Delta V_i\| \leq \Delta V_{i,max}, \quad \forall i = 1 \dots N \\ X_f = \Phi(\nu, \nu_0)X_0 + \sum_{i=1}^N \Phi(\nu, \nu_i)B(\nu_i)\Delta V_i \\ M(\nu_i)X(\nu_i) = 0 \\ X_{\text{def}}^i(\nu) \in \mathcal{X}_{\text{safe}}, \forall \nu \geq \nu_i \end{cases} \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

La matrice  $M(\nu_i)$  correspond à la première ligne de la matrice  $C(\nu_i)$  (voir (5.6)). La condition  $M(\nu_i)X(\nu_i) = 0$  impose la périodicité aux instants d'impulsion  $\nu_i$ .  $X_{\text{def}}^i(\nu)$  désigne une trajectoire supposée défailante et propagée librement à partir de l'instant  $\nu_i$ . La sous-région  $\mathcal{X}_{\text{safe}}$  est choisie arbitrairement comme le demi-espace

$$\mathcal{X}_{\text{safe}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq x_{\text{safe}}\}. \quad (5.67)$$

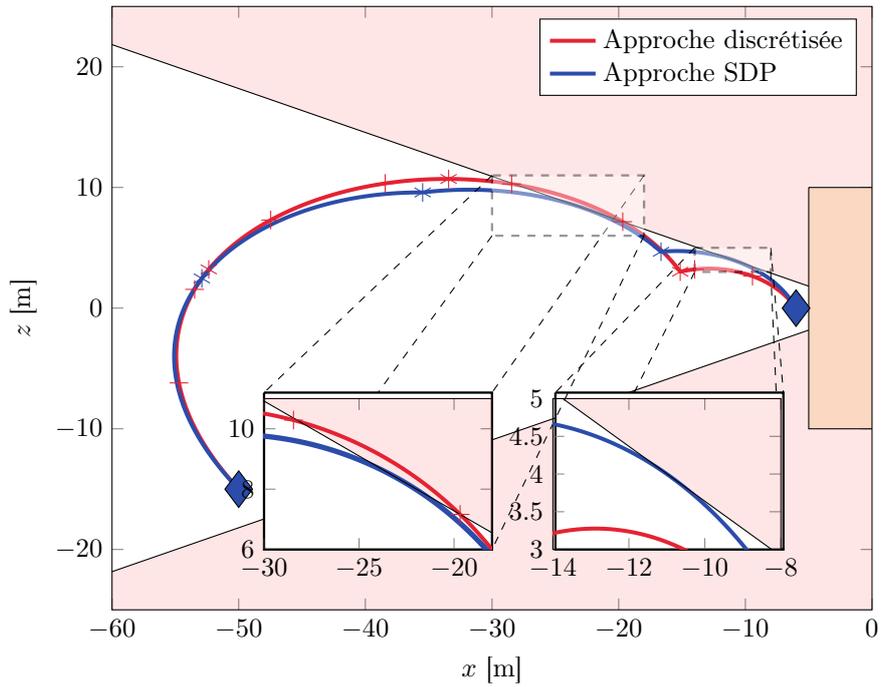


FIGURE 5.3 – Trajectoires de rendez-vous sous contraintes de visibilité : projections dans le plan  $xz$

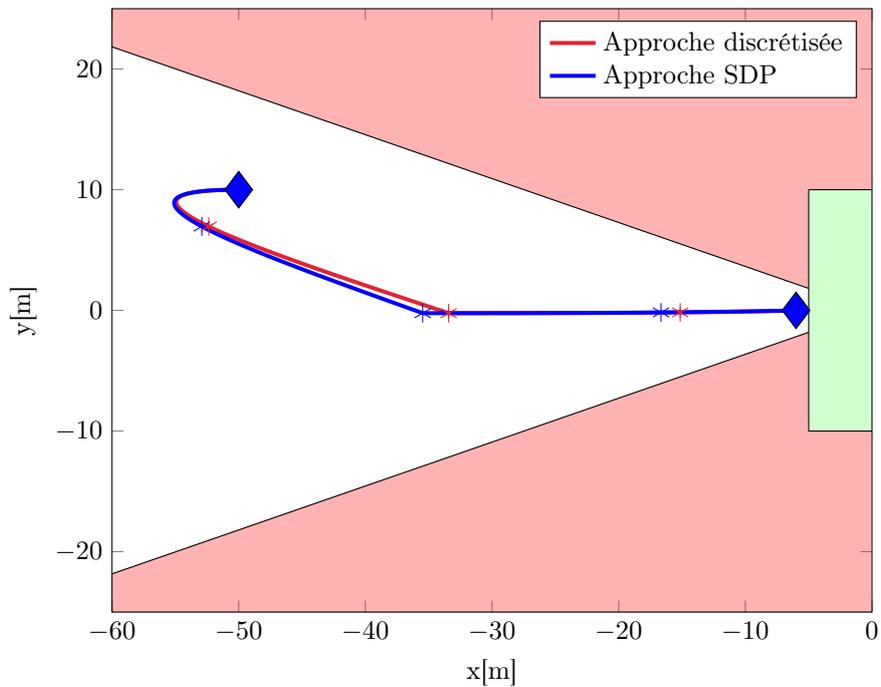


FIGURE 5.4 – Trajectoires de rendez-vous sous contraintes de visibilité : projections dans le plan  $xy$

La condition de sécurité s'écrit alors comme un ensemble de  $S$  contraintes :

$$x_{\text{def}}^i(\nu) \leq x_{\text{safe}}, \quad \forall \nu \geq \nu_i, \quad \forall i = N-S \dots N-1. \quad (5.68)$$

Les orbites relatives entre les instants d'impulsions étant périodiques, une procédure similaire à celle développée lors du précédent scénario permet d'écrire la contrainte (5.68) comme des conditions de positivité

$$\Gamma_i(w) \geq 0, \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad (5.69)$$

où

$$\Gamma_i(w) = T(w) x_{\text{safe}} - P_x^i(w), \quad i = N-S \dots N-1 \quad (5.70)$$

où  $P_x(w)$  est donné par (5.19). Les vecteurs de coefficients  $\gamma^i$  des polynômes  $\Gamma^i(w)$  sont fonctions des variables de décision  $\Delta V_i$  au travers de leur dépendance en  $X_i$  :

$$\gamma_i = -C_x C_p(\nu_i) X_i + x_{\text{safe}} = -C_x C_p(\nu_i) (\mathbf{A}_i \Delta V_i + \mathbf{B}_i) + x_{\text{safe}} t, \quad i = N-S \dots N-1 \quad (5.71)$$

L'exploitation du théorème 9 permet d'écrire une contrepartie sous forme de conditions LMI aux contraintes (5.69) :

$$-C_x C_p(\nu_i) (\mathbf{A}_i \Delta V_i + \mathbf{B}_i) + x_{\text{safe}} t = \Lambda^*(Y_i) \text{ tel que } Y_i \succeq 0, \quad i = N-S \dots N-1 \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V, Z} \quad & \sum_{i=1}^N Z_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -Z_i \leq \Delta V_i \leq Z_i, \quad \forall i = 1 \dots N \\ Z_i \leq \overline{\Delta V}_i \\ X(\nu_1 = 0) = X_0 \\ M(\nu_i) (\mathbf{A}_i \Delta V_i + \mathbf{B}_i) = 0 \\ Y_i \succeq 0, \quad -C_x C_p(\nu_i) (\mathbf{A}_i \Delta V_i + \mathbf{B}_i) + x_{\text{safe}} t = \Lambda^*(Y_i), \quad \forall i = N-S \dots N-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Les conditions de la mission sont établies dans le tableau 5.3

Excentricité	0.023776
Demi-grand axe [km]	7 011
Anomalie initiale $\nu_0$	0
Anomalie finale $\nu_f$	$2\pi$
Etat initial [m, m/s]	$[30; 0; 3; 0; 0; 0]^T$
Etat final [m, m/s]	$[5; 0; 0; 0; 0; 0]^T$
$x_{\text{safe}}$ [m]	5

TABLE 5.3 – Données de la mission sous conditions de sécurité passive

Dans un premier temps, nous identifions l'horizon nécessaire à assurer. Pour ce faire, nous calculons une première trajectoire sans contraintes de sécurité et nous propageons toutes les trajectoires défaillantes. Nous obtenons ainsi la figure 5.5. Il apparaît que les quatre trajectoires défaillantes doivent percuter la cible. Nous posons ainsi  $S = 4$  afin d'éliminer le risque de collision.

Une fois l'horizon de sécurité fixé, nous résolvons le programme (5.73) et obtenons les trajectoires de la figure 5.6. Les trajectoires défaillantes évoluent de manière périodique dans la sous-région indiquée et assurent ainsi l'évitement de collision en cas d'arrêt de la propulsion.

Enfin, nous évaluons l'incidence de l'horizon de sécurité sur le coût (voir tableau 5.4). Il apparaît clairement qu'assurer la sécurité passive par la méthode proposée a un coût non négligeable qui doit être pris en compte dans le processus de calcul de la trajectoire.

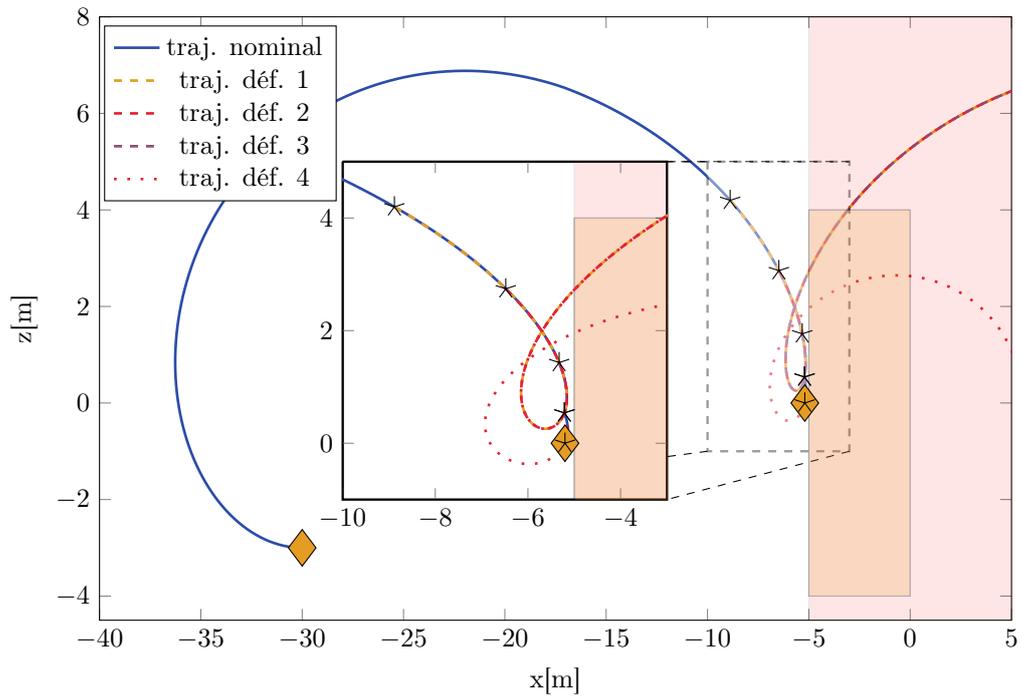


FIGURE 5.5 – Rendez-vous sans conditions de sécurité passive

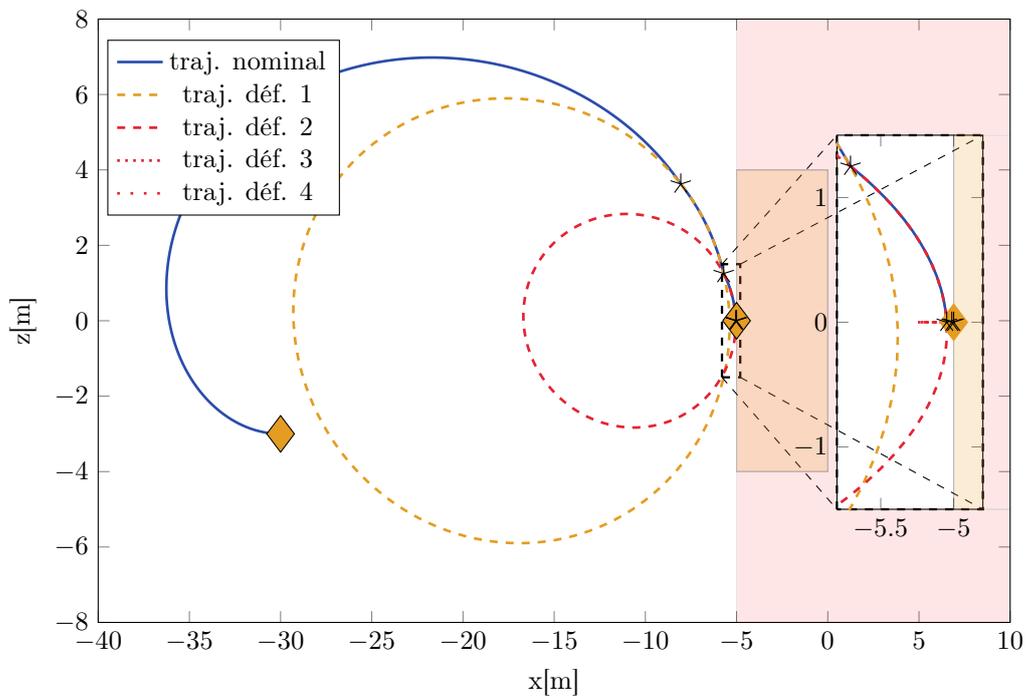


FIGURE 5.6 – Rendez-vous sous conditions de sécurité passive

$S$	Consommation [m/s]	Accroissement du coût
0	0.0116	× × ×
1	0.0121	5%
2	0.0135	16%
3	0.0146	25%
4	0.0156	34%
5	0.0163	40%
6	0.0168	45%
7	0.0174	50%

TABLE 5.4 – Influence de l’horizon de sécurité sur la consommation

## 5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons pu résoudre le problème de rendez-vous sous contraintes sur la trajectoire sans avoir à discrétiser celles-ci. Cette méthode repose sur trois étapes : (i) l’écriture de la transition dans une base rationnelle, (ii) la transformation des contraintes sur la trajectoire en problème de positivité polynomiale, (iii) l’utilisation du lien entre les polynômes positifs et les matrices semi-définies positives (résultats de Nesterov). Fort de ces résultats, nous avons pu proposer des solutions garanties pour différents scénarios.

Les résultats de ce chapitre forment un socle pour une partie de nos recherches actuelles (voir par exemple [2]) et ont pu être appliqués à d’autres scénarios de rendez-vous [4].



---

# Conclusion générale : travaux en cours et perspectives de recherche

---

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Travaux en cours</b> . . . . .	<b>90</b>
1.1	Rendez-vous impulsif et formalisme des systèmes dynamiques hybrides . . .	90
1.2	Mise en œuvre d'une commande prédictive sur un ordinateur embarqué . . . . .	91
1.3	Maintien à poste électrique . . . . .	93
<b>2</b>	<b>Axes de recherche à moyen terme</b> . . . . .	<b>94</b>
2.1	Commande hybride et saturée du rendez-vous et robustesse . . . . .	95
2.2	Convergence et robustesse de la commande prédictive . . . . .	96
2.3	Analyse des systèmes périodiques et description finie des trajectoires d'intérêt . .	97
<b>3</b>	<b>Perspectives de recherche à long terme</b> . . . . .	<b>97</b>
3.1	Commande optimale par platitude pour les systèmes de grandes dimensions . . .	97
3.2	Cinétiques atomistiques et dynamique moléculaire . . . . .	98

---

Ce chapitre de conclusion expose les travaux en cours et recense quelques prolongements de nos travaux. Il mettra en lumière les nouvelles orientations de mon travail de recherche. Notons que ces dernières années, nous nous sommes particulièrement intéressés à la problématique de commande en boucle fermée à travers des méthodologies telles que la commande prédictive et la commande hybride.

La commande hybride apparaît dans les travaux de thèse de Laura Sofia Urbina-Iglesias. La considération des méthodes de commande hybride émane du constat que les systèmes impulsionsnels entrent dans le formalisme des systèmes dynamiques hybrides sans plus de manipulations [11]. Ce formalisme nous a permis d'analyser la stabilité d'une loi de commande issue de [49] et d'autres lois originales.

L'étude de la commande prédictive pour le rendez-vous orbital apparaît dans la continuité des travaux menés sur les lois de commande en boucle ouverte. Cette activité a d'ailleurs démarré avec les travaux de thèse de G. Deaconu [49, 50]. Elle se poursuit dans les travaux de P. Arantes-Gilz. L'un des objectifs de cette thèse est le développement d'algorithmes de commande prédictive numériquement efficaces en vue de leur chargement sur un ordinateur de faible puissance. Un second objectif est la certification de ces algorithmes.

Clément Gazzino emploie aussi dans ses travaux de thèse la résolution du problème de commande optimale et les stratégies de commande prédictive pour étudier le maintien à poste des satellites de télécommunications en orbite géostationnaire. Ce maintien est réalisé grâce à des propulseurs électriques dont les poussées ne peuvent plus être modélisées comme des impulsions sur la vitesse.

Sur la base de ces travaux actuels (section 1), nous mettrons en avant nos perspectives de recherche à moyen terme dans la section 2. Enfin, nous proposerons, dans la section 3, quelques axes de recherche potentiels à explorer à long terme.

## 1 Travaux en cours

### 1.1 Rendez-vous impulsionsnel et formalisme des systèmes dynamiques hybrides

La thèse L.S. Urbina Iglesias, co-encadrée avec D. Arzelier, traite des problématiques de couplage du mouvement orbital et d'attitude [9] et des méthodes de commande pour les manœuvres de proximité telles que le *glideslope* [5]. La partie de la thèse décrite ici est le fruit d'une collaboration avec Luca Zaccarian, directeur de recherche au LAAS-CNRS, et Mirko Brentari, étudiant en thèse à l'Université de Trento en Italie. Ce travail a abouti à une publication en conférence [30] et à une soumission en journal [31].

Nous avons considéré le problème de commande en boucle fermée pour le maintien d'une orbite périodique d'intérêt. L'orbite périodique à proximité de la cible est calculée à l'aide des méthodes présentées dans le chapitre 5 et notamment la section 5.3.3. Cette orbite présente l'intérêt pratique de fournir de maintenir le satellite dans une zone de parking à consommation nulle en l'absence de perturbations. Cela est utile lorsque le chasseur doit attendre un ordre de poursuite de la mission ou faire une observation de la cible, notamment quand celle-ci est non coopérative ou incontrôlée.

Le contexte d'une commande impulsionsnelle pour le rendez-vous se prête particulièrement bien à une modélisation de la dynamique dans le formalisme hybride. En effet, la phase de rendez-vous consiste en une succession d'arcs de propagation libres délimités par des instants de sauts dans l'état, répondant ainsi à la description des systèmes dynamiques impulsionsnels faite par Baïnov dans [12, Chapitre 1] :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x & t \neq \tau_k \\ \Delta x = I_k x & t = \tau_k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.74)$$

où les instants  $\tau_k$  sont fixés *a priori* et équidistants (i.e. période fixe d'appel à la commande). Nous pouvons remarquer que cette définition est incluse dans la définition des systèmes dynamiques hybrides

que proposent Goebel *et al.* dans [64, chapitre 1] ou encore Haddad *et al.* dans [66, chapitre 2] :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) & y \in C \\ y^+ = g(y) & y \in D \end{cases} \quad (5.75)$$

où  $y = [x, t]$ .

L'idée de ce travail est d'exploiter la théorie des systèmes dynamiques hybrides afin de définir et d'analyser la stabilité de lois de commande pour des manœuvres de proximité. Notre démarche s'est déroulée en plusieurs étapes.

La première a consisté à simplifier le modèle dynamique. La dynamique relative dépend explicitement de l'anomalie vraie, ce qui en fait un modèle à temps variant périodique. En utilisant la théorie de Floquet-Lyapunov, nous avons mis en exergue une transformation similaire définissant un nouvel état permettant de caractériser simplement les orbites périodiques, à l'instar du vecteur d'état  $D$  utilisé dans le chapitre 5. Ce nouvel état, noté  $\hat{\xi}$  dans [30], présente toutefois l'intérêt de posséder une dynamique invariante dans le temps. Dans ce cadre, maintenir une orbite périodique particulière revient à contrôler un système instable autour d'un point d'équilibre particulier (rappelons que toute orbite périodique est associée à un point d'équilibre pour les vecteurs d'état  $D$  et  $\hat{\xi}$ ).

Dans une seconde étape, nous proposons trois lois de commande linéaires différentes dans [31]. L'une d'entre elles est reprise d'un travail précédent [49] tandis que les deux autres sont originales. La stratégie adoptée pour les deux dernières lois citées est de guider l'état courant vers le sous-espace des états d'équilibre puis de rallier l'état d'équilibre désiré. En nous appuyant notamment sur les résultats de stabilité décrits dans [64, chapitre 7], nous montrons que, dans le contexte des systèmes dynamiques hybrides, ces trois lois sont stabilisantes.

Les résultats obtenus en simulation montrent, dans un contexte de simulation linéaire idéale, une convergence du chasseur vers son orbite relative d'assignation. Dans un contexte de simulation non linéaire mettant en jeu une dynamique inertielle pour chaque véhicule et prenant en compte les limitations d'actionneurs, les lois de commande se montrent encore stabilisantes lorsque la distance initiale est raisonnable même si elles affichent une perte de performance. Ce constat pose la question de la robustesse de ces lois de commande vis-à-vis de différentes incertitudes et perturbations. Nous détaillons ce point ultérieurement dans la section 2.

## 1.2 Mise en œuvre d'une commande prédictive sur un calculateur embarqué

Les travaux présentés ci-après relèvent de la thèse de Paulo Arantes-Gilz, co-encadrée avec M. Joldes. Ils ont débuté après les travaux de thèse de G. Deaconu à l'occasion du stage de fin d'études de P. Arantes-Gilz en 2014, et se sont poursuivis avec le stage de fin d'études de Bruno Benetti en 2015. A partir de février 2015, Frédéric Camps, ingénieur d'études au LAAS-CNRS, nous a rejoint avec l'objectif d'embarquer un algorithme de commande prédictive sur un calculateur de bord certifié pour le vol spatial. Il est notre principal support sur tous les aspects concernant le matériel (achat et mise en place des calculateurs, chaîne de compilation, interfaçage réseau et simulateur...). Ce calculateur est une carte FPGA d'architecture LEON 3. Si cette dernière supporte les conditions de vol et l'environnement spatial, ses capacités numériques, s'agissant de la vitesse de calcul et du stockage de données, sont très faibles en comparaison des autres cartes FPGA disponibles sur le marché. Si on ajoute à ce premier constat qu'un créneau fixe de disponibilité est alloué périodiquement à chaque application, le développement d'un algorithme de commande prédictive est un défi scientifique et technologique.

L'objectif affiché est d'exploiter les résultats obtenus lors de la résolution du problème de guidage sous contraintes sur l'état et la commande. Dans le chapitre 5, nous avons proposé une description formelle des trajectoires périodiques inscrites dans un sous-espace polytopique puis nous avons utilisé cette description pour résoudre de manière efficace le problème de guidage sous contraintes sur l'état. Dans le cadre de la

commande prédictive, l'utilisation de ce type de problème permet de générer une commande qui respecte les limites de saturation et qui va rallier l'orbite périodique la moins coûteuse. En d'autres termes, nous ne contrôlons pas le système autour d'un point d'équilibre particulier, mais nous cherchons à stabiliser un sous-ensemble de l'espace d'état. L'intérêt pratique est que si une perturbation éloigne le véhicule d'une orbite périodique d'intérêt, la commande ne tentera pas de le ramener sur cette même orbite, mais sur la plus proche en terme de consommation (éventuellement une orbite passant par la position du chasseur). Ce travail a fait l'objet d'une première publication [2].

Nous avons ensuite travaillé à l'embarquabilité des programmes mathématiques associés aux problèmes de commande. Ces programmes reprennent en grande partie la formulation LMI développée dans le chapitre 5. Lors du stage de B. Benetti, les programmes proposés ont été transposés en langage C à partir du code Matlab. Puis, dans une première expérience, une chaîne de compilation a été construite pour la carte STM32F2 comportant un processeur ARM3. Si l'exécution des algorithmes fut possible, les programmes exécutables obtenus possédaient une empreinte numérique trop importante, les rendant incompatibles avec une exécution sur une carte de type LEON 3. La thèse de P. Arantes a démarré sur le constat qu'il était nécessaire de repenser les algorithmes de guidage tout en conservant les bonnes propriétés déjà obtenues. La formulation des contraintes en programmation semi-infinie soulève notamment un problème de dimension des données s'agissant du stockage et de l'occupation de la mémoire vive. Ainsi, nous avons proposé dans [1] de remplacer les contraintes LMI par leur représentation semi-algébrique dans l'espace des variables de décision (ici, l'espace d'état  $D$ ). L'idée est d'utiliser dans l'algorithme de commande la forme algébrique décrivant la frontière de l'espace admissible. Nous avons calculé cette représentation en reprenant les contraintes linéaires d'espace, par exemple

$$\begin{aligned} \underline{x}(\nu) &\leq x(\nu) \leq \bar{x}(\nu) \\ \underline{y}(\nu) &\leq y(\nu) \leq \bar{y}(\nu) \quad \nu \geq \nu_0, \\ \underline{z}(\nu) &\leq z(\nu) \leq \bar{z}(\nu) \end{aligned} \quad (5.76)$$

En remarquant qu'elles décrivent des contraintes linéaires en  $D$  et paramétrées par l'anomalie vraie  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} \underline{x} &\leq x(\nu) = \frac{(2+e c_\nu)(d_1 s_\nu - d_2 c_\nu) + d_3}{1+e c_\nu} &\leq \bar{x} \\ \underline{y} &\leq y(\nu) = \frac{d_4 c_\nu + d_5 s_\nu}{1+e c_\nu} &\leq \bar{y}, \quad \forall \nu, \\ \underline{z} &\leq z(\nu) = d_1 c_\nu + d_2 s_\nu &\leq \bar{z} \end{aligned} \quad (5.77)$$

nous avons calculé l'enveloppe de cette famille de droites décrites par (5.77) (voir figure 5.7). Si l'enveloppe

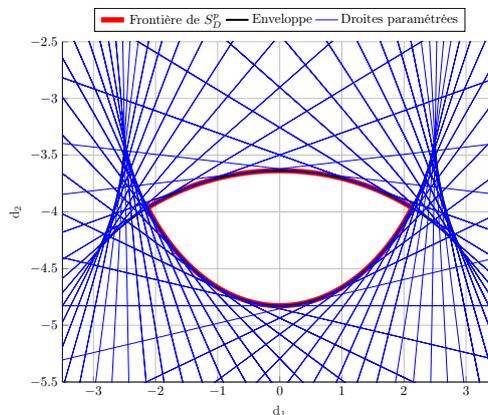


FIGURE 5.7 – Famille de droite pour la contrainte  $x(\nu) \leq \bar{x}(\nu)$ , enveloppe et frontière de l'espace admissible

a pu s'écrire comme polynôme en  $d_3$   $\gamma_{\bar{x}}(d_1, d_2, d_3) = \sum_{0 \leq i \leq 4} \bar{\theta}_i(d_1, d_2) d_3^i$ , une attention particulière a été

donnée au fait qu'une partie seulement de l'enveloppe décrit la frontière de l'espace admissible. La frontière de l'espace admissible à la contrainte  $x(\nu) \leq \bar{x}(\nu)$  est alors donnée par la fonction :

$$g_{\bar{x}}(d_1, d_2, d_3) = d_3 - r_{\bar{x}}(d_1, d_2) \quad (5.78)$$

où  $r_{\bar{x}}(d_1, d_2)$  renvoie à la plus petite valeur racine réelle du polynôme  $\gamma_{\bar{x}}$ . Nous avons ainsi redéfini dans l'ensemble admissible  $S_D^p$  donné par (5.49) grâce un ensemble de conditions algébriques :

$$S_D^p = \left\{ \begin{array}{l} D \in \mathbb{R}^6 \\ \text{s.t. } d_0 = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} g_{\bar{x}}(D) \leq 0, \quad g_{\bar{y}}(D) \leq 0, \quad g_{\bar{z}}(D) \leq 0 \\ g_{\underline{x}}(D) \leq 0, \quad g_{\underline{y}}(D) \leq 0, \quad g_{\underline{z}}(D) \leq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (5.79)$$

Si nous savons que  $S_D^p$  est un ensemble convexe, sa description (5.79) met en exergue la non-différentiabilité des contraintes (les fonctions racines  $r_{\cdot}(\cdot)$  ne sont pas lisses en fonction de ses entrées). Afin de résoudre le problème d'optimisation comportant la contrainte  $D \in S_D^p$ , nous avons employé des algorithmes de programmation non lisse : nous avons combiné une méthode de sous-gradient [27] à une méthode quasi Newton [97]. Puis, après avoir codé et compilé ces algorithmes pour la carte LEON 3, nous avons simulé la loi de commande prédictive dans un environnement non linéaire [3].

Les premiers résultats rassemblés dans [1] sont encourageants notamment en termes de temps de calcul et de convergence de la commande prédictive, même si elle n'a toutefois pas été démontrée formellement.

### 1.3 Méthode de commande "tout ou rien" pour le maintien à poste électrique et géostationnaire

La thèse de Clément Gazzino, co-encadrée avec D. Arzelier, est réalisée en partenariat avec le CNES et Thales Alenia Space. Elle s'intéresse à la problématique du maintien à poste géostationnaire des satellites de télécommunications équipés de propulseurs électriques en plus de propulseurs chimiques. L'idée est de réaliser le maintien à poste uniquement à l'aide de la propulsion électrique afin d'allonger considérablement la durée de vie des satellites. Un premier objectif scientifique fixé par les partenaires est de générer un plan annuel de manœuvres maintenant le satellite de télécommunications dans le secteur d'orbite qui lui a été assigné. Le second objectif est de coupler à ces manœuvres à ce maintien à poste, le contrôle du moment cinétique des roues à réaction. Les derniers actionneurs sont utilisés pour maintenir l'attitude du satellite (orientation angulaire autour du centre de masse). Cet effort provoque néanmoins une augmentation de la vitesse des roues. Lorsque les roues à réaction atteignent leur vitesse maximale, une manœuvre spécifique, appelée manœuvre de désaturation, doit être effectuée par le satellite sous la surveillance d'opérateur au sol. On souhaite ainsi exploiter le bras de levier des propulseurs électriques et le couple résultant pour maintenir le moment cinétique en dessous d'un certain seuil.

Notre approche se fonde sur le calcul de plans de guidage hebdomadaire pour une année complète. Ces plans sont obtenus par la résolution d'un problème de commande optimale.

Le problème proposé comporte un certain nombre de difficultés. La première est liée à la dynamique géostationnaire. En effet, cette dynamique prend en compte des phénomènes qui ont pu être négligés dans le cadre képlérien tels que les harmoniques de gravitation terrestre et l'attraction lunaire. Nous ne possédons pas par ailleurs de transition formelle, contrairement aux autres travaux cités dans ce manuscrit. De plus, nous devons considérer la nature des propulseurs électriques : ceux-ci peuvent être activés sur de longues périodes, mais produisent des poussées faibles en comparaison avec la propulsion chimique. Par conséquent, le signal de commande ne peut plus être considéré comme impulsif, mais doit être modélisé comme une fonction constante par morceaux pouvant prendre les valeurs 0 où  $F_{max}$ . Par ailleurs, les satellites de télécommunications ont pour particularité de posséder l'ensemble de leurs propulseurs sur une seule face de leur bus. En schématisant le satellite comme un cube faisant face à la Terre, les propulseurs se situent sur la face opposée à la Terre (voir figure 5.8).

Enfin, il existe un ensemble de contraintes liées aux conditions technologiques d'utilisation des propulseurs électriques : (i) deux propulseurs ne peuvent pas pousser simultanément ; (ii) un temps de latence

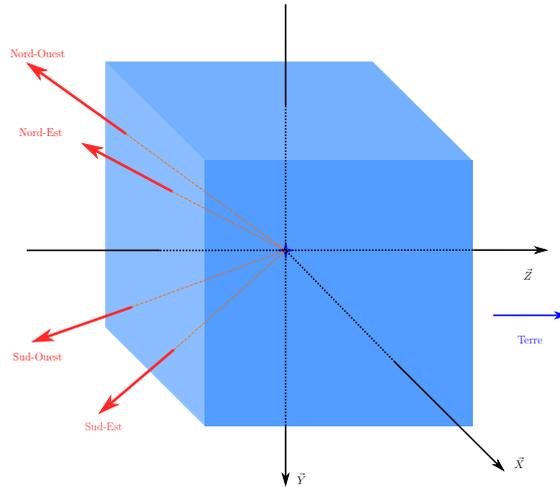


FIGURE 5.8 – Schéma de placement des actionneurs

doit être observé entre deux activations de propulseurs, et ce que le propulseur sollicité soit le même ou non ; (iii) la durée d'activation d'un propulseur ne peut être inférieure à un temps minimal.

Ce cadre de travail rend particulièrement complexe la résolution du problème de commande optimale. Dans une première approche, nous proposons deux étapes de résolution. La première consiste à résoudre le problème de commande optimale sans tenir compte des conditions d'utilisation des propulseurs électriques ni de leur nature "tout ou rien". Cette première résolution est réalisée dans le cadre d'un schéma classique d'initialisation d'une technique indirecte de tirs par une technique directe de transcription et permet d'aboutir à une structure d'activation des différents propulseurs. Cette structure ne satisfait généralement pas les différentes contraintes. La seconde étape consiste à affiner le plan de structure obtenu précédemment de manière à satisfaire les différentes contraintes technologiques. Ce travail a été publié dans [61].

Dans une seconde approche [62], nous nous basons sur une modélisation particulière alliant 5 modes de fonctionnement distincts : un mode de propagation libre et quatre modes de propagation forcée par un seul propulseur parmi les quatre. Cette modélisation permet de prendre implicitement en compte la condition (i) d'utilisation des propulseurs électriques. Le problème va ainsi consister à trouver le meilleur agencement de ces différents modes afin de remplir les objectifs de maintien à poste. Pour ce faire, nous avons discrétisé puis formalisé le problème de commande optimale en un problème d'optimisation en nombres entiers. En effet, un choix entre les différents modes doit être opéré sur chaque intervalle de temps. De plus, les conditions (ii) et (iii) se formalisent aisément comme des contraintes en nombres entiers. Avec cette approche par enchaînement de plans hebdomadaires, nous avons pu obtenir des plans de manœuvre annuels. Ce résultat a été néanmoins obtenu grâce à l'inclusion de nouvelles conditions sur l'état final afin d'assurer l'existence d'un plan de manœuvre pour la semaine suivante. Nous avons pu remarquer que certains états de départ, bien qu'appartenant au secteur d'assignation, ne permettent pas de trouver un plan de maintien à poste pour la semaine suivante. La question est alors de savoir comment calculer ou estimer l'ensemble des points de départ assurant l'existence d'un plan qui maintienne le véhicule dans son secteur.

## 2 Axes de recherche à moyen terme

Cette section se propose de dresser la liste des axes qui structureront notre recherche à moyen terme. Certains axes s'inscrivent dans la continuité des travaux en cours et permettent leur approfondissement (paragraphes 2.1, 2.2). Un autre axe (paragraphe 2.3) a pour ambition de généraliser les méthodes présentées dans ce manuscrit en élargissant leur cadre aux systèmes périodiques.

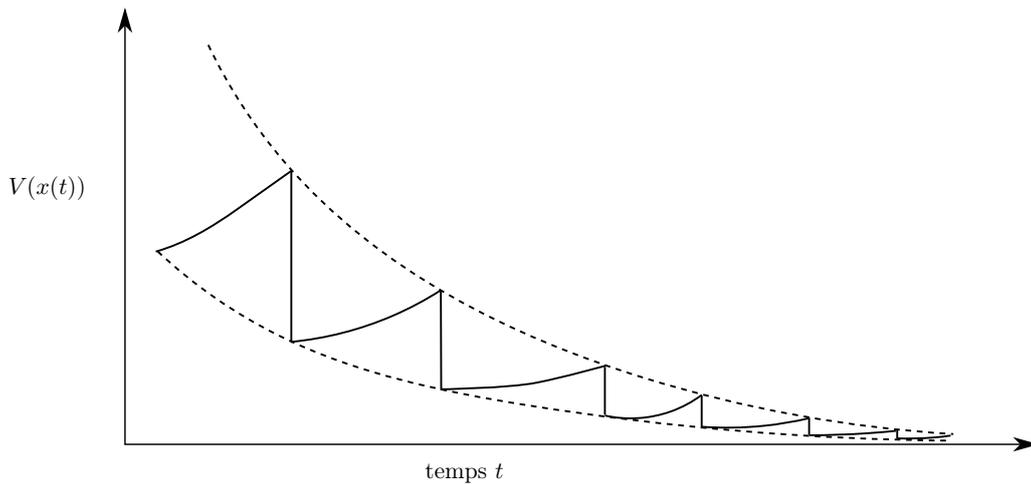


FIGURE 5.9 – Exemple de fonction de Lyapunov admissible dans [32]

## 2.1 Commande hybride et saturée du rendez-vous et robustesse

Au cours des travaux de thèse de L.S. Urbina, nous avons fait l'expérience du formalisme hybride dans le contexte du rendez-vous orbital. Cette approche fournit un cadre d'analyse de stabilité pour les lois de commande impulsionnelle. Ces dernières aboutissent à des résultats probants s'agissant de la convergence dans un contexte de simulation linéaire. Toutefois, nous avons pu observer que l'introduction d'incertitudes dans les simulations dégrade les performances jusqu'à la divergence du système bouclé. C'est notamment le cas pour des états de départs éloignés de l'orbite d'assignation. De plus, nous avons souligné que les erreurs d'exécution de la commande mettent en péril les objectifs de rendez-vous. Dans le chapitre 4, nous avons modélisé ces erreurs et tenté de minimiser leurs effets dans le contexte de la boucle ouverte. Une première perspective de recherche est donc l'étude de la stabilité robuste. Les travaux de C. Briat et A. Seuret [32] proposent des conditions suffisantes caractérisant la période d'appel entre deux commandes assurant la stabilité robuste vis-à-vis d'incertitude sur  $A(t)$  et  $I_k$  (voir équation (5.74)). Ces conditions suffisantes autorisent l'utilisation de fonctions de Lyapunov globalement décroissantes, mais non monotones (éventuellement croissantes lors des phases de propagation libre par exemple) comme sur la figure 5.9. Si la stabilité robuste pour les systèmes impulsionnels donne lieu à une littérature déjà riche (par exemple [111, 110, 45]), il en va de même pour la notion de stabilité robuste des "sample-data systems" pour laquelle une étude bibliographique approfondie peut faire émerger des pistes intéressantes pour notre problème de contrôle de rendez-vous.

Par ailleurs, lors de l'étude soumise à publication [31], l'importance des saturations a été mise en avant. En effet, leur seule présence dans un environnement de simulation linéaire peut déstabiliser le système lorsque la loi de commande demande un effort trop important pour atteindre l'orbite d'assignation. Du point de vue de la stabilité, il est important de pouvoir décrire le bassin d'attraction d'une orbite donnée en présence de saturation des actionneurs. Les travaux de M. Fiacchini *et al.* [58] considèrent ainsi que la commande est déclenchée lorsque l'état vérifie certaines conditions non plus à période donnée :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x & d(x) \leq 0 \\ \Delta x = I_k x & d(x) = 0 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.80)$$

La fonction  $d(x)$  étant choisie quadratique dans ces travaux, l'espace de saut est un ellipsoïde. Leur approche étant basée sur la théorie des ensembles et le principe d'invariance, l'étude [58] cherche à déterminer le plus grand ellipsoïde possible autour de l'état visé assurant sa stabilité asymptotique. Si ces résultats paraissent opportuns au regard du problème posé, il est nécessaire de les adapter au caractère variant dans le temps du système. L'utilisation de la théorie de Floquet-Lyapunov comme dans [30, 31] ne sera pas suffisante, car elle reporte la variation dans le temps de la matrice dynamique vers

la matrice de commande. Ainsi, une étude approfondie est nécessaire pour étendre ces résultats aux systèmes périodiques.

## 2.2 Stabilité et robustesse de l'algorithme de commande prédictive pour le rendez-vous impulsif

L'algorithme de commande prédictive développé dans [1] allie à la fois un faible nombre de données à stocker et des performances numériques intéressantes lorsqu'il est embarqué sur la carte LEON 3. Cependant, plusieurs questions sont laissées en suspens. La première concerne la stabilisation de l'ensemble des orbites périodiques d'intérêt par l'algorithme. Du point de vue de la commande prédictive, des conditions de stabilité portant sur la structure du problème d'optimisation ont été proposées dans [118, 116, 59] et résumées dans [117]. Ces résultats se basent sur l'invariance et la faisabilité récursive du problème d'optimisation. En d'autres termes, la stabilité est assurée si, à chaque appel de la commande, l'espace à atteindre est accessible par le système commandé. Nous posons le problème différemment : le système impulsif bouclé peut-il converger même si l'espace d'arrivée n'est pas atteignable (absence de solutions admissibles) à chaque appel ? Ce problème renvoie aux questions suivantes : quelle décision doit être prise et quelle commande doit être appliquée si ces cas défavorables apparaissent ?

La seconde question concerne la période entre deux commandes consécutives. Dans les travaux précédents sur le rendez-vous, elle a toujours été fixée *a priori*. Cependant, en forçant la fréquence d'appel à la commande, certains phénomènes peuvent apparaître. Par exemple, le système peut fortement perturber sans que leurs effets puissent être rejetés, car la prochaine commande est trop éloignée dans le temps. A contrario, lorsque le système est très proche de l'objectif, la commande sera calculée à mauvais escient : elle aura un coût numérique et sa faible amplitude empêchera sa réalisation par la chaîne de propulsion. Le formalisme hybride est suffisamment souple pour pouvoir considérer tous types de rétroaction, en particulier les lois de commande basées sur un processus d'optimisation sous contraintes. La commande prédictive telle qu'abordée dans nos travaux précédents [2, 1] est généralement non linéaire en fonction de l'état courant et mène à la formulation suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x & (t, x) \notin \sigma \\ \Delta x = I_k(x) & (t, x) \in \sigma \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.81)$$

L'analyse du système (5.81) est en général complexe même si des résultats formels basés sur la théorie de Lyapunov existent [66, théorème 2.1]. Dans le cadre générique des systèmes linéaires périodiques, une piste serait d'exploiter la structuration des solutions (une partie périodique et une partie divergente) pour définir l'ensemble de saut  $\sigma$ .

Un dernier problème ouvert est lié au contexte d'une exécution au sein d'un logiciel de vol. Il est vraisemblable que, suivant les performances de l'algorithme, le nombre d'itérations autorisées à chacun des appels de l'application embarquée soit limité. Dans ce cas, il sera nécessaire de donner une estimation de l'erreur commise sur l'optimum et éventuellement de la satisfaction des contraintes. Un premier travail consiste à analyser les algorithmes d'optimisation non lisse et à développer une démarche de certification *a posteriori* de ces derniers. Nous envisageons l'utilisation de la notion de contraction d'opérateurs pour fournir un encadrement sur la distance entre un itéré courant et la solution optimale, certifiant ainsi l'itéré. La notion de contraction d'opérateurs est tirée de celle utilisée dans les techniques de certification *a posteriori* pour les méthodes de point fixe. Cette démarche passe donc par l'assimilation des techniques exploitées ci-dessus en algorithme de point fixe. Ainsi, il peut s'avérer que notre premier choix d'algorithmes de programmation non lisses est remis en cause au profit d'autres algorithmes plus enclins à être certifiés *a posteriori*. Une analyse plus approfondie de la littérature sur la programmation non lisse est nécessaire afin d'identifier les algorithmes candidats qui offrent le meilleur compromis entre l'efficacité numérique et la possibilité de certification des sorties. Une fois le travail de certification effectué, l'impact des erreurs certifiées sur la qualité de la commande devra être analysé du point de vue de la robustesse.

### 2.3 Analyse des systèmes périodiques et description finie des trajectoires d'intérêt

Le mouvement relatif étudié dans ce manuscrit présente une dynamique linéaire variante dans le temps et périodique. Par conséquent, ses trajectoires se décomposent en une partie périodique et une partie divergente [12, chapitre 2]. Cette propriété de périodicité du mouvement relatif a été exploitée au chapitre 5 de ce manuscrit, mais aussi dans plusieurs travaux présentés précédemment. En outre, les solutions périodiques ont été utilisées pour le maintien à consommation nulle du système dans des sous-régions particulières de l'espace d'état en l'absence de perturbations. Dans différents exemples, les stratégies de commandes ont consisté à éliminer les composantes divergentes de la transition et à façonner la composante périodique qui satisfait un ensemble de contraintes sur l'état.

Les propriétés précédentes sont partagées par de nombreux systèmes naturels ou artificiels. Ainsi, l'idée exposée précédemment peut certainement être appliquée dans divers domaines. Cet objectif demande toutefois un effort particulier de généralisation. Premièrement, une fois le travail de modélisation réalisé, il conviendra d'obtenir la transition d'état. Deuxièmement, il importera d'analyser de cette transition et d'identifier la base fonctionnelle dans laquelle les solutions s'écrivent. Il est à noter que dans le cas des systèmes linéaires, cette base existe. De plus, la théorie de Floquet-Lyapunov devrait aider à reconnaître les modes divergents et les modes périodiques. Troisièmement, il conviendra de caractériser les trajectoires, périodiques ou non, inscrites dans un sous-ensemble linéaire de l'espace d'état. A l'instar du chapitre 5, il semble envisageable d'obtenir ce type de certificat sur la base de positivité de polynômes et des conditions SDP associées. Cependant, nous avons remarqué dans [1] que l'utilisation de conditions algébriques en remplacement des conditions SDP du type [2] est numériquement plus efficace, notamment dans un environnement de calcul limité en capacité. Dans le cas général, l'obtention de ces conditions peut passer par l'analyse des mineures des matrices devant être semi-définies positives. Mais cela génère un grand nombre de conditions qu'il faudra discriminer pour obtenir une description minimale de la géométrie de l'ensemble admissible.

Par ailleurs, l'une des principales difficultés de la démarche décrite ci-dessus est l'obtention de la transition d'état. En effet, dans le contexte d'un modèle linéaire en temps variant, la transition n'est généralement pas connue formellement. Dans ce cas, il est alors nécessaire de posséder *a minima* une approximation certifiée de la transition. Le développement de tels outils utilisant les approximations de Tchebychev de la solution fait l'objet des travaux de thèse de Florent Bréhard encadrée par D. Pons du LIP à l'ENS Lyon et M. Joldes du LAAS-CNRS. A ce jour, une transition certifiée pour le modèle de Tschauner-Hempel a pu être calculée en exploitant sa structure.

## 3 Perspectives de recherche à long terme

Nous concluons ce manuscrit en proposant deux perspectives de recherche à plus long terme. Si ces propositions sont éloignées des travaux précédents, elles permettent une ouverture vers d'autres communautés scientifiques.

### 3.1 Commande optimale par platitude pour les systèmes de grandes dimensions

Lors du projet réalisé avec F. Gouaisbaut pour le compte de l'ESA dans le cadre d'une sous-traitance d'AIRBUS DS [103], nous avons étudié le mouvement d'attitude d'un satellite avec un objectif de temps minimal de transfert. Le modèle du satellite comprenait à la fois les modes de dynamiques rigides liés au bus du satellite, mais aussi les modes dynamiques souples liés aux panneaux solaires. Le modèle dynamique fourni par l'industriel est issu d'un logiciel d'analyse et de calcul mécanique du type PATRAN/NASTRAN. A partir des plans du satellite et grâce à une analyse par éléments finis, ce logiciel génère un modèle dynamique linéaire de la forme :

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = Bu(t) \quad (5.82)$$

où le vecteur  $y(t)$  représente les coordonnées généralisées du modèle aux éléments finis. Ce modèle est notamment utilisé pour l'analyse vibratoire, car il fournit les coefficients de raideur et d'amortissement pour chaque mode souple. On peut remarquer que le modèle (5.82) peut s'écrire sous une forme polynomiale "entrée/sortie" [78] :

$$(Ms^2 + Cs + K)y(t) = A(s) = Bu(t) \quad (5.83)$$

où  $s$  représente l'opérateur de dérivation  $\frac{d}{dt}$ .

Le problème de manœuvre d'attitude a été formalisé comme un problème de commande optimale :

$$\min_{y,u} J(y,u) \quad \begin{cases} A(s)y(t) = Bu(t) & \text{Dynamique} \\ y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = 0, \quad u(t_0) = u_0 & \text{Conditions initiale et finale} \\ y(t_f) = x_f, \dot{y}(t_f) = 0, \quad u(t_f) = u_f \end{cases} \quad (5.84)$$

La méthode de résolution du problème (5.84) a employé la théorie de platitude différentielle pour les systèmes linéaires [96]. Cette approche permet de transformer le problème dynamique en un problème d'optimisation statique. Elle remplace les coordonnées généralisées par un jeu de sorties plates associées au modèle (5.83). De plus, la platitude permet de choisir la base de représentation des trajectoires de sorties plates et par conséquent des états et de la commande. Par exemple, conformément aux méthodes développées dans [119, 120, 102], nous avons opté pour une base de B-splines dans le cadre du projet cité plus haut et ainsi calculé des profils de commande dont l'avantage principal est d'amener les modes souples à ne pas vibrer en fin de parcours et donc d'autoriser une prise de vue très rapidement après la fin de manœuvre. L'inconvénient est que les profils générés sont plus longs en temps que des profils optimaux de type bang-bang. En contrepartie, le temps de tranquillisation des modes souples est beaucoup plus important et représente une part non négligeable du temps optimal de manœuvre.

Ce travail met en lumière plusieurs aspects prospectifs intéressants. Les logiciels de modélisation mécanique ou plus généralement multi-physique utilisent intensivement les techniques éléments finis et savent produire des modèles dynamiques de la forme (5.82). Ces modèles sont généralement de très grandes dimensions (le nombre de coordonnées généralisées peut atteindre plusieurs milliers). Si la littérature sur les outils théoriques d'analyse de dynamique polynomiale existe (voire notamment [130, 78]), les outils numériques libres n'existent pas. Le développement d'une bibliothèque libre répondant au challenge de la grande dimension est un premier objectif. Cette librairie devra permettre l'analyse préalable de la commandabilité et le calcul des sorties plates.

Un second objectif scientifique est lié au problème de l'optimalité des transferts. Après un travail bibliographique sur les études utilisant les propriétés de la platitude différentielle pour la recherche du temps optimal, la base de représentation des sorties devra être déterminée en considérant le nombre de variables à optimiser. Le troisième point concernera l'intégration de la librairie de commande aux outils de modélisation mécanique telle que le logiciel libre HOTINT [63] développé au LCM GmbH de l'université J. Kepler de Linz.

### 3.2 Cinétiques atomistiques et dynamique moléculaire

Ce thème de prospection s'inscrit dans le cadre de l'axe *Espace*, l'un des quatre axes stratégiques du LAAS-CNRS. Il a pour vocation à présenter les activités spatiales du laboratoire et à encourager et développer des synergies internes.

Ainsi, j'ai récemment débuté des discussions avec la chargée de recherche Anne Hemeryck sur ses thèmes de travail, à savoir la cinétique atomistique et la dynamique moléculaire au sein des matériaux. L'objet est d'étudier dans le temps l'effet de contraintes et des conditions extérieures sur la structure des matériaux. Cette branche de la physique peut aider à comprendre les phénomènes de diffusion moléculaires dans le matériau notamment lors de son élaboration. Ces phénomènes peuvent être ou non bénéfiques pour

les caractéristiques du matériau créé comme les alliages de métaux ou les composites de films métalliques minces.

S'il m'incombe dans un premier temps de comprendre les dynamiques moléculaires aux diverses échelles de temps et de dimensions, il pourra être intéressant dans un second temps, d'estimer les conditions, favorables ou non, à la diffusion moléculaire.



# Annexes



---

## Bilan d'activités de maître de conférences

---

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Bref Curriculum Vitae</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>A.2</b>	<b>Activités d'enseignement</b> . . . . .	<b>105</b>
A.2.1	Profil d'enseignement . . . . .	105
A.2.2	Responsabilités d'unités d'enseignement . . . . .	105
A.2.3	Projet d'innovation pédagogique . . . . .	106
<b>A.3</b>	<b>Responsabilité et implication dans la vie de l'université</b> . . . . .	<b>107</b>
<b>A.4</b>	<b>Animation scientifique</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>A.5</b>	<b>Encadrement et production scientifique</b> . . . . .	<b>108</b>
A.5.1	Encadrements doctorales et d'étudiants de Master . . . . .	109
A.5.2	Publications . . . . .	109
<b>A.6</b>	<b>Activités contractuelles</b> . . . . .	<b>111</b>
A.6.1	Liste des projets . . . . .	111
A.6.2	Rapports d'activités contractuelles . . . . .	112

---

Cette annexe présente un bilan d'activités. Elle constitue une synthèse des activités d'enseignement et de la production scientifique. Rédigé à la première personne à la manière d'un Curriculum Vitae, il recense en particulier les encadrements, publications, participations à des projets et autres faits marquants de notre activité scientifique.

## A.1 Bref Curriculum Vitae

### Etat civil

---

Christophe LOUEMBET - 36 ans (1<sup>er</sup> août 2016) marié 3 enfants

### Situation actuelle

---

Maître de Conférences de classe normale (5<sup>eme</sup> échelon) en 61<sup>eme</sup> section recruté en septembre 2008 par l'Université Paul Sabatier (UPS) - Toulouse III, Faculté des Sciences de l'Ingénieur.

Recherche effectuée au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), UPR 8001 dans le groupe Méthodes et Algorithmes pour la Commande (MAC).

### Mots clés

---

Recherche	Automatique, Commande de systèmes, Systèmes spatiaux, Méthodes directes et indirectes pour la commande optimale, Commande prédictive
Enseignement	Automatique des systèmes linéaires (Approche fréquentielle, Espace d'état), Commande optimale

### Formation

---

2007	<p>Doctorat en Automatique de l'Université de Bordeaux I, spécialité : Automatique, sous la direction d'Ali Zolghadri            IMS – Bordeaux  <b>titre</b> : <i>Génération de trajectoires optimales pour systèmes différentiellement plats</i></p>
2004	Diplôme d'Ingénieur de l'ESTACA (Levallois-Perret, France)
2004	Diplôme d'études Approfondies (DEA) en Automatique de l'Université Technologique de Compiègne

---

## A.2 Activités d'enseignement

Je suis en poste à l'Université Paul Sabatier depuis septembre 2008. Hormis la première année (2008 – 2009) durant laquelle j'ai bénéficié d'une décharge de 64 heures équivalentes à des heures d'enseignement de travaux dirigés (HTD), je me suis acquitté chaque année de mon service statutaire. L'ensemble de mon service a été effectué dans le cadre de la 61<sup>e</sup> section et de mon département d'affectation, EEA (Electronique, Electrotechnique, Automatique).

### A.2.1 Profil d'enseignement

Les données présentées dans ce paragraphe se rapportent aux années universitaires 2011 – 2012 à 2015 – 2016 (seules années disponibles à ce jour sur le serveur de l'Université). J'ai été en présence des étudiants en moyenne 201 heures annuellement pour environ 214 HTD (cf. le graphe A.2a). Ainsi, mon service annuel compte en moyenne 22 HTD d'heures complémentaires. Ces heures complémentaires s'expliquent notamment par les besoins importants en Automatique de mon département d'affectation, EEA, en seconde et troisième année de Licence.

Sur la période 2011-2016, mon profil d'enseignement se compose de travaux pratiques à près de 55% et de travaux dirigés à plus de 25%. J'ai dispensé mes premiers cours magistraux lors de l'année 2012 – 2013 en automatique et mon service s'est depuis équilibré entre les différents postes d'enseignements (cf. le graphe A.2b). Mon service se compose à plus de 75% d'enseignements en automatique (cf. figure A.1a) réalisés entre la deuxième année de Licence à la seconde année de Master. Les autres enseignements réalisés comportent un enseignement au niveau L3 en *Techniques matricielles et analyse numérique linéaire*, et un enseignement un niveau L2 d'assistance aux étudiants dans la construction de leur projet professionnel intitulé *Projet Professionnel*.

Mes interventions sont essentiellement réalisées en Licence (deuxième et troisième années) pour répondre aux forts besoins d'heures à ce niveau (voir figure A.1b). En effet, les promotions de L2 et L3 ont connu une forte augmentation de leur effectifs (environ 180 en Licence 2, commune à 3 départements et environ 90 en Licence 3 EEA). Les enseignements de Master comptent pour un tiers de mon service global. Au sein du Master EEA, il s'agit d'automatique et de commande avancée pour la filière de formation ISTR, *Ingénierie des Systèmes Temps Réel*. Cette filière forme les étudiants aux thèmes de l'automatique, des systèmes numériques et de l'informatique industrielle et/ou embarquée.

Enfin, depuis septembre 2016, je suis en délégation au CNRS pour une période d'un an. Ainsi, je dispose d'une décharge complète d'enseignement pour l'année universitaire 2016-2017.

### A.2.2 Responsabilités d'unités d'enseignement

Je suis responsable de trois Unités d'Enseignement (UE) depuis la rentrée 2010-2011 :

- Master 1 EEA : 2010-2016, Systèmes Linéaires Invariants : Espace d'état et Observation (30-45 étudiants; ce module concerne d'autres parcours que ISTR de façon optionnelle)
- Master 1 EEA/ISTR : 2010-2016, Initiation à la recherche (25-35 étudiants)
- Master 2 EEA/ISTR : 2010-2016, Optimisation et Méthodes numériques (10-15 étudiants)

Les UE *Systèmes Linéaires Invariants* et *Optimisation et Méthodes numériques* sont des modules classiques composés d'un cours magistral et de séances de travaux dirigés et pratiques. Pour ces modules, la responsabilité consiste à former l'équipe pédagogique (4 à 6 intervenants pour l'UE *Systèmes Linéaires Invariants*), valider l'emploi du temps, réserver les moyens pour les travaux pratiques, établir le procès-verbal et organiser le jury de module.

L'unité d'enseignement *Initiation à la recherche* est différente puisqu'elle désigne le module de projet semestriel des étudiants du Master EEA. Ma responsabilité se limite aux étudiants du parcours ISTR (25 à 35 étudiants) de la formation EEA toulousaine. Dans un premier temps, je dois collecter et compiler

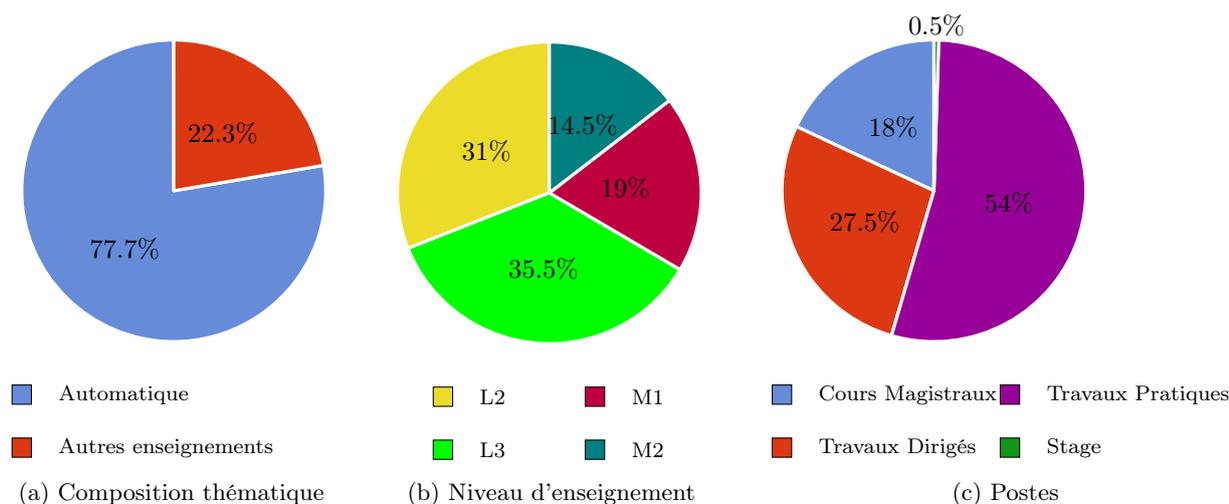


FIGURE A.1 – Composition du service effectué sur la période 2011-2016 en HTD

une quinzaine de sujets de projet auprès des enseignants intervenant dans la formation. Il convient alors de veiller à ce que les sujets couvrent de manière équilibrée l'ensemble des thématiques du parcours. Dans un second temps, je répartiss les étudiants en groupes de projet, leur présente la démarche de projet et les sujets, et leur attribue les projets. Pour ce dernier point, j'essaie de respecter les souhaits des groupes formés et les avis de l'équipe enseignante. En fin de projet, il faut s'assurer de la bonne soumission des rapports de projets, et trouver, parmi l'équipe enseignante, des rapporteurs non liés au projet mais ayant suffisamment de compétences pour sanctionner équitablement le document. Enfin, il faut organiser les soutenances à la manière d'un séminaire scientifique et animer les délibérations du jury sur les présentations orales des étudiants. Il est à noter que ces soutenances sont promues au sein des formations L2 et L3 EEA afin que les étudiants puissent envisager davantage les perspectives de notre parcours de formation. De mon point de vue, la responsabilité de ce module ressemble à un travail éditorial au sein d'une communauté scientifique.

### A.2.3 Projet d'innovation pédagogique

Depuis mon entrée en fonction, j'ai participé à plusieurs projets de création de contenus pédagogiques en ligne pour la formation en autonomie des étudiants de niveau Licence. En coordination avec le Service Universitaire de Pédagogie (SUP), des ressources pédagogiques ont été créées sur la plateforme MOODLE de l'université Paul Sabatier. Ces ressources sont utilisées à la fois comme outils d'évaluation mais aussi comme outils de formation. Parmi ces ressources, deux projets de plus grande envergure peuvent être mis en exergue.

Le premier projet répondait à un appel à idées financé par le SUP en 2010. Il s'agissait de produire un jeu didactique ("serious game") à l'intention des étudiants en automatique de L2. F. Gouaisbaut, J-C. Pascal et moi-même avons défini, au travers d'un cahier des charges, un jeu et ses objectifs pédagogiques. La réalisation a été prise en charge par une entreprise tiers que nous avons suivie pendant 18 mois jusqu'à la mise en *production*. Nous avons ensuite créé une ressource accompagnant le produit fini afin de l'intégrer aux travaux pratiques.

Le second projet, dont j'ai été le coordinateur, répondait à un appel à projets du SUP, *Innovations Pédagogiques*, en 2012. Il a été réalisé conjointement avec S. Durola et F. Gouaisbaut. Il consistait à développer une ressource interactive permettant aux étudiants de tous niveaux (L2 et L3 principalement visés) de se former en autonomie à la résolution des équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Ce projet a duré 18 mois et a abouti à la mise en ligne de la ressource <http://moodle>.

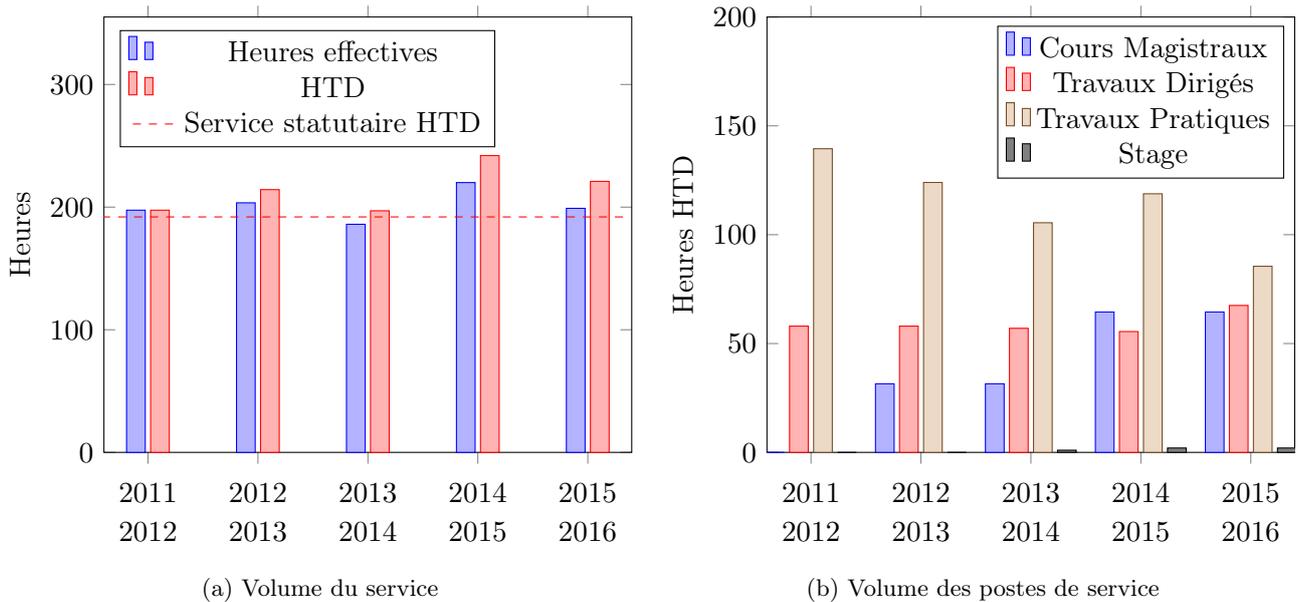


FIGURE A.2 – Evolution du service sur la période 2011-2016

[univ-tlse3.fr/course/view.php?id=1046](http://univ-tlse3.fr/course/view.php?id=1046).

### A.3 Responsabilité et implication dans la vie de l'université

Depuis septembre 2013, je suis membre élu du collège scientifique 61 – 63 de l'Université Toulouse 3. Le collège m'a nommé au sein de la commission de recrutement des Attachés Temporaires d'Enseignement et de Recherche (ATER). De plus, je me suis porté volontaire pour faire partie du groupe d'avancement (GA) des sections CNU 60 à 64 pour le collège B. Ce GA évalue et donne un avis sur les dossiers d'avancement de carrière des enseignant-chercheurs, tels que la titularisation et le passage hors-classe des maîtres de conférences (Mcf). Dans un contexte de réduction du nombre de postes de professeur des universités ouverts au concours, le passage à l'échelon hors-classe est une voie d'avancement de carrière de plus en plus privilégiée pour les maîtres de conférences. Ainsi, le GA a pu constater une augmentation sensible du nombre de dossiers déposés. Ce fait coïncide avec la diminution de l'âge des candidats lors de leurs primo-candidatures : en effet, les candidats déposent leurs candidatures dès leurs passage au 7<sup>e</sup> échelon. Cela souligne toute l'importance de cette commission dans laquelle je souhaite continuer à m'investir si je suis réélu au sein du collège scientifique. Enfin, j'ai été mandaté par le collège pour constituer le comité de recrutement des maîtres de conférences au sein d'un comité *ad hoc* lors de la campagne de recrutement 2016.

Par ailleurs, je suis membre élu du Comité de Pôle MSTII depuis le dernier renouvellement opéré fin 2015. Je participe ainsi à l'ensemble des travaux du comité, comme l'évaluation et le classement des dossiers de CRCT (Congé pour Recherche et Changement Thématique), l'attribution des dotations de l'Université à ses laboratoires affiliés, l'arbitrage sur les demandes de moyens des laboratoires (postes de professeurs invités, recrutement de personnels, ...) avant qu'elles ne soient remontées et attribuées par le Conseil Scientifique de la Faculté des Sciences et de l'Ingénierie. Aussi, je me suis porté volontaire pour représenter le Comité de Pôle au Conseil Scientifique de la Faculté des Sciences et de l'Ingénierie en tant que suppléant de Patrice Bacchin, responsable du comité.

## A.4 Animation scientifique

Dans un second temps je me suis impliqué dans l'animation scientifique de mon laboratoire. Depuis septembre 2012, je suis membre du conseil scientifique du département Décision et Optimisation (DO). Au sein de ce conseil, je suis responsable de l'animation scientifique et des séminaires depuis la fin 2013. Le travail consiste en une veille scientifique afin de recenser et organiser les séminaires de chercheurs dont les travaux sont susceptibles d'intéresser l'ensemble des 3 équipes de recherche qui composent le département DO. La page web <https://www.laas.fr/public/fr/séminaires-do> recense l'ensemble des séminaires du département. A ce titre, je fais partie du comité d'organisation des *LAAS R&T Conferences* qui sont les séminaires de "prestige" du LAAS (voir la page web <https://www.laas.fr/public/fr/laas-research-technology-fr>).

Depuis le début de l'année 2017, je suis délégué scientifique adjoint de l'axe stratégique Espace du LAAS. Ce nouvel axe stratégique lancé début 2017 et qui est sous la responsabilité du Directeur de Recherche au CNRS Olivier Llopis fédère l'ensemble des activités du LAAS en lien avec la thématique spatiale. Cet axe est un fort enjeu pour le laboratoire. En effet, plus d'une cinquantaine de thèses ont été soutenues et une quarantaine de projets ont été financés sur ces thèmes. Les objectifs de cet axe sont multiples. L'un de ceux-ci est d'accroître la visibilité du LAAS-CRS dans ce domaine en développant des outils de communication adéquats et en représentant les intérêts du laboratoire dans les différentes instances régionales telles que le pôle de compétitivité AerospaceValley, l'IRT, La fondation RTRA-STAE, les Communautés de Compétences Techniques (CCT) du CNES, etc. Un second objectif est d'imprimer une dynamique scientifique en encourageant les rencontres entre les chercheurs impliqués les thématiques spatiales. Nous espérons ainsi faire émerger des axes de nouveaux travail thématiques ou interdisciplinaires. Enfin, l'axe se devra aussi de soutenir les initiatives scientifiques et technologiques qui naîtront de ces interactions.

Depuis 2010, je suis membre du bureau CCT SCA (Systèmes de Commande et Automatique) du CNES. En tant que membre de ce bureau, je participe au dialogue entre le milieu académique et les industriels du secteur. Notamment, nous échangeons sur les sujets scientifiques pouvant avoir des répercussions positives chez les industriels tandis que ces derniers exposent leur problématiques technologiques. De plus, le bureau a vocation à animer la communauté en organisant des séminaires réguliers dont le programme annuel est discuté en bureau. Dans ce contexte j'ai pu organiser plusieurs séminaires :

- Workshop sur les Outils et méthodes d'optimisation sur le GNC, [http://homepages.laas.fr/clouembe/documents/optimisation\\_workshop\\_SCAORB.pdf](http://homepages.laas.fr/clouembe/documents/optimisation_workshop_SCAORB.pdf) ;
- Workshop on Advances in Space Rendezvous Guidance, [http://homepages.laas.fr/clouembe/rdv\\_workshop.html](http://homepages.laas.fr/clouembe/rdv_workshop.html) ;
- Workshop sur les missions vers les astéroïdes, <http://cct.cnes.fr/content/cct-sca-orb-mission-ast%C3%A9ro%C3%AFde>
- Workshop on Hybrid Dynamical Systems Control and Applications 19-20 Juin 2017, <http://cct.cnes.fr/content/sca-hybrid-dynamical-systems-control-and-applications> ;

## A.5 Encadrement et production scientifique

Nous faisons le bilan de l'activité de recherche en termes d'encadrement, de publications et d'activités contractuelles.

### A.5.1 Encadrements doctorales et d'étudiants de Master

#### Thèses de Doctorat

**Mounir Kara-Zaitri** (Thèse soutenue le 17 novembre 2010, durée de trois ans, co-encadrée par D. Arzelier, HDR, A. Théron)

Modélisation et guidage robuste et autonome pour le problème du rendez-vous orbital.

J'ai participé à l'encadrement de cette thèse dès mon arrivée dans le laboratoire en 2008. Cela s'est notamment traduit par la co-signature de plusieurs articles dont les références [J3, J5, C2, C3].

**Georgia Deaconu** (Thèse soutenue le 29 octobre 2013, durée de trois ans, encadrée avec prise de dérogation avec la participation d'A. Théron à 20%)

On the trajectory design, guidance and control for spacecraft rendezvous and proximity operations. G. Deaconu a reçu le prix Amelia Earhart de l'association Zonta.

**Laura Sofia Urbina-Iglesias** (Soutenance prévue au 1er semestre 2017, thèse encadrée à 50% avec D. Arzelier, HDR)

Méthodes de Guidage/Contrôle robuste pour la phase d'approche entre deux véhicules orbitaux avec couplage des mouvements de translation et de rotation.

**Clément Gazzino** (Soutenance prévue en décembre 2017, thèse encadrée à 50% avec D. Arzelier, HDR)

Stratégie de Maintien à poste pour satellite géostationnaire par commande prédictive.

**Paulo Ricardo Arantes-Gilz** (Soutenance prévue en octobre 2018, thèse encadrée à 50% avec M. Joldes qui bénéficie d'une dérogation)

Validated and onboarded Impulsive Spacecraft Rendezvous Algorithm.

#### Stages de Master

**Cédric Leboucher** Juin-Octobre 2009, 2<sup>e</sup> année Ingénieur, EISTI.

Mise en place d'un outil de génération de perturbations sur un satellite dans le cadre de rendez-vous spatiaux.

**Daniel Dolz Algaba** Juin-Septembre 2010, 2<sup>e</sup> année Ingénieur, INSA.

Analyse de performances de solveurs d'optimisation linéaire pour le rendez-vous orbital.

**Supatcha Chaimatanan** Avril-Septembre 2010, 3<sup>e</sup> année ISAE ENSICA, co-encadrée à 50% : D. Arzelier.

Generation of Robust-Optimized Impulsive Trajectory for Orbital Rendezvous.

**Cordelia Robinson** Avril-Septembre 2011 (M2P Ingénierie Mathématique, Univ. Toulouse 3), co-encadrée à 50% avec D. Arzelier.

Mise en oeuvre d'un algorithme de rendez-vous orbital sous hypothèses de poussées impulsives.

**Alessia Cristaldi** Octobre 2013-Juin 2014, M2 Univ. Tor Vergata Rome Italie, co-encadrée à 50% avec D. Arzelier.

Trajectory control for spacecraft rendezvous using MPC et LQG techniques.

**Paulo Ricardo Arantes Gilz** Mars-Juillet 2014, 3<sup>e</sup> année ingénieur ENSTA.

Contrôle impulsif pour une classe de systèmes linéaires à temps variant.

**Bruno Benetti** Février-Aout 2015, 3<sup>e</sup> année ingénieur ENSHEEIT.

Analysis of an Impulsive Control Strategy for Time-Variant Linear Systems.

### A.5.2 Publications

#### Articles de Journaux à comités de lecture

- J1 C. Louembet, F. Cazaurang, A. Zolghadri, C. Pittet, and C. Charbonnel. "Path planning for satellite slew maneuvers : a combined flatness and collocation based approach", *IET Control Theory &*

*Applications*, 3(4), 2009

- J2 C. Louembet, F. Cazaurang, A. Zolghadri, C. Pittet, and C. Charbonnel. "Génération de trajectoire d'attitude sur orbites : approche par platitude et collocation", *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 44(1), 2010.
- J3 C. Louembet, F. Cazaurang, A. Zolghadri. "Motion planning for flat systems using positive B-splines :An LMI approach", *Automatica*, 46 , pp. 1305-1309, 2010.
- J4 D. Arzelier, M. Kara-Zaitri, C. Louembet, A. Delibasi. "Using polynomial optimization to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* , 34, pp 1567-1572, 2011.
- J5 D. Henrion, C. Louembet. "Convex inner approximations of nonconvex semialgebraic sets applied to fixed-order controller design", *International Journal of Control* , 85(8), pp 1083-1092, 2012.
- J6 D. Arzelier, C. Louembet, A. Rondepierre, M. Kara-Zaitri. "A New Mixed Iterative Algorithm to Solve the Fuel-Optimal Linear Impulsive Rendezvous Problem", *Journal of Optimization Theory and Applications* 159(1), pp 210-230, 2013.
- J7 G Deaconu, C. Louembet and A. Théron. "Minimizing the effects of the navigation uncertainties on the spacecraft rendezvous precision", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No. 2 (2014), pp. 695-700.
- J8 C. Louembet, D. Arzelier and G. Deaconu. "Robust rendezvous planning under Maneuvering errors", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* , Vol. 38, No. 1 (2015) pp. 76-93.
- J9 G. Deaconu, C. Louembet and A. Théron. "Designing continuously constrained spacecraft relative trajectories for proximity operations", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 38, No. 7 (2015), pp. 1208-1217.

#### Articles en conférences avec actes

- C1 C. Charbonnel, C. Louembet, F. Cazaurang, A. Zolghadri. "Satellite attitude trajectory planning using the flatness framework ", *7th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems*, Tralee, County Kerry, Ireland, June 2008.
- C2 C. Louembet, M. Kara-Zaitri, D. Arzelier, A. Théron. "Solving fuel-optimal orbital homing problem with continuous thrust using direct methods", *International Symposium on Space Flight Dynamics*, Toulouse, France, September 2009.
- C3 M. Kara-Zaitri, D. Arzelier, C. Louembet, A. Théron. "Solving fuel-optimal impulsive rendezvous problem using primer vector theory and real algebraic geometry ", *International Symposium on Space Flight Dynamics*, Toulouse, France, September 2009.
- C4 D. Henrion, C. Louembet. "Convex inner approximations of nonconvex semialgebraic sets applied to fixed-order controller design", *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Budapest, Hungary, 5-9 July 2010
- C5 M. Kara-Zaitri, D. Arzelier, A. Delibasi, C. Louembet, "Mixed Iterative Algorithm For Solving Optimal Impulsive Time-Fixed Rendezvous problem", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Toronto, Ontario, Canada, August 2010.
- C6 M. Kara-Zaitri, D. Arzelier, A. Delibasi, C. Louembet, "Polynomial optimization for the solution of fuel-optimal impulsive rendezvous using primer vector theory", *49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA, December 2010.
- C7 C. Louembet, D. Arzelier , G. Deaconu and P. Blanc-Paques. "Robust Rendezvous Planning under Navigation and Maneuvering Errors", *8th ESA International Conference on Guidance, Navigation and Control System*, Carlsbad Czech Republic, 2011.

- C8 C. Louembet, G. Deaconu. "Collision Avoidance in Low Thrust Rendezvous Guidance Using Flatness and Positive B-Splines", *30th American Control Conference (ACC)*, San Francisco, USA, 2011.
- C9 G. Deaconu, C. Louembet, A. Théron. "Constrained periodic spacecraft relative motion using non-negative polynomials", *31st American Control Conference (ACC)*, Montreal, Quebec, Canada, 2012.
- C10 G. Deaconu, C. Louembet, A. Théron. "Sécurisation passive du rendez-vous orbital par des polynômes non négatifs", *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA2012)*, Grenoble (France), 4-6 Juillet 2012, pp.811-816
- C11 G. Deaconu, C. Louembet, A. Théron. "A two-impulse method for stabilizing the spacecraft relative motion with respect to a periodic trajectory", *51st IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, 2012.
- C12 J.C.Berges, A.Cristaldi, C.Louembet, P.R.Arantes Gilz, D.Arzelier. "Robust rendezvous planning using model predictive control : some results from research and technological studies", *International ESA Conference on Guidance, Navigation & Control Systems*, Porto, Portugal, 2014.
- C13 P.R.Arantes Gilz, C.Louembet. "Predictive control algorithm for spacecraft rendezvous hovering phases", *European Control Conference*, Linz, Austria, 2015.
- C14 M.Brentari, D.Arzelier, C.Louembet, L.Zaccarian. "A hybrid control framework for impulsive control of satellite rendezvous", *American Control Conference*, Boston, USA, 2016.
- C15 D.Arzelier, F.Brehard, N.Deak, M.M.Joldes, C.Louembet, A.Rondepierre, R.Serra. "Linearized impulsive fixed-time fuel-optimal space rendez-vous : a new numerical approach", *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Sherbrooke, Canada, 2016.
- C16 Y.Ariba, D.Arzelier, L.Urbina Iglesias, C.Louembet. "V-bar and R-bar Glideslope guidance algorithms for fixed-time rendez-vous : a linear programming approach", *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Sherbrooke, Canada, 2016.
- C17 C.Gazzino, D.Arzelier, D.Losa, C.Louembet, C.Pittet, L.Cerri. "Optimal control for minimum-fuel geostationary station keeping of satellites equipped with electric propulsion", *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Sherbrooke, Canada, 2016.
- C18 C.Gazzino, C.Louembet, D.Arzelier, N. Jozefowicz, D.Losa, C.Pittet, L.Cerri. "Integer Programming for Optimal Control of Geostationary Station Keeping of Low-Thrust Satellites", *20th IFAC World Congress*, Toulouse, France, 2017.
- C19 P.R. Arantes-Gilz, M.M. Joldes, C.Louembet. "Model predictive control for rendezvous hovering phases based on a novel description of constrained trajectories", *20th IFAC World Congress*, Toulouse, France, 2017.

## A.6 Activités contractuelles

Les activités en relation avec l'industrie représentent une part importante de mon activité de recherche. Cette activité s'est concrétisée par ma participation active à plusieurs projets listés ci-après.

De plus, je participe depuis 2014 au projet ANR FASTRelax coordonné par Bruno Salvy du LIP à l'ENS Lyon.

### A.6.1 Liste des projets

- Projet ESA ITI : Optimal guidance and control for flexible and maneuvering spacecraft. Coordinateur LAAS : Christophe Louembet. Avec la participation au LAAS de F. Gouaisbaut.
- Projet R&T CNES 71372/00. Guidage autonome et robuste pour le rendez-vous orbital en orbite elliptique, Période : 12/2007-12/2009. Coordinateur LAAS : D. Arzelier (LAAS-CNRS). Avec la

- participation de Alain Theron (LAAS-CNRS), C. Louembet (LAAS-CNRS), S. Kerambrun (Astrium), P. Blanc-Paques (Astrium), H. Charbonnel (Astrium ST), E. Gogibus (Astrium ST).
- Projet R&T CNES 104057/00. Optimisation linéaire pour le rendez-vous orbital en vue d'embarcation sur ordinateur de bord. Période : 09/2010 - 03/2011. Coordinateur LAAS : D. Arzelier (LAAS-CNRS). Avec la participation de C. Louembet (LAAS-CNRS), N. Jozefowicz (LAAS-CNRS), P. Lopez (LAAS-CNRS), J.C. Berges (CNES).
  - Projet R&T CNES 104148/00. Algorithme de guidage robuste pour le rendez-vous orbital. Période : 2010-2012. Coordinateur LAAS : D. Arzelier (LAAS-CNRS). Avec la participation de C. Louembet (LAAS-CNRS), A. Falcoz (Astrium), J.C. Berges (CNES).
  - Projet R&T CNES 130841. avec le support de Thales Alenia Space et la Région Midi-Pyrénées. Commande robuste et optimale pour le mouvement en 6 degrés de liberté pour les opérations spatiales de proximité. Période : 07/2013 – 11/2015. Coordinateur LAAS : D. Arzelier. Avec la participation de C. Louembet (LAAS-CNRS), S. Urbina (LAAS-CNRS), D. Losa (TAS), J.C. Berges (CNES).
  - Projet ANR : FASTRelax. Période : 11/2014 – 11/2018. Coordinateur LAAS : Mioara Joldes. Avec la participation au LAAS de D. Henrion et C. Louembet.

### A.6.2 Rapports d'activités contractuelles

- R1 D. Arzelier, C. Louembet, A. Théron. "Etude bibliographique sur le problème du rendez-vous". Rapport LAAS-CNRS N°08552, Convention ASTRIUM/CNES/LAAS-CNRS R-S07/VF-0001-065, 71372/00, 93 pages, Novembre 2008.
- R2 D. Arzelier, C. Louembet, A. Théron. "Deux algorithmes pour le problème du rendez-vous impulsif". Rapport LAAS-CNRS N°09638, Convention ASTRIUM/CNES/LAAS-CNRS R-S07/VF-0001-065, 71372/00, 87 pages, Novembre 2009.
- R3 D. Arzelier, N. Jozefowicz, P. Lopez C. Louembet. "Etude bibliographique sur la programmation linéaire". Rapport LAAS-CNRS N°11124, Convention 104057/00, 85 pages, Mars 2011.
- R4 D. Arzelier, N. Jozefowicz, P. Lopez C. Louembet. "Evaluation des performances des solveurs de programmation linéaire sur le problème du rendez-vous orbital impulsif". Rapport LAAS-CNRS N° 11605, Convention 104057/00, 43 pages, Mar 2011.
- R5 D. Arzelier, C. Louembet. "Algorithmes de guidage en rendez-vous sous contraintes d'incertitudes et d'erreurs par programmation convexe robuste". Rapport LAAS-CNRS N°12359, EADS-Astrium/LAAS-CNRS/CNES R-S07/VF-00001-065 Convention CNES N°71372/00, 126 pages, Juillet 2012.
- R6 D. Arzelier, C. Louembet, A. Rondepierre. "Algorithme indirect mixte pour le problème du rendez-vous". Rapport LAAS-CNRS N°2433, EADS-Astrium/LAAS-CNRS/CNES R-S07/VF-00001-065 Convention CNES N°71372/00, 104 pages, Juillet 2012.
- R7 D. Arzelier, C. Louembet, P. Arantes-Gilz, L.S. Urbina. "Méthode de survol pour le rendez-vous orbital". Rapport LAAS-CNRS N°15409, LAAS-CNRS/CNES R-S13/BS-0005-014 Convention CNES N°130841/00, 104 pages, Novembre 2015.
- R8 C. Louembet, F. Gouaisbaut. "Optimal guidance and control for flexible and maneuvering spacecraft". Rapport LAAS-CNRS N° 16247, Contrat AIRBUS DS 4500543955, 26 pages, Juillet 2016.

---

# Eléments de modélisation du mouvement relatif

---

## Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>114</b>
<b>B.2</b>	<b>Mouvement képlérien de la cible</b>	<b>114</b>
<b>B.3</b>	<b>Mouvement relatif cartésien</b>	<b>116</b>
B.3.1	Représentation sous forme d'espace d'état	118
B.3.2	La matrice de transition d'état	118

---

## B.1 Introduction

Le mouvement relatif entre satellites fait référence à l'étude de la dynamique d'un satellite, désigné par le terme de *chasseur*, vis-à-vis d'un autre satellite en orbite, appelé *cible*. Afin de décrire complètement ce mouvement relatif, il est nécessaire de caractériser à la fois le mouvement inertiel du véhicule cible puis le mouvement du chasseur vis-à-vis de cette cible. Ces deux mouvements peuvent être représentés de différentes manières, chaque représentation ayant ses propres avantages. Nous faisons le choix de représenter le mouvement de la cible au travers de ses paramètres orbitaux, présentés dans la section B.2, et le mouvement du chasseur relativement à la cible de manière cartésienne. Les développements de ce chapitre fournissent une représentation adaptée au problème que nous souhaitons traiter dans un cadre de mécanique képlérienne.

## B.2 Mouvement képlérien de la cible

La dynamique képlérienne d'un satellite à la Terre décrit son mouvement dans le champ de gravité terrestre composé uniquement du terme d'attraction centrale. Cette dynamique est issue du principe fondamental de la dynamique :

$$\left( \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_{B_0} = - \frac{\mu}{\|\vec{R}\|^3} \vec{R} \quad (\text{B.1})$$

où  $\vec{R}$  représente le vecteur partant du centre de la Terre en direction du centre de masse du satellite et  $\mu$  la constante gravitationnelle terrestre. La dynamique est exprimée par rapport dans le repère inertiel géocentrique  $B_0 = (0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  illustré à la figure B.1. Le plan fondamental  $B_0$  est le plan équatorial de la Terre. L'axe  $\vec{Z}$  coïncide avec l'axe de rotation de la Terre et est orienté vers le pôle Nord. L'axe  $\vec{X}$  passe par le point vernal et l'axe  $\vec{Y}$  est orthogonal au plan  $\vec{X}\vec{Z}$ .

L'équation différentielle (B.1) décrivant la dynamique entre les deux corps est non linéaire. Cependant, elle admet une solution générale analytique [13]. Les constantes d'intégration associées aux solutions sont appelées *éléments orbitaux* du mouvement du satellite et sont importantes dans l'étude des propriétés des trajectoires.

On désigne par plan orbital le plan qui contient la trajectoire du satellite en orbite (voir Figure B.1). L'équation de la trajectoire du satellite exprimée en fonction des coordonnées polaires par rapport à ce plan est donnée par [13] :

$$R = \|\vec{R}\| = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{B.2})$$

où  $a$  est le demi-grand axe de l'orbite,  $e$  est l'excentricité et  $\nu$  est l'anomalie vraie. L'orbite du satellite est bornée si  $e < 1$  et non bornée si  $e \geq 1$ . Pour  $e = 0$  la trajectoire du satellite est un cercle de rayon  $a$  et pour  $0 < e < 1$  la trajectoire est une ellipse. L'anomalie vraie  $\nu$  représente l'angle entre la position courante du satellite et la direction du périégée (Figure B.1).

Les paramètres  $a$  et  $e$  définissent la dimension et la forme de l'orbite du satellite, tandis que  $\nu$  indique la position instantanée du satellite dans son orbite. Trois autres quantités sont nécessaires pour définir l'orientation spatiale du plan orbital et caractériser complètement la trajectoire du satellite. Un choix usuel est  $i$ ,  $\Omega$  et  $\omega$ , trois angles définis par rapport au plan équatorial terrestre, comme indiqué sur la figure B.1.

La *ligne des nœuds* dénote l'intersection entre le plan orbital du satellite et le plan équatorial. Le *nœud ascendant* fait référence au point où le satellite croise la ligne des nœuds vers le nord. La *longitude du nœud ascendant*,  $\Omega$ , est l'angle entre l'axe  $X$  du repère  $R_0$ . Le nœud ascendant, l'*argument du périégée*,  $\omega$ , est l'angle entre le nœud ascendant et le périégée tandis que l'*inclinaison*,  $i$ , est l'angle entre le plan orbital et le plan équatorial.

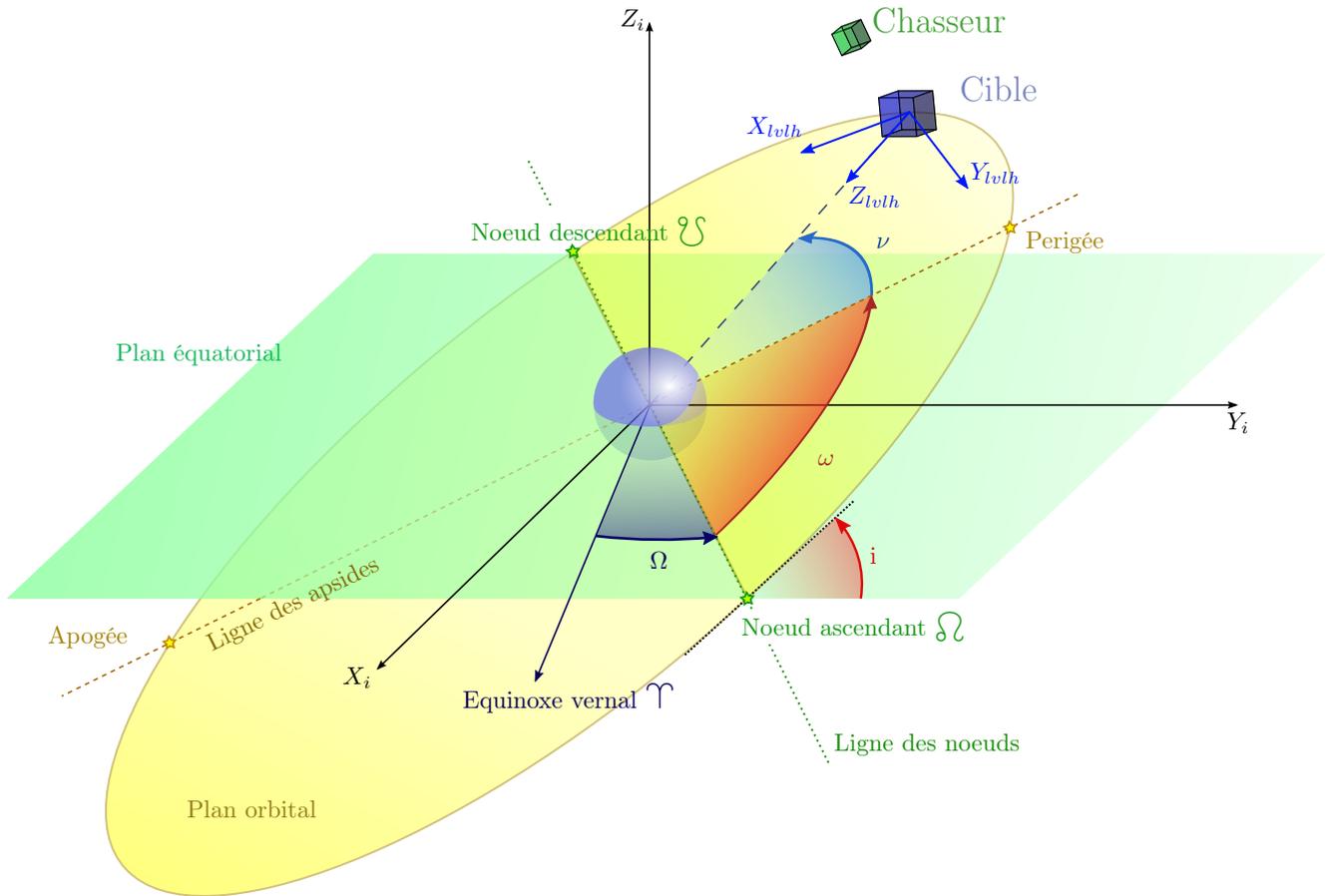


FIGURE B.1 – Le repère inertiel géocentrique et définition des éléments orbitaux classiques

L'ensemble des éléments orbitaux est défini par :

$$oe = [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ \nu]^T. \quad (\text{B.3})$$

Il décrit complètement l'état d'un satellite évoluant sur une orbite autour de la Terre. Sous hypothèses képlériennes, les cinq premiers paramètres sont constants, et, seule l'anomalie vraie évolue en fonction du temps [13] :

$$\dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}} (1 + e \cos \nu)^2 \quad (\text{B.4})$$

Il est possible de remplacer, dans le vecteur des éléments orbitaux, l'anomalie vraie,  $\nu$ , par l'anomalie excentrique,  $E$ , ou l'anomalie moyenne,  $M$ . L'anomalie excentrique et la vraie anomalie sont liées par des transformations géométriques représentées sur la figure B.2 :

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (\text{B.5})$$

tandis que l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne sont liées par l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E = M_0 + n(t - t_0) \quad (\text{B.6})$$

D'après (B.6), l'anomalie moyenne peut être définie comme une fonction linéaire du temps, où  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  est le mouvement moyen du satellite,  $t_0$  est le temps de référence et  $M_0$  l'anomalie moyenne à  $t_0$ .

Il faut noter que dans le cas d'orbite circulaire ou quasi circulaire ( $e \approx 0$ ) ou dans le cas d'orbite appartenant au plan équatorial ( $i \approx 0$ ), certains éléments orbitaux classiques  $oe$  peuvent ne pas être définis. Dans ces cas, l'état du satellite doit être représenté différemment afin d'éviter ces singularités.

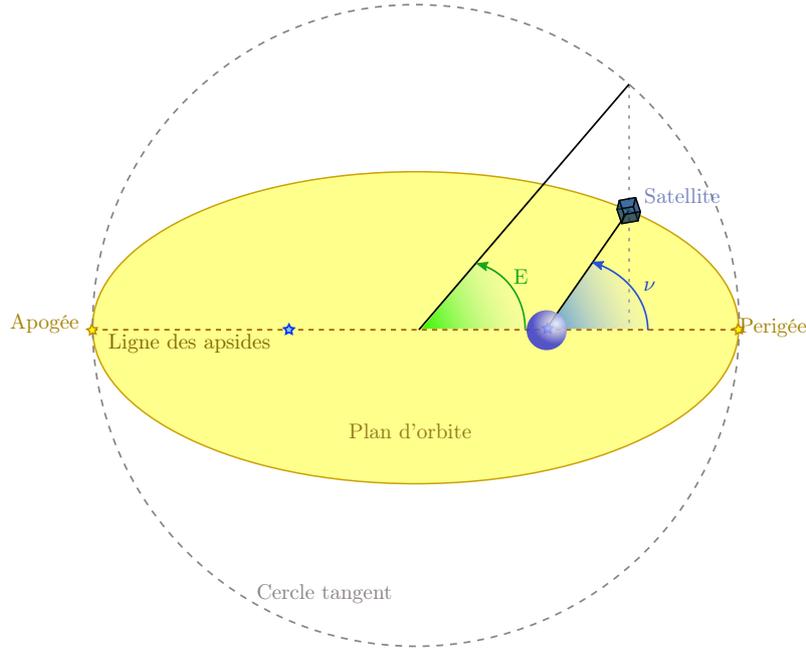


FIGURE B.2 – La définition de l'anomalie excentrique

### B.3 Mouvement relatif cartésien

La dynamique du chasseur relativement à la cible est exprimée dans un repère local, tournant et centré sur le satellite cible. Parmi les différents repères disponibles, le repère *Local Vertical Local Horizontal* (LVLH)  $B_l = (S_l, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est utilisé dans ce manuscrit (voir la figure (B.3)). L'axe  $\vec{z}$  est orienté radialement du satellite cible en direction au centre de la Terre. L'axe  $\vec{y}$  est orthogonal au plan orbital, dans la direction opposée à celle du vecteur moment angulaire, et l'axe  $\vec{x}$  se trouve dans le plan orbital de la cible dans la direction de la vitesse du satellite.

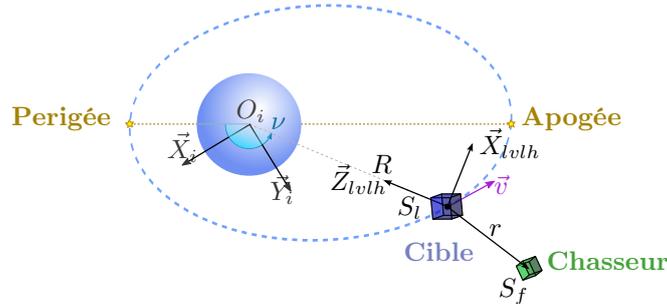


FIGURE B.3 – La position relative du chasseur et le repère LVLH de la cible

La position relative entre la cible  $S_l$  et le chasseur  $S_f$  est représentée par  $\vec{r} = \overrightarrow{S_l S_f}$  (voir figure B.3). Dans le contexte de dynamique képlérienne, l'accélération inertielle relative est donnée par :

$$\left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{B_0} = - \frac{\mu}{\|\vec{R} + \vec{r}\|^3} (\vec{R} + \vec{r}) + \frac{\mu}{\|\vec{R}\|^3} \vec{R}^3 \quad (\text{B.7})$$

où  $\vec{R} = \overrightarrow{O S_f}$  représente la position inertielle de la cible. Le terme à gauche de l'égalité (B.7) peut être développé dans la base locale à l'aide de la loi de composition des accélérations usuelle :

$$\left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{B_0} = \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{B_l} + 2 \vec{\Omega}_{B_l/B_0} \times \left( \frac{d \vec{r}}{dt} \right)_{B_l} + \left( \frac{d \vec{\Omega}_{B_l/B_0}}{dt} \right)_{B_l} \times \vec{r} + \vec{\Omega}_{B_l/B_0} \times (\vec{\Omega}_{B_l/B_0} \times \vec{r}) \quad (\text{B.8})$$

Les termes de la somme correspondent respectivement à l'accélération relative du chasseur dans le repère local, l'accélération d'Euler, l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge. Le terme  $\vec{\Omega}_{B_l/B_0}$  représente la vitesse de rotation de la base locale  $B_l$  par rapport à la base inertielle  $B_0$ .

En supposant que la dynamique de la cible est exprimée à l'aide des éléments orbitaux définis par (B.3) et que l'état relatif entre les satellites est donnée par la position et la vitesse relatives locales  $\bar{X} = [\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z} \ \bar{v}_x \ \bar{v}_y \ \bar{v}_z]^T$ , les différents termes de (B.8) peuvent être calculés individuellement. Dans le cas du mouvement képlérien, on a :

$$\vec{\Omega}_{B_l/B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\nu} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_l} \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}_{B_l} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{B_l} \quad (\text{B.9})$$

En introduisant (B.9) dans (B.8), on a :

$$\left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{B_0} = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}} - 2\dot{\nu}\dot{\bar{z}} - \ddot{\nu}\bar{z} - \dot{\nu}^2\bar{x} \\ \ddot{\bar{y}} \\ \ddot{\bar{z}} + 2\dot{\nu}\dot{\bar{x}} + \ddot{\nu}\bar{x} - \dot{\nu}^2\bar{z} \end{bmatrix}_{B_l} \quad (\text{B.10})$$

En développant les termes à droite de l'égalité (B.7), nous arrivons aux équations non-linéaires suivantes pour la dynamique relative des satellites :

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} - 2\dot{\nu}\dot{\bar{z}} - \ddot{\nu}\bar{z} - \dot{\nu}^2\bar{x} &= -\frac{\mu\bar{x}}{\sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + (R - \bar{z})^2)^3}} \\ \ddot{\bar{y}} &= -\frac{\mu\bar{y}}{\sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + (R - \bar{z})^2)^3}} \\ \ddot{\bar{z}} + 2\dot{\nu}\dot{\bar{x}} + \ddot{\nu}\bar{x} - \dot{\nu}^2\bar{z} &= -\frac{\mu(R - \bar{z})}{\sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + (R - \bar{z})^2)^3}} + \frac{\mu}{R^2} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Dans les cas où la distance entre les satellites est beaucoup plus petite que la distance entre la cible et le centre de la Terre ( $\|\vec{r}\| \ll \|\vec{R}\|$ ), les équations (B.11) peuvent être linéarisées. La condition de linéarisation précédente est notamment valide lorsque les satellites se trouvent dans le même horizon visuel et peuvent utiliser la navigation relative. Les équations ainsi obtenues, dites de Tschauner-Hempel, peuvent être utilisées pour décrire le mouvement relatif entre les satellites [137] :

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} &= 2\dot{\nu}\dot{\bar{z}} + \ddot{\nu}\bar{z} + \dot{\nu}^2\bar{x} - \frac{\mu}{R^3}\bar{x} \\ \ddot{\bar{y}} &= -\frac{\mu}{R^3}\bar{y} \\ \ddot{\bar{z}} &= -2\dot{\nu}\dot{\bar{x}} - \ddot{\nu}\bar{x} + \dot{\nu}^2\bar{z} + 2\frac{\mu}{R^3}\bar{z} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

On peut constater que pour les équations linéarisées de Tschauner-Hempel, la dynamique en  $\bar{y}$  est découplée de la dynamique dans le plan  $\bar{x}\bar{z}$  et définit un oscillateur harmonique.

Dans le cas où l'orbite de la cible est circulaire, une forme simplifiée peut être obtenue pour les équations (B.12). Si  $e = 0$ , alors  $R = a = \text{const}$ ,  $\dot{\nu} = n = \text{const}$  et  $\ddot{\nu} = 0$ . En introduisant ces valeurs dans (B.12), on retrouve les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire pour le mouvement relatif entre satellites par rapport à une orbite circulaire de référence [44, 69] :

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} &= 2n\dot{\bar{z}} \\ \ddot{\bar{y}} &= -n^2\bar{y} \\ \ddot{\bar{z}} &= -2n\dot{\bar{x}} + 3n^2\bar{z} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

On peut remarquer que, dans ce cas, la dynamique relative des satellites correspond à un système linéaire invariant dans le temps.

### B.3.1 Représentation sous forme d'espace d'état

Soit le vecteur de l'état relatif entre les satellites constitué de la position et de la vitesse relatives projetées sur chacun des axes du repère LVLH de la cible :  $\bar{X}(t) = [\bar{x}(t) \ \bar{y}(t) \ \bar{z}(t) \ \bar{v}_x(t) \ \bar{v}_y(t) \ \bar{v}_z(t)]^T$ .

Si dans (B.12) la variable indépendante temps est remplacée par l'anomalie vraie de la cible, une forme simplifiée des équations décrivant la dynamique relative entre la cible et le chasseur peut être obtenue. Les dérivées par rapport au temps sont remplacées par :

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = (\cdot)' \dot{\nu} \quad \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} = \frac{d^2(\cdot)}{d\nu^2} \dot{\nu}^2 + \frac{d(\cdot)}{d\nu} \ddot{\nu} \quad (\text{B.14})$$

et le changement de variable suivant est utilisé :

$$X(\nu) = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 + e \cos \nu) I_3 & 0_3 \\ -e \sin \nu I_3 & \frac{(1 + e \cos \nu)}{\dot{\nu}} I_3 \end{bmatrix}}_{T(\nu)} \bar{X}(t) \quad (\text{B.15})$$

où  $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice identité et  $0_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice nulle. Cette opération mène à un espace d'état périodique pour la dynamique relative entre satellites :

$$X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B u \quad (\text{B.16})$$

où la matrice décrivant la dynamique du système  $A(\nu)$  est donnée par :

$$A(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{1 + e \cos \nu} & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

la matrice des entrées  $B$  est définie par  $B = [0_3 \ I_3]^T$  et  $u = [u_x \ u_y \ u_z]^T$  représente les accélérations produites par les propulseurs des satellites.

Des solutions explicites peuvent être calculées pour le système homogène associé à (B.16),

$$X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) \quad (\text{B.18})$$

### B.3.2 La matrice de transition d'état

La dynamique linéarisée (B.18) admet une solution de forme close. Cette transition formelle pour le mouvement permet, dans le cadre du problème de rendez-vous orbital, d'éviter le recours aux méthodes d'intégration numérique. Elle s'écrit :

$$X(\nu) = \Phi(\nu, \nu_0)X(\nu_0), \quad \nu \geq \nu_0 \quad (\text{B.19})$$

Par définition, la matrice de transition d'état vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\Phi'(\nu, \nu_0) = A(\nu)\Phi(\nu, \nu_0), \quad \Phi(\nu, \nu) = I, \quad \forall \nu \quad (\text{B.20})$$

Pour les systèmes variants dans le temps, comme dans (B.18), il n'existe pas d'expression analytique pour la matrice de transition d'état en général. Cependant, certaines méthodes numériques développées pour le calcul de  $\Phi$  sont usuellement basées sur la résolution d'une équation différentielle (B.20). Dans le cas

du mouvement relatif, la structure particulière de la matrice dynamique  $A(\nu)$  permet le calcul explicite d'une solution analytique.

Pour le mouvement relatif linéarisé, la dynamique en  $y$  n'est pas affectée par la dynamique dans le plan  $xz$  et elle est décrite par l'équation différentielle homogène du second ordre suivante :

$$y'' = -y \quad (\text{B.21})$$

La solution de (B.21) est la réponse d'un oscillateur harmonique et peut être directement exprimée en fonction des conditions initiales :

$$X_y(\nu) = \Phi_y(\nu, \nu_0)X_y(\nu_0) \quad (\text{B.22})$$

où  $\nu_0$  est l'anomalie vraie initiale pour le mouvement non commandé et :

$$X_y(\nu) = \begin{bmatrix} y(\nu) \\ v_y(\nu) \end{bmatrix} \quad \Phi_y(\nu, \nu_0) = \begin{bmatrix} \cos(\nu - \nu_0) & \sin(\nu - \nu_0) \\ -\sin(\nu - \nu_0) & \cos(\nu - \nu_0) \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Les équations différentielles homogènes pour le plan  $xz$  sont données par :

$$x'' = 2z' \quad (\text{B.24})$$

$$z'' = \frac{3}{1 + e \cos \nu} z - 2x' \quad (\text{B.25})$$

En intégrant (B.24) une fois, il vient

$$x' = 2z + K \quad (\text{B.26})$$

où  $K$  est une constante d'intégration. En introduisant (B.26) dans (B.25), une équation différentielle du second ordre uniquement fonction de  $z$  est obtenue :

$$z'' + \left(4 - \frac{3}{1 + e \cos \nu}\right) z = K \quad (\text{B.27})$$

Comme rappelé par Carter dans [36], la méthode pour résoudre ce type d'équation différentielle consiste à trouver une famille de solutions particulières  $\varphi_1, \varphi_2$  pour l'équation différentielle homogène telle que :

$$\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1' = \text{constant} \quad (\text{B.28})$$

puis à appliquer la technique de variation de paramètres [126]. Le choix des solutions particulières  $\varphi_1, \varphi_2$  détermine la forme de la matrice fondamentale  $\phi_{xz}$ . Il est à noter que la matrice de transition est unique.

Une matrice fondamentale pour le système périodique (B.18) a été proposée par Carter dans [36]. Une solution un peu différente, donnée par Yamanaka et Ankersen dans [140], présente l'avantage d'avoir une forme plus simple. Les solutions proposées par Yamanaka-Ankersen sont reproduites ci-dessous.

En posant  $X_{xz}(\nu) = \begin{bmatrix} x(\nu) & z(\nu) & v_x(\nu) & v_y(\nu) \end{bmatrix}^T$ , la propagation de l'état relatif est donnée par :

$$X_{xz}(\nu) = \Phi_{xz}(\nu, \nu_0)X_{xz}(\nu_0) \quad (\text{B.29})$$

où la matrice de transition  $\Phi_{xz}(\nu, \nu_0)$  peut être écrite comme :

$$\Phi_{xz}(\nu, \nu_0) = \phi_{xz}(\nu)\phi_{xz}^{-1}(\nu_0) \quad (\text{B.30})$$

La matrice  $\phi_{xz}(\nu)$  est définie par [140] :

$$\phi_{xz}(\nu) = \begin{bmatrix} 1 & -\cos \nu(2 + e \cos \nu) & \sin \nu(2 + e \cos \nu) & 3(1 + e \cos \nu)^2 J \\ 0 & \sin \nu(1 + e \cos \nu) & \cos \nu(1 + e \cos \nu) & 2 - 3e \sin \nu(1 + e \cos \nu) J \\ 0 & 2 \sin \nu(1 + e \cos \nu) & 2 \cos \nu(1 + e \cos \nu) - e & 3 - 6e \sin \nu(1 + e \cos \nu) J \\ 0 & \cos \nu + e \cos 2\nu & -\sin \nu - e \sin 2\nu & -3e \left( (\cos \nu + e \cos 2\nu) J + \frac{\sin \nu}{1 + e \cos \nu} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Le terme  $J$  est lié au choix de la solution particulier  $\varphi_2$  et est donnée ,dans le cas de la matrice de transition de Yamanaka-Ankersen, par :

$$J(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\tau}{(1 + e \cos \tau)^2} = \frac{n(t - t_0)}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (\text{B.32})$$

D'après (B.32) pour l'anomalie vraie initiale  $\nu_0$ , on a  $J(\nu_0) = 0$ . Cela permet le calcul analytique de l'inverse de la matrice  $\phi_{xz}(\nu)$  à  $\nu_0$  :

$$\phi_{xz}^{-1}(\nu_0) = \frac{1}{e^2 - 1} \begin{bmatrix} e^2 - 1 & -\frac{3e \sin \nu_0 (2 + e \cos \nu_0)}{1 + e \cos \nu_0} & e \sin \nu_0 (2 + e \cos \nu_0) & -2 + e \cos \nu_0 (1 + e \cos \nu_0) \\ 0 & \frac{3 \sin \nu_0 (e \cos \nu_0 + 1 + e^2)}{1 + e \cos \nu_0} & -\sin \nu_0 (2 + e \cos \nu_0) & -(\cos \nu_0 + e \cos^2 \nu_0 - 2e) \\ 0 & 3(e + \cos \nu_0) & -(2 \cos \nu_0 + e \cos^2 \nu_0 + e) & \sin \nu_0 (1 + e \cos \nu_0) \\ 0 & -(3e \cos \nu_0 + e^2 + 2) & (1 + e \cos \nu_0)^2 & -e \sin \nu_0 (1 + e \cos \nu_0) \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

La matrice de transition complète  $\Phi$  correspondant au vecteur d'état  $X(\nu)$  peut être obtenue par un regroupement des coefficients des matrices  $\Phi_y$  et  $\Phi_{xz}$ .

---

# Éléments de la théorie du primer vector

---

## Sommaire

---

C.1	Introduction . . . . .	122
C.2	Conditions d'optimalité de Carter . . . . .	122
C.3	Optimisation du nombre et des dates de poussées . . . . .	124

---

## C.1 Introduction

Le problème de rendez-vous impulsionnel a été largement étudié sous l'angle d'un problème de commande optimale depuis la fin des années 50. Lawden, Prussing, Jezewski, Lion, Handelsmann, Donaldson, Maret, Carter et Brient se sont plus particulièrement penchés les conditions d'optimalité et d'amélioration du coût d'une trajectoire, contribuant ainsi à la théorie du primer vector.

Dans les publications [80, 7, 8], les conditions nécessaires et suffisantes de Carter ainsi que les conditions nécessaires d'amélioration développées par Lion et Handelsmann sont exploitées. Nous résumons ces résultats dans cette annexe.

## C.2 Conditions d'optimalité de Carter

Thomas Carter a publié, dans une série d'articles [35, 40, 37, 38], des conditions qui présentent l'avantage d'être à la fois nécessaires et suffisantes dans le contexte du mouvement relatif képlérien contrairement aux conditions uniquement nécessaires issues de [91]. Dans ces travaux, l'hypothèse d'une poussée impulsionnelle est d'emblée posée. La dynamique du rendez-vous est vue comme une succession d'arcs de propagation libre entrecoupés par des impulsions de vitesse modélisant la poussée des actionneurs [40] :

$$X'(\nu) = A(\nu)X(\nu) + B(\nu) \sum_{i=1}^N \beta(\nu_i) \Delta v_i \delta(\nu - \nu_i) \quad (\text{C.1})$$

Notons que l'impulsion  $\Delta V(\nu_i)$  est décrite par son vecteur directeur  $\beta(\nu_i) \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\beta^T \beta = 1$  et son amplitude  $\Delta v_i$ .

En exploitant la transition et les conditions aux bords, la condition de rendez-vous prend la forme suivante :

$$X_f = \phi(\nu_f) \phi^{-1}(\nu_0) X_0 + \sum_{j=1}^N \phi(\nu_f) \phi^{-1}(\nu_j) B(\nu_j) \beta(\nu_j) \delta v_j. \quad (\text{C.2})$$

où la matrice  $\phi(\nu)$  représente la matrice fondamentale du système dynamique (C.1) telle que  $\frac{d}{d\nu} \phi(\nu) = A\phi(\nu)$  et  $\Phi(\nu, \nu_0) = \phi(\nu) \phi^{-1}(\nu_0)$ . Ainsi le problème de commande optimale est transformé en un problème d'optimisation non linéaire :

$$\min_{\nu_i, \delta v_i, \beta(\nu_i)} J_u = \sum_{i=0}^N \Delta v_i \quad \text{sous} \quad \begin{cases} \|\beta\| = 1 \\ X_f = \phi(\nu_f) \phi^{-1}(\nu_0) X_0 + \sum_{j=1}^N \phi(\nu_f) \phi^{-1}(\nu_j) B(\nu_j) \beta(\nu_j) \delta v_j \end{cases}. \quad (\text{C.3})$$

Dans [39], Carter introduit une variable supplémentaire  $c_f$  qui représente l'effort de commande à fournir pour remplir la condition de rendez-vous et qui permet de reformuler la condition de rendez-vous exprimée dans l'équation (C.2) :

$$c_f = \phi^{-1}(\nu_f) X(\nu_f) - \phi^{-1}(\nu_0) X_0 \quad (\text{C.4})$$

$$= \sum_{j=1}^N \phi^{-1}(\nu_j) B(\nu_j) \beta(\nu_j) \delta v_j \quad (\text{C.5})$$

Ainsi, dans [39] et les travaux suivants, la condition de rendez-vous est prise en compte dans le problème de commande optimale abordé est le suivant.

### Problème 3 (Problème de Carter):

Etant donné le nombre d'impulsions  $N$ , calculer les instants d'impulsions  $\mathcal{V} = \{\nu_0, \dots, \nu_N\}$  appartenant à la période de mission  $\Theta = [\nu_0, \nu_f]$  ainsi que les poussées  $\Delta V_i$  au travers de leurs amplitudes et de leurs vecteurs  $\{\delta v_1, \dots, \delta v_N, \beta(\nu_0), \dots, \beta(\nu_N)\}$  minimisant le coût  $J_u$  sous la contrainte de rendez-vous (C.5).

$$\min_{\nu_i, \delta v_i, \beta(\nu_i)} J_u = \sum_{i=0}^N \Delta v_i \quad \text{sous} \quad \begin{cases} \|\beta\| = 1 \\ c_f = \sum_{j=1}^N \phi^{-1}(\nu_j) B(\nu_j) \beta(\nu_j) \delta v_j \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Remarquons que le problème 3 est un problème d'optimisation statique sans contraintes différentielles liées à la dynamique du système. De notre point de vue, cette approche se démarque clairement des travaux de Lawden [93, 95], Prussing [121, 122] et Jezewski [75, 76]. En effet, nos travaux n'utilisent ni le calcul variationnel ni le principe du maximum de Pontryagin. Cependant, nous verrons que la notion de primer vector issue des approches classiques citées précédemment est reprise.

Carter procède à l'analyse du problème d'optimisation (3) dans [35] reprise dans [39, 40]. Sa démarche consiste à écrire les conditions d'optimalité pour un problème sans contraintes déduit de (C.6) grâce à l'introduction de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  :

$$\min_{\nu_i, \delta v_i, \beta(\nu_i), \lambda} \bar{J} = \sum_{i=0}^N \Delta v_i + \lambda \left( \sum_{j=1}^N Y(\nu_j) \beta(\nu_j) \delta v_j - c_f \right) \quad (\text{C.7})$$

où la matrice  $Y$  est donnée

$$Y(\nu) = \phi^{-1}(\nu_j) B(\nu_j). \quad (\text{C.8})$$

En programmation mathématique, l'annulation du gradient de la fonction  $\bar{J}$  vis-à-vis des variables d'optimisation  $(\nu_i, \delta v_i, \beta(\nu_i), \lambda)$  constitue une condition nécessaire d'optimalité. Selon [40, théorème 2], pour qu'une solution candidate réponde à cette première condition nécessaire, il suffit que la fonction  $\lambda_v(\nu) = Y(\nu)\lambda$  soit bornée en norme. Les conditions nécessaires et suffisantes peuvent alors être établies.

**Théorème 10 (CNS de Carter [35, 40]).** — *On suppose que le vecteur  $\phi^{-1}(t_f)X_f - \phi^{-1}(t_1)X_0 = c_f$  est non nul. Les variables  $(\nu_{k_1}, \dots, \nu_{k_r}, \Delta v_1, \dots, \Delta v_r, \beta(\nu_{k_1}), \dots, \beta(\nu_{k_r}))$  sont des solutions normales du problème d'optimisation (C.6) si et seulement s'il existe un vecteur non nul  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  tel que les conditions ci-dessous sont vérifiées.*

**CNS 1** *Les directions de poussée optimales sont déterminées par :*

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \beta(\nu_i) = Y^T(\nu_i)\lambda, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{C.9})$$

**CNS 2** *Les poussées optimales sont effectuées quand  $\lambda$  et  $\nu_i$  vérifient :*

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \lambda^T Y(\nu_i) Y(\nu_i)^T \lambda = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{C.10})$$

**CNS 3** *Les instants de poussée optimaux intérieurs  $\nu_i$  (i.e.  $\nu_0 < \nu_i < \nu_f$ ) vérifient :*

$$\begin{aligned} \Delta v_{k_i} = 0 \text{ ou } \nu_i = \nu_0 \text{ ou } \nu_i = \nu_f \text{ ou} \\ \lambda^T \frac{dY(\nu_i)}{d\nu} Y(\nu_i)^T \lambda = 0, \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

**CNS 4** *Les poussées optimales doivent vérifier le problème aux deux bouts défini par les conditions initiales et finales :*

$$\sum_{i=1}^N [Y(\nu_i) Y^T(\nu_i)] \lambda \Delta v_i = c_f \quad (\text{C.12})$$

**CNS 5** *L'amplitude des poussées optimales doit être positive ou nulle :*

$$\Delta v_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{C.13})$$

**CNS 6** *La consommation totale doit être positive :*

$$\sum_{i=1}^N \Delta v_i = c_f^T \lambda > 0 \quad (\text{C.14})$$

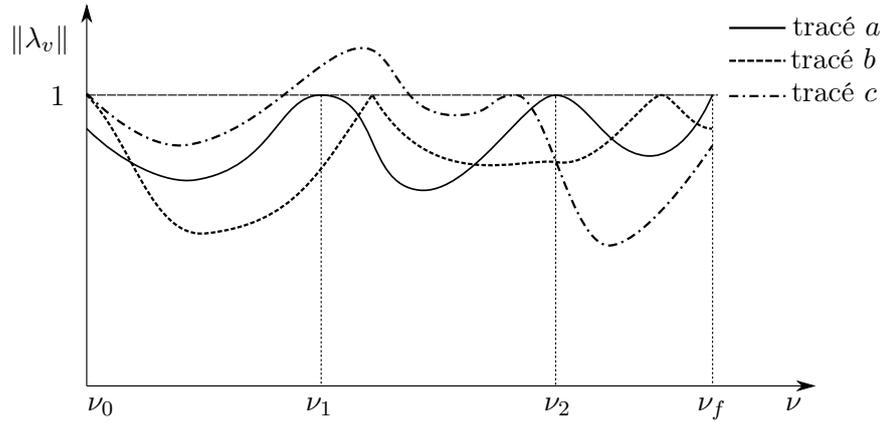


FIGURE C.1 – Illustration de primer vector optimal

**CNS 7**  $-c_f^T \lambda$  est un minimum sur l'ensemble :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \text{CN1} - \text{CN6 sont valides}\} \quad (\text{C.15})$$

**CNS 8** La norme du vecteur  $\lambda_v(\nu) = Y^T(\nu)\lambda$  est inférieure ou égale à 1 sur la durée du rendez-vous :

$$\|\lambda_v(\nu)\| \leq 1 \quad \forall \nu \in [\nu_0, \nu_f] \quad (\text{C.16})$$

Ces conditions nécessaires d'optimalité sont illustrées à la figure C.1 dans laquelle la norme du primer vector,  $\|\lambda_v\|$  est tracée en trait plein pour un cas optimal. Les deux tracés en pointillés représentent des cas non optimaux. Dans le cas optimal, les instants optimaux de poussée sont  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  et  $\nu_f$ . Les tracés pointillés  $b$  et  $c$  représentent des manœuvres non optimales, car la norme du primer vector transgresse plusieurs conditions nécessaires. Le tracé  $b$  comporte un point de rebroussement qui indique la non-continuité de  $\dot{\lambda}_v$  contrairement à ce que nécessite la condition 1. Dans le tracé  $c$ , nous observons que  $\|\lambda_v\| > 1$  sur un intervalle temporel non vide. Dans le tracé  $a$ ,  $\|\lambda_v\|$  répond aux conditions de Carter. La solution au problème (C.6) peut être reconstruite à partir de ce résultat graphique. Les instants de poussée  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_f$ , sont relevés sur le graphe C.1. Les directions de poussées  $\beta(\nu_i)$  sont par ailleurs calculées grâce à la condition C.9. Les amplitudes  $\Delta v_i$  sont quant à elles obtenues par la résolution du système (C.12) et doivent satisfaire simultanément la condition (C.13).

### C.3 Optimisation du nombre et des dates de poussées

Le problème de rendez-vous spatial impulsionnel en consommation minimale s'avère particulièrement difficile à résoudre quand le nombre de dates de poussée n'est pas fixé *a priori*. De très nombreux travaux de la littérature recherchent des solutions pour un nombre d'incrément de vitesse fixé *a priori* [121], [122], [123], [35], [40], [37], [38]. Parmi les travaux s'intéressant à l'optimisation du nombre d'impulsions, nous pouvons noter ceux de Lion et Handelsman [98]. Ces derniers proposent un résultat essentiel de la théorie du primer vector. Ils analysent, grâce aux techniques de calcul variationnel, l'impact sur le coût d'une trajectoire non optimale de certaines manipulations du plan de guidage. L'analyse variationnelle permet d'évaluer l'effet des manipulations suivantes : (i) l'introduction d'une période de propagation libre avant la première ou après la dernière impulsion, (ii) l'ajout d'une impulsion intermédiaire, (iii) le déplacement d'une impulsion intermédiaire. Lion et Handelsman en ont déduit des conditions nécessaires d'amélioration de la consommation.

Avant de présenter ces conditions, rappelons un résultat qui donne une borne supérieure sur le nombre d'impulsions nécessaires à l'obtention d'une trajectoire à coût minimal.

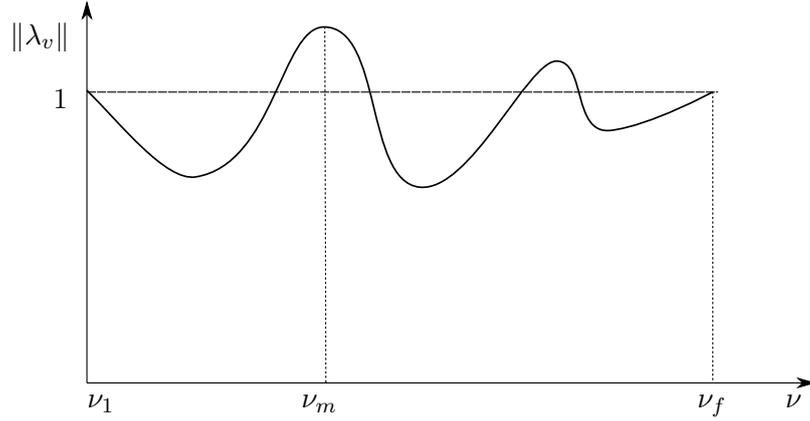


FIGURE C.2 – Tracé d'un premier vector non optimal et localisation de l'impulsion intermédiaire à ajouter

### Borne supérieure sur le nombre d'impulsions optimales

Dans les travaux de Carter présentés précédemment, il est clairement indiqué que le nombre d'impulsions est connu *a priori*. Il en est de même pour les conditions d'optimalité de Lawden qui n'apportent pas davantage de précisions quant au nombre optimal d'impulsions nécessaire à la réalisation d'une manoeuvre. Seule une borne supérieure a été proposée par Stern.

**Théorème 11 ([132]).** — *Si le nombre de variables d'état fixées à la date finale  $\nu_f$  du rendez-vous est  $q$  alors la trajectoire optimale comptera  $q$  impulsions au maximum.*

### Condition de Lion-Handelsmann pour l'addition d'une impulsion

La condition nécessaire d'addition d'une impulsion de Lion-Handelsmann est présentée dans [76]. Le principe est de calculer la variation de consommation dans le cadre d'une trajectoire à deux impulsions initiale et finale puis d'en tirer une condition d'amélioration du coût par l'addition d'une impulsion intermédiaire à l'instant  $\nu_m$ . Cette condition doit également permettre de calculer et de localiser cette impulsion. A la suite du calcul des variations présenté en détails dans la section d'annexe ??, l'écart  $dJ$  entre la consommation d'une trajectoire à deux impulsions,  $J$  et celle d'une trajectoire à trois impulsions  $J^*$  est évalué au premier ordre.

$$dJ = J^* - J \approx \|\delta v_m^+ - \delta v_m^-\| \left( 1 - \lambda_v(\nu_m)^T \frac{\delta v_m^+ - \delta v_m^-}{\|\delta v_m^+ - \delta v_m^-\|} \right) \quad (\text{C.17})$$

où les incréments de vitesse au point intermédiaire  $\delta v_m^-$  et  $\delta v_m^+$  représentent la différence à l'instant de l'impulsion  $\nu_m$  entre le vecteur vitesse de la trajectoire originelle,  $v$  et celui de la trajectoire à trois impulsions  $v^*$  :

$$v^*(\nu_m^-) = v(\nu_m) + \delta v_m^- \quad (\text{C.18})$$

$$v^*(\nu_m^+) = v(\nu_m) + \delta v_m^+ \quad (\text{C.19})$$

Les exposants + et - indiquent que ces incréments sont évalués à droite et gauche de l'instant d'impulsion

**Théorème 12 (Condition nécessaire d'addition d'une impulsion).** — *Une condition nécessaire afin que la trajectoire perturbée soit meilleure que la trajectoire de référence :*

$$\|\lambda_v(\nu_m)\| > 1 \quad (\text{C.20})$$

Si l'analyse variationnelle permet de construire un test d'optimalité donnant une condition nécessaire d'addition d'une impulsion intermédiaire pour l'amélioration d'une trajectoire de référence, il indique

aussi la date  $\nu_m$  de la poussée supplémentaire :

$$\nu_m = \text{Arg} \left[ \max_{\nu_0 \leq \nu \leq \nu_f} (\|\lambda_\nu(\nu_m)\|) \right] \quad (\text{C.21})$$

En d'autres termes, l'amélioration sera maximale à la date où le module du primer vector est maximal et supérieur à 1 (cf. Figure C.2).

### Condition pour l'addition de périodes de "coasting" initiale

Nous présentons dans ce paragraphe une condition d'amélioration de la consommation par l'introduction d'une période de propagation libre avant l'impulsion initiale ou après l'impulsion finale. Ces périodes initiale et finale sont appelés "coasting arcs" dans la littérature anglo-saxonne.

**Théorème 13 (Condition nécessaire pour le retard de l'impulsion initiale).** — *Retarder la date de poussée initiale permet d'améliorer le coût de la trajectoire si la condition suivante est vérifiée :*

$$\left. \frac{d\|\lambda_\nu\|}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_0} > 0 \quad (\text{C.22})$$

La condition 13 est illustrée par la figure C.3.

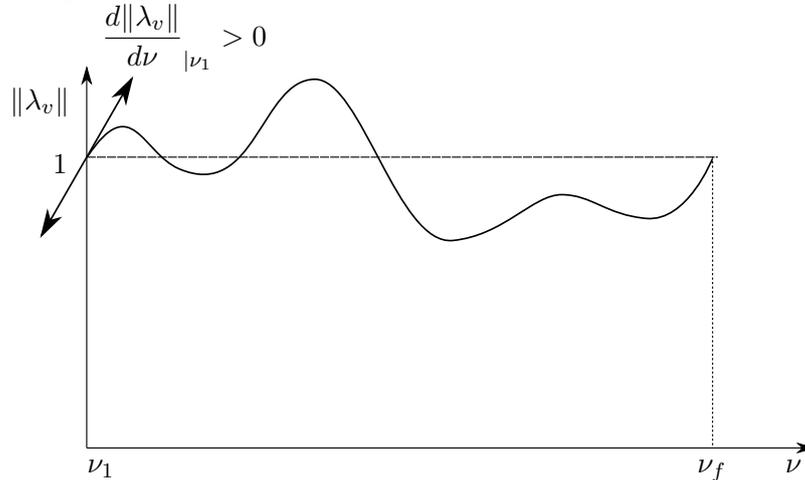


FIGURE C.3 – Tracé de la norme d'un primer vector non optimal avec période de coasting initiale

**Théorème 14 (Condition nécessaire pour l'anticipation de l'impulsion terminale).** — *Avancer la date de poussée finale permet d'améliorer le coût de la trajectoire si la condition suivante est vérifiée :*

$$\left. \frac{d\|\lambda_\nu\|}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_f} < 0 \quad (\text{C.23})$$

La condition 14 est illustrée à la figure C.4.

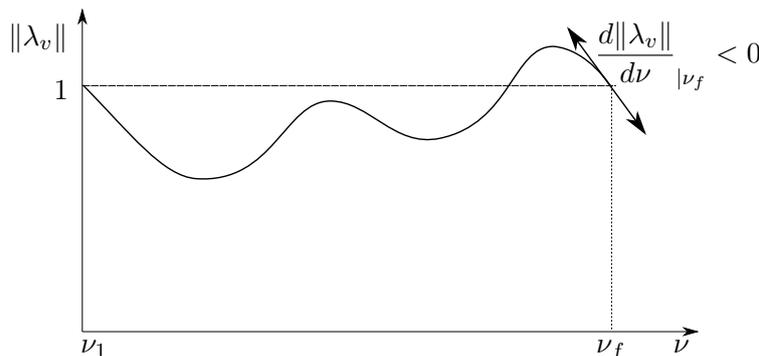


FIGURE C.4 – Tracé de la norme d'un primer vector non optimal avec période de coasting finale

### Condition pour le déplacement d'une impulsion intermédiaire

Une des originalités est l'extension de ces conditions et cette analyse au cas des impulsions intermédiaires ne vérifiant pas la condition (C.11) (tangence de la norme du primer vector à 1). Le calcul variationnel mené pour les études des arcs de propagation initial et final permet également d'analyser l'effet du déplacement d'une impulsion intermédiaire (cf. paragraphe ??). Les conditions des théorèmes 13 et 14 peuvent donc être appliquées pour déplacer (retarder ou avancer) une date de poussée en cas de non vérification de la condition nécessaire d'optimalité de tangence nulle. Les deux cas possibles sont illustrés par la figure C.5 : l'impulsion en  $\nu_2$  peut être retardée tandis que l'impulsion en  $\nu_3$  peut être anticipée afin d'améliorer le coût.

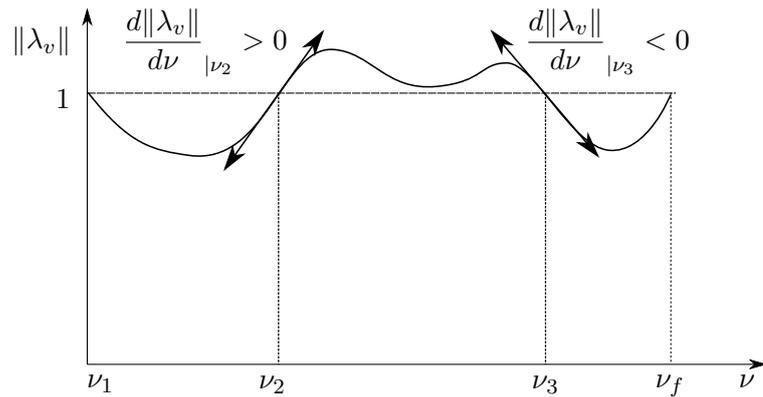


FIGURE C.5 – Tracé de la norme d'un primer vector non optimal avec périodes de coasting intermédiaires



---

# Approche de Neustadt pour la résolution du problème de rendez-vous

---

## Sommaire

---

<b>D.1 Introduction</b>	<b>130</b>
<b>D.2 Résolution dans l'espace des fonctions à variations bornées</b>	<b>130</b>
D.2.1 Théorème de représentation de Riesz et établissement du problème dual	131
D.2.2 Théorème de dualité	132
D.2.3 Structure paramétrique du problème primal	133
D.2.4 Reconstruction de la fonction mesure et la commande	134

---

## D.1 Introduction

La méthode de résolution du problème de rendez-vous de la section 2.3 est fondée sur les travaux de Neustadt. Ceux-ci visent à établir le problème de commande optimale impulsionnelle comme un problème d'optimisation sur les moments d'une fonction mesure représentant la commande.

Or, dans [113], le problème de moments n'est pas directement résolu. Il est plongé dans l'espace plus "complet" des fonctions à variation bornées puis un isomorphisme et la dualité sont exploités pour obtenir un problème de programmation de dimension semi-infinie (section D.2). La résolution de ce dernier problème permet de déterminer les instants optimaux d'impulsion puis de reconstruire le plan optimal de guidage.

Nous résumons ici les travaux de Neustadt [113] afin de convenablement établir le problème d'optimisation semi-infini résolu dans la section 2.3.

## D.2 Résolution dans l'espace des fonctions à variations bornées

Le problème de rendez-vous a été converti un problème sur les moments :

**Problème 4 (Problème de moments):**

Le problème de rendez-vous se reformule comme un problème de norme minimale sous une contrainte de moments :

$$\min_u \|u\|_{\mathcal{L}_p^1} \text{ sous } \int_{\nu_0}^{\nu_f} Y(\nu)u(\nu)d\nu = c. \quad (\text{D.1})$$

où la norme  $\|u\|_{\mathcal{L}_p^1}$  est définie par

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p^1} = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \left( \sum_{j=1}^m |u_j(\nu)|^p \right)^{\frac{1}{p}} dt \quad (\text{D.2})$$

Le premier constat établi par [113] est que le problème 4 ne trouve généralement pas de solutions si l'espace de recherche est l'ensemble des fonctions de norme intégrable au sens de Lebesgue,  $\mathcal{L}_p^1([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$ . Plusieurs phénomènes peuvent être à l'origine de ce constat.

le problème 4 est plongé dans l'espace de Banach des fonctions à variations bornées, noté  $\mathcal{G}_p$ , afin d'être résolu.

**Définition 7 (Fonction à variations bornées).** — Une fonction  $g : [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}^r$  est dite à variations bornées si et seulement si

$$\|g\|_{\mathcal{G}_p} = \sup_{t_0=t_1 < \dots < t_N=t_f} \sum_{i=1}^{N-1} \|g(t_{i+1}) - g(t_i)\|_p < +\infty \quad (\text{D.3})$$

$\|g\|_{\mathcal{G}_p}$  représente la variation totale de  $g$  sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Cette quantité est calculée sur l'ensemble de toutes les partitions finies possibles de  $[t_0, t_f]$  à savoir  $[t_1, t_2], [t_2, t_3], \dots, [t_{N-1}, t_N]$ .

**Définition 8 (Espace des fonctions à variations bornées).** — On note par  $\mathcal{G}_p([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$  l'espace des fonctions à variations bornées, nulles en  $\nu_0$  et continues à droite sur  $]\nu_0, \nu_f[$ . La variation totale  $\|\cdot\|_{\mathcal{G}_p}$  décrite par (D.3) définit une norme sur cet espace.

Le lien entre l'ensemble des fonctions de normes intégrables  $\mathcal{L}_p^1$  et les fonctions à variation bornées se concrétise par l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{L}_p^1([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m) &\mapsto \mathcal{G}_p([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m) \\ u &\mapsto \Psi(u) : \nu \rightarrow \int_{\nu_0}^{\nu_f} u(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Cette application linéaire a l'avantage de conserver la norme :  $\|\Psi(u)\|_{\mathcal{G}_p} = \|u\|_{\mathcal{L}_p^1}$ . De plus, nous pouvons déduire de (D.4) que  $d\Psi(u)(t) = u(t)dt$ . Par ailleurs, il est à noter que l'application  $\Psi(\cdot)$  n'est qu'injective. En d'autres termes, l'espace des fonctions à variations bornées  $\mathcal{G}_p$  contient l'ensemble des fonctions de normes intégrables,  $\mathcal{L}_p^1$  à l'isométrie  $\Psi$  près.

**Problème 5 (Problème relâché dans  $\mathcal{G}_p$ ):**

Nous cherchons la fonction  $g^*$  solution optimale du problème de moments (D.1) formulé dans l'espace des fonctions à variations bornées  $\mathcal{G}_p$  et donné par :

$$\min_g \|g\|_{\mathcal{G}_p} \text{ sous } \int_{\nu_0}^{\nu_f} Y(\nu)dg(\nu) = c. \quad (\text{D.5})$$

Dans ce nouveau cadre, la réécriture du problème 4 dans l'espace  $\mathcal{G}_p$  apporte l'assurance que l'espace de recherche comporte la solution si elle existe. Les solutions admissibles contiennent une solution optimale. Un autre intérêt de l'espace  $\mathcal{G}_p([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$  est qu'il est isomorphe à l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires noté  $\mathcal{C}^*([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$ . Par ailleurs, l'espace des fonctionnelles linéaires est l'espace dual de l'espace de Banach des fonctions continues, noté  $\mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$ . L'utilisation des espaces  $\mathcal{C}^*$  et  $\mathcal{C}$  va permettre la description de programmes mathématiques duals. Nous déploierons par la suite une méthode spécifique pour résoudre le programme primal.

### D.2.1 Théorème de représentation de Riesz et établissement du problème dual

Dans la démarche exposée dans [113], la résolution du problème de rendez-vous n'est pas réalisée dans  $\mathcal{G}_p$ , l'espace des fonctions à variations bornées. Le problème est déplacé dans l'espace des fonctionnelles linéaires grâce à un isomorphisme.

Le théorème de la représentation de Riesz [104, Théorème 1, section 5.5] établit qu'à toute fonction  $g \in \mathcal{G}_p$  correspond une fonctionnelle linéaire  $l$  définie par

$$l(y(\cdot)) = \int_{\nu_0}^{\nu_f} y^T(\nu)dg(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu_f} \sum_{j=1}^m y_j(\nu)dg_j(\nu) \quad (\text{D.6})$$

où  $y(\nu) \in \mathbb{R}^m$ . Réciproquement, il existe une unique fonction  $g \in \mathcal{G}_p$  pouvant être associée à chaque fonctionnelle  $l$ . Cette fonction  $g$  est alors définie par l'équation (D.6).

**Définition 9 (Espace des fonctionnelles linéaires,  $\mathcal{C}^*$ ).** — On note  $\mathcal{C}^*([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctionnelles linéaires définies par (D.6). L'espace  $\mathcal{C}^*$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^*}$  définie par

$$\|l\|_{\mathcal{C}^*} = \sup_{\|y(\cdot)\|_q \leq 1} |l(y)| \quad (\text{D.7})$$

L'isomorphisme (D.6) entre les espaces  $\mathcal{G}_p$  et  $\mathcal{C}^*$  conserve de plus les normes :

$$\|l\|_{\mathcal{C}^*} = \|g\|_{\mathcal{G}_p} \quad (\text{D.8})$$

**Remarque 9:** Le théorème de la représentation de Riesz établit une équivalence entre l'espace  $\mathcal{G}_p$  et l'espace des fonctionnelles linéaires qui est noté  $\mathcal{C}^*$ . Cette équivalence permet d'affirmer que  $\mathcal{G}_p$  est un espace de Banach comme étant équivalent à  $\mathcal{C}^*$ .

Le problème 5 peut alors être réinterprété en considérant  $\mathcal{C}^*$  comme espace de recherche d'une solution optimale.

**Problème 6 (Problème dual, minimisation de norme sur  $\mathcal{C}^*$ ):**

Nous recherchons la fonctionnelle linéaire  $l^*$  de norme minimale, solution du programme mathématique suivant

$$\min_l \|l\|_{\mathcal{C}^*} \text{ sous } l(y^i) = c_i, \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{D.9})$$

où  $y^i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $Y(\nu) = \phi^{-1}(\nu)B(\nu)$  utilisée précédemment.

### D.2.2 Théorème de dualité

L'étape suivante consiste à écrire le problème primal lié au problème 6 dans l'espace de Banach  $\mathcal{C}$ .

**Définition 10 (Espace des fonctions continues,  $\mathcal{C}$ ).** —  $\mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$  désigne l'espace des fonctions engendré par les vecteurs  $y_1(\nu)$  à  $y_n(\nu)$  correspondant aux lignes de la matrice  $Y(\nu)$

$$y(\nu) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(\nu), \quad \nu \in [\nu_0, \nu_f]. \quad (\text{D.10})$$

$\mathcal{C}$  est muni de la norme suivante<sup>1</sup>

$$\|y\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} \|y(\nu)\|_q \quad (\text{D.12})$$

[113, Théorème 1] établit une relation de dualité entre le problème de minimisation (D.9) et un problème maximisation sur  $\mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$ . Ce résultat se construit notamment sur le théorème suivant

**Théorème 15 ([104], Dualité pour les problèmes de norme minimale).** — Soient  $M$  un sous-espace de l'espace normé  $\mathcal{L}$  et  $x^* \in \mathcal{L}^*$  un point de l'espace dual  $L^*$ . Il vient alors que

$$\min_{m^* \in M^\perp} \|x^* - m^*\| = \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\| \leq 1}} \langle x, x^* \rangle \quad (\text{D.13})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le crochet de dualité.

De plus, en notant  $m^{**}$  et  $x^*$  les solutions optimales respectives du problème minimisation et de maximisation telles que

$$m^{**} = \arg \left[ \min_{m^* \in M^\perp} \|x^* - m^*\| \right],$$

$$x^* = \arg \left[ \begin{array}{c} \sup \langle x, x^* \rangle \\ x \in M \\ \|x\| \leq 1 \end{array} \right],$$

il vient que les solutions  $x^* - m^{**}$  et  $x^*$  sont alignées :

$$\langle x^*, x^* - m^{**} \rangle = \|x^* - m^{**}\| \|x^*\| \quad (\text{D.14})$$

Afin d'appliquer le théorème 15, il nous faut dans un premier temps reformuler le problème (D.9). Soit  $\bar{l} \in D$  une fonctionnelle vérifiant  $l(y_i) = c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Toute fonctionnelle linéaire  $l$  appartenant à l'ensemble  $D$  s'écrit  $l = \bar{l} - \hat{l}$  si  $\hat{l}(y_i) = 0$ . La fonctionnelle  $\hat{l}$  est alors orthogonale à l'espace  $\mathcal{Y}$  engendré par les vecteurs  $y_1$  à  $y_n$ ,  $\mathcal{Y} = \text{vec}\{y_1(\nu), \dots, y_n(\nu)\}$  :

$$\hat{l} \in \mathcal{Y}^\perp \quad (\text{D.15})$$

1. Les indices  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}$  sont liés par la relation suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & \text{si } 2 \leq p \leq \infty, 2 \leq q \leq \infty \\ p = \infty & \text{si } q = 1, \\ q = \infty & \text{si } p = 1, \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Nous pouvons ainsi reformuler le problème (D.9) :

$$(D.9) \quad \iff \min_{\hat{l}} \|l\|_{\mathcal{C}^*} \quad \iff \min_{\hat{l}} \|\bar{l} - \hat{l}\|_{\mathcal{C}^*} \quad \iff \min_{\hat{l}} \|\bar{l} - \hat{l}\|_{\mathcal{C}^*} \quad \text{sous } \hat{l} \in \mathcal{Y}^\perp \quad (D.16)$$

Il est à noter que les trois derniers problèmes possèdent les mêmes valeurs optimales. Le dernier terme de la chaîne d'équivalence (D.16) a exactement la configuration du problème de minimisation de l'équation (D.13) où l'ensemble  $M$  correspond à l'espace  $\mathcal{Y}$ ,  $x^*$  à la fonctionnelle  $\bar{l}$  et  $m^*$  à la fonctionnelle  $\hat{l}$ . L'application du théorème 15 permet d'écrire

$$\min_{\hat{l}} \|\bar{l} - \hat{l}\|_{\mathcal{C}^*} \quad \text{sous } \hat{l} \in \mathcal{Y}^\perp = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \langle y, \bar{l} \rangle \quad \text{sous } \|y\|_q \leq 1 \quad (D.17)$$

### Problème 7 (Problème primal, maximisation de norme sur $\mathcal{C}$ ):

Le problème (D.9) possède une contrepartie primale formulée comme un problème de maximisation dans l'espace  $\mathcal{C}$  :

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \langle y, \bar{l} \rangle \quad \text{sous } \|y\|_q \leq 1 \quad (D.18)$$

### D.2.3 Structure paramétrique du problème primal

Nous mettons en exergue la structure paramétrique du problème primal (D.18) ci-après. Tout d'abord, le vecteur  $y(\nu)$ , comme élément de  $\mathcal{Y}$ , est donné par

$$y(\nu) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = Y^T \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \quad (D.19)$$

De plus, le crochet de dualité  $\langle y, \bar{l} \rangle$  est défini ici par

$$\begin{aligned} \langle y, \bar{l} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i, \bar{l} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \langle y_i, \bar{l} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = \lambda^T c. \end{aligned} \quad \text{avec } \langle y_i, \bar{l} \rangle = \bar{l}(y_i) = c_i \quad (D.20)$$

En introduisant les équations (D.19) et (D.20) dans le problème primal, nous pouvons le reformuler en problème d'optimisation paramétrique :

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \langle y, \bar{l} \rangle \quad \text{sous } \|y\|_q \leq 1 \quad \iff \max_{\lambda} \lambda^T c \quad \text{sous } \|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1 \quad (D.21)$$

En associant les équivalences (D.16) et (D.21) au résultat de dualité (D.17), le théorème 16 peut être établi.

**Théorème 16 ([113]).** — Soient  $y_i(\cdot) \in \mathcal{C}([\nu_0, \nu_f], \mathbb{R}^m)$  où  $i = 1, \dots, n$  et  $D$  un sous-ensemble de  $\mathcal{C}^*$  tels que

$$D = \{l \in \mathcal{C}^* : l(y_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, n\} \quad (D.22)$$

Il vient alors que

$$\min_{l \in D} \|l\|_{\mathcal{C}^*} = \max_{\|Y^T(\nu)\lambda\|_q \leq 1} c^T \lambda \quad (D.23)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ .

Ce théorème est le plus important de notre démarche, car il nous permet de formuler le problème de commande optimale en un problème d'optimisation paramétrique sans pertes d'informations, contrairement aux méthodes directes de résolution du problème de commande optimale.

**Problème 8 (Problème d'optimisation semi-infinie):**

Le problème primal exprimé (D.18) possède une contrepartie paramétrique qui est un problème d'optimisation convexe de dimension infinie :

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & -\lambda^T c \\ \text{sous} \quad & \|Y(\nu)^T \lambda\|_q \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Le caractère infini du problème (D.24) provient de la dépendance de la contrainte en  $\nu$ . Celle-ci doit être vérifiée pour toute valeur de  $\nu \in [\nu_0, \nu_f]$  et donne lieu à un ensemble d'inégalités infiniment nombreuses.

*Remarque 10:* Si le problème (8) d'optimisation paramétrique n'est pas strictement équivalent au problème de moments posé par (D.1) d'un point de vue topologique, l'intérêt de l'approche de Neustadt est de montrer que ces solutions sont aussi celles du problème originel (D.1).

*Remarque 11:* Le vecteur  $y(\nu) = Y^T \lambda \in \mathbb{R}^m$  utilisé dans le problème 7, dit primal, et dans le problème 8 d'optimisation semi-infinie peut être assimilé au vecteur d'efficacité, ou primer vector, introduit dans les travaux de Lawden [91] et exploité par la suite dans les travaux de Carter [40, 35] (cf. section C).

#### D.2.4 Reconstruction de la fonction mesure et la commande

Lorsque les problèmes primal et dual ont été résolus, leurs solutions  $y^*(\nu)$  et  $l^*$  peuvent être exploitées pour calculer la fonction mesure  $g^*(\nu)$  dans un premier temps puis, dans un second temps, la commande optimale  $u^*(\nu)$ .

La seconde partie du théorème 15 permet d'affirmer que  $y^*$  et  $l^*$ , les solutions des problèmes primal et dual, sont alignées :

$$\langle y^*, l^* \rangle = \|y^*\|_c \|l^*\|_{c^*}. \quad (\text{D.25})$$

La propriété d'alignement indique que les comportements de la fonctionnelle optimale  $l^*$  et de la fonction  $y^*$  sont liés. Plus précisément, cette propriété indique que la fonction mesure  $g^*(\nu)$  définissant la fonctionnelle  $l^*(y) = \int_{\nu_0}^{\nu_f} y(\nu) dg^*(\nu)$  n'évolue qu'aux instants où la fonction  $y(\nu)$  vérifie

$$\|y\|_c = \sup_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} \|y^*(\nu)\|_q = 1 \quad (\text{D.26})$$

Ce fait est notamment établi par [113, Théorème 3] et illustré dans [104, Exemple 2, section 5.7]. Notons que ce résultat implique que  $g^*(\nu)$  soit constant si (D.26) n'est pas vérifiée.

Soit  $\Gamma$  un sous-ensemble fermé de l'intervalle  $[\nu_0, \nu_f]$  défini par

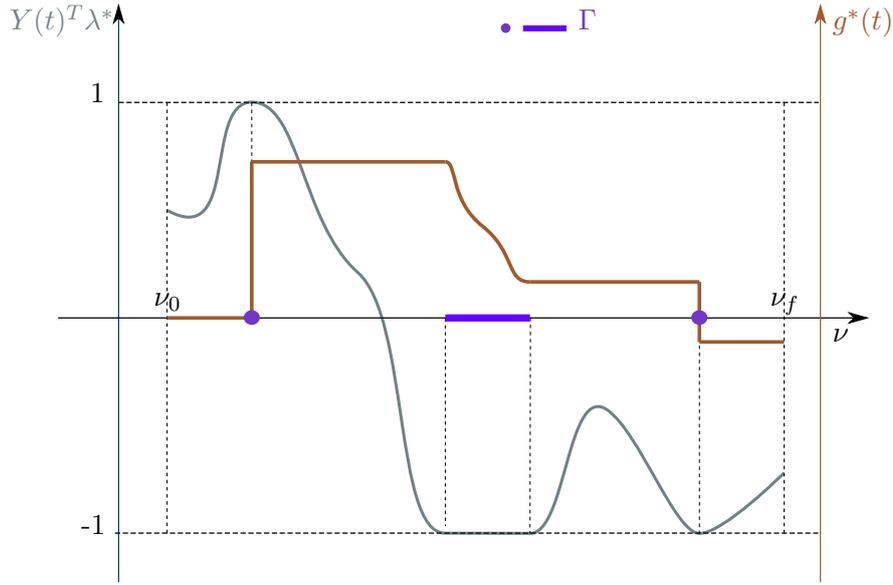
$$\Gamma = \{\nu \mid \|y(\nu)\|_q = 1, \nu \in [\nu_0, \nu_f]\} \quad (\text{D.27})$$

Cet ensemble dont on peut prouver qu'il est non vide comporte des dates isolées et/ou des intervalles. Dans le cas où un instant isolé  $\nu^0$  donné appartient à  $\Gamma$ , l'évolution de  $g^*$  en  $\nu^0$  est instantanée et indique donc la présence d'une discontinuité dans le profil  $g^*(\nu)$ . Si l'intervalle  $[\nu', \nu'']$  appartient à  $\Gamma$ ,  $g^*(\nu)$  évolue de façon continue. Ces deux cas sont illustrés sur la figure D.1.

Pour le cas particulier où l'ensemble  $\Gamma$  est un ensemble discret (i.e. uniquement constitué d'instant isolés) tel que

$$\Gamma = \{\nu_1^*, \dots, \nu_\eta^*\}, \quad \eta \leq n \quad (\text{D.28})$$

la fonction  $g^*$  est une fonction créneau ayant un nombre fini de discontinuité égal au cardinal de  $\Gamma$ ,  $\eta$ .

FIGURE D.1 – Relation d'alignement entre  $y^*$  et  $g^*$ 

**Remarque 12:** En outre, [113, Corollaire du théorème 4] démontre qu'il existe une fonction  $g^*$  de norme minimale ayant au plus  $n$  points de discontinuité. Ce résultat est connu sous le nom de borne de Neustadt et a déjà été exploité par ailleurs dans ce manuscrit sous la forme donnée par Stern et Potter [132].

Le théorème 3 de [113] précise aussi dans quelle proportion la fonction  $g^*(\nu)$  évolue en un point isolé de  $\Gamma$  :

$$g_s^*(\nu_j^*) - g_s^*(\nu_j^{*-}) = \begin{cases} \alpha_{\nu_j^*} \text{sign}(y_s^*(\nu_j^*)) & \text{si } p = 1 \\ \alpha_{\nu_j^*} \text{sign}(y_s^*(\nu_j^*)) |y_s^*(\nu_j^*)|^{q-1} & \text{si } 1 < p < \infty \end{cases} \quad (\text{D.29})$$

où  $s = 1, \dots, m$ , et  $\nu_j^{*-} = \lim_{\substack{\nu < \nu_j^* \\ \nu \rightarrow \nu_j^*}} \nu$ . Les coefficients  $\alpha_{\nu_j^*}$  sont solutions du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{\eta} \beta_i(\nu_j^*) \alpha_{\nu_j^*} = c_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{D.30})$$

où

$$\beta_i(\nu_j^*) = \begin{cases} \sum_{s=1}^m y_{i,s}(\nu_j^*) \text{sign}(y_s^*(\nu_j^*)), & \text{si } p = 1 \\ \sum_{s=1}^m y_{i,s}(\nu_j^*) \text{sign}(y_s^*(\nu_j^*)) |y_s^*(\nu_j^*)|^{q-1}, & \text{si } 1 < p < \infty \end{cases}, \quad j = 1, \dots, \eta \quad (\text{D.31})$$

Schématiquement, nous pouvons retenir de [113, Théorème 3] que l'évolution des fonctions  $g_j^*$  est de même signe que les fonctions de  $y_j^*$ .

Enfin, la commande optimale  $u^*$  peut être déduite de la connaissance de  $g^*$  en rappelant que  $\mathcal{L}_p^1$  est plongé dans  $\mathcal{G}_p$  par l'isomorphisme  $\Psi$  tel que  $d\Psi(u)(t) = u(t)dt$ . Ainsi si l'hypothèse d'une fonction  $g^*$  de type créneau ( $\Gamma$  étant un ensemble discret) est posée, on peut naturellement écrire que  $u(t)$  est une combinaison linéaire de fonction de Dirac ( $\delta(t)$ ) située en  $\Gamma$  :

$$u^* = \sum_{j=1}^{\eta} \Delta V(\nu_j^*) \delta(\nu_j^* - \nu). \quad (\text{D.32})$$

où  $\Delta V(\nu_j^*) = g^*(\nu_j^*) - g^*(\nu_j^{*-})$ . Ce fait est établi avec précision dans [113]. En pratique les différentes impulsions  $\Delta V(\nu_j^*)$  peuvent être calculées lorsque les dates optimales  $\{\nu_j^*\}$  ont été déterminées en vérifiant

la condition de rendez-vous (2.22) :

$$c = \sum_{i=1}^{\eta} Y(\nu_i^*) \Delta V(\nu_i^*). \quad (\text{D.33})$$

**Remarque 13:** *Physiquement, une commande impulsionnelle  $u^*$  sur le système considéré implique des sauts instantanés de vitesse. Ce signal particulier pour la commande  $u^*$  est une idéalisation raisonnable des poussées exécutées dans le cadre d'une propulsion chimique.*

---

# Recueil de missions de rendez-vous orbital

---

## E.1 Les missions PRISMA

Les missions PRISMA sont le fruit de coopérations entre l'agence spatiale suédoise SNSB, le CNES, l'agence spatiale allemande DLR et l'université technique danoise DTU [86, 19, 87, 114]. Elles visent à valider les algorithmes de guidage et de navigation pour le contrôle de trajectoires en formation et le rendez-vous autonome de deux satellites, ainsi que pour les opérations de proximité. Cela inclut les manœuvres d'approche et d'éloignement des satellites. Les deux satellites de PRISMA (appelés MANGO et TANGO) ont été mis en orbite par le lanceur ukrainien Dnepr le 15 Juin 2010. Quatre configurations différentes sont testées ici. Ces configurations diffèrent par leur durée respective ainsi que par les conditions initiales et finales.

### La mission PRISMA 1

Cette mission correspond au scénario 1 de la mission PRISMA proposé dans la référence [81]. Les conditions initiales et finales de cette mission définissent un rendez-vous dans le plan orbital. La durée est de trois périodes orbitales. Une borne maximale de 0.26 m/s est fixée pour chaque manœuvre.

Demi-grand axe	$a = 7011$ km
Inclinaison	$i = 98$ deg.
Argument du Périgée	$\omega = 0$ deg.
Ascension droite du nœud ascendant	$\Omega = 190$ deg.
Excentricité	$e = 0.004$
Anomalie vraie	$\nu_0 = 0$ rad.
$t_0$	0 s
$X_0^T = [r_0^T \ v_0^T]$	[ 10 0 0 0 0 0 ] km -km/s
$t_f$	18000 s
$X_f^T = [r_f^T \ v_f^T]$	[ 330 0 30 0 0 -0.0158 ] m -m/s
$\Delta V_{\max}$	0.26 m/s

TABLE E.1 – Données du rendez-vous PRISMA 1

## La mission PRISMA 2

Cette dernière variante de la mission PRISMA correspond à un rendez-vous très proche de la cible et de faible amplitude avec des distances relatives suivant l'axe  $x$  assez faibles et de l'ordre de quelques centaines de mètres à quelques dizaines de mètres. La durée de la mission de rendez-vous est donc plus faible que dans les autres scénarii PRISMA avec une durée d'un quart d'une période d'orbite. Cette configuration est également extraite de la référence [81].

Demi-grand axe	$a = 7011$ km
Inclinaison	$i = 98$ deg.
Argument du Périgée	$\omega = 0$ deg.
Ascension droite du nœud ascendant	$\Omega = 190$ deg.
Excentricité	$e = 0.004$
Anomalie vraie	$\nu_0 = 0$ rad.
$t_0$	0 s
$X_0^T = [r_0^T \ v_0^T]$	[ 300 0 0 0 0 0 ] m -m/s
$t_f$	800 s
$X_f^T = [r_f^T \ v_f^T]$	[ 20 0 0 0 0 0 ] m -m/s
$\Delta V_{\max}$	0.26 m/s

TABLE E.2 – Données du rendez-vous PRISMA 2

## E.2 Les missions ATV

Le véhicule automatique de transfert européen (en anglais, *Automated Transfer Vehicle* **ATV**) est un engin spatial destiné à ravitailler la station spatiale internationale [84]. Il a remplacé les vaisseaux russes Progress M à partir de mars 2008. L'ATV est en mesure de transporter 7,6 tonnes de charges. L'ATV permet également d'effectuer des corrections d'orbite de la station internationale. La phase du *homing* du rendez-vous de l'ATV avec la station internationale est reprise ici dans différentes configurations.

### La mission ATV 1

Le premier scénario de la mission ATV 1 est défini dans citeKerambrun09a mais légèrement modifié. La durée du rendez-vous est approximativement d'une demi-période  $T/2 = 2767.5$  s ramenée à 2702 s afin d'éviter la singularité des composantes hors-plan lors du calcul de la solution à deux impulsions. De même, la date de départ a été placée 7 s après le début du rendez-vous pour des raisons identiques. L'amplitude maximale autorisée pour chaque manœuvre est définie par 5 m/s.

Demi-grand axe	$a = 6763$ km
Inclinaison	$i = 52$ deg.
Argument du Périgée	$\omega = 0$ deg.
Ascension droite du nœud ascendant	$\Omega = 0$ deg.
Excentricité	$e = 0.0052$
Anomalie vraie	$\nu_0 = 0$ rad.
$t_0$	0 s
$X_0^T = [r_0^T \ v_0^T]$	[ -30 0 5 8.514 00 0 ] km -m/s
$t_f$	2702 s
$X_f^T = [r_f^T \ v_f^T]$	[ -3.5 0 -0.1 0 0 0 ] m -m/s
$\Delta V_{\max}$	5 m/s

TABLE E.3 – Données du rendez-vous ATV 1

## La mission ATV 2

Dans le cadre de la mission ATV 2, la durée de rendez-vous est ramenée à 2 h ou 1.3 périodes d'orbite. Les conditions initiales et finales sont strictement identiques à la mission précédente.

Demi-grand axe	$a = 6763$ km
Inclinaison	$i = 52$ deg.
Argument du Périgée	$\omega = 0$ deg.
Ascension droite du nœud ascendant	$\Omega = 0$ deg.
Excentricité	$e = 0.0052$
Anomalie vraie	$\nu_0 = 0$ rad.
$t_0$	0 s
$X_0^T = [r_0^T \ v_0^T]$	[ -30 0 0.5 8.514 0 0 ] km -m/s
$t_f$	7200 s
$X_f^T = [r_f^T \ v_f^T]$	[ -100 0 0 0 0 0 ] m -m/s
$\Delta V_{\max}$	5 m/s

TABLE E.4 – Données du rendez-vous ATV 2

## La mission ATV 3

La durée de la mission ATV 3 a été allongée à 10 périodes orbitales avec des conditions initiales et finales modifiées.

Demi-grand axe	$a = 6763$ km
Inclinaison	$i = 52$ deg.
Argument du Périgée	$\omega = 0$ deg.
Ascension droite du nœud ascendant	$\Omega = 0$ deg.
Excentricité	$e = 0.0052$
Anomalie vraie	$\nu_0 = 0$ rad.
$t_0$	0 s
$X_0^T = [r_0^T \ v_0^T]$	[ -30 0 0.5 8.514 0 0 ] km -m/s
$t_f$	55350 s
$X_f^T = [r_f^T \ v_f^T]$	[ -100 0 0 0 0 0 ] m -m/s
$\Delta V_{\max}$	5 m/s

TABLE E.5 – Données du rendez-vous ATV 3

### E.3 La mission PROBA-3

Il s'agit d'une mission à forte excentricité [99]. Le rendez-vous est d'une durée de 1.5 période orbitale. Il démarre au périégée et se termine à l'apogée.

Demi-grand axe	$a = 37039.887$ km
Inclinaison	$i = 60.15$ deg.
Argument du Périgée	$\omega = 180.6$ deg.
Ascension droite du nœud ascendant	$\Omega = 173$ deg.
Excentricité	$e = 0.80621$
Anomalie vraie	$\nu_0 = 2.042$ rad.
$t_0$	0 s
$X_0^T = [r_0^T \ v_0^T]$	[ -5000 0 0 0 0 0 ] m -m/s
$t_f$	31872 s
$X_f^T = [r_f^T \ v_f^T]$	[ -20 0 0 0 0 0 ] m -m/s
$\Delta V_{\max}$	10 m/s

TABLE E.6 – Données du rendez-vous PROBA-3

---

## Annexes au chapitre 4

---

### Sommaire

---

<b>F.1 Alternatives à l'approche déterministe pour l'optimisation robuste . . . . .</b>	<b>142</b>
F.1.1 Approche par satisfaction des contraintes en probabilité . . . . .	142
F.1.2 Programmation stochastique . . . . .	142
<b>F.2 Modéliser des ensembles d'incertitudes . . . . .</b>	<b>143</b>
<b>F.3 Analyse par intervalles . . . . .</b>	<b>144</b>

---

## F.1 Alternatives à l'approche déterministe pour l'optimisation robuste

Nous présentons ici brièvement deux alternatives pour l'optimisation robuste à l'approche pire cas utilisée dans le chapitre 4.

### F.1.1 Approche par satisfaction des contraintes en probabilité

L'approche probabiliste s'appuie sur des modèles de probabilité des données et/ou des variables de perturbations. Lorsque les distributions de probabilité sont disponibles, il est possible de résoudre par différentes méthodes le programme mathématique incertain (4.1)

$$\begin{array}{ll} \min_x & f_0(x) \\ \text{sous} & f_i(x, u_i(p_i)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \quad (\text{F.1})$$

Une méthode consiste à résoudre le problème incertain en considérant la probabilité de satisfaction des contraintes :

$$\text{Prob}(f_i(x, u_i) \leq 0) = \text{niveau de satisfaction}$$

Ainsi, on imposera un nouveau jeu de contraintes en probabilité tel que le problème incertain (4.1) est remplacé par le programme suivant

$$\begin{array}{ll} \min_x & f_0(x) \\ \text{sous} & \text{Prob}(f_i(x, u_i) \leq 0) \geq 1 - \alpha, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad (\text{F.2})$$

où  $\alpha > 0$  représente le risque toléré de violation de contrainte. La mise en œuvre d'un tel problème nécessite la connaissance de la distribution de probabilité des données  $u_i$  et une estimation fiable des paramètres du modèle de probabilité. Le principe de résolution repose sur l'évaluation des probabilités  $\text{Prob}(f_i(x, u_i) \leq 0)$ . Ce calcul peut s'avérer difficile en général. Dans le cas de la programmation linéaire, si les données suivent une distribution normale de moyenne et d'écart-type donnés, il est possible de décrire explicitement les contraintes en probabilité sous une forme de contrainte déterministe. Les contraintes obtenues sont d'ailleurs à mettre en relation avec ce qui sera obtenu par l'approche pire cas (cf. l'annexe F.2). Cependant, si la distribution des données devient uniforme, le calcul des probabilités  $\text{Prob}(f_i(x, u_i) \leq 0)$  ne permet pas d'obtenir de contraintes déterministes équivalentes et nécessite un travail spécifique pour chaque contrainte.

### F.1.2 Programmation stochastique

Dans le cadre de la programmation stochastique, les contraintes doivent être satisfaites avec une probabilité de 1 et le critère d'optimisation est l'espérance mathématique du coût sur l'ensemble des réalisations des données  $u$ . Le programme stochastique est ainsi un problème de minimisation en moyenne

$$\begin{array}{ll} \min_x & \mathbb{E}_\mu f_0(x, u) \\ \text{sous} & f_i(x, u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad (\text{F.3})$$

$$\min_{x \in X} \mathbb{E}_\mu f_0(x, u)$$

où

$$\mathbb{E}_\mu f_0(x, u) = \int_{\mathcal{U}} f_0(x, u) d\mu(u)$$

$\mu$  est la mesure de probabilité sur  $\mathcal{U}$ . De manière générale, ce type de problème est difficile à résoudre. Cependant, des algorithmes efficaces sont disponibles notamment lorsque les données  $u$  prennent des

valeurs discrètes  $\{u^1, \dots, u^L\}$  associées aux probabilités connues  $\{\pi^1, \dots, \pi^L\}$ . Le problème se formule alors

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{j=1}^L \pi^j f_0(x, u^j) \\ \text{sous} \quad & f_i(x, \Delta^j) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, L \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

L'obtention du programme précédent induit un accroissement important du nombre de contraintes. En effet, le nombre de contraintes est  $Lm$  où  $L$  est le nombre de scénarios de réalisation des données  $\Delta$ . Il faut noter que les  $L$  scénarios sont obtenus à partir de la discrétisation de loi de probabilité ou par tirage aléatoire (Monte-Carlo).

## F.2 Modéliser des ensembles d'incertitudes

Dans le cadre de perturbations ellipsoïdales, il est possible de déduire d'une description probabiliste de l'incertitude, la définition de l'ellipsoïde de perturbation. Il s'agit de décrire l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  contenant  $p\%$  des réalisations des perturbations décrites par une distribution de probabilité.

Soit le vecteur de variable aléatoire  $X \in \mathbb{R}^n$  dont la distribution gaussienne  $X \sim \mathcal{N}(m_X, \Sigma_X)$  suit la loi de densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma_X}} \exp^{-\frac{1}{2}(x-m_X)^T \Sigma_X^{-1} (x-m_X)} \quad (\text{F.5})$$

où  $m_X = E(X)$  est le vecteur des moyennes de la variable aléatoire  $X$  et  $\Sigma_X = E((X - m_X)(X - m_X)^T)$  est la matrice de covariance de cette distribution. On souhaite définir l'ellipsoïde contenant l'ensemble des réalisations de la variable aléatoire  $X$  à la probabilité  $p$  à savoir

$$Pr\{(x - m_X)^T \Sigma_X^{-1} (x - m_X) \leq \chi_p^2\} = p \quad (\text{F.6})$$

Si  $\Sigma_X$  est donnée par la distribution, il nous faut déterminer la constante  $\chi_p^2$ . Déclarons  $K$  comme une variable aléatoire définie par la forme quadratique

$$(x - m_X)^T \Sigma_X^{-1} (x - m_X) = K, \quad (\text{F.7})$$

alors  $K$  suit une distribution de type  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté. La loi de densité de probabilité de la variable aléatoire  $K$  est donnée par

$$f_K(k) = \frac{k^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \exp^{-\frac{k}{2}} \quad (\text{F.8})$$

La fonction  $\Gamma(z)$  est la fonction généralisant la notion de calcul factoriel à l'ensemble des réels décrite par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{F.9})$$

et vérifiant  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  et  $\Gamma(1) = 1$ . Il vient que la probabilité que la variable aléatoire  $K$  soit inférieure ou égale à la constante  $\chi_p^2$  est telle que

$$Pr\{K \leq \chi_p^2\} = Pr\{(x - m_X)^T \Sigma_X^{-1} (x - m_X) \leq \chi_p^2\} = p \quad (\text{F.10})$$

La constante  $\chi_p^2$  est alors la solution de l'équation :

$$\int_{-\infty}^{\chi_p^2} f_K(x) dx = p \quad (\text{F.11})$$

Les solutions de l'équation précédente sont obtenues numériquement.

Les matrices de définition des ellipses se définissent à partir des considérations précédentes par les relations suivantes :

$$Q = \frac{\Sigma_X^{-1}}{\chi_p^2} = R^2 = P^{-2} \quad (\text{F.12})$$

Probabilité	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001
1	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.64	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
9	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59

TABLE F.1 – Table de valeurs du  $\chi^2$  en fonction du degré de liberté et de la probabilité désirée

### F.3 Analyse par intervalles

Nous proposons une introduction succincte à l'analyse par intervalles [108].

**Définition 11.** — Soit l'intervalle  $[x]$ , l'ensemble connexe et fini de  $\mathbb{R}$  tel que

$$[x] = [x^-, x^+] = \{x \in \mathbb{R} | x^- \leq x \leq x^+\}$$

On définit  $\text{mid}([x])$  comme milieu de l'intervalle  $[x]$  et  $\text{rad}([x])$  le rayon de l'intervalle tel que

$$\text{mid}([x]) = \frac{x^+ + x^-}{2} \quad (\text{F.13})$$

$$\text{rad}([x]) = \frac{x^+ - x^-}{2} \quad (\text{F.14})$$

L'ensemble des intervalles sur  $\mathbb{R}$  est noté  $\mathbb{IR}$ .

On peut aussi définir facilement un vecteur d'intervalles de dimension  $n$  et une matrice d'intervalles de dimensions  $n \times m$  comme un élément de  $\mathbb{IR}^n$  et de  $\mathbb{IR}^{n \times m}$  respectivement.

Les opérations mathématiques élémentaires sont étendues aux intervalles. Le résultat d'une opération entre deux intervalles est un intervalle qui contient tous les résultats des opérations entre les éléments des deux intervalles. Le résultat d'une opération entre deux intervalles de bornes finies est obtenu en travaillant uniquement sur leurs bornes.

**Définition 12 (Opérations élémentaires).** — Soient  $[x], [y] \in \mathbb{IR}$ , et  $\circ \in \{+, -, *, /\}$ , alors :

$$[x] \circ [y] = \{x \circ y | x \in [x], y \in [y]\} \quad (\text{F.15})$$

La définition 12 est valable pour toutes les opérations à l'exception de la division lorsque  $0 \in [y]$ . Dans ce dernier cas, le résultat n'est pas un intervalle. Détaillons l'équation (F.15) pour les quatre opérations élémentaires :

$$[x] + [y] = [x^- + y^-, x^+ + y^+] \quad (\text{F.16})$$

$$[x] - [y] = [x^- - y^+, x^+ - y^-] \quad (\text{F.17})$$

$$[x] * [y] = [\min(x^- y^-, x^- y^+, x^+ y^-, x^+ y^+), \max(x^- y^-, x^- y^+, x^+ y^-, x^+ y^+)] \quad (\text{F.18})$$

$$[x]/[y] = [x] * [1/y^+, 1/y^-], \text{ si } 0 \notin [y] \quad (\text{F.19})$$

Nous pouvons aussi définir d'autres grandeurs caractéristiques d'un intervalle  $[x] \in \mathbb{R}$  :

**Définition 13.** — Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la fonction contenant un nombre fini d'opérations arithmétiques et de fonctions élémentaires. On appelle fonction d'inclusion de  $f$ , la fonction,  $[f]$ , de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$  telle que

$$\mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^m : [x] \mapsto [f]([x]) \supset f([x]) = \{f(x) | x \in [x]\} \quad (\text{F.20})$$

En général, la fonction d'inclusion n'est pas unique et dépend de la manière dont  $f$  est exprimée. Si la fonction d'inclusion, dite naturelle, s'obtient en remplaçant chaque variable réelle  $x$  par son intervalle  $[x]$  correspondant, elle est la plupart du temps très pessimiste notamment lorsque les fonctions sont complexes. Afin de réduire le conservatisme, différentes alternatives de calcul des fonctions d'inclusion peuvent être utilisées telles que les fonctions d'inclusion centrée ou encore les fonctions d'inclusion de Taylor [74]. Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé la fonction d'inclusion centrée qui se définit par le calcul suivant :

$$[f_c]([x]) \triangleq f(m) + [g]^T([x])([x] - m) \quad (\text{F.21})$$

où  $\mathbb{R}^n \ni m = \text{mid}([x])$  est le vecteur milieu du vecteur d'intervalles  $[x]$  et  $[g]$  est la fonction d'inclusion naturelle de  $g$ , le gradient de  $f$ .



---

## Annexes au chapitre 5

---

### G.1 Propriétés des polynômes non-négatifs

Les définitions suivantes présentent les concepts nécessaires à la compréhension du chapitre 5. Elles sont issues de [112].

#### Non-négativité des polynômes sur un intervalle fini

Soit  $\mathcal{K}_{a,b}$  le cône convexe, fermé et pointé des coefficients des polynômes non-négatifs sur un intervalle fini  $[a, b] \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{K}_{a,b} = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1}, P(w) = \sum_{i=0}^n p_i w^i \geq 0, \forall w \in [a, b] \right\} \quad (\text{G.1})$$

Un polynôme  $P(w)$ , représenté par son vecteur de coefficients  $p = [p_0 \dots p_n]^T$ , appartient à  $\mathcal{K}_{a,b}$  si et seulement s'il existe deux matrices symétriques semi-définies positives  $Y_1$  et  $Y_2$  telles que :

$$p \in \mathcal{K}_{a,b} \Leftrightarrow \exists Y_1, Y_2 \succeq 0 / p = \Lambda^*(Y_1, Y_2) \quad (\text{G.2})$$

La définition de l'opérateur linéaire  $\Lambda^*$  et les dimensions des matrices  $Y_1$  et  $Y_2$  dépendent de la parité du degré du polynôme  $P(w)$ .

Pour  $n$  impair, on prend  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)} \succeq 0$ , où  $m = (n-1)/2$ . Soit  $H_{k,i} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$  les matrices de Hankel ne contenant que des uns dans la  $i$ -ème antidiagonale et des zéros ailleurs :

$$H_{k,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \quad H_{k,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \quad H_{k,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{G.3})$$

Dans ce cas, l'opérateur  $\Lambda^*$  est défini comme :

$$\Lambda^*(Y_1, Y_2) = \begin{bmatrix} tr(Y_1(-aH_{m,1})) + tr(Y_2(bH_{m,1})) \\ tr(Y_1(H_{m,1} - aH_{m,2})) + tr(Y_2(bH_{m,2} - H_{m,1})) \\ \vdots \\ tr(Y_1(H_{m,i-1} - aH_{m,i})) + tr(Y_2(bH_{m,i} - H_{m,i-1})) \\ \vdots \\ tr(Y_1H_{m,2m+1}) + tr(Y_2(-H_{m,2m+1})) \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

Pour  $n$  pair, on prend  $Y_1 \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)} \succeq 0$  et  $Y_2 \in \mathbb{R}^{m \times m} \succeq 0$ , où  $m = n/2$ . Dans ce cas, l'opérateur  $\Lambda^*$  est défini par :

$$\Lambda^*(Y_1, Y_2) = \begin{bmatrix} tr(Y_1H_{m,1}) + tr(Y_2(-abH_{m-1,1})) \\ tr(Y_1H_{m,2}) + tr(Y_2((b+a)H_{m-1,1} - abH_{m-1,2})) \\ tr(Y_1H_{m,3}) + tr(Y_2((b+a)H_{m-1,2} - H_{m-1,1} - abH_{m-1,3})) \\ \vdots \\ tr(Y_1H_{m,i}) + tr(Y_2((b+a)H_{m-1,i-1} - H_{m-1,i-2} - abH_{m-1,i})) \\ \vdots \\ tr(Y_1H_{m,2m}) + tr(Y_2((b+a)H_{m-1,2m-1} - H_{m-1,2m-2})) \\ tr(Y_1H_{m,2m+1}) + tr(Y_2(-H_{m-1,2m-1})) \end{bmatrix} \quad (\text{G.5})$$

## Non-négativité des polynômes sur un intervalle infini

Un polynôme  $P(w)$  est non-négatif sur  $\mathbb{R}$  si et seulement s'il existe une matrice symétrique semi-définie positive  $Y \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$  telle que  $p$ , le vecteur des coefficients de  $P(w)$ , vérifie :

$$p \in \mathcal{K}_\infty \Leftrightarrow \exists Y \succeq 0 / p = \Lambda^*(Y) \quad (\text{G.6})$$

où l'opérateur linéaire  $\Lambda^*$  est défini par :

$$\Lambda^*(Y)(j) = tr(YH_{m,j}), \quad j = 1 \dots 2m + 1 \quad (\text{G.7})$$

---

## Bibliographie

---

- [1] P. R. Arantes Gilz, M. M. Joldes, C. Louembet, and F. Camps. Model predictive control for rendezvous hovering phases based on a novel description of constrained trajectories. In *20th IFAC World Congress*, 2017. accepté.
- [2] P. R. Arantes Gilz and C. Louembet. Predictive control algorithm for spacecraft rendezvous hovering phases. *2015 European Control Conference (ECC)*, Jul 2015.
- [3] P.R. Arantes Gilz. A non-linear simulator written in C for orbital spacecraft rendezvous applications. working paper or preprint, December 2016.
- [4] Y. Ariba, D. Arzelier, and L. Urbina. A new glideslope guidance algorithm for minimum-fuel fixed-time elliptic rendezvous using semidefinite programming. In *20th IFAC World Congress*, 9-14 July 2017.
- [5] Y. Ariba, D. Arzelier, L.S. Urbina, and C. Louembet. V-bar and r-bar glideslope guidance algorithms for fixed-time rendezvous : A linear programming approach. *IFAC-PapersOnLine*, 49(17) :385–390, 2016.
- [6] D. Arzelier, F. Bréhard, N. Deak, M. Joldes, C. Louembet, A. Rondepierre, and R. Serra. Linearized impulsive fixed-time fuel-optimal space rendezvous : A new numerical approach. In *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, volume 49, pages 373–378, 2016.
- [7] D. Arzelier, M. Kara-Zaitri, C. Louembet, and A. Delibasi. Using polynomial optimization to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(5) :1567–1576, Sep 2011.
- [8] D. Arzelier, C. Louembet, A. Rondepierre, and M. Kara-Zaitri. A new mixed iterative algorithm to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 159(1) :pp. 210–230, October 2013.
- [9] D. Arzelier, C. Louembet, and S. Urbina. Modélisation unifiée 6 degrés de liberté des problèmes de guidage/contrôle pour les opération spatiales de proximité. Rapport R&T n° 15064, LAAS-CNRS, Mars 2015. R&T R-S13/BS-0005-014. Convention CNES n° 130841.
- [10] U. Ascher, R. Mattheij, and Russell R. *Numerical solution of boundary value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs NJ, 1988.
- [11] J.-P. Aubin. Impulse differential equations and hybrid systems : A viability approach. *Lecture Notes, University of California at Berkeley*, 2000.

- [12] D. Bainov and P. Simeonov. *Impulsive differential equations : periodic solutions and applications*, volume 66 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. 1993.
- [13] R.H. Battin. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. AIAA, 1999.
- [14] A. Ben-Tal and Nemirovski A. Robust solutions to uncertain linear programs. Technical Report 6/95, Israel Institute of Technology, Technion City, Haifa, Israel, 1995.
- [15] A. Ben-Tal and Nemirovski A. Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4) :769–805, November 1998.
- [16] A. Ben-Tal and Nemirovski A. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25(1) :1–13, 1999.
- [17] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski. *Robust Optimization*. Princeton University Press, 2009.
- [18] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, 88(3) :411–424, 2000.
- [19] J.C. Berges, P. Cayeux, A. Gaudel-Vacaresse, and B. Meyssignac. Cnes approaching guidance experiment on ffiord. In *20th. International Symposium on Space Flight Dynamics*, Annapolis, Maryland, USA, septembre 2007.
- [20] D. Bertsekas and S. Schreve. *Stochastic Optimal Control : The Discrete-Time Case*. Academic Press, 1978.
- [21] D. Bertsimas and J. Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*. 1997.
- [22] J.T. Betts. Optimal three-burn orbital transfer. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15 :861–864, 1977.
- [23] J.T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(2) :193–207, 1998.
- [24] J.T. Betts. *Practical methods for optimal control using nonlinear programming*. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphie, Pennsylvanie, USA, 2001.
- [25] P. Blanc-Paques, E. Gogibus, C. Louembet, and M. Kara-Zaitri. Evaluation of autonomous guidance techniques for rendezvous. In *4<sup>th</sup> International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques*, Madrid, Spain, 3-6 mai 2010.
- [26] H.G. Bock and K.J. Plitt. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems. In *IFAC 9<sup>th</sup> World congress*, Budapest, Hongrie, 1984.
- [27] S. Boyd, L. Xiao, and A. Mutapcic. Subgradient methods. *Lecture notes of EE392o, Stanford University, Autumn Quarter*, 2004, 2003.
- [28] L. Breger and J How. Safe trajectories for autonomous rendezvous of spacecraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 31(5) :1478–1489, 2008.
- [29] L. Breger, G. Inalhan, M. Tillerson, and J. How. *Modern Astrodynamics*, chapter Cooperative spacecraft formation flying : model predictive control with open and closed loop robustness. Elsevier, 2006.
- [30] M. Brentari, D. Arzelier, C. Louembet, L.S. Urbina, and L. Zaccarian. A hybrid control framework for impulsive control of satellite rendezvous. *2016 American Control Conference (ACC)*, Jul 2016.
- [31] M. Brentari, S. Urbina, D. Arzelier, C. Louembet, and L. Zaccarian. A hybrid control framework for impulsive control of satellite rendezvous. working paper or preprint, February 2017.
- [32] C. Briat and A. Seuret. Convex dwell-time characterizations for uncertain linear impulsive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(12) :3241–3246, Dec 2012.

- [33] R. A. Broucke. Solution of the elliptic rendezvous problem with the time as independent variable. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(4) :615–621, Jul 2003.
- [34] R.G. Brusch. Constrained impulsive trajectory optimization for orbit-to-orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2 :204–212, 1979.
- [35] T.E. Carter. Optimal impulsive space trajectories based on linear equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(2), août 1991.
- [36] T.E. Carter. State transition matrices for terminal rendezvous studies : Brief survey and new examples. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(1) :148–155, janvier-février 1998.
- [37] T.E. Carter. Necessary and sufficient conditions for optimal impulsive rendezvous with linear equations of motion. *Dynamics and Control*, 10 :219–227, 2000.
- [38] T.E. Carter and S.A. Alvarez. Quadratic-based computation of four-impulse optimal rendezvous near circular orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(1) :109–1117, 2000.
- [39] T.E. Carter and J. Brient. Fuel-optimal rendezvous for linearized equations of motion. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15(6) :1411–1416, Nov 1992.
- [40] T.E. Carter and J. Brient. Linearized impulsive rendezvous problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 86(3), septembre 1995.
- [41] S. Chevillard, J. Harrison, M. Joldeş, and Ch. Lauter. Efficient and accurate computation of upper bounds of approximation errors. *Theoretical Computer Science*, 412(16) :1523–1543, Apr 2011.
- [42] M. Claeys, D. Arzelier, D. Henrion, and J-B. Lasserre. Measures and LMI for impulsive optimal control with applications to space rendezvous problems. *2012 American Control Conference (ACC)*, Jun 2012.
- [43] M. Claeys, D. Arzelier, D. Henrion, and J-B. Lasserre. Moment LMI approach to ltv impulsive control. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec 2013.
- [44] W.H. Clohessy. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, 27(9) :653–658, 1960.
- [45] S. Dashkovskiy, M. Kosmykov, A. Mironchenko, and L. Naujok. Stability of interconnected impulsive systems with and without time delays, using Lyapunov methods. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 6(3) :899–915, Aug 2012.
- [46] G. Deaconu. *On the trajectory design, guidance and control for spacecraft rendezvous and proximity operations*. Theses, Université Paul Sabatier - Toulouse III, October 2013.
- [47] G. Deaconu, C. Louembet, and A. Théron. Constrained periodic spacecraft relative motion using non-negative polynomials. In *American Control Conference (ACC 2012)*, pages pp.6715–6720, Montreal, Canada, June 2012.
- [48] G. Deaconu, C. Louembet, and A. Théron. Sécurisation passive du rendez-vous orbital par des polynômes non négatifs. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA2012)*, pages pp. 811–816, Grenoble, France, July 2012.
- [49] G. Deaconu, C. Louembet, and A. Theron. A two-impulse method for stabilizing the spacecraft relative motion with respect to a periodic trajectory. *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec 2012.
- [50] G. Deaconu, C. Louembet, and A. Theron. Minimizing the effects of navigation uncertainties on the spacecraft rendezvous precision. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 37(2) :695–700, Mar 2014.
- [51] G. Deaconu, C. Louembet, and A. Theron. Designing continuously constrained spacecraft relative trajectories for proximity operations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38(7) :1208–1217, Jul 2015.

- [52] E.D. Dickmanns and H.K. Well. Approximate solution of optimal control problems using third-order hermite polynomial functions. In Springer-Verlag, editor, *Proceedings of the 6<sup>th</sup> Technical Conference on Optimization Techniques*, New York 1975.
- [53] L. El Ghaoui, F. Oustry, and H. Lebre. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM J. Optimization*, 9(1) :33–52, 1998.
- [54] G. ELnagar, M. Kazemi, and M. Razzaghi. The pseudospectral legendre method for discretizing optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(10), 1995.
- [55] P. Enright and B. Conway. Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using collocation and nonlinear programming. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 14(5) :981–985, 1991.
- [56] P. Enright and B. Conway. Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and non linear programming. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15(4) :994–1002, 1992.
- [57] W. Fehse. *Automated rendezvous and docking of spacecraft*, volume 16. Cambridge university press, 2003.
- [58] M. Fiacchini, S. Tarbouriech, and C. Prieur. Exponential Stability for Hybrid Systems with Saturations. In *Hybrid systems with constraints*, pages 179–212. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., May 2013.
- [59] S.L. Fraga and F.L. Pereira. Hamilton-jacobi-bellman equation and feedback synthesis for impulsive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1) :244–249, Jan 2012.
- [60] J.LL Garrison, T.G. Gardner, and P. Axelrad. Relative motion in highly elliptical orbits. *Spaceflight mechanics*, 1995.
- [61] C. Gazzino, D. Arzelier, D. Losa, C. Louembet, C. Pittet, and L. Cerri. Optimal control for minimum-fuel geostationary station keeping of satellites equipped with electric propulsion. *IFAC-PapersOnLine*, 49(17) :379–384, 2016. 20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (ACA)Sherbrooke, Quebec, Canada, 21-25 August 2016.
- [62] C Gazzino, C. Louembet, D. Arzelier, N. Jozefowicz, D. Losa, C. Pittet, and L. Cerri. Integer programming for optimal control of geostationary station keeping of low-thrust satellites. In *20th IFAC World Congress*, 2017. accepté.
- [63] J. Gerstmayr, A. Dorninger, R. Eder, P. Gruber, D. Reischl, M. Saxinger, M. Schörgenhumer, A. Humer, K. Nachbagauer, A. Pechstein, et al. Hotint : A script language based framework for the simulation of multibody dynamics systems. In *ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages V07BT10A047–V07BT10A047. American Society of Mechanical Engineers, 2013.
- [64] R. Goebel, R.G. Sanfelice, and A.R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems : modeling, stability, and robustness*. Princeton University Press, 2012.
- [65] P. J. Goulart, E. C. Kerrigan, and J. M. Maciejowski. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 42(4) :523–533, Apr 2006.
- [66] W.M. Haddad, V. Chellaboina, and S.G. Nersesov. *Impulsive and hybrid dynamical systems*. Princeton Series on Applied Mathematics. Princeton University Press, 2006.
- [67] C. Hargraves and S. Paris. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation. *AIAA Journal of Guidance and Control*, 10, 1987.
- [68] D. Henrion, J.B. Lasserre., and Loeferberg. Gloptipoly 3 : moments, optimization and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 24(4-5) :761–779, 2009.
- [69] G.W. Hill. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics*, 1(1) :5–26, 1878.

- [70] B. Houska, H.J. Ferreau, and M. Diehl. ACADO Toolkit – An Open Source Framework for Automatic Control and Dynamic Optimization. *Optimal Control Applications and Methods*, 32(3) :298–312, 2011.
- [71] J.P. How and M. Tillerson. Analysis of the impact of sensor noise on formation flying control. volume 5, pages 3986 –3991 vol.5, 2001.
- [72] D. G. Hull. Conversion of optimal control problems into parameter optimization problems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 20(1), 1997.
- [73] D.G. Hull and J.L. Speyer. Optimal reentry and plane-change trajectories. *Journal of Astronautical Sciences*, 30(2) :117–130, 1982.
- [74] L. Jaulin, M. Kieffer, and A. E. Didrit, O.Ben-Tal. *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer-Verlag, 2001.
- [75] D. Jezewski. Primer vector theory and applications. Note technique TR R-454, NASA, novembre 1975.
- [76] D. Jezewski. Primer vector theory applied to the linear relative-motion equations. *Optimal Control Applications and Methods*, 1 :387–401, 1980.
- [77] M. Joldes. *Rigorous Polynomial Approximations and Applications*. Theses, Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, September 2011.
- [78] T. Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [79] M. Kara-Zaitri, D. Arzelier, A. Delibasi, and C. Louembet. Polynomial optimization for the solution of fuel-optimal impulsive rendezvous using primer vector theory. *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec 2010.
- [80] M. Kara Zaitri, D. Arzelier, and C. Louembet. Mixed iterative algorithm for solving optimal impulsive time-fixed rendezvous problem. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Aug 2010.
- [81] S. Kerambrun. Evaluation des performances des algorithmes de guidage. Note technique N.T. 5 GNC-T.TCN.738703.ASTRv2, Astrium SAS, mars 2009.
- [82] S. Kerambrun. Evaluation des performances des algorithmes de guidage. Technical report, EADS Astrium, 2009.
- [83] L. Kos, T. Polsgrovet, R. Hopkins, D. Thomas, and J. Sims. Overview of the development for a suite of low-thrust trajectory analysis tools. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Keystone, Colorado, August 2006.
- [84] P. Labourdette, E. Julien, F. Chemama, and D. Carbonne. ATV Jules Verne mission maneuver plan. In *21<sup>st</sup> International Symposium on space flight dynamics*, Toulouse, France, 2008.
- [85] W. Langson, I. Chrysoschoos, S.V. Raković, and D.Q. Mayne. Robust model predictive control using tubes. *Automatica*, 40(1) :125–133, Jan 2004.
- [86] R. Larsson, S. Berge, P. Bodin, and U. Jönsson. Fuel efficient relative orbit control strategies for formation flying and rendezvous within prisma. In *29<sup>th</sup> Annual AAs Guidance and Control Conference*, Breckenridge, Colorado, 2006.
- [87] R. Larsson, J. Mueller, S. Thomas, B. Jakobsson, and P. Bodin. Orbit constellation safety on the prisma in-orbit formation flying test bed. In *3rd Int. Symp. on Formation Flying, Missions and Technologies*, Noordwijk, Pays-Bas, avril 2008.
- [88] J.B. Lasserre. A semidefinite programming approach to the generalized problem of moments. *Mathematical Programming*, 112 :65–92, 2008.
- [89] J.B. Lasserre. *Moments, positive polynomials and their applications*, volume 1. World Scientific, 2009.

- [90] K. Laßwitz. *Auf zwei Planeten : Roman in zwei Büchern*. 1897.
- [91] D. F. Lawden. *Optimal trajectories for space navigation*. Butterworths, 1963.
- [92] D.F. Lawden. Optimal transfer via tangential ellipses. *Journal of the British Interplanetary Society*, 11(6) :278–289, 1952.
- [93] D.F. Lawden. Optimal transfer between circular orbits about two planets. *Astronautica Acta*, 1 :89–99, 1955.
- [94] D.F. Lawden. Transfer between circular orbits. *Jet Propulsion*, 26(7) :555–558, 1956.
- [95] D.F. Lawden. Impulsive transfer between elliptical orbits. In G. Leitmann, editor, *Optimization techniques with applications to aerospace systems*, pages 323–350. Academic Press, New York, NY, USA, 1962.
- [96] J. Lévine and D.V. Nguyen. Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices. *Systems & Control Letters*, 48(1) :69–75, 2003.
- [97] A.S. Lewis and M.L. Overton. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. *Mathematical Programming*, 141(1-2) :135–163, Feb 2012.
- [98] P.M. Lion and M. Handelsman. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. *AIAA Journal*, 6(1) :127–, 1968.
- [99] J.S. Llorente, A. Agenjo, C. Carrascosa, C. de Negueruela, A. Mestreau-Garreau, A. Cropp, and A. Santovincenzo. Proba-3 : Precise formation flying demonstration mission. *Acta Astronautica*, 82(1) :38–46, Jan 2013.
- [100] C. Louembet, D. Arzelier, and G. Deaconu. Robust rendezvous planning under maneuver execution errors. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38(1) :76–93, Jan 2015.
- [101] C. Louembet, D. Arzelier, G. Deaconu, and P. Blanc-Paques. Robust rendezvous planning under navigation and maneuvering errors. In *8th ESA International Conference on Guidance, Navigation and Control System*, June 2011.
- [102] C. Louembet, F. Cazaurang, A. Zolghadri, C Charbonnel, and C Pittet. Path planning for satellite slew manoeuvres : a combined flatness and collocation-based approach. *IET control theory & applications*, 3(4) :481–491, 2009.
- [103] C. Louembet and F. Gouaisbaut. Optimal guidance and control for flexible and maneuvering spacecraft. Rapport de Contrat n° 16247, LAAS-CNRS, 2016. Project ESA ITI. Contract Airbus defence & space #4500543955.
- [104] D.G. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, 1969.
- [105] Y Luo, G Tang, and Y Lei. Optimal multi-objective linearized impulsive rendezvous. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(2) :383–389, 2007.
- [106] D.Q. Mayne, E. C. Kerrigan, and P. Falugi. Robust model predictive control : advantages and disadvantages of tube-based methods. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :191–196, Jan 2011.
- [107] R.G. Melton. Time-explicit representation of relative motion between elliptical orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(4) :604–610, Jul 2000.
- [108] R. Moore. *Interval Arithmetic*. Prentice-Hall, 1966.
- [109] J. Mueller and R. Larsson. Collision avoidance maneuver planning with robust optimization. In *7th International ESA Conference on Guidance, Navigation & Control Systems*, Tralee, Count Kerry, Ireland, 2-5 June 2008.
- [110] P. Naghshtabrizi, J.P. Hespanha, and A.R. Teel. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. *Systems & Control Letters*, 57(5) :378–385, May 2008.

- [111] D. Nesic, A.R. Teel, and L. Zaccarian. Stability and performance of SISO control systems with first-order reset elements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11) :2567–2582, Nov 2011.
- [112] Y. Nesterov. *Squared Functional Systems and Optimization Problems*, pages 405–440. Springer US, Boston, MA, 2000.
- [113] L.W. Neustadt. Optimization, a moment problem, and nonlinear programming. *SIAM Journal of Control*, 2(1) :33–53, 1964.
- [114] F. Nilsson, P. Bodin, C. Chasset, B. Jakobsson, R. Larsson, R. Noteborn, and E. Vinterhav. Autonomous rendezvous experiments on the prisma in-orbit formation flying test bed. In *3rd Int. Symp. on Formation Flying, Missions and Technologies*, Noordwijk, Pays-Bas, avril 2008.
- [115] S.W. Paris, J.P. Riehl, and W.K. Sjaww. Enhanced procedures for direct trajectory optimization using nonlinear programming and implicit integration. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Keystone, Colorado, August 21-24 2006.
- [116] F. L. Pereira, G. N. Silva, and V. Oliveira. Invariance for impulsive control systems. *Automation and Remote Control*, 69(5) :788–800, May 2008.
- [117] F.L. Pereira, F.A.C.C. Fontes, A.P. Aguiar, and J.B. De Sousa. *An Optimization-Based Framework for Impulsive Control Systems*, pages 277–300. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [118] F.L. Pereira and G.N. Silva. Stability for impulsive control systems. *Dynamical Systems*, 17(4) :421–434, 2002.
- [119] N. Petit, M. Milam, and R. Murray. Inversion based constrained trajectory optimization. *IFAC Proceedings Volumes*, 34(6) :1211 – 1216, 2001. 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems 2001, St Petersburg, Russia, 4-6 July 2001.
- [120] N. Petit and R. Milam, M.and Murray. Constrained trajectory generation for micro-satellite formation flying. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, page 4030, 2001.
- [121] J.E. Prussing. *Optimal multiple-impulse orbital rendezvous*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, août 1967.
- [122] J.E. Prussing. Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. *AIAA Journal*, 7(5) :928–935, 1969.
- [123] J.E. Prussing. Optimal two- and three-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 40(6) :952–959, 2003.
- [124] R. Reemtsen and S. Görner. *Numerical Methods for Semi-Infinite Programming : A Survey*, pages 195–275. Springer US, Boston, MA, 1998.
- [125] A Richards, T Schouwenaars, J How, and E Feron. Spacecraft trajectory planning with avoidance constraints using mixed-integer linear programming. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(4) :755–764, 2002.
- [126] J.A. Richards. *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [127] A Robertson, G Inalhan, and J. How. Spacecraft formation flying control design for the orion mission. In *American Control Conference*, volume 6, San Diego, CA, USA, 2-4 June 1999.
- [128] A.J. Roenneke, C. Jansch, and A. Markl. *Advanced Launch and reentry Trajectory Optimization Software (ALTOS) documentation*. European Space Science and Technology Center (ESA), Noordwijk, 1995.
- [129] L. Ros, A. Sabater, and F. Thomas. An ellipsoidal calculus based on propagation and fusion. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 32(4) :430 –442, aug. 2002.

- [130] H.H. Rosenbrock. *Multivariable and State-Space Theory*. In [130], 1970.
- [131] A.L. Soyster. Convex programming with set-inclusive constraints and application to inexact linear programming. *Operations Research*, 21 :1154–1157, 1973.
- [132] R.G. Stern and J.E. Potter. Optimization of midcourse velocity corrections. In *First IFAC Symposium Peaceful Uses of Automatic Control in Outer Space*, pages 70–83, Stavanger, juin 1966.
- [133] Inria Saclay Team Commands. Bocop : an open source toolbox for optimal control. <http://bocop.org>, 2016.
- [134] M. Tillerson. Coordination and control of multiple spacecraft using convex optimization techniques. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, Juin 2002.
- [135] M. Tillerson, G. Inalhan, and J.P. How. Co-ordination and control of distributed spacecraft systems using convex optimization techniques. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(2-3) :207–242, 2002.
- [136] E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert, 2005.
- [137] J. Tschauner. The elliptic orbit rendezvous. In *AIAA 4th Aerospace Sciences Meeting*, Los Angeles, Californie, USA, Juin 1966.
- [138] K.E. Tsiolkovsky. Exploration of the universe with reaction machines. *The Science Review*, 5, 1903.
- [139] J. Verschelde. Algorithm 795 : Phcpack : A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 25(2) :251–276, 1999.
- [140] K. Yamanaka and F. Ankersen. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25(1), 2002.