



**HAL**  
open science

# Stabilité de Lyapunov de systèmes couplés impliquant une équation de transport

Mohammed Safi

► **To cite this version:**

Mohammed Safi. Stabilité de Lyapunov de systèmes couplés impliquant une équation de transport. Automatique. Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace, 2018. Français. NNT: . tel-01975119

**HAL Id: tel-01975119**

**<https://laas.hal.science/tel-01975119v1>**

Submitted on 9 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

---

---

Présentée et soutenue le *31/10/2018* par :

**MOHAMMED SAFI**

**Stabilité de Lyapunov de systèmes couplés  
impliquant une équation de transport**

---

---

## JURY

LUCIE BAUDOIN	CR LAAS-CNRS Toulouse	Directrice de Thèse
MICHAEL DI LORETO	MdC INSA Lyon	Examineur
FLORENT DI MEGLIO	MdC MINES ParisTech Paris	Examineur
FRÉDÉRIC MAZENC	DR INRIA Gif-sur-Yvette	Rapporteur
CONSTANTIN MORĂRESCU	Pr Univ de Lorraine Nancy	Rapporteur
ALEXANDRE SEURET	DR LAAS-CNRS Toulouse	Directeur de Thèse
SOPHIE TARBOURIECH	DR LAAS-CNRS Toulouse	Présidente du jury

---

**École doctorale et spécialité :**

*EDSYS : Automatique*

**Unité de Recherche :**

*Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (UPR 8001)*

**Directeur(s) de Thèse :**

*Lucie Baudouin et Alexandre Seuret*

**Rapporteurs :**

*Frédéric Mazenc et Constantin Morărescu*

# Remerciements

Cette thèse constitue une riche expérience qui ne peut s'achever sans remercier les personnes qui m'ont encadré, aidé et soutenu au cours de ces trois ans de thèse au sein de l'équipe MAC (Méthodes et Algorithmes de commande). Pourtant il existe une difficulté, celle de n'oublier personne. C'est pourquoi je tiens à remercier par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page.

Tout d'abord, je remercie infiniment mes directeurs Lucie BAUDOIN et Alexandre SEURET pour tout le temps qu'ils m'ont consacré, leur directives précieuses, et pour la qualité de leur suivi durant toute la période de ma thèse. Leur rigueur scientifique, leur grande disponibilité et leurs qualités humaines m'ont profondément touché.

Ensuite, je remercie Professeur Frédéric MAZENC et Professeur Constantin MORĂRESCU d'avoir accepté de relire ma thèse et d'en être rapporteurs. Je remercie également Madame Sophie TARBOURIECH, Monsieur Michael DI LORETO et Monsieur Florent DI MEGLIO d'avoir accepté de participer au processus d'évaluation et de faire partie des membres du jury de la soutenance.

Je remercie Frédéric GOUAISBAUT pour sa générosité intellectuelle, ses conseils avisés, sa rigueur et son intégrité scientifique. Merci également d'avoir toujours été disponible pour des explications constructives.

Mention particulière à toute l'équipe MAC de m'avoir accueilli chaleureusement, permanents, thésards et stagiaires avec qui j'ai partagé des moments inoubliables. Merci pour la contribution au bon déroulement du travail et à la bonne ambiance dans l'équipe.

Enfin, je tiens à remercier très sincèrement tous les membres de ma famille, notamment mon cher Papa qui me protège de là-haut, ma chère Maman et mes deux chères sœurs, pour leur soutien et leurs encouragements constants.



# Table des matières

<b>Table des sigles et acronymes</b>	ix
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation à travers quelques exemples applicatifs . . . . .	2
1.2 Notion de transport . . . . .	5
1.3 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	6
1.4 Lien entre systèmes EDO-EDP et à retard . . . . .	14
1.5 Objectif et contributions de la thèse . . . . .	16
<b>2 Stabilité d'un système couplé simple</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Formulation du problème . . . . .	21
2.3 Existence et régularité des solutions du système couplé EDO-EDP . . . . .	22
2.4 Fonctionnelles de Lyapunov candidates . . . . .	23
2.5 Conditions de stabilité du système EDO-EDP de transport . . . . .	31
2.6 Applications numériques . . . . .	35
2.7 Conclusion . . . . .	39
<b>3 Système couplé EDO-EDP général</b>	<b>41</b>
3.1 Introduction . . . . .	41
3.2 Formulation du problème . . . . .	42
3.3 Projection sur les polynômes de Legendre . . . . .	44
3.4 Fonctionnelle de Lyapunov candidate . . . . .	46
3.5 Stabilité $L^2$ du système couplé EDO-EDP de transport . . . . .	47

3.6	Quelques cas particuliers du système couplé . . . . .	54
3.7	Conclusion . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Intérêts de la modélisation du retard dans un système par une équation de transport</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Modèles de transformation . . . . .	65
4.3	Analyse de stabilité . . . . .	70
4.4	Applications numériques . . . . .	72
4.5	Conclusion . . . . .	75
	<b>Conclusion</b>	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Outils</b>	<b>81</b>
A.1	Polynômes de Legendre . . . . .	81
A.2	Inégalité de Bessel . . . . .	83
A.3	Inégalité de Grönwall . . . . .	83
A.4	Inégalité de Young . . . . .	84
	<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

# Table des figures

1.1	Réponse indicielle d'un modèle du second ordre et un modèle du premier ordre retardé. . . . .	1
1.2	Schéma du contrôle de température ([CWD12]). . . . .	3
1.3	Exemple d'un réseau de communication ([Esp+16]). . . . .	4
1.4	Compartiment du serveur ([Esp+16]). . . . .	4
1.5	Illustration du phénomène de transport. . . . .	6
1.6	Régions de stabilité dans le plan $(K, h)$ du système (1.24) utilisant Théorème 1.2. . . . .	13
1.7	Schéma explicatif de l'équation de transport . . . . .	15
2.1	Illustration du système couplé EDO-EDP de transport de l'équation (2.1). . . . .	22
2.2	Évolution de la vitesse de convergence $\delta$ obtenue pour différents ordres d'approximation $N$ en fonction de la vitesse $\rho$ de l'équation de transport utilisé. . . . .	37
2.3	Évolution de la vitesse de convergence $\delta$ obtenue pour différents ordres d'approximation $N$ en fonction de la vitesse $\rho$ de l'équation de transport utilisée. . . . .	38
2.4	Régions de stabilité dans le plan $(K, h)$ obtenues par Théorème 2.1 pour plusieurs valeurs de $N$ avec $\delta = 0$ . . . . .	39
3.1	Illustration du système couplé EDO-EDP de transport (3.1). . . . .	42
3.2	Vitesse de transport minimale en fonction de $\sigma$ et pour plusieurs valeurs de $N$ . . . . .	52
3.3	Simulation de $X(t)$ du système couplé avec $\rho_1 = \rho_2 = 1$ . . . . .	53
3.4	Vitesse de transport minimale en fonction de $\sigma$ pour plusieurs valeurs de $N$ . . . . .	53
3.5	Figure représentant les régions d'instabilité (zone blanche) et les régions stables garanties par le Corollaire 3.2 avec $\delta = 0$ et pour plusieurs valeurs de $N$ de 1 à 9. . . . .	58
4.1	Illustration du système (4.3) équivalent au système à retard (4.1). . . . .	64
4.2	Illustration du modèle réduit. . . . .	65
4.3	Illustration du modèle discrétisé à l'ordre 2. . . . .	66

4.4	Illustration du modèle général discrétisé à l'ordre $M$ . . . . .	68
4.5	L'erreur d'efficacité $\epsilon_\delta$ de l'estimation de la vitesse de convergence $\delta_{\text{Th1}}$ comparée aux résultats fréquentiels $\delta_{\text{freq}}$ en fonction du nombre de variables de décision DV. . . . .	73
4.6	L'erreur d'efficacité $\epsilon_h$ du retard $h_{\text{Th1}}$ comparée aux résultats fréquentiels $h_{\text{freq}}$ en fonction du nombre de variables de décision DV. . . . .	74
A.1	Représentation graphique des cinq premiers polynômes de Legendre $P_k(x)$ , $k = 0, 1, 2, 3$ et $4$ . . . . .	82
A.2	Représentation graphique des cinq premiers polynômes de Legendre décalés $\mathcal{L}_k(x)$ , $k = 0, 1, 2, 3$ et $4$ . . . . .	83

# Liste des tableaux

2.1	Vitesse minimale permise $\rho_{min}$ dans l'exemple 1. . . . .	36
2.2	Vitesse de transport minimale et maximale permise dans l'exemple 2. . . . .	38
3.1	Vitesse de transport minimale et maximale autorisée. . . . .	56
4.1	La vitesse de convergence $\delta$ en fonction de $(M, N)$ . . . . .	72
4.2	Le nombre de variables de décision DV en fonction de la paire $(M, N)$ . . . . .	74



# Notations

## Ensembles :

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers positifs.
$\mathbb{R}^n$	Espace euclidien de dimension $n$ et de norme $ \cdot _n$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n$ lignes et $m$ colonnes.
$\mathbb{S}^n$	Ensemble des matrices symétriques de dimension $n \times n$ .
$\mathbb{S}_+^n$	Ensemble des matrices symétriques définies positives de dimension $n \times n$ .
$\mathbb{D}_+^n$	Ensemble des matrices diagonales définies positives.
$\mathcal{M}_\Lambda^m$	Ensemble des matrices de $\mathbb{S}_+^n$ commutant avec une matrice $\Lambda$ donnée.
$L^2((0, 1); \mathbb{R}^n)$	Espace des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ , associé à la norme $\ u\  = \left( \int_0^1  u(x) ^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ .

## Matrices :

$I_n$	Matrice identité de dimension $n$ .
$0_n$	Matrice nulle de dimension $n$ .
$\text{diag}(A, B)$	Matrice block diagonale égale à $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ .
$\begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix}$	L'étoile $\star$ remplace l'entrée symétrique du block non diagonal correspondant à $B^T$ .
$\text{H}_e(A)$	Pour chaque matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on définit $\text{H}_e(A) = A + A^T$ .
$\lambda_{\max}(A)$	Valeur propre maximale d'une matrice symétrique $A$ .
$\lambda_{\min}(A)$	Valeur propre minimale d'une matrice symétrique $A$ .

## Opérateurs :

$\partial_t$	Dérivée partielle de $z$ par rapport à la variable temporelle $t$ .
$\partial_x$	Dérivée partielle de $z$ par rapport à la variable spatiale $x$ .
$\dot{f}(t)$	Dérivée temporelle de la fonction $f(t)$ .
$X_t$	Cette notation remplace $X_t(\theta) = X(t + \theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0]$ où $h$ est un scalaire positif donné.

## Abréviations :

EDP	Équations aux Dérivées Partielles
EDO	Équations Différentielles Ordinaires
LMI	Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequalities)
SAR	Système À Retard



# Introduction

---

La modélisation d'un système physique est une phase essentielle dans une démarche scientifique qui vise l'analyse de son comportement et son contrôle pour améliorer ses performances. Elle permet d'avoir une représentation simplifiée d'un système ou d'un phénomène physique. Les équations différentielles ordinaires (EDOs) et les équations aux dérivées partielles (EDPs) ont largement été exploitées pour la modélisation de systèmes physiques [Kha96], [Cor07] et [BC16]. Il apparait alors un compromis entre la commodité de l'étude d'un modèle simple (linéaire et de dimension finie par exemple) et la conformité d'un modèle plus élaboré (dimension infinie et/ou non-linéaire) mais dont l'analyse et la commande peuvent générer des problèmes techniques menant à des verrous scientifiques. Il est par exemple possible de produire pour un système physique donné un modèle du second ordre linéaire ou un modèle linéaire du premier ordre retardé (Figure 1.1).

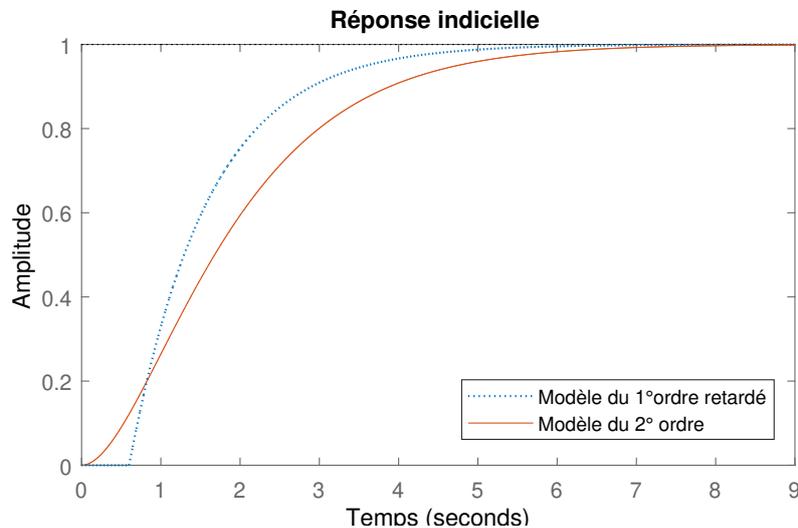


FIGURE 1.1 – Réponse indicielle d'un modèle du second ordre et un modèle du premier ordre retardé.

D'autres systèmes demandent des modèles plus compliqués pour être décrits de manière plus précise. D'où l'idée d'effectuer un couplage entre les deux types d'équations. L'analyse et le contrôle de ces systèmes, couplant EDOs et EDPs, est un sujet très intéressant et attractif, et a fait l'objet de plusieurs articles de recherche scientifique disponibles dans la

littérature ([Krs09], [SGK10], [PWB08], [TPG15] et [PP06] par exemple) mais il reste un grand nombre d’aspects et de verrous théoriques et techniques à traiter. L’intérêt de cette classe de systèmes apparait également dans la possibilité de présenter plusieurs systèmes physiques dans différents domaines tels que le contrôle de température de bâtiments intelligents [Cas+15], contrôle dans les tokamak(plasma en fusion) [Wit+07] ou le contrôle de la circulation (flux de voiture) [JKW06], contrôle de turbulence [Fei+17] ou contrôle d’écluses [BCN+09], parmi beaucoup d’autres applications.

La difficulté première de ce type de système est le couplage entre un état de dimension finie vérifiant les EDOs présentes et un état de dimension infinie, solution de la ou des EDPs. Plus précisément, nous parlons d’état de dimension infinie dans la mesure où il s’agira de fonctions (d’une variable d’espace par exemple), appartenant à un espace fonctionnel de dimension infinie. Il faut donc imaginer une manière de généraliser les outils de l’automatique classique à une classe de systèmes dont la dimension n’est pas finie. Certaines approches d’étude de stabilité de ce type de systèmes consistent par exemple à travailler sur un modèle approché, de dimension finie, afin d’éviter les différentes difficultés du système original. Cependant, un système de grande dimension pourrait être inévitable pour garder la nature du phénomène considéré, conduisant à des difficultés spécifiques. Dans d’autres situations, de telles approximations peuvent ne pas être pertinentes, les principales caractéristiques de la dynamique pourraient être alors négligées. Par exemple, des phénomènes de spillover peuvent se produire (phénomène ou un contrôleur conçu pour stabiliser le système approché à l’ordre  $N$ , excite spécifiquement la première dynamique négligée dans l’étude, c’est à dire le mode d’ordre  $N + 1$ , situation que nous trouvons dans le contrôle des vibrations [Eva98]). Il est donc naturel de dire que l’étude de stabilité ou du contrôle des systèmes couplés impliquant une équation aux dérivées partielles représente un domaine difficile et intéressant de recherche en automatique mais relevant aussi des mathématiques appliquées.

Dans cette thèse, nous nous intéressons en particulier au couplage d’EDO à une équation aux dérivées partielles de transport. Ce problème a été identifié par la communauté d’automatique comme un challenge pour les futures recherches [LL+17]. Ce modèle spécifique peut être utilisé pour la description de plusieurs systèmes physiques dans différents domaines. Nous développons ici deux exemples de motivation de l’utilisation de ce système couplé.

## 1.1 Motivation à travers quelques exemples applicatifs

### 1.1.1 Exemple 1 : Transport d’un flux de gaz

Ce premier exemple d’application concerne le transport d’un flux de gaz (Figure 1.2) étudié dans [SBS17b], [Col+09], [DGL10] et [TPG15].

Il s’agit de considérer un système se composant de deux sous-systèmes caractérisant la dynamique d’une colonne chauffante équipée d’un tube d’évacuation du gaz. La dynamique de la température est exprimée en termes de la masse volumique  $\tau_0$  du gaz dans la colonne

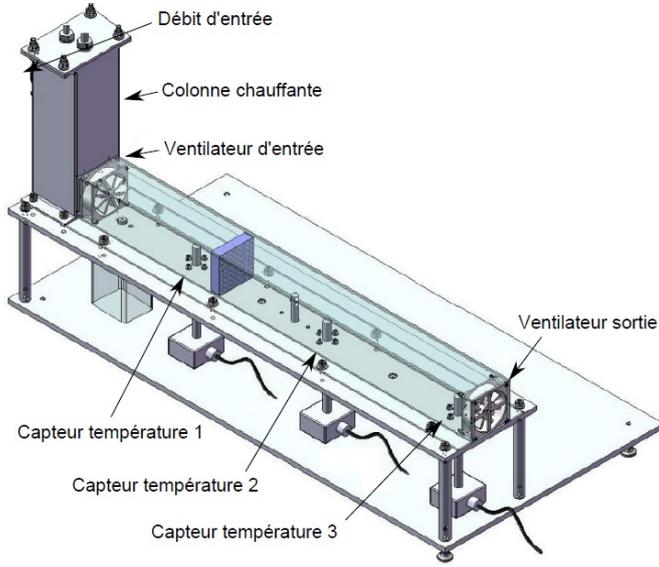


FIGURE 1.2 – Schéma du contôle de température ([CWD12]).

chauffante en introduisant le changement de variable  $\tau_0 = \frac{p_{in}}{RT_0}$ , et est décrite par l'EDO

$$\dot{\tau}_0(t) = -\frac{R\gamma T_{in}\dot{m}_{in}}{p_{in}V_0}\tau_0(t) - \frac{R}{p_{in}V_0C_v}\tau_0(t)dQ + \frac{\gamma\dot{m}_{in}}{V_0},$$

où  $R$  est la constante universelle des gaz et  $T_{in}$  représente la température du gaz à l'entrée du tube.  $T_0$  est la température du gaz.  $V_0$  est le volume de la colonne chauffante et  $\dot{m}_{in}$  représente le débit d'entrée.  $dQ$  représente les échanges thermiques.  $C_v$  est la chaleur spécifique du gaz à volume constant.  $p_{in}$  représente la pression d'entrée.  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  où  $C_p$  est la chaleur spécifique à pression constante du gaz.

La dynamique du fluide dans le tube d'évacuation est modélisée par des équations de transport exprimées en fonction des variables primitives (masse volumique  $\tau$ , vitesse de particule  $\rho$  et pression  $p$ ). Elle est donnée par les équations unidimensionnelles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau(x, t) + \rho \partial_x \tau(x, t) = 0 \quad x \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

La vitesse des particules est donnée par  $\rho = \frac{\dot{m}_{in}}{\tau_0 A_t}$  où  $A_t$  représente la section du tube. Le couplage est appliqué à travers la condition limite définie pour l'entrée du tube. Il est exprimé par la condition suivante :

$$\tau(0, t) = \tau_0(t).$$

Le document [CWD12] contient plus de détails concernant la modélisation de ce système physique par le système couplé EDO-équation de transport.

### 1.1.2 Exemple 2 : Réseaux de communication

Le deuxième exemple concerne la modélisation des réseaux de communication traité dans [Esp+17a] et [Esp+17b] et plus détaillé dans [Esp+16]. Dans ce système informatique, les informations fournies par le serveur sont transmises à travers des canaux de communication numérique. La dynamique du serveur  $y$  est représentée par une EDO, et celle des canaux par des équations de transport à vitesses différentes. Cela nous amène à chercher une représentation générale de ce système où l'EDO est couplée à des équations de transport vectorielles à plusieurs vitesses constantes.

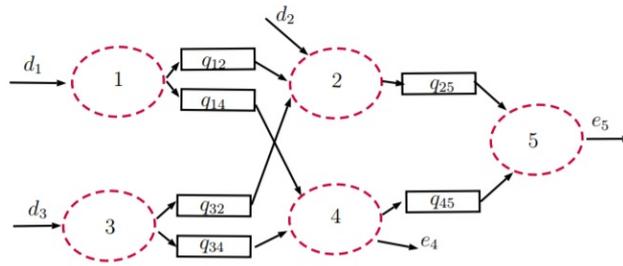


FIGURE 1.3 – Exemple d'un réseau de communication ([Esp+16]).

La Figure 1.3 issue de [Esp+16] présente un exemple de réseau de communication compartimenté, où la dynamique est donnée par des équations aux dérivées partielles et des équations différentielles ordinaires. Les paramètres  $q_{ij}$  représentent les flux d'information circulant dans le réseau et les  $d_i(t)$  sont les flux extérieurs demandés. Les nœuds de 1 à 5 représentent les serveurs contenant un buffer qui stocke les informations à traiter. Ces nœuds sont donnés par la Figure 1.4 (issue de [Esp+16]) où  $v_i$  est la somme des flux entrant du  $i$ -ème buffer,  $r_i$  est la somme des flux sortant,  $z_i$  est la quantité d'information accumulée et  $w_i$  représente le contrôle d'accès au buffer. Le passage des informations d'un nœud à un autre n'est pas instantané et peut avoir un certain retard. Ce dernier est présenté par les lignes de transmission exprimées par des équations de transport à vitesse positive.

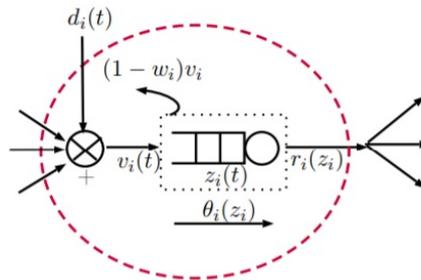


FIGURE 1.4 – Compartiment du serveur ([Esp+16]).

Le modèle complet du réseau décrit par les Figures 1.3 et 1.4 est donné par :

$$\begin{cases} \partial_t q_{ij}(x, t) + \rho_{ij} \partial_x q_{ij}(x, t) = 0, & i \in \mathcal{I}_n, \quad j \in \mathcal{D}_i \\ \dot{z}_i(t) = w_i(t) d_i(t) + \sum_{k \neq i, k \in \mathcal{U}_i} w_i(t) q_{ki}(1, t) - r_i(z_i(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\rho_{ij}$  est la vitesse de transport moyenne des paquets à travers les buffers,  $\mathcal{I}_n$  représente l'ensemble des nombres des compartiments de 1 à  $n$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_i$  est celui des compartiments en aval connectés directement au compartiment indexé par  $i$ , et  $\mathcal{U}_i$  est l'ensemble des compartiments en amont connectés directement au compartiment indexé par  $i$ .

Le couplage est effectué à travers la condition au limite

$$q_{ij}(0, t) = u_{ij}(t) r_i(z_i(t)), \quad r_i \geq 0,$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} q_{ij}(x, 0) = q_{ij}^0(x), & x \in [0, 1] \\ z_i(0) = z_i^0. \end{cases}$$

L'étude de stabilité de ce système couplé impliquant une équation de transport, permettant de présenter d'une manière précise plusieurs systèmes informatiques, a un intérêt considérable et demande des outils d'analyse très efficaces.

La méthode de Lyapunov est l'une des méthodes les plus utilisées dans l'étude de stabilité des systèmes physiques décrits sous forme de réseaux. On peut par exemple citer l'article [Bas+07] qui produit des conditions suffisantes de stabilité pour ce type de systèmes en utilisant la méthode de Lyapunov. Par ailleurs, on peut également mentionner le livre [Cor07] qui développe entre autre la méthode de Lyapunov pour l'étude de stabilité d'EDPs variées. Enfin, plusieurs autres travaux de recherche exploitent cette méthode afin de produire des approches de stabilité plus robustes. Le paragraphe suivant introduit la notion du transport avant de développer par la suite notre approche conduisant à la stabilité de Lyapunov.

## 1.2 Notion de transport

Afin de préciser le phénomène de propagation (ou transport) considéré dans cette thèse, précisons la résolution d'une équation de transport donnée :

$$\begin{cases} \partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t \geq 0 \\ z(x, 0) = z^0(x) & x \in (0, 1) \\ z(0, t) = h(t) & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $\rho$  est la vitesse de transport. Selon la valeur de celle-ci le transport s'effectue dans un sens ou dans l'autre.

Une étude simple de l'équation de transport peut être lue dans [Cor07, Section 2.1, p24], sous

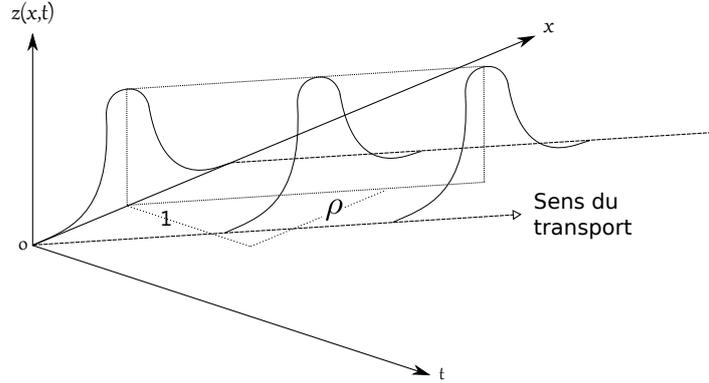


FIGURE 1.5 – Illustration du phénomène de transport.

les hypothèses  $z^0 \in L^2(0, 1)$ ,  $h \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . Si nous nous trouvons dans un cadre plus régulier, avec par exemple  $z^0 \in C^1([0, 1])$  et  $h \in C^1(\mathbb{R}^+)$  nous pouvons tout simplement démontrer que la solution s'écrit,  $\forall x \in (0, 1)$ ,  $\forall t \geq 0$ ,

$$z(x, t) = z_0(x - \rho t). \quad (1.3)$$

En effet, en posant  $u = x - \rho t$ , nous avons

$$\partial_x z(x, t) = \frac{\partial z_0(x - \rho t)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial z_0(u)}{\partial u} = z_0'(u) \quad (1.4)$$

$$\partial_t z(x, t) = \frac{\partial z_0(x - \rho t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial z_0(u)}{\partial u} = -\rho z_0'(u) \quad (1.5)$$

d'où

$$\partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = -\rho z_0'(u) + \rho z_0'(u) = 0. \quad (1.6)$$

Il faut enfin vérifier une condition de compatibilité en  $(x, t) = (0, 0)$  qui s'écrit  $z^0(0) = h(0)$ . Le livre [Cor07] fournit ensuite une étude détaillée de la contrôlabilité de cette équation par la fonction  $h$  qui n'est pas notre objectif dans cette thèse.

Nous illustrons dans la Figure 1.5 le fait que la solution de l'équation de transport (1.2) est propagée à la vitesse  $\rho$ , et que toute fonction arbitraire  $z_0(x - \rho t)$  est une solution de cette équation.

### 1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

La méthode de Lyapunov est une des méthodes fondamentales pour la stabilité des systèmes dynamiques (voir [Kha96]). C'est un ensemble de résultats mathématiques basés sur la décroissance de l'énergie totale d'un système donné. Elle est très largement utilisée pour l'étude de stabilité de différentes équations différentielles (EDOs et EDPs) et consiste à choisir, dans un premier temps, une fonctionnelle candidate de Lyapunov exprimée en fonction

de l'état du système étudié et respectant des propriétés de positivité et de dérivabilité, puis à transformer la vérification de ces propriétés en un simple problème d'optimisation. À chaque type d'équation différentielle considérée, une fonctionnelle de Lyapunov appropriée doit être définie.

### 1.3.1 Notions de base

Dans cette section nous fournissons quelques définitions et théorèmes de base concernant l'étude de stabilité au sens de Lyapunov d'un système de dimension finie. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t)) \\ X(t_0) = X^0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système fini.

**Définition 1.1** (Point d'équilibre [Kha96]). *Un état  $X_e$  est un point d'équilibre du système (1.7) si pour tout instant  $t \geq t_0$  l'état du système  $X(t) = X_e$ . Le point d'équilibre  $X_e$  vérifie  $f(X_e) = 0$ .*

**Définition 1.2** (Stabilité d'un point d'équilibre [Kha96]). *Le point d'équilibre  $X_e$  est stable, si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\lambda(\epsilon) > 0$  tel que*

$$|X^0 - X_e|_n \leq \lambda \implies |X(t) - X_e|_n \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.8)$$

Pour toute boule de rayon  $\epsilon$  et de centre  $X_e$ , il existe une boule plus petite de rayon  $\lambda(\epsilon)$  telle que si nous partons de n'importe quelle condition initiale de celle-ci, nous ne quitterons jamais la première.

**Définition 1.3.** (Attractivité d'un point d'équilibre [Kha96]) *Le point d'équilibre  $X_e$  est attractif s'il existe  $\lambda > 0$  tel que*

$$|X^0 - X_e|_n < \lambda \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |X(t) - X_e|_n = 0 \quad (1.9)$$

Le point d'équilibre  $X_e$  est dit attractif si la trajectoire  $X(t)$ , à un certain voisinage et pendant un certain temps, converge vers ce point d'équilibre  $X_e$ .

**Définition 1.4** (Stabilité asymptotique [Kha96]). *Le point d'équilibre  $X_e$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

Partant d'une condition initiale au voisinage du point d'équilibre  $X_e$ , l'état  $X(t)$  converge vers celui-ci après un certain temps.

**Définition 1.5** (Stabilité exponentielle [Kha96]). *Le point d'équilibre  $X_e$  est exponentiellement stable s'il existe  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$  et  $\lambda$  tels que*

$$|X^0 - X_e|_n \leq \lambda \implies |X(t) - X_e|_n < \epsilon |X_e - X^0|_n e^{-\delta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.10)$$

Dans ce cas, l'état  $X(t)$  converge vers le point d'équilibre d'une manière exponentielle et la variable  $\delta$  caractérise la vitesse de cette convergence.

**Définition 1.6.** (Stabilité globale [Kha96]) *Le point d'équilibre est globalement (asymptotiquement ou exponentiellement) stable, si les conditions de stabilité précédentes sont vérifiées pour n'importe quelle condition initiale dans  $\mathbb{R}^n$ .*

**Théorème 1.1** (Stabilité au sens de Lyapunov [Kha96]). *Soit  $X_e = 0$  un point d'équilibre du système (1.7) et  $D \subset \mathbb{R}^n$  contenant  $X_e = 0$ . s'il existe une fonction  $V$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que*

$$V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) > 0 \quad \text{dans} \quad D \setminus \{0\} \quad (1.11)$$

$$\dot{V}(X) \leq 0 \quad \text{dans} \quad D \quad (1.12)$$

alors  $X_e = 0$  est stable. De plus, si

$$\dot{V}(X) < 0 \quad \text{dans} \quad D \setminus \{0\} \quad (1.13)$$

alors  $X_e = 0$  est asymptotiquement stable.

Maintenant, décrivons simplement et rapidement cette méthode pour une EDO linéaire temps invariant. Ensuite, nous l'expliquerons pour l'étude de stabilité d'une équation de transport linéaire. Enfin, nous détaillerons le cas d'un système couplant les deux équations. Pour chacun de ces cas, nous rappellerons les conditions de stabilité et nous discuterons de leur capacité à bien caractériser le comportement du système.

### 1.3.2 Méthode et outils pour l'analyse de la stabilité d'un système d'EDOs

Pour expliquer en détails le déroulement de cette méthode de Lyapunov pour un système classique de dimension finie, considérons le système suivant où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante,

$$\dot{X}(t) = AX(t). \quad (1.14)$$

Le point d'équilibre  $X_e$  du système (1.14) est le point où la dynamique  $\dot{X}(t)$  du système est nulle. La méthode de Lyapunov consiste à discuter la stabilité des solutions du système autour de ce point d'équilibre  $X_e$ . En d'autres termes, si la solution commence proche du point d'équilibre  $X_e$  et reste proche de ce dernier, le point d'équilibre  $X_e$  est stable au sens de Lyapunov. En revanche, si la solution commence proche du point d'équilibre  $X_e$  et converge vers ce dernier, il est, de plus, asymptotiquement stable. L'étude peut aller plus loin en déterminant une vitesse de convergence  $\delta$  avec laquelle la solution tend vers le point d'équilibre

$X_e$ , dans ce cas  $X_e$  est exponentiellement stable.

Pour un système très simple tel que (1.14), le choix de la fonction de Lyapunov peut être la fonction quadratique suivante

$$V_{EDO}(X(t)) = X(t)^\top P X(t), \quad (1.15)$$

où  $P \in \mathbb{S}^n$ .

Afin d'assurer la stabilité asymptotique du système (1.14), la fonction  $V_{EDO}(X(t))$  doit satisfaire les propriétés de positivité (1.11) et de dérivabilité (1.13), définies en terme de propriétés de la matrice  $P$  :

$$P \succ 0, \quad (1.16)$$

$$PA + A^\top P \prec 0. \quad (1.17)$$

La propriété de positivité de la fonction de Lyapunov (1.15) est garantie par l'inégalité matricielle linéaire donnée en (1.16). Celle de la dérivée est assurée par la LMI (1.17) tirée de la dérivée  $\dot{V}_{EDO}(X(t))$  donnée par :

$$\dot{V}_{EDO}(X(t)) = X(t)^\top (PA + A^\top P) X(t) < 0, \quad \forall X(t) \neq 0, \quad (1.18)$$

et qui garantit la stabilité asymptotique du point d'équilibre  $X_e$ . Le système est donc asymptotiquement stable.

Pour des systèmes linéaires invariants, les conditions (1.16) et (1.17) sont nécessaires et suffisantes. En d'autres termes, le système (1.14) est asymptotiquement (et exponentiellement) stable si et seulement s'il existe une matrice  $P$  vérifiant les inégalités (1.16) et (1.17) ([GCK03] et [Fri14]). Il convient alors d'étudier et de comprendre comment cette procédure simple peut être étendue au cas de systèmes plus complexes incluant des dynamiques issues d'équations aux dérivées partielles ou encore couplant des équations EDO avec des EDP.

### 1.3.3 Outils pour l'analyse de la stabilité d'une EDP de transport

Considérons maintenant l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \partial_t z(x, t) + \Lambda \partial_x z(x, t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ z(0, t) = Dz(1, t), \\ z(x, 0) = z^0(x), & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (1.19)$$

où  $\Lambda = \text{diag}(\rho_i I_{m_i})_{\{i=1 \dots p\}}$  est la matrice de transport,  $\rho_i > 0$  est la vitesse appliquée à  $m_i$  composantes de l'état  $z(x, t)$  avec  $m = \sum_{i=1}^p m_i$ , et  $z^0$  est la donnée initiale. Si  $z^0$  est donnée dans  $C^1([0, 1], \mathbb{R}^m)$  et vérifie la condition de compatibilité  $z^0(0) = Dz(1, 0)$ , il existe une solution classique  $z \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$  et nous pouvons étudier la stabilité de la solution au sens de la norme

$$\sup_{x \in [0, 1]} |\partial_x z(x, t)| = \|z(t)\|_{C^1([0, 1], \mathbb{R}^m)}.$$

Mais si nous supposons seulement  $z^0 \in L^2((0,1), \mathbb{R}^m)$ , c'est une solution au sens faible de l'équation que nous obtenons et c'est la norme  $L^2$ , définie par

$$\|z(t)\|_{L^2((0,1), \mathbb{R}^m)} := \left( \int_0^1 |z(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est la plus pertinente pour étudier la stabilité.

L'état instantané  $z(\cdot, t)$  de l'équation de transport appartient à l'espace fonctionnel  $L^2_{((0,1); \mathbb{R}^m)}$ . Le choix de la fonctionnelle de Lyapunov pour ce type de système est plus compliqué, car son état est de dimension infinie. Nous pouvons par exemple choisir une fonctionnelle de Lyapunov candidate pour ce système de la forme suivante :

$$V_{EDP}(z(\cdot, t)) = \int_0^1 z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) dx, \quad (1.20)$$

où la matrice  $S \in \mathbb{S}_+^m$  est définie positive et commute avec la matrice  $\Lambda$ , et  $\delta > 0$  est la vitesse de convergence.

**Remarque 1.1.** Afin d'assurer la commutation des matrices  $\Lambda$  et  $S$ , il faut que cette dernière ait les mêmes blocs de Jordan que  $\Lambda$ . Par exemple, si la matrice  $\Lambda$  est de la forme :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \rho_1 I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 I_3 \end{bmatrix},$$

alors la matrice  $S$  doit posséder la structure suivante :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix},$$

où les blocs  $S_1 \in \mathbb{S}_+^2$ ,  $S_2 \in \mathbb{R}_+$  et  $S_3 \in \mathbb{S}_+^3$ .

La matrice  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  est diagonale. Donc, la matrice exponentielle  $e^{-2\delta\Lambda^{-1}x}$  a la même forme que  $\Lambda$  et commute également avec la matrice  $S$ .

Comme pour l'EDO, afin d'assurer la stabilité du système EDP cette fonctionnelle doit respecter les propriétés de positivité et de dérivabilité suivantes, définies en terme de propriétés de la matrice  $S$  :

$$S \succ 0, \quad (1.21)$$

$$D^\top \Lambda S D - \Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}} \prec 0. \quad (1.22)$$

La propriété de positivité est assurée par l'inégalité (1.21), et la condition de dérivabilité est garantie par l'inégalité (1.22), obtenue à partir de la dérivée  $\dot{V}_{EDP}(z(\cdot, t))$  de la fonctionnelle

de Lyapunov (1.20) :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{EDP}(z(\cdot, t)) + 2\delta V_{EDP}(z(\cdot, t)) &= \int_0^1 \left( \partial_t z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) + z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} \partial_t z(x, t) \right) dx \\
&\quad + 2\delta \int_0^1 z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) dx \\
&= \int_0^1 \left( \partial_x z^\top(x, t) \Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) + z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} \Lambda \partial_x z(x, t) \right) dx \\
&\quad + 2\delta \int_0^1 z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) dx,
\end{aligned}$$

et en exploitant la commutativité des matrices  $\Lambda$  et  $S$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{EDP}(z(\cdot, t)) + 2\delta V_{EDP}(z(\cdot, t)) &= - \int_0^1 \partial_x \left( z^\top(x, t) \Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) \right) dx \\
&= - \left[ z^\top(x, t) \Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) \right]_0^1,
\end{aligned}$$

et en utilisant la condition initiale  $z(0, t) = Dz(1, t)$ , nous obtenons

$$\dot{V}_{EDP}(z(\cdot, t)) + 2\delta V_{EDP}(z(\cdot, t)) = z^\top(1, t) [D^\top \Lambda S D - \Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}}] z(1, t) < 0, \quad \forall z(1, t) \neq 0, \quad (1.23)$$

ce qui garantit la stabilité exponentielle et donc asymptotique du système (1.19).

Comme pour le cas précédent, les inégalités (1.21) et (1.22) sont des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité ([Cor07]).

### 1.3.4 Outils pour l'analyse de la stabilité d'un système couplé

Maintenant, le couplage d'un système d'EDOs à des équations de transport suggère l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov composée de deux termes dépendant des différents états du système. Cela reviendrait à rassembler les différentes fonctions et fonctionnelles de Lyapunov précédemment considérées. Considérons donc le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bz(1, t), & t > 0, \\ \partial_t z(x, t) + \Lambda \partial_x z(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ z(0, t) = CX(t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

La fonctionnelle de Lyapunov est alors de la forme :

$$\begin{aligned}
V_{EDO/EDP}(X(t), z(\cdot, t)) &= V_{EDO}(X(t)) + V_{EDP}(z(\cdot, t)) \\
&= X(t)^\top P X(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) dx.
\end{aligned} \quad (1.25)$$

Le théorème de [Esp+16] suivant, adapté à notre étude simplifiée, donne la stabilité d'un

système couplant EDOs et équations de transport en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov de la même structure que (1.25).

**Théorème 1.2.** *Admettons qu'il existe  $\delta > 0$ , et une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice bloc diagonale définie positive  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  vérifiant*

$$P \succ 0, \quad S\Lambda = \Lambda S, \quad S \succ 0, \quad (1.26)$$

tels que l'inégalité matricielle suivante soit satisfaite :

$$M_0 = \begin{bmatrix} A^\top P + PA + C^\top S\Lambda C + 2\delta P & PB \\ \star & -\Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (1.27)$$

Sous ces conditions, le système (1.24) est asymptotiquement stable.

**Remarque 1.2.** *Originellement ce théorème traite la stabilité entrée-état (Input-to-state stability). Il a été adapté ici à notre étude simplifiée pour illustrer le type d'analyse de Lyapunov possible pour cette classe de système.*

Pour une vitesse de convergence  $\delta$  qui tend vers une valeur nulle, les conditions de stabilité données par l'inégalité  $M_0$  deviennent indépendante de la matrice de transport  $\Lambda$  (indépendant du retard [Fri14, Section 3.3.1, p63]) vu que nous pouvons toujours trouver une matrice  $S$  qui correspond à une matrice de transport  $\Lambda$  donnée.

L'inégalité matricielle  $M_0$  dans (1.27) du Théorème 1.2 est déduite de la dérivée temporelle  $\dot{V}_{EDO/EDP}$  de la fonctionnelle de Lyapunov (1.25) donnée par :

$$\dot{V}_{EDO/EDP} + 2\delta V_{EDO/EDP} = \dot{V}_{EDO} + 2\delta V_{EDO} + \dot{V}_{EDP} + 2\delta V_{EDP},$$

où

$$\begin{aligned} \dot{V}_{EDO} + 2\delta V_{EDO} &= \dot{X}^\top(t)PX(t) + X^\top(t)P\dot{X}(t) + 2\delta X^\top(t)PX(t) \\ &= X^\top(t)[A^\top P + PA + 2\delta P]X(t) + z^\top(1, t)B^\top PX(t) + X^\top(t)PBz(1, t) \\ &= \begin{bmatrix} X^\top(t) \\ z^\top(1, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^\top P + PA + 2\delta P & PB \\ \star & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ z(1, t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et en exploitant l'équation de transport du système (1.24), la dérivée  $\dot{V}_{EDP} + 2\delta V_{EDP}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_{EDP} + 2\delta V_{EDP} &= \int_0^1 \left( \partial_t z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) + z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} \partial_t z(x, t) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta z^\top(x, t) S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) \right) dx \\ &= - \int_0^1 \partial_x \left( z^\top(x, t) \Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) \right) dx \\ &= - \left[ z^\top(x, t) \Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}x} z(x, t) \right]_0^1 \end{aligned}$$

et en utilisant la condition au bord  $z(0, t) = CX(t)$ , nous obtenons

$$\dot{V}_{EDP} + 2\delta V_{EDP} = \begin{bmatrix} X^\top(t) \\ z^\top(1, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} C^\top \Lambda SC & 0 \\ \star & -\Lambda S e^{-2\delta\Lambda^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ z(1, t) \end{bmatrix}$$

ce qui conclut le Théorème 1.2 garantissant la stabilité asymptotique du système couplé (1.24).

Pour les deux premiers cas (EDO et EDP de transport linéaires) nous avons vu que des conditions nécessaires et suffisantes simples peuvent être écrites sous forme de LMI. La question naturelle à se poser est donc celle de la nécessité ou de la suffisance des conditions (1.26) et (1.27). Pour cela, nous allons étudier les résultats de ces conditions sur un exemple tiré de la littérature des systèmes à retard.

Ce théorème est l'un des premiers résultats d'étude de stabilité utilisant la méthode de Lyapunov. Il a été appliqué sur plusieurs exemples académiques (voir [Fri14]). Considérons le système (1.24) avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K - 10 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \Lambda = \frac{1}{h}.$$

Où  $K \in \mathbb{R}$  représente un gain ajustable et où  $h$  est un paramètre qui définit la vitesse de transport en  $\Lambda = \frac{1}{h}$  et correspond ici au retard de propagation. Cet exemple a été introduit dans plusieurs travaux de recherche traitant la stabilité des systèmes à retard (voir [ZKT01], [Sip+11] et [SG15]).

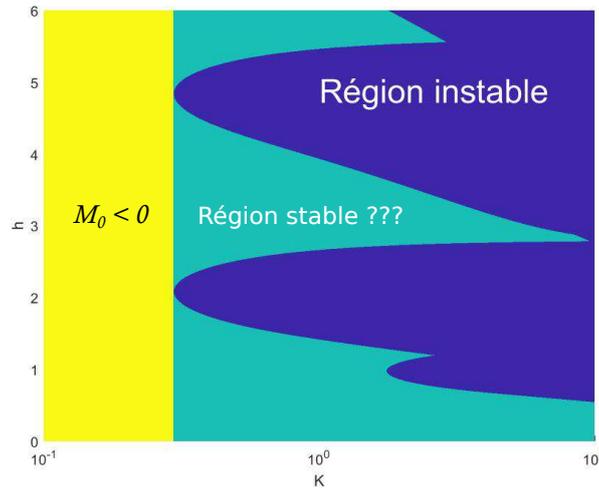


FIGURE 1.6 – Régions de stabilité dans le plan  $(K, h)$  du système (1.24) utilisant Théorème 1.2.

La Figure 1.6 représente les régions de stabilité (zone jaune) et d'instabilité (bleu foncé) du système (1.24) utilisant le Théorème 1.2. Pour les régions turquoise, aucune solution n'a été

trouvée pour la LMI  $M_0$  dans (1.27), et donc nous ne pouvons pas conclure quant à la stabilité dans ces régions. Nous remarquons que dans ces régions la stabilité ne dépend pas seulement du gain  $K$  mais aussi du retard  $h$  vu qu'elles intersectent avec les zones instables. Cette étude prouve par l'exemple que la conditions précédente n'est pas nécessaire et ne correspond qu'à une condition suffisante de stabilité. Afin d'atteindre ces régions, les conditions de stabilité produites doivent dépendre du retard également.

L'une des solutions trouvées pour ce type de système (système à retard) est celle développée dans [SG13b] utilisant l'inégalité de Wirtinger, plus riche (plus d'informations) que celle de Jensen utilisée auparavant ([SG13a], [Tri+15] et [SG12]), et l'appliquant sur la méthode de Lyapunov. L'utilisation de ces inégalités permet de faire apparaître le terme du retard au niveau des conditions de stabilité et d'améliorer les régions de stabilité du système à retard en atteignant des petites zones de la région turquoise. Le travail [SG15] publié plus tard consiste à l'utilisation d'une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii plus développée, dépendant du retard et de l'état retardé, ainsi que d'exploiter une inégalité plus forte que les deux précédentes. Il s'agit de l'inégalité de Bessel, qui est plus riche et contient plus d'informations que Jensen et Wirtinger vu qu'elle présente ces deux inégalités à un ordre donné. Le résultat est très intéressant puisqu'il permet uniquement d'élargir la zone de stabilité et d'avancer dans la région turquoise selon l'ordre considéré de l'inégalité de Bessel. Par conséquent, les conditions de stabilité produites dans [SG15] forment une hiérarchie d'inégalités matricielles indexée par l'ordre de l'inégalité de Bessel utilisée. Les questions que nous nous posons et que nous allons développer durant cette thèse sont les suivantes :

- *Quel est le lien entre les systèmes à retard et le système couplé EDO-équation de transport ?*
- *Pourrions-nous exploiter les mêmes outils pour l'étude de stabilité du système couplé ?*
- *Quelle structure de la fonctionnelle de Lyapunov nous pouvons choisir ?*
- *Pourrions-nous produire une nouvelle approche de stabilité du système couplé EDO-équation de transport qui produirait des conditions de stabilité plus fines exprimées sous la forme d'inégalité matricielles ?*

## 1.4 Lien entre systèmes EDO-EDP et à retard

Dans cette section, nous visons à mettre en avant sur un exemple simple les relations existantes entre la classe des systèmes à retard largement étudiée dans la littérature en automatique (voir par exemple [Fri14]; [GCK03]; [Nic01]; [Ric03]; [Sip+11]) et la classe de systèmes régie par un couplage entre une EDO et une EDP de transport, qui a été moins regardée (voir par exemple les récents articles [Aur+18]; [TPG15]). La représentation d'un système à retard (SAR) par un système couplant une EDO à une équation de transport n'est pas une idée récente (voir [Krs09]). En effet, l'équation de transport dans le système couplé traduit le terme de retard dans le SAR.

Considérons le système à retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + A_d X(t-h), & t \geq 0, \\ X(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1.28)$$

où  $\phi(t)$  est la condition initiale. Ce système est équivalent au système couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + A_d z(1, t), & t > 0, \\ \partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ z(0, t) = X(t), & t > 0, \\ z(x, 0) = \phi(-\frac{x}{\rho}). \end{cases} \quad (1.29)$$

Pour clarifier cette équivalence, considérons le schéma de l'équation de transport qui suit.



FIGURE 1.7 – Schéma explicatif de l'équation de transport

Nous remarquons que la variable  $X(t)$ , fournie à l'entrée de l'équation de transport (en  $x = 0$ ), met un certain temps pour arriver à la sortie (en  $x = 1$ ). Ce temps de propagation dépend évidemment de la vitesse de cette dernière, et à partir de la solution de l'équation de transport, nous obtenons  $z(1, t) = X(t - \frac{1}{\rho})$ . L'injection de ce résultat à l'entrée de l'EDO conduit au système (1.28) avec  $h = \frac{1}{\rho}$ .

Ce petit calcul nous laisse penser qu'il existe des liens très forts entre les systèmes régis par un couplage EDO-EDP de transport et les systèmes à retards. En ce qui concerne plus particulièrement l'analyse de stabilité, on peut alors imaginer qu'il existe aussi des liens entre les deux modèles qui permettraient de donner de nouvelles interprétations de résultats connus dans un cas mais pas dans l'autre et de tirer partie de chaque modèle pour raffiner des résultats existants dans l'autre.

Cela étant, il n'existe pas forcément une équivalence entre les deux formulations. Il est possible de construire des systèmes couplés EDO-EDP de transport qui ne peuvent s'interpréter par un systèmes à retard sous la forme (1.28). C'est pourquoi il faut prendre certaines précaution quant à l'interprétation par un système à retard d'un couplage EDO-EDP.

### 1.4.1 Introduction sur les systèmes à retards

Les systèmes à retard sont très utilisés dans différents domaines scientifiques, les systèmes informatiques, les transmissions mécaniques et les systèmes biologiques. En littérature, dans le domaine de l'automatique, plusieurs travaux de recherche s'intéressent aux SARs (voir [XLZ06], [GCK03], [MK+05] et une étude générale des SARs dans [Fri14]). L'étude de stabilité des SARs a une grande importance théorique comme pratique, puisque le retard peut être une source d'instabilité ou de mauvaises performances du système. De nombreux articles s'intéressent à l'étude de stabilité des systèmes à retard dont [GW04b], [Che95] et

[XLY01].

## 1.4.2 Méthodes hiérarchiques et inégalités intégrales

Récemment, une nouvelle méthode pour l'analyse de systèmes à retard via l'application du théorème de Lyapunov-Krasovskii a été développé dans l'équipe MAC du LAAS. Cette méthode introduite dans [SG14]; [SG15]; [SGA15] est basée sur la généralisation de l'inégalité de Jensen introduite dans le cadre de l'analyse des systèmes à retard dans [Gu00] via les inégalités basées sur l'inégalité de Wirtinger [SG13b] ou de Bessel-Legendre [SG15]. Cette méthode, qui sera amplement détaillée dans ce manuscrit, possède plusieurs intérêts par rapport à la littérature existante des systèmes à retard.

- Premièrement, elle permet de réduire le pessimisme inhérent à l'utilisation de l'inégalité de Jensen. En effet, la précision de l'inégalité dépend du degré  $N$  des polynômes de Legendre qui sont parfaitement définis pour tout entier  $N$  positif. Lorsque le degré  $N$  tend vers l'infini, l'inégalité de Bessel-Legendre s'apparente à une identité de Parseval qui n'est pas conservative.
- Ensuite, elle guide la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii efficaces au travers des termes introduits dans l'inégalité.
- Les auteurs de [SG15] ont prouvé l'existence d'une hiérarchie des conditions de stabilité pour différentes valeurs de  $N$ , qui assure qu'augmenter le degré  $N$  des conditions de stabilité résultantes ne peut que réduire le pessimisme du résultat.
- Enfin, les résultats obtenus dans [SG15] montrent un compromis des conditions de stabilité entre le nombre de variables à déterminer et le pessimisme du résultat numérique par rapport aux méthodes existantes basées sur la discrétisation ou de partition de l'intervalle du retard [Gu97]; [Gu01]; [Zha+09] ou encore sur les sommes de carrés [PPL09]; [Pee14].

## 1.5 Objectif et contributions de la thèse

Le but de cette thèse est l'exploitation de ces méthodes récentes ([SG15]), appliquées à des systèmes à retard, pour produire une nouvelle approche de l'étude de la stabilité d'un système couplant une EDO et une équation de transport. Cette approche, sous la forme d'inégalités matricielles et applicable sur plusieurs types de systèmes à retard (SAR), permet d'effectuer des tests numériques et obtenir des résultats de stabilité concrets.

Nous produisons d'abord une nouvelle approche de stabilité du système couplé (1.29). Ensuite, nous construisons une présentation générale du système couplé EDO-équation de transport vectorielle où cette dernière possède une matrice de transport au lieu d'une vitesse constante pour (1.29). De plus, nous proposons une nouvelle fonctionnelle candidate de Lyapunov permettant d'avoir de meilleurs résultats de stabilité. Enfin, nous faisons le lien du système couplé EDO-équation de transport et système à retard.

### 1.5.1 Résumé du plan

La suite de ce manuscrit de thèse vise à présenter une vision synthétique des résultats obtenus. Il s'organise de la manière suivante :

**Le Chapitre 2** présente une première étude d'un système représentant l'interconnexion entre un système linéaire de dimension finie avec une équation aux dérivées partielles correspondant à un phénomène de transport uniforme. L'idée de ce chapitre est de présenter une analyse de stabilité de cette classe de systèmes à l'aide d'une fonctionnelle de Lyapunov dédiée. Le cœur de ce chapitre consiste à utiliser des inégalités matricielles du type Bessel associées aux polynômes de Legendre. Un théorème de stabilité exprimé sous forme d'inégalités matricielles linéaires constitue le résultat principal de ce chapitre.

**Le Chapitre 3** propose une extension de l'analyse présentée dans le Chapitre 2, où un certain degré de complexité a été ajouté dans l'équation aux dérivées partielles. En effet, le système étudié fait maintenant apparaître des phénomènes de transport non uniformes. En d'autres termes, le cas d'une unique vitesse constante de propagation est remplacée par plusieurs vitesses constantes, autorisant ainsi les composantes de l'équation aux dérivées partielles à avoir des comportements sensiblement différents.

**Le Chapitre 4** illustre un des intérêts des analyses des systèmes couplés étudiés dans les deux chapitres précédents. En effet, nous avons vu dans ce chapitre introductif qu'il existe un lien très fort entre la dynamique de systèmes couplés et les systèmes à retards. Ce chapitre vise donc à tirer avantage de la construction de fonctionnelle de Lyapunov pour les systèmes couplés pour construire de nouvelles fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour les systèmes à retards. Il est notamment montré qu'il est possible, par de relativement simples manipulations matricielles, de construire des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii qui sont à la fois discrétisées (ou partitionnées) à un degré arbitraire et qui bénéficient aussi des avantages de l'utilisation de l'inégalité de Bessel-Legendre.

**Conclusions et Perspectives** Ce dernier chapitre vise à faire un bilan du travail réalisé durant ce doctorat. Il présentera aussi quelques perspectives à ces travaux qui pourrait être réalisées par la suite.

Enfin une annexe (Annexe A) contient un rappel de certains outils auxquels nous avons eu recours dans cette étude.

### 1.5.2 Liste des publications

Les travaux de cette thèse ont conduit à la publication d'un article dans une revue internationale (Systems & Control Letters) et à quatre articles publiés et présentés lors de conférence internationales. La liste de ces publications est donnée ci-dessous.

1. **M. Safi**, A. Seuret, L. Baudouin, "New model transformations for the stability analysis of time-delay systems", *IFAC Workshop on Time-Delay Systems (TDS'18)* Budapest, 2018.

2. **M. Safi**, A. Seuret, L. Baudouin, "Lyapunov stability analysis of a system coupled to a hyperbolic PDE with potential", *European Control Conference (ECC'18)*, Limassol, Cyprus, 2018.
3. **M. Safi**, L. Baudouin, A. Seuret, "Tractable sufficient stability conditions for a system coupling linear transport and differential equations", *Systems & Control Letters*, vol.110, pages 1-8, 2017.
4. **M. Safi**, L. Baudouin, A. Seuret, "Refined exponential stability analysis of a coupled system", *IFAC World Congress (Open Invited track on Time-Delay and PDE systems)*, Toulouse, France, 2017.
5. L. Baudouin, A. Seuret and **M. Safi**, "Stability analysis of a system coupled to a transport equation using integral inequalities", *IFAC Conference on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations (CPDE'16)*, Bertinoro, Italy, 2016.

# Stabilité d'un système couplé avec une équation de transport simple

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>21</b>
2.2.1	Définition de la dynamique et des principaux composants	21
2.2.2	Interprétations possibles de ce système couplé	22
<b>2.3</b>	<b>Existence et régularité des solutions du système couplé EDO-EDP</b>	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>Fonctionnelles de Lyapunov candidates</b>	<b>23</b>
2.4.1	Définition d'une structure générale	23
2.4.2	Méthode de construction de la fonctionnelle	26
2.4.3	Inégalité de Bessel-Legendre	28
2.4.4	Dynamique des projetés	29
<b>2.5</b>	<b>Conditions de stabilité du système EDO-EDP de transport</b>	<b>31</b>
<b>2.6</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>35</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

## 2.1 Introduction

Les systèmes à paramètres distribués représentent une large gamme en contrôle des systèmes dont l'état est de dimension infinie. Cette classe de systèmes apparaît dans de nombreuses applications dont plusieurs exemples ont été donnés dans l'introduction du manuscrit. L'analyse et le contrôle des systèmes à paramètres distribués représentent un domaine de recherche intéressant en mathématiques appliquées et plus récemment en automatique : voir par exemple [PWB08], [SGK10], [SCK10], [SK05] ou encore [Krs09] traitant le contrôle de nombreux systèmes couplant une EDO et plusieurs types d'EDP (transport, chaleur ou encore onde).

Nous étudions dans ce chapitre un cas particulier de ce type de systèmes couplés, où un système de dimension finie est couplé à une équation de transport. La difficulté principale dans l'analyse de stabilité que nous produisons ici est liée à la dimension infinie issue de l'équation de transport. En effet, cette classe de systèmes peut être interprétée, dans certains

cas précis, comme un système à retard (SAR). Cette classe de systèmes a été largement étudiée dans la littérature. On peut notamment faire référence par exemple aux monographies [Fri14]; [Nic01]; [GCK03] où plusieurs types de systèmes à retard ont été traités au travers de différentes méthodes fréquentielles ou temporelles. Le but de ce chapitre est de tirer partie d'un nouveau cadre pour l'analyse de ce système d'équations différentielles ordinaires couplées à des équations aux dérivées partielles. La première difficulté provient du fait que la stabilité des SARs peut être évaluée en utilisant le théorème de Lyapunov-Krasovskii et l'analyse de stabilité de notre système couplé ne peut pas être effectuée exactement avec le même théorème. La deuxième difficulté est due à la dimension infinie du système, qui nous empêche d'utiliser directement les méthodes exploitées dans l'analyse des systèmes de dimension finie. Afin de fournir des conditions de stabilité efficaces, nous construisons une approximation polynomiale finie de l'état infini en utilisant des polynômes de Legendre.

Les méthodes d'approximation polynomiale pour l'analyse des systèmes de dimension infinie ne présentent pas une idée récente (voir par exemple les cadres d'optimisation convexe et de somme des carrés développés dans [PP06]; [Pee14] ou [AVP14]). La nouveauté de cette approche apparaît dans l'utilisation des inégalités intégrales. Ces inégalités peuvent être interprétées comme l'inégalité de Bessel dans les espaces de Hilbert qui correspond à une version tronquée de l'identité de Parseval. Dans plusieurs travaux, par ex. [SG14]; [SG15], l'efficacité de ces inégalités pour l'analyse de stabilité des SARs a été démontrée. En effet, nous trouvons dans [SGA15] une méthode basée sur une approximation polynomiale de la nature distribuée du retard, en utilisant des polynômes de Legendre et leurs propriétés pour construire des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Dans ce chapitre, où une équation de transport a été utilisée pour rendre compte des phénomènes de transport et de retard de manière similaire par exemple à l'approche également proposée dans [BLK13]. Ce chapitre présente un cas particulier du système couplé et peut être considéré comme un premier pas vers les systèmes EDO-EDO plus complexes utilisant des outils hérités des approches SAR.

Dans ce chapitre, nous allons détailler, dans le cas le plus simple, notre approche pour démontrer la stabilité d'un système couplant une EDP et une EDO. Le but est d'assurer la stabilité exponentielle de ce système couplé EDO-EDP de transport, au sens de la norme  $L^2$ . Nous utilisons des inégalités matricielles linéaires dont la résolution permettra de faire fonctionner une méthode de Lyapunov. Nous notons aussi que le systèmes étudiés dans ce chapitre généralise les exemples simples introduits dans les exemples applicatifs introduits dans le chapitre précédent. Les paragraphes suivants ont pour but de formaliser le problème et proposent une nouvelle méthode relevant de l'application du Théorème de Lyapunov pour l'étude de stabilité.

## 2.2 Formulation du problème

### 2.2.1 Définition de la dynamique et des principaux composants

Dans ce chapitre, nous allons étudier un système décrit par l'interconnexion entre une EDP de transport linéaire et une équation aux dérivées partielles linéaire, uniforme et dont la vitesse de propagation est constante par rapport au temps et à l'espace. L'interconnexion est réalisée à travers l'entrée de l'EDO où intervient une donnée de bord de l'EDP, et une partie de l'état de l'EDO est insérée comme une entrée de la condition au bord (CB) de l'équation de transport. De manière plus précise, la dynamique est donnée par le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{X}(t) = AX(t) + Bz(1, t) & t > 0, & \text{EDO} \\ \partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t > 0, & \text{EDP} \\ \\ z(0, t) = CX(t), & t > 0. & \text{CB} \\ \\ X(0) = X^0, & & \text{CI EDO} \\ z(x, 0) = z^0(x), & x \in (0, 1), & \text{CI EDP} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

**Remarque 2.1.** Dans (2.1), la vitesse de transport est supposée positive. Si la vitesse  $\rho$  est négative, alors nous pouvons mener la même étude de stabilité en faisant le changement de variable  $x' = 1 - x$ . Regardons un peu en détail ce qui se passe quand nous appliquons ce changement de variable sur le système. L'équation de transport utilisée dans (2.1) est  $\partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = 0$ . La solution de cette dernière est donnée par l'expression  $z(x, t) = z_0(x - \rho t)$ . En effectuant le changement de variable  $x' = 1 - x$ , cette solution s'exprime  $z(1 - x', t) = z_0(1 - x' - \rho t)$ . La condition au bord  $CX(t)$  est injectée dans ce cas à  $x' = 1$ , et le transport se fait dans le sens opposé.

L'état du système (2.1) est composé de deux éléments de nature différente.

**EDO :** Dans un premier temps, le vecteur  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  caractérise l'état de l'EDO. Cette composante est de dimension finie ( $\mathbb{R}^n$ ). A l'instant  $t = 0$ , elle est caractérisée par la condition initiale  $X(0) = X^0$  donnée dans (CI EDO). Cette équation est définie par l'intermédiaire des matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , que nous allons supposer constantes et connues.

**EDP :** L'état de ce système couplé est aussi composé de la fonction d'état de l'EDP de transport,  $z(\cdot, t) \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^m)$ . Contrairement à la partie de l'état issue de l'EDO, nous notons que l'espace fonctionnel  $L^2((0, 1); \mathbb{R}^m)$  dans lequel vit la variable  $z(x, t)$  est de dimension infinie. Ceci reflète la nature hétérogène de ce système. La dynamique de l'EDP est régie par deux équations. La première induit une relation entre la dérivée temporelle de la variable et la dérivée en espace de la variable  $z$ . Cette relation fait intervenir la vitesse de transport  $\rho \in \mathbb{R}$  qui est supposée ici constante par rapport au temps et à l'espace.

La deuxième équation correspond à la condition au bord (CB) qui impose la contrainte sur  $z(0, t) = CX(t)$ , où la matrice  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est supposée constante et connue.

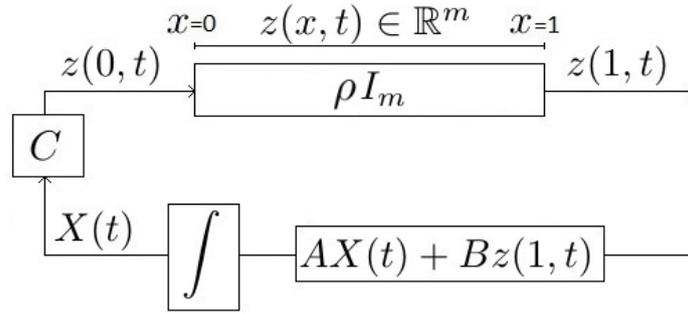


FIGURE 2.1 – Illustration du système couplé EDO-EDP de transport de l'équation (2.1).

### 2.2.2 Interprétations possibles de ce système couplé

Il est possible de comprendre et d'interpréter ce système (2.1) via la représentation par schéma bloc présentée dans la Figure 4.2, qui illustre le couplage EDO-EDP.

Une première interprétation consiste à voir l'EDO comme le système principal à étudier. Dans ce cas, l'équation de transport peut-être interprétée comme une perturbation agissant sur la dynamique de l'EDO. Il convient alors d'étudier la robustesse de l'EDO par rapport à cette perturbation. Cette situation s'apparente naturellement aux cas d'étude des systèmes à retards, étudiés dans les livres [Fri14]; [GCK03]; [Nic01] et les articles de synthèse [Ric03]; [Sip+11], ou encore dans le cadre des systèmes à entrées échantillonnées [Het+17] et contrôlés en réseaux [HNX07]; [Zam08].

Une seconde interprétation revient à considérer que l'équation principale à étudier est l'équation de transport, qui est, pour rappel, de dimension infinie. Dans ce cas, il est possible de comprendre l'EDO, comme un contrôleur de dimension finie pour l'équation de dimension infinie. Dans la littérature sur le contrôle des EDPs de transport (hyperboliques d'ordre 1), nous trouvons plusieurs méthodes pour synthétiser un contrôleur. Par exemple, la méthode dite de Backstepping [BC15]; [BLK13]; [Krs09] produit des contrôleurs de dimension infinie, qui, pour des raisons d'implémentation, doivent être discrétisés. Ces approximations de lois de commande Backstepping sont alors de dimension finie et peuvent s'écrire sous la forme d'une EDO comme celle présentée dans (2.1). Il est connu que la discrétisation de lois de commande de dimension infinie peut conduire à des comportements instables du système bouclé, que nous pouvons appeler le phénomène de "early lumping" [CZ12].

## 2.3 Existence et régularité des solutions du système couplé EDO-EDP

L'existence d'une solution pour le système couplé (2.1) est assurée, dans un certain cadre que nous allons préciser, par le théorème A.6 de [Cor07]. Selon ce dernier, pour tout  $z^0 \in$

$L^2((0, 1); \mathbb{R}^m)$  et  $X^0 \in \mathbb{R}^n$ , le problème de Cauchy (2.1) possède une unique solution  $(X, z) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) \times C(\mathbb{R}_+; L^2((0, 1); \mathbb{R}^m))$ . En outre, il existe  $K > 0$  et  $\delta > 0$  tels que cette unique solution, pour tout  $z^0 \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^m)$  et tout  $X^0 \in \mathbb{R}^n$ , satisfasse :

$$\|X(t)\| + \|z(\cdot, t)\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)} < Ke^{\delta t} (\|X^0\| + \|z^0\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)}) \quad \forall t > 0. \quad (2.2)$$

La démonstration de ce théorème est basée sur l'utilisation d'un changement de variable et l'application de plusieurs intégrations sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

En observant la forme de cette dernière expression de l'existence d'une unique solution, le choix de l'énergie  $E(X(t), z(t))$  suivante

$$E(X(t), z(t)) = |X(t)|^2 + \|z(\cdot, t)\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)}^2 \quad (2.3)$$

est justifié. Notre objectif est de démontrer un résultat de stabilité exponentielle. Cette étude consiste à montrer qu'il existe  $K > 0$  et  $\delta^* > 0$  tels que l'énergie du système  $E(X(t), z(t))$  soit  $\delta^*$ -exponentiellement décroissante, ce qui peut s'écrire sous la forme d'une inégalité donnée par :

$$E(X(t), z(t)) < Ke^{-2\delta^* t} E(0), \quad (2.4)$$

où  $E(0) = |X^0|^2 + \|z^0\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)}^2$ .

## 2.4 Fonctionnelles de Lyapunov candidates

### 2.4.1 Définition d'une structure générale

La méthode de Lyapunov est très répandue dans la littérature de stabilité des systèmes dynamiques, notamment les systèmes exprimés à l'aide du couplage EDO-EDP (voir [TM17] et [TPG15]). Cette méthode est basée sur le choix d'une fonctionnelle candidate de Lyapunov caractérisée par des propriétés de positivité et de dérivabilité, telles que (1.16) et (1.17) pour le système (1.14). Cette fonctionnelle contient des termes exprimés en fonction de l'état du système considéré.

La fonction d'énergie  $E(X(t), z(t))$  définie dans (2.3) semble a priori être un choix pertinent pour une fonctionnelle de Lyapunov pour le système complet. En effet, elle permet de rendre compte de l'état du système puisqu'elle vérifie l'inégalité (2.4). En revanche, elle ne donne pas forcément suffisamment de degré de liberté pour s'assurer de sa décroissance. Si nous revenons un instant sur le cas d'un système défini par une équation différentielle ordinaire linéaire, il n'est pas toujours raisonnable de choisir comme fonctionnelle de Lyapunov le carré de la norme du vecteur d'état (c'est-à-dire  $X^T(t)X(t)$ ). Il est souvent nécessaire d'ajouter des termes de couplages entre les différentes composantes de l'état du système. Dans le cas de la dimension finie, cela revient à choisir une matrice définie positive  $P$  de telle sorte que nous

puissions définir une fonctionnelle de Lyapunov de la forme

$$V(X) = X^T(t)X(t) \quad \rightarrow \quad V_P(X) = X^T(t)PX(t), \quad P \succ 0.$$

Cette formulation donne effectivement certains degrés de liberté pour assurer que la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov soit bien définie négative. Dans le cas du système couplé (2.1), il convient alors d'introduire des degrés de libertés qui permettront de relaxer les contraintes sur la dérivée de la fonctionnelle.

Considérons alors la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} V(X(t), z(t)) = & \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} X(t) \\ z(x_1, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & \mathcal{Q}(x_2) \\ \mathcal{Q}^\top(x_1) & \mathcal{T}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ z(x_2, t) \end{bmatrix} dx_1 dx_2 \\ & + \int_0^1 z^\top(x, t) e^{\frac{-2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx, \quad (2.5) \end{aligned}$$

où la vitesse de convergence  $\delta > 0$ , les matrices  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $S, R \in \mathbb{S}_+^m$  et les fonctions  $\mathcal{Q} \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^{n \times m})$  et  $\mathcal{T} \in L^2((0, 1)^2; \mathbb{S}^m)$  sont à déterminer. Cette fonctionnelle est inspirée de celles utilisées dans plusieurs travaux d'étude de stabilité de systèmes à retard. Elle est essentiellement composée de quatre termes différents. Un terme quadratique

$$X^\top(t)PX(t)$$

en fonction de la variable  $X(t)$  de l'EDO, et trois autres termes dédiés à la variable  $z(x, t)$  de l'EDP. Les deux derniers termes

$$\int_0^1 \int_0^1 z^\top(x_1, t) \mathcal{T}(x_1, x_2) z(x_2, t) dx_1 dx_2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 z^\top(x, t) e^{\frac{-2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx$$

peuvent être interprétés comme l'énergie pondérée de l'équation de transport (voir [Cor07]) et ont été largement utilisés dans la littérature. Enfin, les termes

$$\int_0^1 \int_0^1 z^\top(x_1, t) \mathcal{Q}^\top(x_1) X(t) dx_1 dx_2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_0^1 X^\top(t) \mathcal{Q}(x_2) z(x_2, t) dx_1 dx_2,$$

qui sont similaires l'un à l'autre, dépendent du choix de fonction  $\mathcal{Q}$  et concernent spécifiquement le couplage entre l'EDO et l'équation de transport.

Avant d'effectuer l'étude de stabilité où la fonctionnelle de Lyapunov (2.5) doit vérifier les inégalités (2.6) et (2.7), nous devons préciser que cette fonctionnelle est bien définie pour les matrices  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $S, R \in \mathbb{S}_+^m$  et les fonctions  $\mathcal{Q} \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^{n \times m})$  et  $\mathcal{T} \in L^2((0, 1)^2; \mathbb{S}^m)$ . Pour cela, nous notons que la fonctionnelle peut s'écrire

$$\begin{aligned} V(X(t), z(t)) = & X^\top(t)PX(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) e^{\frac{-2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx, \\ & + 2X^\top(t) \int_0^1 \mathcal{Q}(x) z(x, t) dx + \int_0^1 \int_0^1 z^\top(x_1, t) \mathcal{T}(x_1, x_2) z(x_2, t) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Sachant que  $P \leq \lambda_{max}(P)I_n$  et  $e^{\frac{-2\delta x}{\rho}}(S + (1-x)R) \leq \lambda_{max}(S + R)I_m$ , la fonctionnelle  $V(X(t), z(t))$  est majorée par

$$V(X(t), z(t)) \leq \lambda_{max}(P)|X(t)|^2 + \lambda_{max}(S + R)\|z(\cdot, t)\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)}^2 \\ 2X^\top(t) \int_0^1 \mathcal{Q}(x)z(x, t) dx + \int_0^1 \int_0^1 z^\top(x_1, t)\mathcal{T}(x_1, x_2)z(x_2, t) dx_1 dx_2.$$

Pour les deux termes intégrales restants, nous exploitons l'inégalité de Cauchy-Schwarz permettant de comparer le produit scalaire  $L^2$  de deux fonctions et leurs normes  $L^2$ . Nous avons  $z(\cdot, t) \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^m)$ ,  $\mathcal{Q} \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^{n \times m})$  et  $\mathcal{T} \in L^2((0, 1); \mathbb{S}^m)$ , et donc nous pouvons écrire

$$2X^\top(t) \int_0^1 \mathcal{Q}(x)z(x, t) dx \leq \left( \int_0^1 |z(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |\mathcal{Q}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |X(t)| \\ \leq \|z(\cdot, t)\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)} \|\mathcal{Q}(\cdot)\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^{n \times m})} |X(t)|$$

et enfin

$$\int_0^1 \int_0^1 z^\top(x_1, t)\mathcal{T}(x_1, x_2)z(x_2, t) dx_1 dx_2 = \int_0^1 z^\top(x_1, t) \int_0^1 \mathcal{T}(x_1, x_2)z(x_2, t) dx_2 dx_1 \\ \leq \int_0^1 |z(x_1, t)| \left( \int_0^1 |\mathcal{T}(x_1, x_2)|^2 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |z(x_2, t)|^2 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} dx_1 \\ \leq \|z(\cdot, t)\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)} \left( \int_0^1 |z(x_1, t)|^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \left| \int_0^1 |\mathcal{T}(x_1, x_2)|^2 dx_2 \right| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \|z(\cdot, t)\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)}^2 \|\mathcal{T}(\cdot, \cdot)\|_{L^2((0,1)^2;\mathbb{S}^m)}.$$

Par conséquent, la fonctionnelle de Lyapunov (2.5) est bien définie si ses arguments  $X(t)$ ,  $z(\cdot, t)$  et ses paramètres sont bien définis dans les espaces appropriés (cf. (2.5)).

Par la suite, notre objectif consistera à produire une nouvelle méthode numérique pour l'étude de stabilité du système couplé (2.1) en vérifiant que  $V(X(t), z(t))$  est bien une fonctionnelle de Lyapunov pour ce système. La vérification se fait en deux phases différentes. La première consiste à prouver que la fonctionnelle  $V(X(t), z(t))$  est encadrée par la fonction de l'énergie en satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\varepsilon_1 E(X(t), z(t)) \leq V(X(t), z(t)) \leq \varepsilon_2 E(X(t), z(t)), \quad (2.6)$$

pour deux scalaires strictement positifs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . La deuxième phase consiste à prouver la décroissance exponentielle de la fonctionnelle de Lyapunov  $V(X(t), z(t))$  en vérifiant l'inégalité de Grönwall

$$\dot{V}(X(t), z(t)) + 2\delta V(X(t), z(t)) \leq -\varepsilon_3 E(X(t), z(t)), \quad (2.7)$$

pour un scalaire strictement positif  $\varepsilon_3$ .

En prouvant l'inégalité (2.7), nous montrons la stabilité  $\delta^*$ -exponentielle du système (2.1),

puisque nous avons

$$\dot{V}(X(t), z(t)) + 2\delta^*V(X(t), z(t)) \leq 0,$$

où  $2\delta^* = 2\delta + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$ . L'intégration de ce dernier résultat sur l'intervalle  $(0, t)$  nous donne

$$V(X(t), z(t)) \leq V(0)e^{-2\delta^*t}, \quad \forall t > 0,$$

où  $V(0) = V(X^0, z^0)$ . En utilisant une nouvelle fois l'inégalité (2.6), nous obtenons

$$\varepsilon_1 E(X(t), z(t)) \leq V(X(t), z(t)) \leq V(0)e^{-2\delta^*t} \leq \varepsilon_2 E(0)e^{-2\delta^*t},$$

d'où l'inégalité (2.4) prouvant la décroissance exponentielle de l'énergie du système (2.1).

## 2.4.2 Méthode de construction de la fonctionnelle

Dans le but de produire une méthode d'étude de stabilité applicable numériquement, nous devons faire certaines hypothèses pour construire les fonctions  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{T}$ . Un choix doit être fait pour simplifier la formulation de la fonctionnelle. Pour cela, l'idée est d'utiliser une base orthogonales ou orthonormales pour les espaces de Hilbert dans lesquels sont définis ces deux fonctions. Parmi les bases connues et classiques, deux choix apparaissent naturellement, les bases trigonométriques ou polynomiales. Pour des raisons qui seront détaillés plus tard dans le manuscrit, nous préférons construire ces deux fonctions  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{T}$  sur une base orthogonale polynomiales, représentée par les polynômes de Legendre. Leur définition ainsi que certaines de leur propriétés sont rappelées en annexe de ce document (section A.1). Nous choisissons de construire les fonctions  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{T}$  de la manière suivante, à l'aide des polynômes de Legendre de degré plus petit qu'un entier  $N$  arbitraire :

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=0}^N Q_{N,i} \mathcal{L}_i(x), \quad \mathcal{T}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N T_{N,i,j} \mathcal{L}_i(x_1) \mathcal{L}_j(x_2). \quad (2.8)$$

où les matrices  $Q_{N,i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $T_{N,i,j} = T_{N,j,i}^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont constantes et à déterminer. De cette manière, les termes de la fonctionnelle faisant intervenir les fonctions  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{T}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 z^\top(x_1, t) \mathcal{T}(x_1, x_2) z(x_2, t) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 z^\top(x_1, t) \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N T_{N,i,j} \mathcal{L}_i(x_1) \mathcal{L}_j(x_2) \right) z(x_2, t) dx_1 dx_2 \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left( \int_0^1 \mathcal{L}_i(x) z(x, t) dx \right)^\top T_{N,i,j} \left( \int_0^1 \mathcal{L}_j(x) z(x, t) dx \right) \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X^\top(t) \int_0^1 \mathcal{Q}(x) z(x, t) dx &= 2X^\top(t) \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^N Q_{N,i} \mathcal{L}_i(x) \right) z(x, t) dx \\ &= 2X^\top(t) \left( \sum_{i=0}^N Q_{N,i} \left( \int_0^1 \mathcal{L}_i(x) z(x, t) dx \right) \right) \end{aligned}$$

Ce choix particulier des fonctions  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{T}$  a plusieurs avantages. Premièrement, il permet à la fonction  $\mathcal{T}$  de séparer les deux variables d'intégration. Ensuite, il permet de transformer les composantes de la fonctionnelles en une expression quadratique qui dépend de nouveaux éléments définis par

$$\mathfrak{z}_i(t) = \int_0^1 \mathcal{L}_i(x)z(x,t)dx, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

Puisque les polynômes de Legendre forment une base orthogonales de l'espace  $L^2$ , ces éléments correspondent (à un coefficient de normalisation près) aux coordonnées de la fonction d'état  $z$  dans cette base. Ils représentent donc une information partielle sur la fonction  $z$ . Par la suite nous allons mettre en avant quelques propriétés sur ces éléments qui nous seront utiles pour conduire notre étude de stabilité.

De manière générale, nous définissons le vecteur des  $(N + 1)$  premiers projetés  $Z_N$  par

$$Z_N(t) = \begin{bmatrix} \mathfrak{z}_0(t) \\ \mathfrak{z}_1(t) \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_N(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)m}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

où les composantes  $\mathfrak{z}_i$  sont définies dans (2.9). La fonctionnelle de Lyapunov devient alors  $V_N(X(t), z(t)) = V_{N,1}(X(t), Z_N(t)) + V_2(z(t))$  où

$$\begin{aligned} V_{N,1}(X(t), Z_N(t)) &= \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}, \\ V_2(z(t)) &= \int_0^1 z^\top(x,t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R)z(x,t)dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

où les matrices  $Q_N$  et  $T_N$  sont données par

$$Q_N = \begin{bmatrix} Q_{N,0} & Q_{N,1} & \dots & Q_{N,N} \end{bmatrix}, \quad T_N = T_N^\top = \begin{bmatrix} T_{N,0,0} & T_{N,0,1} & \dots & T_{N,0,N} \\ T_{N,1,0} & T_{N,1,1} & & T_{N,1,N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{N,N,0} & T_{N,N,1} & \dots & T_{N,N,N} \end{bmatrix}$$

Cette fonctionnelle s'écrit finalement d'une manière plus simple et élégante comme la somme d'un terme quadratique en l'état de l'EDO,  $X$ , et les projetés,  $Z_N$ , et d'un autre terme relié à la norme  $L^2$  de l'état de l'EDP.

Dans la suite de cette section, nous allons proposer deux résultats qui seront utiles pour la suite de ce chapitre. Le premier concerne le lien entre les normes d'une fonction  $z$  et la norme de ses projetés délivré par l'application de l'inégalité de Bessel (brièvement rappelé dans l'annexe A.2). Le second est un résultat technique qui permet d'exprimer la dérivée temporelle du vecteur des projetés.

### 2.4.3 Inégalité de Bessel-Legendre

L'inégalité de Bessel permet de déterminer la différence entre la norme réelle d'un vecteur et ses projections sur une base orthonormale (section A.2). Le lemme suivant définit l'inégalité de Bessel basée sur les polynômes de Legendre :

**Lemme 2.1.** *Considérons une variable  $z \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^m)$  et une matrice symétrique définie positive  $R \in \mathbb{S}_m^+$ . Nous avons pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :*

$$\int_0^1 z^\top(x) R z(x) dx \geq Z_N^\top R^N Z_N, \quad (2.12)$$

où

$$R^N = \text{diag}(R, 3R, \dots, (2N+1)R) \in \mathbb{R}^{(N+1)m \times (N+1)m}. \quad (2.13)$$

**Remarque 2.2.** *L'inégalité de Bessel-Legendre à l'ordre  $N = 0$  ou  $N = 1$  représente respectivement, les cas particuliers de l'inégalité de Jensen et l'inégalité de Wirtinger [SG13b]. De plus, quand  $N$  tend vers l'infini, l'inégalité devient une égalité reflétant l'identité de Parseval.*

**Démonstration:** La différence entre la norme réelle d'un vecteur et ses projections sur une base orthonormale (section A.2) est donnée par :

$$z_e(x) = z(x) - \sum_{k=0}^N \left( \int_0^1 z(y) \mathcal{L}_k(y) dy \right) \frac{\mathcal{L}_k(x)}{\|\mathcal{L}_k\|^2} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Ainsi on assure que l'inégalité  $\int_0^1 z_e^\top(x) R z_e(x) dx \geq 0$  est toujours vérifiée, puisque la matrice  $R \in \mathbb{S}_m^+$ . En développant l'expression de  $z_e$  dans l'inégalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^\top(x) R z(x) dx + \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\int_0^1 \mathcal{L}_k(x) \mathcal{L}_j(x) dx}{\|\mathcal{L}_k\|^2 \|\mathcal{L}_j\|^2} \int_0^1 z^\top(y) \mathcal{L}_k(y) dy R \int_0^1 z(y) \mathcal{L}_j(y) dy \\ - 2 \sum_{k=0}^N \frac{1}{\|\mathcal{L}_k\|^2} \int_0^1 z^\top(x) \mathcal{L}_k(x) dx R \int_0^1 z(y) \mathcal{L}_k(y) dy \geq 0. \end{aligned}$$

A ce stade, nous pouvons utiliser la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre qui nous assure que  $\int_0^1 \mathcal{L}_j(x) \mathcal{L}_k(x) dx = \|\mathcal{L}_k\|^2 \delta_{jk} = \frac{1}{2k+1} \delta_{jk}$ . Ceci permet de simplifier notablement l'inégalité précédente pour obtenir

$$\int_0^1 z^\top(x) R z(x) dx - \sum_{k=0}^N \frac{1}{\|\mathcal{L}_k\|^2} \int_0^1 z^\top(x) \mathcal{L}_k(x) dx R \int_0^1 z(x) \mathcal{L}_k(x) dx \geq 0,$$

En utilisant la notation  $Z_N$  identique à celle donnée dans l'équation (2.10) et la définition de  $R_N$  donnée dans l'énoncé du Lemme 2.1, on démontre l'inégalité souhaitée.  $\square$

## 2.4.4 Dynamique des projetés

La dimension infinie d'une partie de l'état du système couplé (2.1) nous conduit à l'utilisation des polynômes de Legendre  $\mathcal{L}_k$ , définis en détails en annexe (section A.1), sur lesquels la variable de dimension infinie  $z(x, t)$  sera projetée, afin d'obtenir un vecteur de dimension finie manipulable que nous appellerons  $Z_N(t)$ .

L'état projeté  $Z_N(t)$ , contenant les projections de la variable  $z(x, t)$  sur les  $N + 1$  premiers polynômes de Legendre, est de la forme suivante :

$$Z_N(t) = \left[ \mathfrak{Z}_0^\top(t) \quad \mathfrak{Z}_1^\top(t) \quad \mathfrak{Z}_2^\top(t) \quad \dots \quad \mathfrak{Z}_N^\top(t) \right]^\top \in \mathbb{R}^{(N+1)m} \quad (2.14)$$

où

$$\mathfrak{Z}_{k=0\dots N}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^1 z_1(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 z_m(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Pour calculer sa dérivée temporelle, il suffit de calculer celle d'une composante  $\frac{d}{dt} \mathfrak{Z}_{k=0\dots N}(t)$ , et de généraliser sur la totalité du vecteur. Nous avons

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{Z}_k(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 z(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx = \int_0^1 \partial_t z(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx = -\rho \int_0^1 \partial_x z(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx$$

puisque  $\partial_t z(x, t) = -\rho \partial_x z(x, t)$  pour tout  $t > 0$  et  $x \in [0, 1]$ . Une intégration par parties donne alors, en utilisant (A.3) donné en annexe,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{Z}_k(t) &= - \left[ \rho z(x, t) \mathcal{L}_k(x) \right]_0^1 + \rho \int_0^1 z(x, t) \mathcal{L}'_k(x) dx \\ &= -\rho z(1, t) + \rho (-1)^k z(0, t) + \rho \sum_{j=0}^{\max(0, k-1)} \ell_{kj} \int_0^1 z(x, t) \mathcal{L}_j(x) dx \\ &= -\rho z(1, t) + \rho (-1)^k z(0, t) + \rho \sum_{j=0}^{\max(0, k-1)} \ell_{kj} \mathfrak{Z}_j(t), \end{aligned}$$

où les coefficients  $\ell_{kj}$  donnés par

$$\ell_{kj} = \begin{cases} (2j + 1)(1 - (-1)^{k+j}), & \text{if } j \leq k - 1, \\ 0, & \text{if } j \geq k, \end{cases}$$

proviennent de la loi de dérivation (A.3) des polynômes de Legendre donnée en annexe. Ainsi, la dérivée temporelle  $\frac{d}{dt} Z_N(t)$  de l'état projeté est donnée par le calcul qui suit.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Z_N(t) &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \int_0^1 z(x,t)\mathcal{L}_0(x) dx \\ \int_0^1 z(x,t)\mathcal{L}_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 z(x,t)\mathcal{L}_N(x) dx \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\rho z(1,t) & +\rho z(0,t) & & & \\ -\rho z(1,t) & -\rho z(0,t) & & & \\ \vdots & & & & \\ -\rho z(1,t) & +\rho(-1)^k z(0,t) & +\rho\ell_{k0}\mathfrak{Z}_0(t) & +\rho\ell_{k1}\mathfrak{Z}_1(t) & +\cdots +\rho\ell_{k,k-1}\mathfrak{Z}_{k-1}(t) \end{bmatrix} \\
&= -\rho \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} z(1,t) + \rho \begin{bmatrix} I_m \\ -I_m \\ \vdots \\ (-1)^k I_m \end{bmatrix} z(0,t) + \rho \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ \ell_{10}I_m & 0_m & & 0_m \\ \vdots & & \ddots & \\ \ell_{k0}I_m & \cdots & \ell_{k,k-1}I_m & 0_m \end{bmatrix} Z_N(t)
\end{aligned}$$

En utilisant la condition frontière  $z(0,t) = CX(t)$ , et en définissant les matrices

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_N &= \begin{bmatrix} I_m & I_m & \cdots & I_m \end{bmatrix}^\top && \in \mathbb{R}^{m(N+1),m} \\
\mathbf{1}_N^* &= \begin{bmatrix} I_m & -I_m & \cdots & (-1)^N I_m \end{bmatrix}^\top && \in \mathbb{R}^{m(N+1),m} \\
L_N &= [\ell_{jk}I_m]_{j,k=0..N} && \in \mathbb{R}^{m(N+1),m(N+1)},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

le lemme suivant fournit la dérivée temporelle de l'état projeté  $Z_N(t)$  :

**Lemme 2.2.** *Considérons  $z \in L^2((0,1); \mathbb{R}^m)$  solution de l'équation de transport du système couplé (2.1). La dérivée temporelle du vecteur de l'état projeté est donnée par :*

$$\frac{d}{dt}Z_N(t) = -\rho\mathbf{1}_N z(1,t) + \rho\mathbf{1}_N^* CX(t) + \rho L_N Z_N(t). \tag{2.16}$$

**Remarque 2.3.** *Nous remarquons que la matrice  $L_N$  est triangulaire inférieure. La forme de cette matrice permet d'avoir un lien entre la dérivée de la composante en question  $\frac{d}{dt}Z_k(t)$  et ses précédentes  $Z_0 \cdots Z_{k-1}(t)$ . Cette relation entre les composantes de l'état projeté  $Z_N(t)$  permet de conserver la hiérarchie des conditions de cette étude de stabilité. Nous pouvons utiliser tout type de polynôme pour mener la même étude de stabilité, à part les fonctions trigonométriques qui amènent à des expressions indépendantes des composantes de la dérivée de l'état projeté, et donc à perdre la hiérarchie des conditions de stabilité.*

## 2.5 Conditions de stabilité du système EDO-EDP de transport

Après avoir détaillé tous les outils exploités dans cette étude de stabilité, cette dernière se fait en trois étapes où nous prouvons l'existence des scalaires  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  tels que la fonctionnelle de Lyapunov (2.11) vérifie

$$\varepsilon_1 E(X(t), z(t)) \leq V_N(X(t), z(t)) \leq \varepsilon_2 E(X(t), z(t)), \quad (2.17)$$

$$\dot{V}_N(X(t), z(t)) + 2\delta V_N(X(t), z(t)) \leq -\varepsilon_3 E(X(t), z(t)). \quad (2.18)$$

En exploitant les outils présentés auparavant, le théorème suivant permet l'analyse de stabilité du système couplé (2.1).

**Théorème 2.1.** *Considérons le système couplé (2.1) avec une vitesse de transport donnée  $\rho > 0$ . S'il existe un entier  $N \geq 0$ , tel qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_N \in \mathbb{R}^{n \times (N+1)m}$  et  $T_N \in \mathbb{S}^{(N+1)m}$ ,  $S$  et  $R \in \mathbb{S}_+^m$  satisfaisant les inégalités matricielles linéaires suivantes*

$$\Phi_N(\rho, \delta) = \begin{bmatrix} P & Q_N \\ Q_N^\top & T_N + e^{-\frac{2\delta}{\rho}} S^N \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.19)$$

$$\Psi_N(\rho, \delta) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & PB - \rho Q_N \mathbf{1}_N & \Psi_{13} \\ * & -\rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} S & B^\top Q_N - \rho \mathbf{1}_N^\top T \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.20)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \text{He}(PA + \rho Q_N \mathbf{1}_N^* C) + \rho C^\top (S + R)C + 2\delta P \\ \Psi_{13} &= A^\top Q_N + \rho C^\top \mathbf{1}_N^* T_N + \rho Q_N L_N + 2\delta Q_N \\ \Psi_{33} &= \rho \text{He}(T_N L_N) - \rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} R^N + 2\delta T_N, \\ S^N &= \text{diag}(S, 3S, \dots, (2N+1)S), \\ R^N &= \text{diag}(R, 3R, \dots, (2N+1)R), \end{aligned}$$

alors le système couplé est exponentiellement stable.

De plus, pour chaque valeur de la vitesse  $\rho$ , il existe un coefficient  $K = K(\rho) > 0$  tel que l'énergie du système décroît exponentiellement à une vitesse de convergence  $\delta^*$  :

$$E(X(t), z(t)) \leq K e^{-2\delta^* t} E(0) \quad \forall t > 0.$$

### **Démonstration:**

**Étape 1 : Existence d'un paramètre  $\varepsilon_1$  vérifiant (2.17).**

Nous avons sous hypothèse  $S \succ 0$  et  $\Phi_N(\rho, \delta) \succ 0$ , donc il existe un scalaire  $\varepsilon_1 > 0$

suffisamment petit tel que

$$S \succ \varepsilon_1 e^{\frac{2\delta}{\rho}} I_m, \quad \Phi_N(\rho, \delta) = \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N + e^{-\frac{2\delta}{\rho}} S^N \end{bmatrix} \succ \varepsilon_1 \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ * & \mathcal{I}^N \end{bmatrix}$$

où

$$\mathcal{I}^N = \text{diag}(I_m, 3I_m, \dots, (2N+1)I_m).$$

**Remarque 2.4.**  $\varepsilon_1$  est lié à la plus petite valeur propre de  $S$  et  $\Phi_N(\rho, \delta)$ .

D'autre part,  $V_N(X(t), z(t))$  définie en (2.11) satisfait pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) &\geq \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \Phi_N(\rho, \delta) \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} \\ &\quad - e^{-\frac{2\delta}{\rho}} Z_N^\top(t) S^N Z_N(t) + e^{-\frac{2\delta}{\rho}} \int_0^1 z^\top(x, t) S z(x, t) dx. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\Phi_N(\rho, \delta)$  par sa borne inférieure dépendant de  $\varepsilon_1$  et introduisant  $\varepsilon_1$  dans le dernier terme intégral, nous obtenons

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) &\geq \varepsilon_1 |X(t)|_n^2 + \varepsilon_1 \int_0^1 z^\top(x, t) z(x, t) dx \\ &\quad - Z_N^\top(t) (e^{-\frac{2\delta}{\rho}} S^N - \varepsilon_1 \mathcal{I}^N) Z_N(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) (e^{-\frac{2\delta}{\rho}} S - \varepsilon_1 I_m) z(x, t) dx. \end{aligned}$$

Sachant que  $S - \varepsilon_1 e^{\frac{2\delta}{\rho}} I_m \succ 0$ , appliquons le lemme (2.1) sur le dernier terme intégral

$$\int_0^1 z^\top(x, t) (e^{-\frac{2\delta}{\rho}} S - \varepsilon_1 I_m) z(x, t) dx \geq Z_N^\top(t) (e^{-\frac{2\delta}{\rho}} S^N - \varepsilon_1 \mathcal{I}^N) Z_N(t).$$

La fonctionnelle de Lyapunov vérifie donc, pour tout  $X, z$ ,

$$V_N(X(t), z(t)) \geq \varepsilon_1 E(X(t), z(t)).$$

**Étape 2 : Existence de  $\varepsilon_2$  vérifiant (2.17).**

Il existe un scalaire positif  $\beta > 0$  suffisamment large tel que

$$\begin{bmatrix} P & Q_N \\ Q_N^\top & T_N \end{bmatrix} \preceq \beta \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ * & \mathcal{I}^N \end{bmatrix},$$

et permettant de vérifier, sous l'hypothèse  $S \succ 0$  et  $R \succ 0$ , l'inégalité

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) &\leq \beta |X(t)|_n^2 + \beta Z_N^\top(t) \mathcal{I}^N Z_N(t) + \int_0^1 e^{\frac{-2\delta}{\rho}x} z^\top(x, t) (S + (1-x)R) z(x, t) dx \\ &\leq \beta |X(t)|_n^2 + \beta Z_N^\top(t) \mathcal{I}^N Z_N(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) (S + R) z(x, t) dx. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.1 sur le terme en  $Z_N(t)$ , nous avons

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) &\leq \beta |X(t)|_n^2 + \int_0^1 z^\top(x, t) (\beta I_m + S + R) z(x, t) dx \\ &\leq \beta |X(t)|_n^2 + \varepsilon_2 \|z\|_{L^2(0,1;\mathbb{R}^m)}^2 \leq \varepsilon_2 E(X(t), z(t)), \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_2 = \beta + \lambda_{\max}(S) + \lambda_{\max}(R)$ . L'inégalité (2.17) de positivité est donc prouvée.

**Étape 3 : Existence de  $\varepsilon_3$  vérifiant (2.18).**

Dans cette étape, nous avons besoin de définir un état augmenté de dimension  $n + (N + 1)m$  défini par

$$\xi_N(t) = \begin{bmatrix} X^\top(t) & z^\top(1, t) & Z_N^\top(t) \end{bmatrix}^\top. \quad (2.21)$$

Considérons le premier terme  $V_{N,1}(X(t), Z_N(t))$  de la fonctionnelle de Lyapunov (2.11). L'inégalité de Grönwall qui lui correspond est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_{N,1}(X(t), Z_N(t)) &+ 2\delta V_{N,1}(X(t), Z_N(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ Q_N^\top & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + 2\delta \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ Q_N^\top & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} \\ &= \xi_N^\top(t) \begin{bmatrix} \phi_1 & PB - \rho Q_N \mathbb{1}_N & \Psi_{13} \\ * & 0 & B^\top Q_N - \rho \mathbb{1}_N^\top T_N \\ * & * & \rho \text{He}(T_N L_N) + 2\delta T_N \end{bmatrix} \xi_N(t) \end{aligned}$$

avec  $\phi_1 = \text{He}(PA + \rho Q_N \mathbb{1}_N^* C) + 2\delta P$ .

En exploitant l'équation de transport du système (2.1), la dérivée temporelle du second

terme  $V_2(z(t))$  est

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(z(t)) &= \int_0^1 \partial_t \left( z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) \right) dx \\
&= \int_0^1 \partial_t z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) + z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) \partial_t z(x, t) dx \\
&= -\rho \int_0^1 \partial_x z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) + z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) \partial_x z(x, t) dx \\
&= -\rho \int_0^1 \partial_x \left( z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) \right) dx - \rho \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} R z(x, t) dx \\
&\quad - 2\delta \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans l'équation précédente  $2\delta V_2(z(t))$ , ce qui est utile pour obtenir l'inégalité

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t)) &= \left[ -\rho z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} \left( (S + (1-x)R) \right) z(x, t) \right]_0^1 \\
&\quad - \rho \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} R z(x, t) dx.
\end{aligned}$$

Sachant que  $z(0, t) = CX(t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t)) &= -\rho \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} R z(x, t) dx + \left[ -\rho z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} \left( (S + (1-x)R) \right) z(x, t) \right]_0^1 \\
&= -\rho \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} R z(x, t) dx - \rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} z^\top(1, t) S z(1, t) + \rho z^\top(0, t) (S + R) z(0, t) \\
&= -\rho \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} R z(x, t) dx - \rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} z^\top(1, t) S z(1, t) + \rho X^\top(t) C^\top (S + R) CX(t).
\end{aligned}$$

En rassemblant les résultats des deux termes  $V_{N,1}(X(t), Z_N(t))$  et  $V_2(z(t))$  et en utilisant la définitions de  $\Psi_N(\rho, \delta)$  dans (2.20), nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t)) &= \xi^\top(t) \Psi_N(\rho, \delta) \xi(t) - \rho \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-\frac{2\delta x}{\rho}} R z(x, t) dx \\
&\quad + \rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} Z_N(t) R^N Z_N(t).
\end{aligned}$$

La borne inférieure du terme exponentielle sur l'intervalle  $[0, 1]$  est donnée par  $e^{-\frac{2\delta}{\rho}} \leq e^{-\frac{2\delta x}{\rho}}$ .

Donc, l'utilisation du Lemme 2.1 donne inégalité

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t)) &\leq \xi^\top(t) \Psi_N(\rho, \delta) \xi(t) - \rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} \int_0^1 z^\top(x, t) R z(x, t) dx \\ &\quad + \rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} Z_N(t) R^N Z_N(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'inégalité (2.20) assure l'existence d'un scalaire  $\varepsilon_3 > 0$  tel que

$$R \succ \frac{1}{\rho} \varepsilon_3 e^{\frac{2\delta}{\rho}} I_m, \quad \Psi_N(\rho, \delta) \prec -\varepsilon_3 \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & \mathcal{I}^N \end{bmatrix}.$$

Utilisons ces deux inégalités sur (2.22)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t)) &\leq -\varepsilon_3 \left( |X(t)|^2 + \int_0^1 |z(x, t)|^2 dx \right) \\ &\quad + Z_N(t) (\rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} R^N - \varepsilon_3 \mathcal{I}^N) Z_N(t) - \int_0^1 z^\top(x, t) (\rho e^{-\frac{2\delta}{\rho}} R - \varepsilon_3 I_m) z(x, t) dx. \end{aligned}$$

Puisque  $R - \frac{1}{\rho} \varepsilon_3 e^{\frac{2\delta}{\rho}} I_m \succ 0$ , le Lemme 2.1 assure que la somme des deux derniers termes est négative. Donc  $V_N(X(t), z(t))$  vérifie l'inégalité

$$\dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t)) \leq -\varepsilon_3 E(X(t), z(t)),$$

ce qui permet de conclure la stabilité exponentielle du système couplé (2.1) (cf Section 2.4).  $\square$

## 2.6 Applications numériques

**Exemple 1 :** Pour une première application de notre approche, nous considérons le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} z(1, t), \\ \partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = 0, \\ z(0, t) = X(t). \end{cases}$$

Nous remarquons que le système fini considéré (EDO) est stable, puisque les valeurs propres de  $A + BC$  sont  $-1.9$  et  $-3$ .

Pour cet exemple, le Tableau 4.1 fournit la valeur minimale permise de la vitesse de transport  $\rho_{min}$ , pour plusieurs valeurs de la vitesse de convergence exponentielle exigée  $\delta$  et l'ordre de l'approximation polynômiale  $N$ , obtenue par la résolution des conditions du Théorème 2.1. Nous constatons qu'à  $\delta = 0$ , le Théorème 2.1 permet de récupérer, à l'ordre  $N = 4$ , une estimation précise à  $10^{-4}$  de la vitesse de transport minimale, pour laquelle le système reste

stable. Le tableau montre aussi que l'augmentation de  $N$  permet de réduire le conservatisme, et donc d'améliorer l'estimation de la vitesse minimale  $\rho_{min}$ .

Th.1	$\delta = 0$	$\delta = 0.005$	$\delta = 0.01$	Variables
N=0	0.2284	0.2611	0.2885	16
N=1	0.1761	0.2073	0.2325	27
N=2	0.1653	0.1957	0.2202	42
N=3	0.1623	0.1925	0.2168	61
N=4	0.1620	0.1919	0.2159	84

TABLE 2.1 – Vitesse minimale permise  $\rho_{min}$  dans l'exemple 1.

Le graphique de la Figure 2.2 présente l'évolution de la vitesse de convergence exponentielle  $\delta$  en fonction de la vitesse de transport  $\rho$  pour différentes valeurs de l'ordre  $N$ . Nous constatons que le Théorème 2.1 est capable de montrer que la vitesse de convergence  $\delta$  atteint un maximum pour une valeur optimale de  $\rho$  située autour de  $\rho = 5$ . Cela indique que la limitation de la vitesse de transport du système (2.1) pourrait améliorer sa vitesse de convergence.

**Exemple 2 :** Par ailleurs, le Théorème 2.1 permet également l'évaluation de la stabilité de systèmes instables pour des grandes valeurs de la vitesse de transport, comme le montre notre deuxième exemple. Considérons cette fois-ci le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(1, t), \\ \partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = 0, z(0, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t). \end{cases}$$

Ce système est instable pour des grandes valeurs de la vitesse de transport  $\rho$ , puisque la trace de  $A + BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}$  est strictement positive : le système possède en effet au moins une valeur propre dans le demi plan droit du lieu des racines.

La Table 2.2 présente pour cet exemple la vitesse de transport minimale et maximale permise  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$  pour plusieurs valeurs de la vitesse de convergence exponentielle exigée  $\delta$  et de l'ordre de l'approximation polynômiale  $N$  obtenue par la résolution des conditions du Théorème 2.1. Nous remarquons dans le tableau que l'augmentation de l'ordre de l'approximation  $N$  conduit à l'obtention d'une estimation plus précise des vitesses minimale et maximale autorisées  $\rho$ . Autrement, les résultats obtenus à l'ordre  $N$  sont inclus dans ceux trouvés à l'ordre  $N + 1$ .

L'évolution de  $\delta$  par rapport à  $\rho$  pour différentes valeurs de  $N = 0, 1, 2, 3, 4$  est présentée dans la Figure 2.3. Comme pour l'exemple précédent, une valeur optimale de la vitesse de transport est donnée par Théorème 2.1 conduisant à une vitesse de convergence maximale.

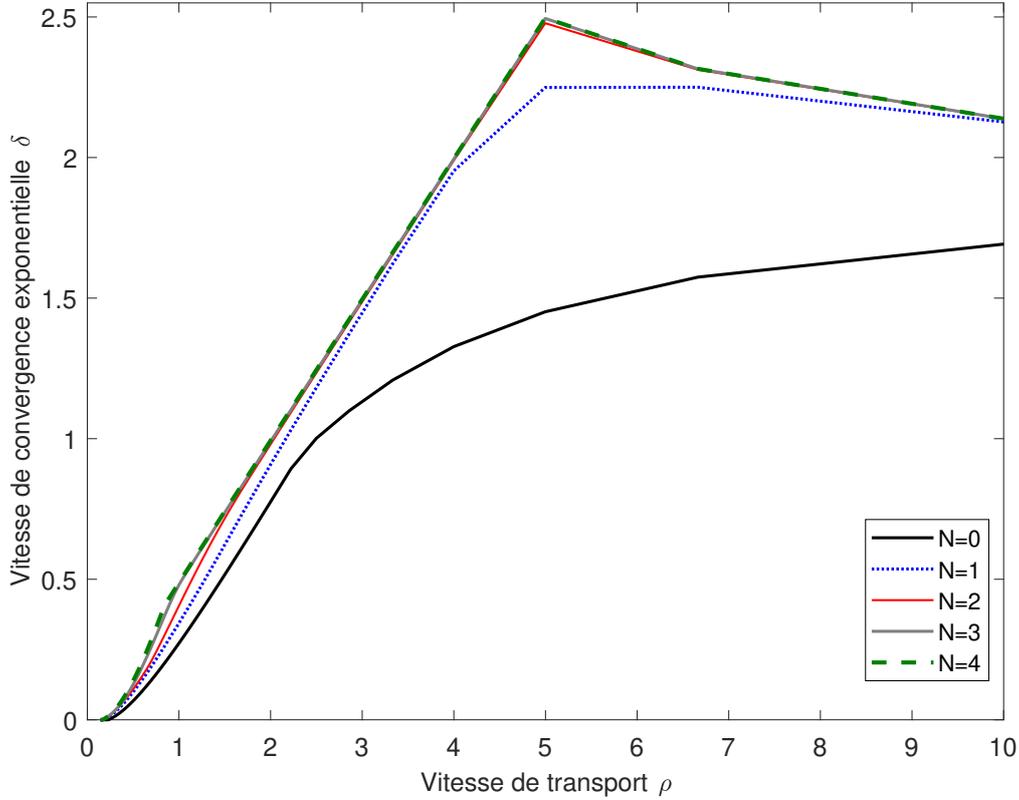


FIGURE 2.2 – Évolution de la vitesse de convergence  $\delta$  obtenue pour différents ordres d'approximation  $N$  en fonction de la vitesse  $\rho$  de l'équation de transport utilisé.

**Exemple 3 :** Considérons maintenant le système à retard présenté en introduction, et pour lequel les régions de stabilité étaient limitées par l'indépendance des conditions par rapport au terme du retard

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A'X(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'x(t). \end{cases} \quad \text{with}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

Cet exemple, déjà illustré dans le chapitre d'introduction, est tiré de la dynamique des vibrations en usinage [Sip+11]; [ZKT01], où une commande statique retardé a été proposée

$$u(t) = -Ky(t) + Ky(t - h),$$

où  $K$  est le gain de cette commande et  $(h = 1/\rho)$  est constant et peut varier sur une certaine plage de valeurs. L'équivalence de ce système par le modèle couplé (2.1) est donnée par :

	N=0	N=1	N=2	N=3
Variabes	8	12	17	23
$\delta = 0$	-	$\rho_{min} = 0.6491$ $\rho_{max} = 9.9404$	0.5840 9.9800	0.5822 9.9800
$\delta = 0.005$	-	$\rho_{min} = 0.6569$ $\rho_{max} = 9.0334$	0.5890 9.0744	0.5866 9.0744
$\delta = 0.01$	-	$\rho_{min} = 0.6647$ $\rho_{max} = 8.2781$	0.5939 8.3195	0.5909 8.3195

TABLE 2.2 – Vitesse de transport minimale et maximale permise dans l'exemple 2.

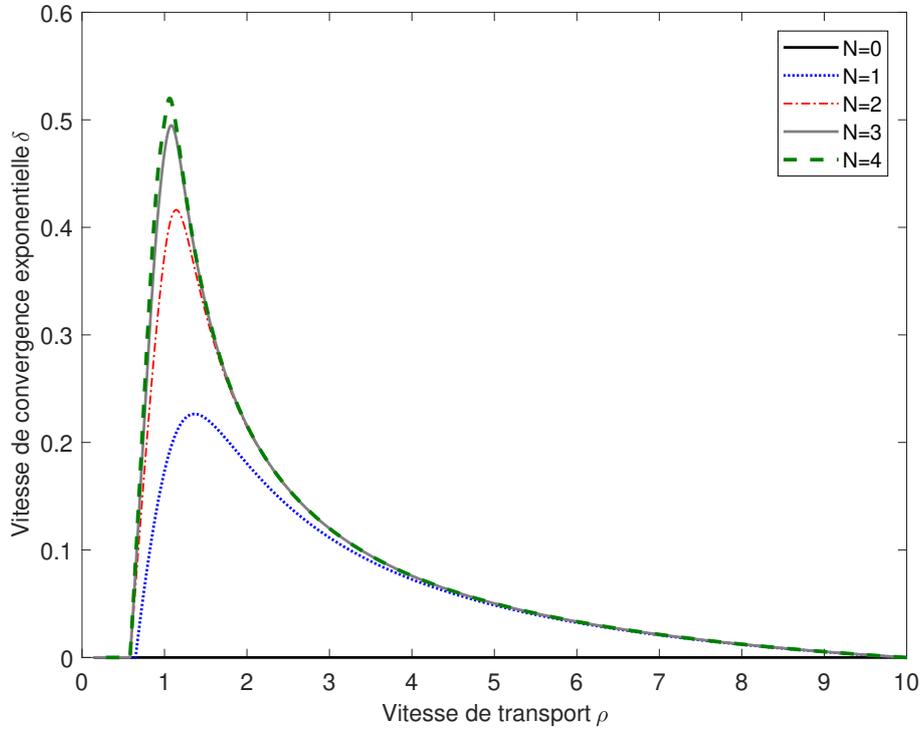


FIGURE 2.3 – Évolution de la vitesse de convergence  $\delta$  obtenue pour différents ordres d'approximation  $N$  en fonction de la vitesse  $\rho$  de l'équation de transport utilisée.

$$A = A' - B'KC', B = B'KC', C = I_4 \text{ et } D = 0_{4,4}.$$

Nous remarquons dans la Figure 2.4 que la région indépendante du retard ( $K \leq 0.3$ ) est obtenue à l'ordre  $N = 0$  des polynômes de Legendre, correspondant à l'inégalité de Jensen pour les conditions de stabilité. En revanche, Théorème 2.1 permet d'élargir cette région de stabilité vu qu'elle dépend également du terme du retard  $h$ , ce qui n'a pas été le cas avec les conditions du Théorème 1.2. Nous obtenons les mêmes résultats que [SG13b] utilisant

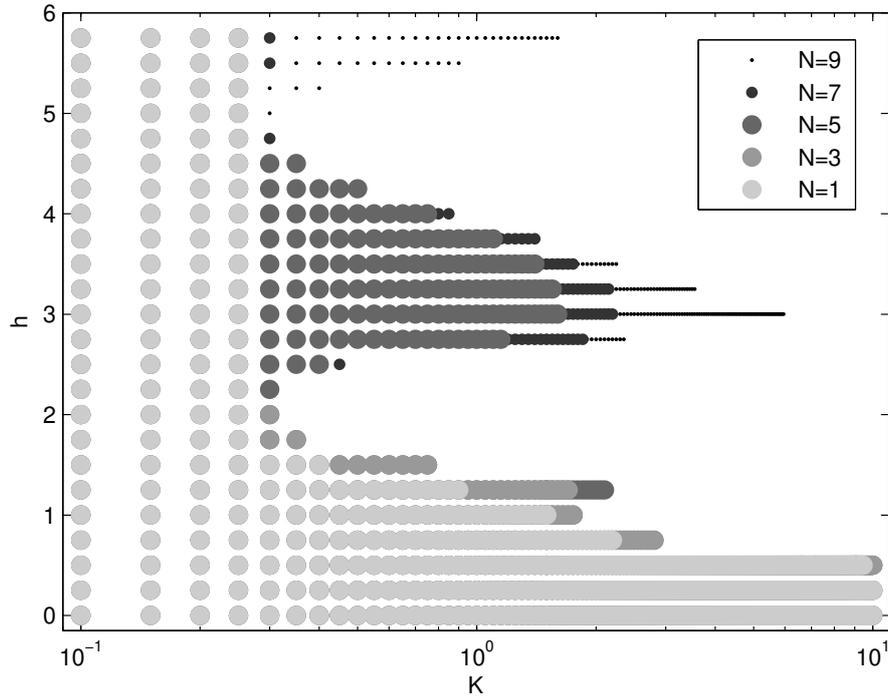


FIGURE 2.4 – Régions de stabilité dans le plan  $(K, h)$  obtenues par Théorème 2.1 pour plusieurs valeurs de  $N$  avec  $\delta = 0$

l'inégalité de Wirtinger à l'ordre  $N = 1$ . De plus, nous remarquons sur la Figure 2.4 que le système reste stable, pour une vitesse de transport donnée  $\rho$ , pour tous les ordres supérieurs à  $N$  s'il l'est à l'ordre  $N$ . Ce résultat présentant la hiérarchie des conditions de stabilité par rapport à l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre sera détaillé dans le prochain chapitre.

Les régions de stabilité de la Figure 2.4 ont été obtenues en utilisant un pas de  $\Delta_h = 0.25$  pour le retard  $h$ , et  $\Delta_K = 0.05$  pour le gain de la commande  $K$ .

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous produisons une nouvelle approche pour l'étude de stabilité d'un système couplant une EDO à une équation de transport en exploitant la méthode de Lyapunov et les polynômes de Legendre. Des conditions de stabilité du système de dimension infini (2.1), fournissant une estimation de sa vitesse de convergence exponentielle, sont détaillées et exprimées sous forme d'inégalités matricielles linéaires dépendant explicitement de la vitesse de transport  $\rho$  et de l'ordre  $N$  de l'approximation polynômiale.

La contribution présentée dans ce chapitre constitue un résultat préliminaire de l'analyse de stabilité des systèmes contenant les EDPs et utilisant les polynômes de Legendre et l'inéga-

lité de Bessel-Legendre. Le problème traité ici n'est qu'un cas particulier et simple exemple des systèmes distribués. Notre objectif est d'avoir une présentation générale de ce système couplé en ayant une matrice de transport au niveau de l'EDP au lieu du simple scalaire  $\rho$ .

# Stabilité d'un système couplé général d'une EDO et une équation de transport avec potentiel

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	Introduction . . . . .	41
<b>3.2</b>	Formulation du problème . . . . .	42
<b>3.3</b>	Projection sur les polynômes de Legendre . . . . .	44
<b>3.4</b>	Fonctionnelle de Lyapunov candidate . . . . .	46
<b>3.5</b>	Stabilité $L^2$ du système couplé EDO-EDP de transport . . . . .	47
<b>3.6</b>	Quelques cas particuliers du système couplé . . . . .	54
3.6.1	Système sans échanges internes entre les EDPs . . . . .	54
3.6.2	Système couplé EDO-EDP sans couplage interne et externe des EDPs . . . . .	57
3.6.3	Équation de transport avec feedback . . . . .	59
<b>3.7</b>	Conclusion . . . . .	61

---

## 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de généraliser l'approche de l'étude de stabilité du système couplé EDO-EDP de transport. En effet, au lieu d'avoir une seule vitesse de transport au niveau de l'EDP, nous considérons une matrice de transport  $\Lambda$  diagonale contenant plusieurs vitesses sur la diagonale. Par conséquent, les composantes de l'EDP de transport se propageront à des vitesses différentes. Nous ajoutons également un terme de couplage au niveau des conditions aux limites de l'EDP, permettant d'effectuer le lien entre sa sortie et son entrée. Il permet le couplage entre les EDPs en plus du couplage EDO-EDP. En outre, nous ajoutons un terme en fonction de la variable infinie  $z(x, t)$  à l'équation de transport permettant la communication en variable distribué des EDPs. L'étude se base sur les mêmes outils que le chapitre précédent à savoir les polynômes de Legendre pour l'approximation polynomiale, l'inégalité de Bessel et l'inégalité de Grönwall assurant la décroissance exponentielle.

### 3.2 Formulation du problème

La représentation plus générale du système couplé EDO-EDP proposée s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bz(1, t), & t > 0, \\ \partial_t z(x, t) + \Lambda \partial_x z(x, t) + Fz(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ z(0, t) = CX(t) + Dz(1, t), & t > 0, \\ z(x, 0) = z^0(x), & x \in (0, 1) \\ X(0) = X^0. \end{cases} \quad (3.1)$$

La Figure 4.3 suivante illustre la représentation générale (3.1) du couplage EDO-EDP de transport. Les flèches du bloc EDPs présentent les échanges en variable distribuée  $z(x, t)$  entre les EDPs.

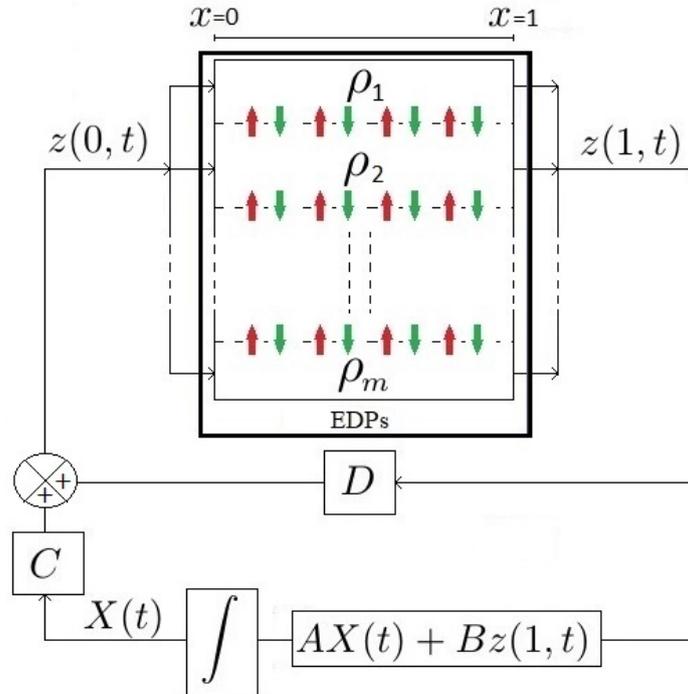


FIGURE 3.1 – Illustration du système couplé EDO-EDP de transport (3.1).

Les données initiales du système sont  $X^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $z^0 \in L^2(0, 1)$ . Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F$  et  $\Lambda$  sont constantes et de tailles appropriées. Le terme  $Dz(1, t)$ , ajouté à la condition aux limites  $z(0, t)$ , permet d'effectuer un couplage entre les EDPs en injectant leurs sorties  $z(1, t)$  à leurs entrées  $z(0, t)$ . Le terme d'ordre 0  $Fz(x, t)$  introduit par le potentiel  $F$  pourrait générer des effets de croissance, décroissance ou d'oscillations au niveau de la solution, mais ne change pas les caractéristiques principales de la propagation de cette dernière. La matrice

des vitesses de propagation  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  est de la forme suivante :

$$\Lambda = \text{diag}(\rho_i I_{m_i})_{\{i=1\dots p\}}, \quad (3.2)$$

de manière à ce que chaque vitesse  $\rho_i > 0$  soit appliquée à  $m_i$  composantes de l'état  $z(x, t)$  (donc  $m = \sum_{i=1}^p m_i$ ). L'existence de solution est assurée, comme pour le cas particulier (2.1), par le théorème A.6 dans [BC16].

**Remarque 3.1.** *Puisque la matrice de transport  $\Lambda$  est diagonale, nous remarquons que si la matrice  $F$  est également diagonale, le système (3.1) se réduit à un ensemble d'équations hyperboliques indépendantes (voir [SBS17a]). Considérons l'équation de transport dans le système (3.1), le changement de variable  $y(x, t) = e^{-\Lambda F x} z(x, t)$  permet de prouver ce résultat. Dans cette étude, nous considérons que la matrice  $F$  du système (3.1) peut être n'importe quelle matrice de  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . L'effet du terme d'ordre inférieur,  $Fz(x, t)$ , est de causer une croissance, une décroissance ou des oscillations au niveau de la solution, mais cela ne modifie pas les caractéristiques principales de la propagation de la solution.*

L'énergie du système couplé (3.1) est donnée par l'expression suivante :

$$E(X(t), z(t)) = |X(t)|^2 + \|z(t)\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)}^2, \quad (3.3)$$

et nous pouvons montrer d'une façon formelle que cette énergie est décroissante. La dérivée temporelle de l'énergie  $E(X(t), z(t))$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dE(X(t), z(t))}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( X^\top(t) X(t) \right) + \int_0^1 \partial_t \left( z^\top(x, t) z(x, t) \right) dx \\ &= \dot{X}^\top(t) X(t) + X^\top(t) \dot{X}(t) + \int_0^1 \partial_t z^\top(x, t) z(x, t) + z^\top(x, t) \partial_t z(x, t) dx. \end{aligned}$$

Et en utilisant l'équation de transport dans (3.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dE(X(t), z(t))}{dt} &= [AX(t) + Bz(1, t)]^\top X(t) + X^\top(t) [AX(t) + Bz(1, t)] \\ &\quad + \int_0^1 [-\Lambda \partial_x z(x, t) - Fz(x, t)]^\top z(x, t) + z^\top(x, t) [-\Lambda \partial_x z(x, t) - Fz(x, t)] dx \\ &= X^\top(t) \text{He}(A) X(t) + z^\top(1, t) B^\top X(t) + X^\top(t) B z(1, t) \\ &\quad - \int_0^1 \partial_x \left( z^\top(x, t) \Lambda z(x, t) \right) dx - \int_0^1 z^\top(x, t) \text{He}(F) z(x, t) dx \\ &= X^\top(t) \text{He}(A) X(t) + z^\top(1, t) B^\top X(t) + X^\top(t) B z(1, t) \\ &\quad - [z^\top(x, t) \Lambda z(x, t)]_0^1 - \int_0^1 z^\top(x, t) \text{He}(F) z(x, t) dx. \end{aligned}$$

Sachant que la condition initiale  $z(0, t) = CX(t) + Dz(1, t)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dE(X(t), z(t))}{dt} &= X^\top(t) \text{He}(A)X(t) + z^\top(1, t)B^\top X(t) + X^\top(t)Bz(1, t) - z^\top(1, t)\Lambda z(1, t) \\ &\quad + [CX(t) + Dz(1, t)]^\top \Lambda [CX(t) + Dz(1, t)] - \int_0^1 z^\top(x, t) \text{He}(F)z(x, t) dx \\ &= X^\top(t)(\text{He}(A) + C^\top \Lambda C)X(t) + z^\top(1, t)(B^\top + D^\top \Lambda C)X(t) + X^\top(t)(C^\top \Lambda D + B)z(1, t) \\ &\quad + z^\top(1, t)(D^\top \Lambda D - \Lambda)z(1, t) - \int_0^1 z^\top(x, t) \text{He}(F)z(x, t) dx. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Young (A.9) aux termes croisés en  $X(t)$  et  $z(1, t)$ , nous amène à l'obtention de l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dE(X(t), z(t))}{dt} &\leq X^\top(t)(\text{He}(A) + C^\top \Lambda C)X(t) + \epsilon |z^\top(1, t)|^2 + \frac{1}{\epsilon} |X^\top(t)(C^\top \Lambda D + B)|^2 \\ &\quad + z^\top(1, t)(D^\top \Lambda D - \Lambda)z(1, t) - \int_0^1 z^\top(x, t) \text{He}(F)z(x, t) dx. \end{aligned}$$

Nous avons  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$ , sous la condition  $\lambda_{\max}(D) < 1$  l'inégalité  $D^\top \Lambda D - \Lambda \prec 0$  est vraie. Il existe donc  $\beta_0 > 0$  tel que pour tous  $\zeta \in \mathbb{R}^m$ ,  $\zeta^\top (D^\top \Lambda D - \Lambda) \zeta \leq -\beta_0 |\zeta|^2$ . En choisissant  $\epsilon \leq \beta_0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dE(X(t), z(t))}{dt} &\leq X^\top(t)(\text{He}(A) + C^\top \Lambda C)X(t) + (\epsilon - \beta_0) |z^\top(1, t)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} |X^\top(t)(C^\top \Lambda D + B)|^2 - \alpha_0 \|z(\cdot, t)\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)}^2. \end{aligned}$$

L'étude de stabilité de ce cas général est effectuée suivant les mêmes étapes que le cas particulier (2.1) où nous avons  $F = 0_m$  et  $D = 0_m$ . D'abord, nous déterminons le vecteur d'état projeté  $Z_N(t)$ , contenant les projections de la variable  $z(x, t)$  de l'équation de transport sur les  $N + 1$  premiers polynômes de Legendre, et sa dérivée temporelle en fonction des différents paramètres du système. Ensuite, nous construisons une fonctionnelle de Lyapunov candidate pour l'étude de stabilité du système couplé (3.1). Enfin, en suivant la méthode de Lyapunov, une nouvelle approche de l'étude de stabilité de (3.1) est produite sous forme de conditions de type LMIs à vérifier.

### 3.3 Projection sur les polynômes de Legendre

Nous rappelons que  $Z_N = [\mathfrak{Z}_0 \dots \mathfrak{Z}_N]^\top$  où le  $k$ -ième élément  $\mathfrak{Z}_k(t)$  contient les projections de  $z(x, t)$  sur le  $k$ -ième polynôme de Legendre, et est simplement donné par :

$$\mathfrak{Z}_k(t) = \int_0^1 z(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx. \quad (3.4)$$

La dérivée temporelle  $\frac{d}{dt}\mathfrak{Z}_k(t)$  de cet élément peut être exprimée comme suit :

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{Z}_k(t) = \int_0^1 \partial_t z(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx = - \int_0^1 (\Lambda \partial_x z(x, t) + Fz(x, t)) \mathcal{L}_k(x) dx$$

puisque  $\partial_t z(x, t) = -(\Lambda \partial_x z(x, t) + Fz(x, t))$  pour tout  $t > 0$  et  $x \in (0, 1)$ . La réalisation d'une intégration par partie nous amène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathfrak{Z}_k(t) &= - \left[ \Lambda z(x, t) \mathcal{L}_k(x) \right]_0^1 - F \int_0^1 z(x, t) \mathcal{L}_k(x) dx + \int_0^1 \Lambda z(x, t) \mathcal{L}'_k(x) dx \\ &= -\Lambda z(1, t) + (-1)^k \Lambda z(0, t) - F\mathfrak{Z}_k(t) + \sum_{j=0}^{\max(0, k-1)} \ell_{kj} \int_0^1 \Lambda z(x, t) \mathcal{L}_j(x) dx \\ &= -\Lambda z(1, t) + (-1)^k \Lambda z(0, t) - F\mathfrak{Z}_k(t) + \sum_{j=0}^{\max(0, k-1)} \ell_{kj} \Lambda \mathfrak{Z}_j(t). \end{aligned}$$

Sachant que les coefficients  $\ell_{kj}$  sont définis dans (A.4), la dérivée temporelle  $\frac{d}{dt}Z_N(t)$  du vecteur  $Z_N(t)$  est donc exprimée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_N(t) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathfrak{Z}_0(t) \\ \frac{d}{dt}\mathfrak{Z}_1(t) \\ \frac{d}{dt}\mathfrak{Z}_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\mathfrak{Z}_k(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\Lambda z(1, t) + \Lambda z(0, t) - F\mathfrak{Z}_0(t) \\ -\Lambda z(1, t) - \Lambda z(0, t) - F\mathfrak{Z}_1(t) + \ell_{10}\Lambda\mathfrak{Z}_0(t) \\ -\Lambda z(1, t) + \Lambda z(0, t) - F\mathfrak{Z}_2(t) + \ell_{20}\Lambda\mathfrak{Z}_0(t) + \ell_{21}\Lambda\mathfrak{Z}_1(t) \\ \vdots \\ -\Lambda z(1, t) + (-1)^k \Lambda z(0, t) - F\mathfrak{Z}_k(t) + \ell_{k0}\Lambda\mathfrak{Z}_0(t) + \dots + \ell_{k, k-1}\Lambda\mathfrak{Z}_{k-1}(t) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Lambda \\ \Lambda \\ \vdots \\ \Lambda \end{bmatrix} z(1, t) + \begin{bmatrix} \Lambda \\ -\Lambda \\ \Lambda \\ \vdots \\ (-1)^k \Lambda \end{bmatrix} z(0, t) + \begin{bmatrix} [-F \quad 0_{m, Nm}] \\ [\ell_{10}\Lambda \quad -F \quad 0_{m, (N-1)m}] \\ [\ell_{20}\Lambda \quad \ell_{21}\Lambda \quad -F \quad 0_{m, (N-2)m}] \\ \vdots \\ [\ell_{k0}\Lambda \quad \dots \quad \ell_{k, k-1}\Lambda \quad -F] \end{bmatrix} Z_N(t). \end{aligned}$$

En utilisant la condition limite  $z(0, t) = CX(t) + Dz(1, t)$ , et en définissant les matrices

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_N(\Lambda) &= \begin{bmatrix} \Lambda & \Lambda & \dots & \Lambda \end{bmatrix}^T && \in \mathbb{R}^{m(N+1), m} \\ \mathbb{1}_N^*(\Lambda) &= \begin{bmatrix} \Lambda & -\Lambda & \dots & (-1)^N \Lambda \end{bmatrix}^T && \in \mathbb{R}^{m(N+1), m} \\ L_N(\Lambda) &= [\ell_{jk}\Lambda]_{j, k=0..N} && \in \mathbb{R}^{m(N+1), m(N+1)}, \\ \mathcal{F}_N &= \text{diag}(F, F, \dots, F) && \in \mathbb{R}^{m(N+1), m(N+1)}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

le lemme suivant décrit la dérivée temporelle du vecteur  $Z_N(t)$  des projetés :

**Lemme 3.1.** *Considérons  $z \in L^2((0, 1); \mathbb{R}^m)$  solution de l'équation de transport du système couplé (3.1). La dérivée temporelle du vecteur  $Z_N(t)$  de l'état  $z(\cdot, t)$  projeté sur les  $N + 1$  premiers polynômes de Legendre est donnée par :*

$$\frac{d}{dt} Z_N(t) = (\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda))z(1, t) + \mathbf{1}_N^*(\Lambda)CX(t) + (L_N(\Lambda) - \mathcal{F}_N)Z_N(t) \quad (3.6)$$

Après avoir défini la dérivée temporelle du vecteur  $Z_N(t)$  des projetés, passons maintenant à la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov candidate, en fonction des paramètres du système et également du vecteur  $Z_N(t)$ , pour l'étude de stabilité du système.

### 3.4 Fonctionnelle de Lyapunov candidate

La fonctionnelle de Lyapunov candidate pour l'étude de stabilité du système (3.1), est de la même forme que celle utilisée pour le cas particulier précédent. Elle s'écrit en fonction de la matrice de transport  $\Lambda$  et est exprimée sous la forme  $V_N(X(t), z(t)) = V_1(X(t), Z_N(t)) + V_2(z(t))$  avec

$$\begin{aligned} V_{N,1}(X(t), Z_N(t)) &= \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \\ V_2(z(t)) &= \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La fonctionnelle de Lyapunov (3.7) comporte quatre termes importants. Le premier terme quadratique, exprimé en fonction de la matrice  $P$ , dédié à la variable  $X(t)$  de l'EDO et utilisé dans la plupart des travaux de stabilité des systèmes linéaires (voir [EM14], [MKS05] et [PPL09]). Le deuxième terme en fonction de la matrice  $T_N$  est associé au vecteur  $Z_N(t)$  des projections de la variable  $z(x, t)$  de l'équation de transport sur les polynômes de Legendre. Le troisième est donné par la matrice  $Q_N$ , et il est dédié au couplage de l'EDO à l'équation de transport. Le dernier terme intégral en fonction des matrices  $S$  et  $R$  et de la vitesse de convergence  $\delta$  est associé à la variable complète  $z(x, t)$  de l'équation de transport.

La fonctionnelle de Lyapunov (3.7) est beaucoup plus riche que celles utilisées dans certains articles tels que [Cas+16], [DMVK13] et [TPG15]. En d'autres termes, les fonctionnelles de ces travaux présentent des cas particuliers de notre générale fonctionnelle de Lyapunov. Dans l'article [Cas+16], les matrices  $Q, T$  et  $R$  ne sont pas considérées, alors que les résultats de [DMVK13] et [TPG15] peuvent être exprimés par l'ordre  $N = 1$  de notre forme générale de la fonctionnelle de Lyapunov. En outre, notre fonctionnelle prend en compte le couplage entre l'EDO et l'EDP de transport à travers l'état projeté  $Z_N(t)$ .

La section suivante produit une étude de stabilité au sens de Lyapunov pour la norme  $L^2(0, 1)$  du système couplé (3.1).

### 3.5 Stabilité $L^2$ du système couplé EDO-EDP de transport

Nous produisons ici les résultats de stabilité pour le système (3.1), dont la démonstration est basée sur la fonctionnelle de Lyapunov (3.7) et l'exploitation des lemmes 3.1 et 2.1. Définissons tout d'abord l'ensemble des matrices commutant avec la matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  comme suit :

$$\mathcal{M}_\Lambda^m := \{M \in \mathbb{S}_+^m, M\Lambda = \Lambda M\}. \quad (3.8)$$

**Remarque 3.2.** Une matrice  $M$  appartient à  $\mathcal{M}_\Lambda^m$  si et seulement si  $M \in \mathbb{S}_+^m$  est bloc diagonale et a la même structure de Jordan que  $\Lambda$  dans (3.2) :  $M = \text{diag}(M_i)_{i=1\dots p}$  avec  $M_i \in \mathbb{S}_+^{m_i}$ .

Définissons les matrices de  $\mathbb{R}_+^{m(N+1), m(N+1)}$  suivantes :

$$\begin{aligned} S^N(\Lambda) &= \text{diag}(e^{-2\delta\Lambda^{-1}}S, 3e^{-2\delta\Lambda^{-1}}S, \dots, (2N+1)e^{-2\delta\Lambda^{-1}}S), \\ \mathcal{I}^N &= \text{diag}(I_m, 3I_m, \dots, (2N+1)I_m). \\ M^N &= \text{diag}(M, 3M, \dots, (2N+1)M). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En rappelant que les matrices  $\mathbf{1}_N(\Lambda)$ ,  $\mathbf{1}_N^*(\Lambda)$ ,  $L_N(\Lambda)$  et  $\mathcal{F}_N$  sont définies dans (3.5), le théorème suivant produit des résultats de stabilité du système couplé (3.1).

**Théorème 3.1.** *Considérons le système couplé (3.1) avec une matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée. s'il existe un entier  $N > 0$  tel qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_N \in \mathbb{R}^{n, (N+1)m}$ ,  $T_N \in \mathbb{S}^{(N+1)m}$ ,  $M \in \mathbb{S}_+^m$ ,  $S$  et  $R \in \mathcal{M}_\Lambda^m$ , vérifiant les LMIs suivantes, utilisant les notations (3.5) et (3.9) :*

$$\Phi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N + S^N(\Lambda) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.10)$$

$$\Psi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_1(\Lambda) = \text{He}(F^\top e^{-2\delta\Lambda^{-1}}(S+R)) + e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda R \succ M, \quad (3.12)$$

$$\Gamma_2(\Lambda) = \text{He}(F^\top e^{-2\delta\Lambda^{-1}}S) + e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda R \succ M, \quad (3.13)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \text{He}(PA + Q_N \mathbf{1}_N^*(\Lambda)C) + C^\top \Lambda(R+S)C + 2\delta P, \\ \Psi_{12} &= PB + Q_N(\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda)) + C^\top \Lambda(R+S)D, \\ \Psi_{13} &= A^\top Q_N + C^\top \mathbf{1}_N^*(\Lambda)T_N + Q_N(L_N(\Lambda) - \mathcal{F}_N) + 2\delta Q_N, \\ \Psi_{22} &= -e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda S + D^\top \Lambda(R+S)D, \\ \Psi_{23} &= B^\top Q_N + (\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda))^\top T_N, \\ \Psi_{33} &= \text{He}(T_N(L_N(\Lambda) - \mathcal{F}_N)) - M^N + 2\delta T_N, \end{aligned}$$

alors le système (3.1) est exponentiellement stable. De plus, pour cette matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée, il existe une constante  $K > 0$  et une vitesse de convergence  $\delta^* > \delta$  tels que

l'énergie du système vérifie,  $\forall t > 0$ ,

$$E(t) \leq Ke^{-2\delta^*t}(|z^0(0)|^2 + \|z^0\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)}). \quad (3.14)$$

**Remarque 3.3.** Les expressions des LMIs (3.12) et (3.13) sont obtenues grâce à la commutation des matrices  $S, R \in \mathcal{M}_\Lambda^m$  avec la matrice de transport  $\Lambda$ .

### Démonstration :

La preuve de ces résultats de stabilité est basée sur trois étapes essentielles, où l'existence des scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  des inégalités (2.17) et (2.18) est prouvée.

#### **Étape 1 : existence de $\varepsilon_1$ .**

Nous avons par hypothèse  $S \succ 0$  et  $\Phi_N(\Lambda, \delta) \succ 0$ , donc il existe un scalaire  $\varepsilon_1 > 0$  suffisamment petit tel que

$$S \succ \varepsilon_1 e^{2\delta\Lambda^{-1}}, \quad \Phi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N + S^N(\Lambda) \end{bmatrix} \succ \varepsilon_1 \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ * & \mathcal{I}^N \end{bmatrix}.$$

D'autre part,  $V_N(X(t), z(t))$  définie en (3.7) satisfait pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) &\geq \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \Phi_N(\Lambda, \delta) \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} - Z_N^\top(t) S^N(\Lambda) Z_N(t) \\ &\quad + \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-2\delta\Lambda^{-1}} S z(x, t) dx. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\Phi_N(\Lambda, \delta)$  par sa borne inférieure dépendant de  $\varepsilon_1$  et introduisant  $\varepsilon_1$  dans le dernier terme intégral, nous obtenons

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) &\geq \varepsilon_1 |X(t)|_n^2 + \varepsilon_1 \int_0^1 z^\top(x, t) z(x, t) dx \\ &\quad - Z_N^\top(t) (S^N(\Lambda) - \varepsilon_1 \mathcal{I}^N) Z_N(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) (e^{-2\delta\Lambda^{-1}} S - \varepsilon_1 I_m) z(x, t) dx. \end{aligned}$$

Puisque  $S - \varepsilon_1 e^{2\delta\Lambda^{-1}} \succ 0$ , appliquons le Lemme 2.1 au dernier terme intégral, ce qui donne

$$\int_0^1 z^\top(x, t) (e^{-2\delta\Lambda^{-1}} S - \varepsilon_1 I_m) z(x, t) dx \geq Z_N^\top(t) (S^N(\Lambda) - \varepsilon_1 \mathcal{I}^N) Z_N(t).$$

Ainsi, la fonctionnelle de Lyapunov vérifie pour tout  $t > 0$ ,  $V_N(X(t), z(t)) \geq \varepsilon_1 E(X(t), z(t))$ .

#### **Étape 2 : existence de $\varepsilon_2$ .**

Il existe un scalaire positif  $\beta > 0$  suffisamment large tel que

$$\begin{bmatrix} P & Q_N \\ Q_N^\top & T_N \end{bmatrix} \preceq \beta \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ * & \mathcal{I}^N \end{bmatrix},$$

et permettant de vérifier, sous l'hypothèse  $S \succ 0$  et  $R \succ 0$ , l'inégalité

$$V_N(X(t), z(t)) \leq \beta |X(t)|^2 + \beta Z_N^\top(t) \mathcal{I}^N Z_N(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx.$$

La borne supérieure des termes  $(1-x)$  et  $e^{-2\delta x \Lambda^{-1}}$  nous donne

$$V_N(X(t), z(t)) \leq \beta |X(t)|^2 + \beta Z_N^\top(t) \mathcal{I}^N Z_N(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) (S + R) z(x, t) dx.$$

En appliquant le lemme (2.1) sur le terme en  $Z_N(t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) &\leq \beta |X(t)|^2 + \int_0^1 z^\top(x, t) (\beta I_m + S + R) z(x, t) dx \\ &\leq \beta |X(t)|^2 + \varepsilon_2 \|z(t)\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)}^2 \leq \varepsilon_2 E(X(t), z(t)), \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_2 = \beta + \lambda_{\max}(S) + \lambda_{\max}(R)$ . L'inégalité (2.17) de positivité est donc prouvée.

### Étape 3 : existence de $\varepsilon_3$ .

Rappelons que le vecteur  $\xi_N(t)$  est défini dans (2.21), et considérons le premier terme  $V_{N,1}(X(t), Z_N(t))$  de la fonctionnelle de Lyapunov (3.7). Nous avons

$$\begin{aligned} &\dot{V}_{N,1}(X(t), Z_N(t)) + 2\delta V_{N,1}(X(t), Z_N(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ Q_N^\top & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} \right) + 2\delta \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ Q_N^\top & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} \\ &= \xi_N^\top(t) \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \Psi_{13} \\ * & 0 & \Psi_{23} \\ * & * & \text{He}(T_N(L_N(\Lambda) - \mathcal{F}_N)) + 2\delta T_N \end{bmatrix} \xi_N(t) \end{aligned}$$

où les termes  $\Psi_{13}$  et  $\Psi_{23}$  sont définis dans Théorème 3.1, et

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \text{He}(PA + Q_N \mathbb{1}_N^*(\Lambda)C) + 2\delta P, \\ \psi_2 &= PB + Q_N(\mathbb{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbb{1}_N(\Lambda)). \end{aligned}$$

Pour le second terme de la fonctionnelle de Lyapunov (3.7), sa dérivée temporelle s'écrit

$$\dot{V}_2(z(t)) = \int_0^1 \partial_t \left( z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R) z(x, t) \right) dx,$$

et en utilisant l'équation de transport du système (3.1) et sachant que  $S$  et  $R \in \mathcal{M}_\Lambda^m$ , nous

avons

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{N,2} &= - \int_0^1 \partial_x \left( z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} \Lambda (S + (1-x)R) z(x, t) \right) dx \\
&\quad - 2\delta \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx \\
&\quad - \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} \Lambda R z(x, t) dx \\
&\quad - \int_0^1 z^\top(x, t) \text{He}(F^\top e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R)) z(x, t) dx.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme intégral correspond à  $-2\delta V_2(z(t))$ . L'égalité  $\dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t))$  est donc donnée par

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(z(t)) + 2\delta V_2(z(t)) &= \left[ - z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} \left( \Lambda (S + (1-x)R) \right) z(x, t) \right]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 z^\top(x, t) \left( \text{He}(F^\top e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R)) + e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} \Lambda R \right) z(x, t) dx.
\end{aligned}$$

Rassemblons les deux termes de la fonctionnelle  $V_N(X(t), z(t))$ . Sachant que le minimum du terme  $e^{-2\delta x \Lambda^{-1}}$  est à  $x = 1$  et en utilisant la condition aux limites  $z(0, t) = CX(t) + Dz(1, t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
V_N(X(t), z(t)) + 2\delta V_N(X(t), z(t)) &= \xi_N^\top(t) \Psi_N(\Lambda, \delta) \xi_N(t) + Z_N^\top(t) M^N Z_N(t) \\
&\quad - \int_0^1 z^\top(x, t) \left( \text{He}(F^\top e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R)) + e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} \Lambda R \right) z(x, t) dx.
\end{aligned}$$

Pour définir un maximum au terme intégral, admettons qu'il existe une matrice  $M > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
\text{He}(F^\top e^{-2\delta \Lambda^{-1}} (S + R)) + e^{-2\delta \Lambda^{-1}} \Lambda R &\succ M, \\
\text{He}(F^\top e^{-2\delta \Lambda^{-1}} S) + e^{-2\delta \Lambda^{-1}} \Lambda R &\succ M,
\end{aligned}$$

et donc, par convexité, nous avons

$$F^\top e^{-2\delta \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R) + e^{-2\delta \Lambda^{-1}} \Lambda R \succ M.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
V_N(X(t), z(t)) + 2\delta V_N(X(t), z(t)) &\leq \xi_N^\top(t) \Psi_N(\Lambda, \delta) \xi_N(t) + Z_N^\top(t) M^N Z_N(t) \\
&\quad - \int_0^1 z^\top(x, t) M z(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Puisque  $M \succ 0$ , le Lemme 2.1 nous garantit

$$\int_0^1 z^\top(x, t) M z(x, t) dx \geq Z_N^\top(t) M^N Z_N(t),$$

où  $M^N$  est définie dans (3.9), et l'estimation

$$V_N(X(t), z(t)) + 2\delta V_N(X(t), z(t)) \leq \xi_N^\top(t) \Psi_N(\Lambda, \delta) \xi_N(t)$$

est donc obtenue. Enfin, la LMI (3.11) sur  $\Psi(\Lambda, \delta)$  et  $M \in \mathbb{S}_+^m$  assurent l'existence d'un scalaire positif  $\varepsilon_3$  suffisamment petit tel que

$$M \succ \varepsilon_3 I_m, \quad \Psi_N(\Lambda, \delta) \prec -\varepsilon_3 \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}^N \end{bmatrix}.$$

En utilisant ces deux LMIs et la définition du vecteur  $\xi_N(t)$  dans l'équation (3.15), nous avons

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(t)) + 2\delta V_N(X(t), z(t)) &\leq -\varepsilon_3 \left( |X(t)|^2 + \int_0^1 |z(x, t)|^2 dx \right) \\ &\quad + Z_N^\top(t) (M^N - \varepsilon_3 \mathcal{I}^N) Z_N(t) - \int_0^1 z^\top(x, t) (M - \varepsilon_3 I_m) z(x, t) dx. \end{aligned}$$

Puisque  $M - \varepsilon_3 I_m > 0$ , le lemme 2.1 peut être appliqué et nous donne

$$-\int_0^1 z^\top(x, t) (M - \varepsilon_3 I_m) z(x, t) dx \leq -Z_N^\top(t) (M^N - \varepsilon_3 \mathcal{I}^N) Z_N(t).$$

Donc, la fonctionnelle de Lyapunov  $V_N(X(t), z(t))$  satisfait

$$V_N(X(t), z(t)) + 2\delta V_N(X(t), z(t)) \leq -\varepsilon_3 E(t),$$

et la stabilité exponentielle du système (3.1) est prouvée.

### Exemple numérique

Afin de tester les résultats de stabilité produits par le Théorème 3.1, considérons le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} z(1, t), \\ \partial_t z(x, t) + \begin{bmatrix} \rho_1 I_2 & 0 \\ 0 & \rho_2 I_2 \end{bmatrix} \partial_x z(x, t) + \sigma \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{bmatrix} = 0, \\ z(0, t) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(1, t). \end{cases}$$

Pour observer l'effet du terme potentiel sur la stabilité du système couplé, nous déterminons la valeur minimale de la vitesse de transport pour plusieurs valeurs de  $\sigma$ . La forme de la

matrice  $F = \sigma \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{bmatrix}$  permet d'injecter la seconde moitié de l'état  $z(x, t)$  dans la première équation et la première moitié dans la seconde équation.

En prenant  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , Figure 3.2 donne la vitesse de transport minimale  $\rho$  pour laquelle le système reste stable.

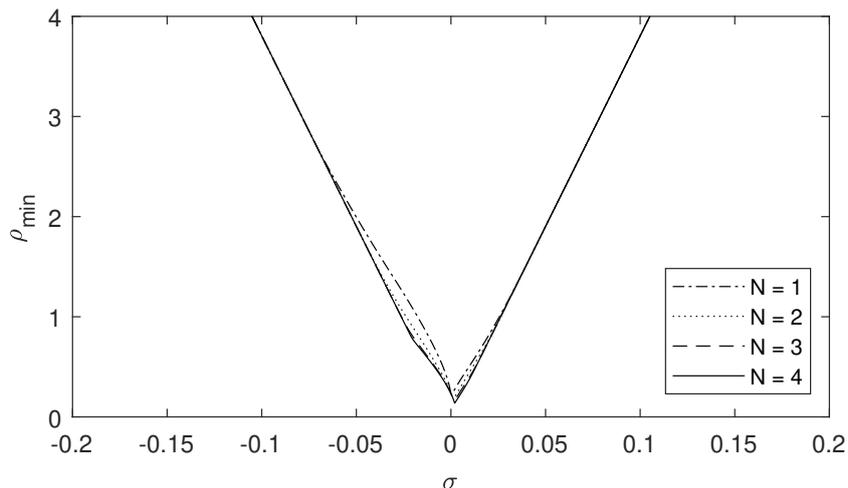


FIGURE 3.2 – Vitesse de transport minimale en fonction de  $\sigma$  et pour plusieurs valeurs de  $N$

Nous remarquons dans la Figure 3.2, que pour  $\sigma = 0$ , correspondant au système 3.1 sans le terme potentiel  $F$ , nous avons l'exemple étudié dans [GCK03] et [SBS17a]. Pour  $N = 4$ , nous obtenons la valeur de vitesse de transport minimale  $\rho_{min} = 0,2327$  (retard maximal  $h = 4,2973$ ) pour laquelle le système reste stable. Ce retard maximal se rapproche de la valeur trouvée dans [GCK03] en augmentant l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre.

Dans la Figure 3.3, on peut remarquer que la réponse  $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}$  du système couplé est plus oscillante avec un terme potentiel donné dans l'EDP de transport (avec  $\sigma = 0,05$ ) que celle obtenue sans terme potentiel (avec  $\sigma = 0$ ). Par conséquent, l'ajout d'un terme potentiel à l'EDP de transport du système couplé (3.1) peut introduire davantage d'oscillations au système.

Afin d'avoir plus de résultat de stabilité du système (3.1), nous considérons le même exemple avec  $\rho_1 = 2\rho_2 = 2\rho$ . Cette forme de la matrice de transport nous permet d'éviter le résultat de la remarque 3.1 qui consiste à réduire le système (3.1) à un système couplé EDO-EDP simple sans terme potentiel.

Enfin, la Figure 3.4, permet d'observer que les conditions de stabilité forment une hiérarchie de LMI. Autrement dit, si le système est stable à l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre, il reste stable pour tous les ordres supérieurs à  $N$ .

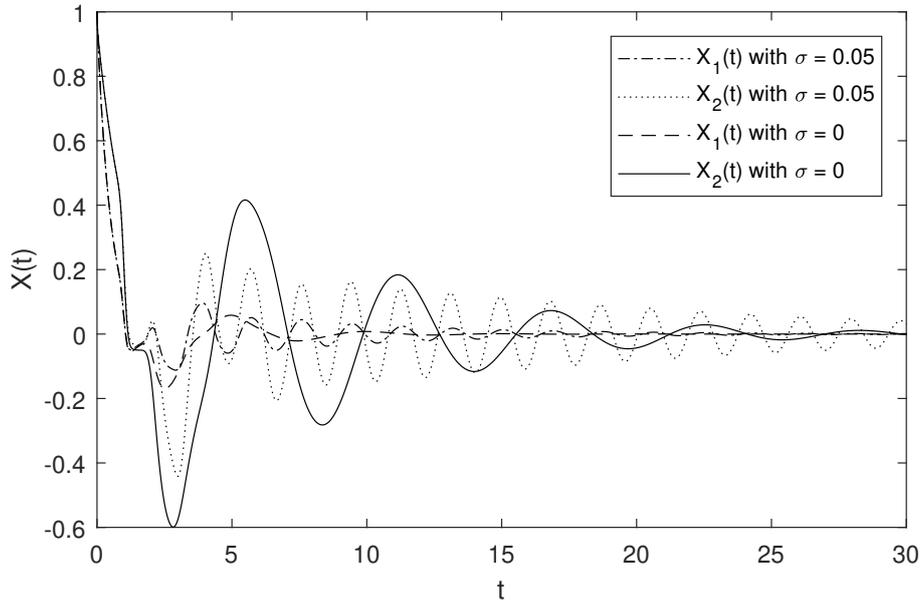


FIGURE 3.3 – Simulation de  $X(t)$  du système couplé avec  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ .

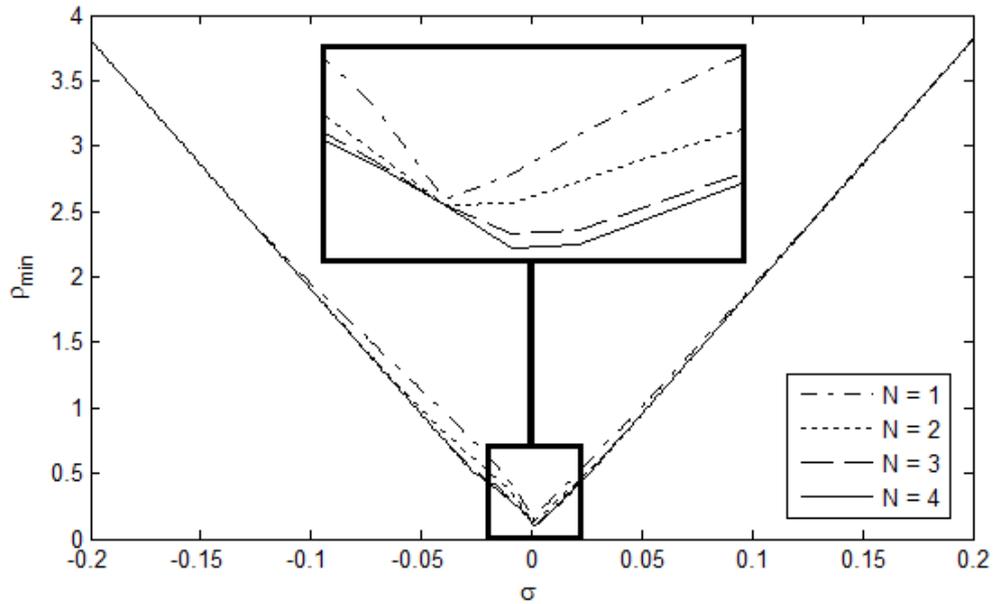


FIGURE 3.4 – Vitesse de transport minimale en fonction de  $\sigma$  pour plusieurs valeurs de  $N$

Nous remarquons également dans la Figure 3.4 que nous pouvons élargir l'intervalle de stabilité du système couplé en choisissant une valeur appropriée de  $F$  (pour  $N = 4$ , nous avons  $\rho_{min} = 0,0976$  pour  $F = 0.001 \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{bmatrix}$  au lieu de  $\rho_{min} = 0.1256$  pour  $F = 0_4$ ). En

effet, l'ajout du terme potentiel à l'équation de transport avec une valeur appropriée peut élargir l'intervalle de stabilité du système couplé (3.1).

Le système (2.1) traité dans le chapitre précédent représente un cas particulier de la forme générale (3.1) du système couplé EDO-EDP de transport avec une matrice de transport  $\Lambda = \rho I_m$ . À partir de ce modèle général, nous pouvons déduire des conditions de stabilité pour d'autres cas particuliers du système couplé (système sans échanges internes des EDPs en  $z(x, t)$  avec  $F = 0_m$  ou sans couplage externe des EDPs avec  $D = 0_m$ ). La section suivante fournit ces conditions de stabilité sous forme de Corollaire pour chaque cas particulier.

## 3.6 Quelques cas particuliers du système couplé

### 3.6.1 Système sans échanges internes entre les EDPs

Ce cas particulier est celui d'une matrice  $F = 0_m$ . Il n'existe alors aucun échange interne entre les composantes de  $z(x, t)$ , c'est-à-dire entre les différentes équations de transport du système couplé. Ce cas particulier du système (3.1) a été traité dans l'article [SBS17b]. Il possède plus de propriété que le cas général, puisqu'un théorème de hiérarchie des conditions de stabilité peut être démontré.

Définissons la matrice suivante :

$$R^N(\Lambda) = \text{diag}(e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda R, 3e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda R, \dots, (2N+1)e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda R). \quad (3.16)$$

Les deux résultats qui suivent présentent respectivement les conditions de stabilité de ce cas particulier et le résultat de hiérarchie correspondant.

**Corollaire 3.1.** *Considérons le système couplé (3.1) avec  $F = 0_m$  et une matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée. s'il existe un entier  $N > 0$  tel qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_N \in \mathbb{R}^{n, (N+1)m}$ ,  $T_N \in \mathbb{S}^{(N+1)m}$ ,  $S$  et  $R \in \mathcal{M}_\Lambda^m$ , vérifiant les LMIs suivantes :*

$$\Phi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N + S^N(\Lambda) \end{bmatrix} \succ 0, \quad \Psi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.17)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \text{He}(PA + Q_N \mathbf{1}_N^*(\Lambda)C) + C^\top \Lambda(R + S)C + 2\delta P, \\ \Psi_{12} &= PB + Q_N(\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda)) + C^\top \Lambda(R + S)D, \\ \Psi_{13} &= A^\top Q_N + C^\top \mathbf{1}_N^{*\top}(\Lambda)T_N + Q_N L_N(\Lambda) + 2\delta Q_N, \\ \Psi_{22} &= -e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda S + D^\top \Lambda(R + S)D, \\ \Psi_{23} &= B^\top Q_N + (\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda))^\top T_N, \\ \Psi_{33} &= \text{He}(T_N L_N(\Lambda)) - R^N(\Lambda) + 2\delta T_N, \end{aligned}$$

alors le système est exponentiellement stable. Plus précisément, pour cette matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée, il existe une constante  $K > 0$  et une vitesse de convergence  $\delta^* > \delta$  telles que

l'énergie du système vérifie,  $\forall t > 0$ ,

$$E(t) \leq Ke^{-2\delta^*t}(|z^0(0)|^2 + \|z^0\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)}). \quad (3.18)$$

**Remarque 3.4.** Pour ce cas particulier, les conditions  $\Gamma_1(\Lambda)$  et  $\Gamma_2(\Lambda)$  du Théorème 3.1 impliquent la condition  $R^N(\Lambda) \succ M^N$  qui est contenue dans le terme  $\Psi_{33}$  de la LMI  $\Psi_N(\Lambda, \delta) \prec 0$  de (3.17).

Les conditions de stabilité du Corollaire 3.1 forment une hiérarchie de conditions des LMIs. En effet, si la condition de stabilité est vérifiée à l'ordre  $N$ , elle l'est également à tous les ordres supérieurs à  $N$ . Le Corollaire ci-dessous présente cette hiérarchie par rapport à l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre.

**Théorème 3.2.** Considérant le système couplé (3.1) avec  $F = 0_m$ , et utilisant les notations introduites dans Corollaire 3.1, définissons, pour une vitesse de convergence  $\delta$  donnée, l'ensemble  $\mathcal{P}_N(\delta) \subset \mathbb{D}_+^m$  par

$$\mathcal{P}_N(\delta) := \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \in \mathbb{D}_+^m \text{ tel que } \Phi_N(\Lambda, \delta) \succ 0, \Psi_N(\Lambda, \delta) \prec 0, \\ \text{pour } P \in \mathbb{S}_+^n, S, R \in \mathcal{M}_\Lambda^m, T_N \in \mathbb{S}^{(N+1)m}, Q_N \in \mathbb{R}^{n, (N+1)m} \end{array} \right\}.$$

Alors, pour tout  $(N, N') \in \mathbb{N}^2$  et tout  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $N < N' \Rightarrow \mathcal{P}_N(\delta) \subset \mathcal{P}_{N'}(\delta)$ .

**Démonstration:** Considérons un  $\delta$  donné et deux entiers  $N < N'$ . Sans perte de généralité, admettons  $N' = N + 1$ . Si  $\mathcal{P}_N(\delta)$  est un ensemble vide, l'inclusion est facilement obtenue. Sinon si  $\mathcal{P}_N(\delta)$  n'est pas un ensemble vide, pour une matrice de transport donnée  $\Lambda \in \mathcal{P}_N(\delta)$ , nous avons de la définition de  $\mathcal{P}_N(\delta)$  les LMIs

$$\Phi_N(\Lambda, \delta) \succ 0 \quad \text{et} \quad \Psi_N(\Lambda, \delta) \prec 0$$

sont satisfaites pour

$$\delta \geq 0, P \in \mathbb{S}_+^n, T_N \in \mathbb{S}_+^{(N+1)m}, Q_N \in \mathbb{R}_+^{n, (N+1)m} \quad \text{et} \quad S, R \in \mathcal{M}_\Lambda^m.$$

En choisissant les matrices

$$Q_{N+1} = \begin{bmatrix} Q_N & 0_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n, m(N+2)}, \quad T_{N+1} = \begin{bmatrix} T_N & 0_{m, m(N+1)} \\ * & 0_{m, m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(N+2), m(N+2)},$$

et gardant  $S$  et  $R$ , nous exprimons les matrices  $\Phi_{N+1}(\Lambda, \delta)$  and  $\Psi_{N+1}(\Lambda, \delta)$  pour ce choix spécifique. La matrice  $\Phi_{N+1}(\Lambda, \delta)$  peut être réécrite comme

$$\Phi_{N+1}(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \Phi_N(\Lambda, \delta) & 0_{n+m(N+1), m} \\ * & e^{-2\delta\Lambda^{-1}}(2N+3)S \end{bmatrix}.$$

Puisque  $S \in \mathcal{M}_\Lambda^m \subset \mathbb{S}_+^m$  et  $\Phi_N(\Lambda, \delta) \succ 0$  par supposition, donc  $\Phi_{N+1}(\Lambda, \delta) \succ 0$  est aussi valide. Quant à la deuxième LMI, nous remarquons que les matrices  $L_{N+1}(\Lambda)$  et  $R^{N+1}(\Lambda)$

peuvent être exprimées par

$$\Psi_{N+1}(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \Psi_N(\Lambda, \delta) & 0_{n+m(N+2),m} \\ * & -(2N+3)e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda R \end{bmatrix}.$$

Puisque  $\Psi_N(\Lambda, \delta) \prec 0$ ,  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  et  $R \in \mathbb{S}_+^m$ , nous obtenons  $\Psi_{N+1}(\Lambda, \delta) \prec 0$ , et nous constatons que  $\mathcal{P}_N(\delta) \subset \mathcal{P}_{N+1}(\delta)$ . Enfin, pour toute valeur  $N' > N$ , l'inclusion  $\mathcal{P}_N(\delta) \subset \mathcal{P}_{N'}(\delta)$  est obtenue par récurrence.  $\square$

Les résultats de stabilité produits pour ce cas particulier sont appliqués à un exemple académique dans le prochain paragraphe.

### Exemple numérique

Considérons le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} z(1, t), \\ \partial_t z(x, t) + \rho \partial_x z(x, t) = 0, \\ z(0, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} z(1, t). \end{cases}$$

Nous remarquons que la matrice  $A + BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}$  n'est pas Hurwitz. Par conséquent, ce système n'est pas asymptotiquement stable pour une grande valeur de la vitesse de transport  $\rho$ . L'exigence de cette condition où la matrice dynamique  $A + BC$  doit être Hurwitz est considérée en [Cas+16] ; [TPG15]. Alors que dans cette étude de stabilité du système couplé, cette condition n'est pas nécessaire.

		N=0	N=1	N=2	N=3
Variables		8	12	17	23
$\delta = 0$	$\rho_{min}$	-	0.653	0.582	0.579
	$\rho_{max}$	-	15.924	15.941	15.941
$\delta = 5.10^{-3}$	$\rho_{min}$	-	0.661	0.587	0.584
	$\rho_{max}$	-	14.470	14.490	14.490
$\delta = 1.10^{-2}$	$\rho_{min}$	-	0.670	0.593	0.589
	$\rho_{max}$	-	13.259	13.282	13.282
$\delta = 5.10^{-2}$	$\rho_{min}$	-	0.738	0.634	0.625
	$\rho_{max}$	-	7.935	7.980	7.980

TABLE 3.1 – Vitesse de transport minimale et maximale autorisée.

Le Tableau 3.1 montre que le Corollaire 3.1 garantit également la stabilité exponentielle des systèmes avec une matrice dynamique  $A + BC$  pas Hurwitz. Dans ce cas, il semble que les régions de stabilité sont présentées par des intervalles bornés. Précisément, il existe une valeur minimale et maximale de la vitesse  $\rho$  telle que le système complet reste exponentiellement stable. Il est montré aussi dans le Tableau 3.1 l'évolution de ces valeurs minimales et maximales

de la vitesse de transport  $\rho$  par rapport à plusieurs valeurs de  $\delta$  et  $N$ . Nous constatons que l'augmentation de  $N$  permet d'agrandir la taille des intervalles de stabilité  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ , ce qui illustre la hiérarchie des conditions de stabilité, prouvée dans le Théorème 3.2, en fonction de l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre. En revanche, nous remarquons que l'augmentation de la vitesse de convergence  $\delta$  réduit la taille de ces intervalles de stabilité, et rend le problème plus conservatif.

### 3.6.2 Système couplé EDO-EDP sans couplage interne et externe des EDPs

Ce cas particulier ne possède pas le couplage externe entre les équations de transport ( $D = 0_m$ ) et le couplage est effectué uniquement entre l'EDO et l'équation de transport. la condition aux limites est donnée par  $z(0, t) = CX(t)$ . Les conditions de stabilité de ce cas particulier sont données par le Corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.** *Considérons le système couplé (3.1) avec  $D = 0_m$  et  $F = 0_m$  et une matrice de transport  $\Lambda \succ 0$  donnée. s'il existe un entier  $N > 0$  tel qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_N \in \mathbb{R}^{n, (N+1)m}$ ,  $T_N \in \mathbb{S}^{(N+1)m}$ ,  $S$  et  $R \in \mathcal{M}_\Lambda^m$ , vérifiant les LMIs suivantes :*

$$\Phi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N + S^N(\Lambda) \end{bmatrix} \succ 0, \quad \Psi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \text{He}(PA + Q_N \mathbf{1}_N^*(\Lambda)C) + C^\top \Lambda (R + S)C + 2\delta P, \\ \Psi_{12} &= PB - Q_N \mathbf{1}_N(\Lambda), \\ \Psi_{13} &= A^\top Q_N + C^\top \mathbf{1}_N^{*\top}(\Lambda)T_N + Q_N L_N(\Lambda) + 2\delta Q_N, \\ \Psi_{22} &= -e^{-2\delta\Lambda^{-1}} \Lambda S, \\ \Psi_{23} &= B^\top Q_N + (\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D)^\top T_N, \\ \Psi_{33} &= \text{He}(T_N L_N(\Lambda)) - R^N(\Lambda) + 2\delta T_N, \end{aligned}$$

le système est donc exponentiellement stable. De plus, pour cette matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée, il existe une constante  $K > 0$  et une vitesse de convergence  $\delta^* > \delta$  tels que l'énergie du système vérifie,  $\forall t > 0$ ,

$$E(t) \leq K e^{-2\delta^* t} (|z^0(0)|^2 + \|z^0\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)}^2). \quad (3.20)$$

Les conditions de stabilité déterminées pour ce cas particulier sont testées sur un exemple académique dans le prochain paragraphe.

#### Exemple numérique

Dans cet exemple, nous considérons un système à plusieurs vitesses de transport, où les

matrices sont données par

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = [-1.3] X(t) + [-1 \quad -0.5] z(1, t), \\ \partial_t z(x, t) + \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \partial_x z(x, t) = 0, \\ z(0, t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} X(t). \end{cases}$$

Les régions de stabilité de ce système sont présentées par la Figure 3.5, pour différentes valeurs des vitesses de transport  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

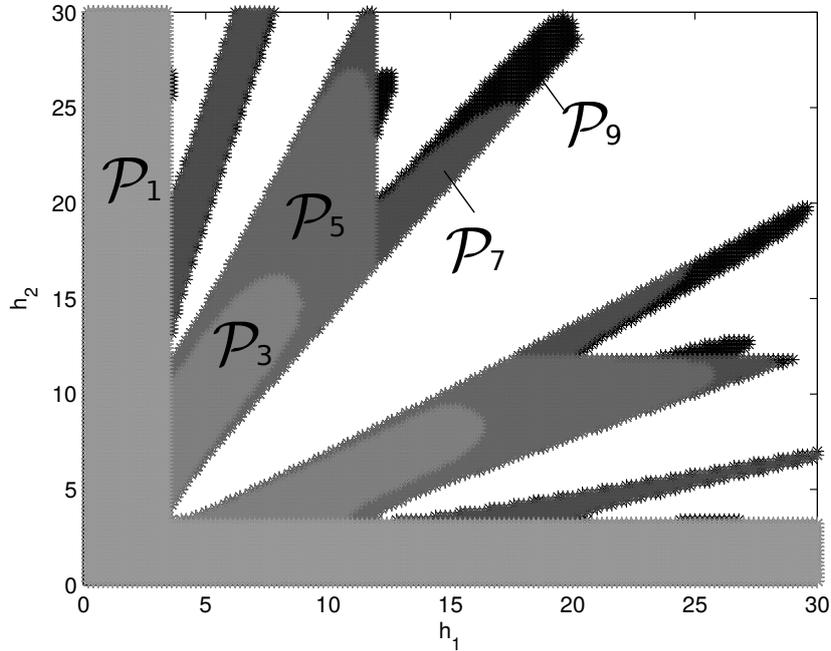


FIGURE 3.5 – Figure représentant les régions d’instabilité (zone blanche) et les régions stables garanties par le Corollaire 3.2 avec  $\delta = 0$  et pour plusieurs valeurs de  $N$  de 1 à 9.

Nous constatons que l’augmentation de  $N$  nous permet d’agrandir la région de stabilité du système couplé. La Figure 3.5 illustre également le principe de hiérarchie du Théorème 3.2 puisque nous avons  $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_3 \subset \dots \subset \mathcal{P}_9$ .

Dans le but d’évaluer le conservatisme de notre approche, nous allons comparer nos résultats à ceux obtenus dans [Sip+11] dans le contexte des systèmes à retard. En effet, ce système peut être réécrit comme suit

$$\dot{X}(t) = -1.3X(t) - X(t - \rho_1^{-1}) - 0.5X(t - \rho_2^{-1}).$$

Les régions de stabilité déterminées par l'approche fréquentielle comme dans le travail de [Sip+11] sont incluses dans la Figure 3.5. Nous constatons que les régions de stabilité trouvées pour  $N = 9$  produisent une approximation très proche des régions de stabilité exactes, qui peuvent être déterminées en utilisant l'approche fréquentielle. Cependant, cette dernière n'assure pas la robustesse, ce qui correspond à un grand avantage de notre approche de Lyapunov qui est plus robuste.

Il est aussi important de noter que le Théorème 3.2 n'est pas lié à l'application du théorème de Lyapunov-Krasovskii utilisé souvent pour les systèmes à retard. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant.

### 3.6.3 Équation de transport avec feedback

Finalement, nous avons voulu tester ce que notre approche pourrait apporter à un simple système d'équations de transport linéaires couplées. Nous supposons alors qu'il n'y a pas de couplage avec l'EDO, et donc pas de matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $F$ , et que le feedback se fait à travers la condition au bord  $z(0, t) = Dz(1, t)$  où la sortie de l'équation de transport  $z(1, t)$  est réinjectée, partiellement ou complètement (selon la valeur de la matrice  $D$ ), en entrée  $z(0, t)$ . Le système est donc donné par

$$\begin{cases} \partial_t z(x, t) + \Lambda \partial_x z(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ z(0, t) = Dz(1, t), & t > 0, \\ z(x, 0) = z^0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.21)$$

L'existence d'une solution pour ce système est assurée par le théorème A.6 dans [BC16], et nous pouvons montrer que son énergie totale  $E(z(\cdot, t))$ , donnée par

$$E(z(t)) = \|z(t)\|_{L^2((0,1); \mathbb{R}^m)}^2, \quad (3.22)$$

est décroissante. La dérivée temporelle de l'énergie  $E(z(t))$  s'écrit :

$$\frac{dE(z(t))}{dt} = \int_0^1 \partial_t \left( z^\top(x, t) z(x, t) \right) dx = \int_0^1 \partial_t z^\top(x, t) z(x, t) + z^\top(x, t) \partial_t z(x, t) dx.$$

En utilisant l'équation de transport dans (3.21), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dE(z(t))}{dt} &= - \int_0^1 \partial_x z^\top(x, t) \Lambda z(x, t) + z^\top(x, t) \Lambda \partial_x z(x, t) dx. \\ &= - \int_0^1 \partial_x \left( z^\top(x, t) \Lambda z(x, t) \right) dx = - \left[ z^\top(x, t) \Lambda z(x, t) \right]_0^1, \end{aligned}$$

et en exploitant la condition au bord  $z(0, t) = Dz(1, t)$ , nous obtenons

$$\frac{dE(z(t))}{dt} = z^\top(1, t) (D^\top \Lambda D - \Lambda) z(1, t).$$

Nous avons  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$ , sous la condition  $\lambda_{max}(D) < 1$  l'inégalité  $D^\top \Lambda D - \Lambda \prec 0$  est vraie. Il existe donc  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}^m$ ,  $\zeta^\top (D^\top \Lambda D - \Lambda) \zeta \leq -\beta_0 |\zeta|^2$ . Nous obtenons donc

$$\frac{dE(z(t))}{dt} \leq -\beta_0 |z(1, t)|^2.$$

et donc l'énergie  $E(z(t))$  est décroissante. Pour ce système, la fonctionnelle de Lyapunov est réduite à deux termes :

$$V_N(Z_N(t), z(\cdot, t)) = Z_N^\top(t) T_N Z_N(t) + \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-2\delta \Lambda^{-1} x} (S + (1-x)R) z(x, t) dx. \quad (3.23)$$

Le terme intégral de la fonctionnelle de Lyapunov (3.23) a déjà été exploité dans la littérature. Dans [Cor07, Section 13.4.2, p364] par exemple, la fonctionnelle est exprimée en fonction de la norme  $L^2$  de la variable distribuée, de la vitesse de transport  $\rho$  et de la vitesse de décroissance  $\delta$  de l'énergie du système. Elle est donnée par :

$$U(t) = \frac{A}{\rho} \int_0^1 z^2(x, t) e^{-\delta \rho^{-1} x} dx, \quad (3.24)$$

où  $A$  est un coefficient constant.

Notre fonctionnelle (3.23) est plus riche : elle contient en plus les matrices  $S$  et  $R$ , rajoutant des degrés de liberté aux conditions de stabilité. Dans le cas où  $\Lambda = \rho I_m$  la matrice  $S$  n'apporte pas d'amélioration aux conditions de stabilité puisqu'elle correspond au coefficient  $A$  dans (3.24). Donc, l'utilisation de la fonctionnelle (3.23) revient à considérer la somme des termes  $U_{\rho_i}(t)$  correspondant à chaque vitesse de transport  $\rho_i$ .

En outre, la fonctionnelle de Lyapunov (3.23) contient les projections de la variable  $z(x, t)$  sur les polynômes de Legendre. L'objectif est de vérifier si l'ajout de ces projections à la fonctionnelle de Lyapunov améliore les résultats de stabilité par rapport à l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre.

Sachant que l'état augmenté pour ce système est donné par  $\xi_N(t) = \begin{bmatrix} z^\top(1, t) & Z_N^\top(t) \end{bmatrix}^\top$ , et que les matrices  $S^N(\Lambda)$  et  $R^N(\Lambda)$  sont définies respectivement dans (3.9) et (3.16), les conditions de stabilité de ce système couplant seulement les équations de transport entre elles sont données par le corollaire suivant :

**Corollaire 3.3.** *Considérons le système d'équations de transport couplées (3.21) avec une matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée. S'il existe un entier  $N > 0$  tel qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $T_N \in \mathbb{S}^{(N+1)m}$ ,  $S$  et  $R \in \mathcal{M}_\Lambda^m$ , vérifiant les LMIs suivantes :*

$$\Phi_N(\Lambda, \delta) = T_N + S^N(\Lambda) \succ 0, \quad \Psi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= -e^{-2\delta\Lambda^{-1}}\Lambda S + D^\top\Lambda(R+S)D, \\ \Psi_{12} &= (\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda))^\top T_N, \\ \Psi_{22} &= \text{He}(T_N L_N(\Lambda)) - R^N(\Lambda) + 2\delta T_N,\end{aligned}$$

alors le système est exponentiellement stable et il existe une constante  $K > 0$  et une vitesse de convergence  $\delta^* > \delta$  telles que l'énergie du système vérifie,  $\forall t > 0$ ,

$$E(t) \leq K e^{-2\delta^* t} \|z^0\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)}. \quad (3.26)$$

### Exemple numérique

Afin de vérifier l'efficacité de ce résultat sur ce type de système, considérons l'équation aux différences suivantes :

$$X(t) = -\frac{1}{2}X(t-h_1) - \frac{1}{2}X(t-h_2)$$

La stabilité de cette équation aux différences a été étudiée dans [Car96] pour les valeurs des retards  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 2$ . Elle peut être représentée par l'équation de transport bouclée suivante :

$$\begin{cases} \partial_t z(x,t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \partial_x z(x,t) = 0, \\ z(0,t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} z(1,t), \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $\rho_{i=1,2} = \frac{1}{h_{i=1,2}}$ .

En utilisant notre approche, la condition  $D^\top\Lambda D - \Lambda = \begin{bmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & -0.375 \end{bmatrix} \prec 0$  est vérifiée et l'équation de transport bouclée (3.27) est stable. De plus, la vitesse de convergence de l'énergie complète (3.22) du système est donnée par  $\delta = 0.3465$ .

L'estimation de la vitesse de convergence  $\delta$  reste invariable quel que soit la valeur de l'ordre de la projection polynômiale  $N$ . Cela signifie que l'ajout des projections  $Z_N^\top(t)$  à la fonctionnelle de Lyapunov n'apporte aucune amélioration à l'estimation de la vitesse de convergence du système (3.27). Ce qui est prévisible puisque nous considérons l'état de dimension infinie complète dans le terme intégral de la fonctionnelle de Lyapunov (3.23).

## 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, d'abord nous proposons une représentation générale (3.1) du système couplant une EDO à une équation de transport. Ensuite, nous produisons une nouvelle approche pour l'étude de stabilité de ce système couplé général en exploitant la méthode de Lyapunov et les polynômes de Legendre. Des conditions de stabilité du système de dimension infini, fournissant une estimation de sa vitesse de convergence exponentielle, sont détaillées et exprimées sous forme d'inégalités matricielles linéaires dépendant explicitement de la vitesse

de transport  $\rho$  et de l'ordre  $N$  de l'approximation polynômiale.

Enfin, plusieurs cas particuliers sont tirés de ce modèle général et étudiés, système sans échanges internes entre les EDPs, système avec couplage externe des EDPs et équation de transport avec feedback.

# Intérêts de la modélisation du retard dans un système par une équation de transport

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>63</b>
<b>4.2</b>	<b>Modèles de transformation</b>	<b>65</b>
4.2.1	Premier modèle de transformation	65
4.2.2	Modèle de transformation discrétisé à l'ordre 2	66
4.2.3	Processus général de discrétisation	68
<b>4.3</b>	<b>Analyse de stabilité</b>	<b>70</b>
4.3.1	Rappel de la stabilité du système couplé au sens $L^2$	70
4.3.2	Stabilité au sens de Lyapunov vs. Lyapunov-Krasovskii	71
<b>4.4</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>72</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>75</b>

## 4.1 Introduction

Les systèmes à retard ont largement été étudiés dans différents domaines, comme dans le contrôle des réseaux informatiques, les transmissions mécaniques et les systèmes biologiques. Il existe en effet une très large littérature sur les systèmes à retard et nous pouvons nous référer par exemple à [XLZ06] où une approche d'étude de stabilité exponentielle d'un système à retard simple est produit sous forme d'inégalités matricielles, moins conservative que l'approche développé dans [MK+05]. et [GCK03], ou aux travaux de [Fri14]. La stabilité des systèmes à retard a une importance cruciale, pratique et théorique puisque le terme du retard peut être une source d'instabilité et de mauvaises performances du système considéré. De nombreuses études de stabilité et résultats ont été proposés, comme par exemple [Che95], [GW04a] et [XLY01] (voir aussi les références qui s'y trouvent).

Une orientation pertinente de la recherche des années 2000 consiste à appliquer plusieurs modèles de transformation à un système à retard afin de produire des résultats moins conservatifs comme par exemple dans [Ric03]. En outre, le lecteur peut regarder [GN00] ou la représen-

tation descriptive introduite dans [FS02]. Il est également bien connu que ces transformations peuvent induire des dynamiques supplémentaires clairement expliquées dans [GN00].

À la différence de la méthode habituelle basée sur l'application du théorème de Lyapunov-Krasovskii, ce chapitre vise à démontrer les avantages de l'utilisation d'un modèle de systèmes à retard représenté par l'interconnexion du système non retardé avec une équation de transport modélisant le retard. Cette idée n'est pas vraiment nouvelle (voir par exemple [Krs09]). Plus précisément, considérons le système à retard suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= AX(t) + A_d X(t-h), & t \geq 0 \\ X(\theta) &= \phi(\theta), & \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est le vecteur d'état du système et les matrices  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont constantes. La fonction  $\phi$  représente la condition initiale du système à retard. Nous pouvons facilement montrer que l'état retardé  $X(t-h)$  de (4.1) peut être exprimé par une équation de transport prenant l'inverse du retard  $\frac{1}{h}$  comme vitesse. Considérons en effet l'équation de transport suivante sur le domaine spatial normalisé  $(0, 1)$  :

$$h\partial_t z(x, t) + \partial_x z(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0. \quad (4.2)$$

Le système (4.1) devient alors

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + A_d z(1, t) & t > 0, \\ h\partial_t z(x, t) + \partial_x z(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ z(0, t) = X(t), & t > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

La Figure 4.1 décrit l'interconnexion proposée. La condition en  $x = 0$  injecte l'état  $X(t)$  de l'EDO en entrée  $z(0, t)$  de l'équation de transport (4.2), et elle met un certain temps (délai  $h$ ) avant d'atteindre la sortie  $z(1, t)$  à la borne droite en  $x = 1$ . Par conséquent, nous obtenons le terme retardé  $X(t-h)$  à la sortie  $z(1, t)$  de l'équation de transport.

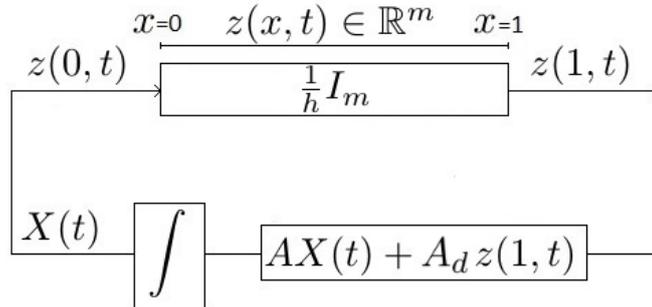


FIGURE 4.1 – Illustration du système (4.3) équivalent au système à retard (4.1).

Le contrôle et la stabilité de ce type de systèmes ont été étudiés dans de nombreux articles récents de la littérature dans différents domaines applicatifs. Par exemple, dans le domaine

hydraulique, le document [CGP05] traite un modèle fluidodynamique pour les flux de trafic en utilisant l'approche du front d'onde orienté et [GDL11] conçoit des lois d'asservissement stabilisant un réseau en forme d'éventail donné par un système couplé EDO-EDP. Les travaux présentés dans [BSS16] et [SBS17b] donnent une hiérarchie des conditions de stabilité des systèmes couplés ci-dessus en utilisant des inégalités matricielles linéaires dépendant de différents paramètres du système couplé.

Le but de ce chapitre est d'exploiter le résultat de l'étude de stabilité menée dans les chapitres précédents et d'appliquer une discrétisation sur le terme retardé du système (4.1). En d'autres termes, nous allons diviser l'intervalle de temps  $[-h, 0]$  du système (4.1) en  $M$  sous-intervalles  $([-h, \frac{-(M-1)h}{M}], \dots, [\frac{-2h}{M}, \frac{-h}{M}], [\frac{-h}{M}, 0])$ , et nous effectuons une projection de l'état retardé de chaque sous-intervalle sur les  $N + 1$  premiers polynômes de Legendre. L'application de  $M$ -discrétisation de l'intervalle du retard et de la projection de taille  $N$  sur les polynômes de Legendre permettra de comparer l'efficacité de chaque méthode et d'évaluer une paire de valeurs optimales  $(M, N)$  donnant les meilleurs résultats pour un compromis donné entre complexité et efficacité.

## 4.2 Modèles de transformation

Le système à retard (4.1) peut être représenté par le système couplé (4.3) EDO-EDP de transport. En revanche, le passage d'un modèle à l'autre n'est pas bijectif, dans le sens où l'on peut trouver plusieurs modèles EDO-EDP dont le comportement peut être représenté par un même système à retard. En effet, il suffit de constater que pour une seule matrice  $A_d$ , nous pouvons trouver une infinité de matrices  $B$ ,  $D$  et  $C$  telles que  $BDC = A_d$ . Les paragraphes suivants développent quelques formes de ces modèles de transformation.

### 4.2.1 Premier modèle de transformation

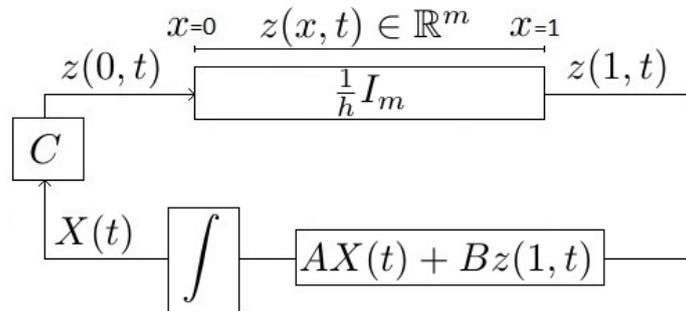


FIGURE 4.2 – Illustration du modèle réduit.

Dans le cas où la matrice  $A_d$  n'est pas de rang plein, il est possible de réduire la complexité des conditions de stabilité en écrivant la matrice  $A_d$  sous la forme  $A_d = B_d C_d$  où  $B_d$  et  $C_d$

sont deux matrices de  $\mathbb{R}^{n \times m}$  et  $\mathbb{R}^{m \times n}$  respectivement, où  $m$  est le rang de la matrice  $A_d$ . Par conséquent, le système (4.1) est donné, sous la forme du système couplé (4.3), par les matrices suivantes :

$$B = B_d, \quad C = C_d, \quad D = 0_m,$$

et la même matrice dynamique  $A$ . Cette représentation implique une légère modification au modèle comme le montre Figure 4.2. Cependant, cette modification a un impact pertinent sur la complexité du théorème 3.1 puisque la dimension de l'état  $z$  est réduit de  $n$  à  $m$  éléments.

#### 4.2.2 Modèle de transformation discrétisé à l'ordre 2

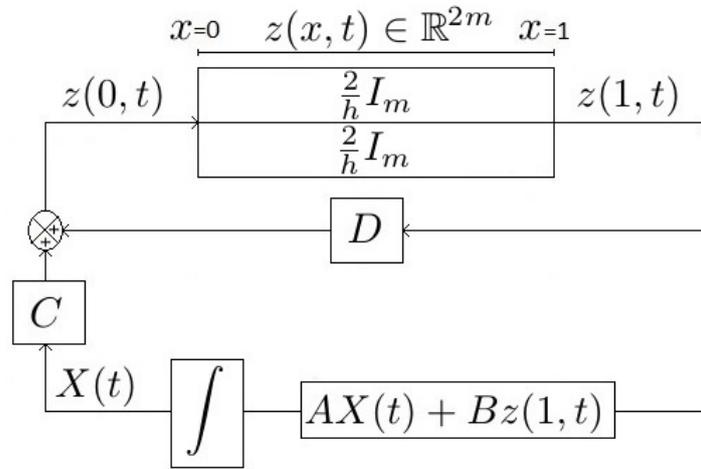


FIGURE 4.3 – Illustration du modèle discrétisé à l'ordre 2.

L'idée de ce paragraphe consiste à diviser l'intervalle du retard  $[-h, 0]$  en deux sous-intervalles ( $[-h, -\frac{h}{2}]$  et  $[-\frac{h}{2}, 0]$ ) par une simple transformation du système couplé EDO-EDP. Donc, sachant que la matrice dynamique  $A$  est toujours la même, le système (4.3) est donné par les matrices suivantes :

$$\Lambda = \frac{2}{h} I_{2m}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n,m} & B_d \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_d \\ 0_{m,n} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ I_m & 0_m \end{bmatrix}.$$

Dans ce modèle, illustré dans Figure 4.3, les matrices  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont été définies tel que  $BDC = B_d C_d = A_d$ . Notons que la dimension de la variable  $z$  et la vitesse de transport ont été doublées. Les conditions initiales imposent les contraintes suivantes :

$$\begin{bmatrix} z_1(0, t) \\ z_2(0, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d X(t) \\ z_1(1, t) \end{bmatrix}.$$

De plus, en calculant la solution de l'équation de transport, nous pouvons remarquer que  $z_1(1, t) = C_d X(t - \frac{h}{2})$  et  $z_2(1, t) = z_1(1, t - \frac{h}{2}) = C_d X(t - h)$ . Par conséquent, cette formulation

introduit une information de plus à l'état  $z_1(1, t) = C_d X(t - \frac{h}{2})$  du système, ce qui peut être pris comme un processus de discrétisation de l'intervalle du retard.

Donc, l'application des conditions de stabilité de Théorème 3.1 sur ce modèle particulier peut être interprétée comme un croisement de l'inégalité de Bessel-Legendre et un processus de discrétisation de l'intervalle du retard. En effet, nous pouvons le remarquer sur la fonctionnelle de Lyapunov associée à ce modèle et menant à ces conditions de stabilité. Le calcul de la solution de l'EDP de transport dans (4.3) avec  $\Lambda = \frac{2}{h} I_{2m}$  est la suivante :

$$z(x, t) = \begin{bmatrix} C_d X(t - \frac{h}{2}x) \\ C_d X(t - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}x) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Injectons l'expression de  $z$  dans la définition de la fonctionnelle de Lyapunov

$$\begin{aligned} V_N(X(t), z(\cdot, t)) &= \begin{bmatrix} X(t) \\ \mathcal{X}_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \mathcal{X}_N(t) \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^1 \begin{bmatrix} C_d X(t - \frac{h}{2}x) \\ C_d X(t - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}x) \end{bmatrix}^\top (S + (1-x)R) \begin{bmatrix} C_d X(t - \frac{h}{2}x) \\ C_d X(t - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}x) \end{bmatrix} dx. \end{aligned}$$

où l'état augmenté  $\mathcal{X}_N$  correspond à la projection de l'état  $z$  donné dans (4.4) sur les polynômes de Legendre de degré inférieur à  $N$ . Plus précisément, une expression de ce vecteur est donnée, après un changement de variable, par

$$\mathcal{X}_N = \begin{bmatrix} \int_0^1 \begin{bmatrix} C_d X(t - \frac{h}{2}x) \\ C_d X(t - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}x) \end{bmatrix} \mathcal{L}_0(x) ds \\ \vdots \\ \int_0^1 \begin{bmatrix} C_d X(t - \frac{h}{2}x) \\ C_d X(t - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}x) \end{bmatrix} \mathcal{L}_N(x) ds \end{bmatrix}.$$

En appliquant le changement des variables  $s = t - \frac{h}{2}x$  et  $s = t - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}x$  à l'expression précédente, le vecteur de l'état augmenté  $\mathcal{X}_N$  s'écrit

$$\mathcal{X}_N(t) = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} \int_{t-\frac{h}{2}}^t C_d X(s) \mathcal{L}_0(2\frac{t-s}{h}) ds \\ \int_{t-h}^{t-\frac{h}{2}} C_d X(s) \mathcal{L}_0(2\frac{t-s}{h}) ds \\ \vdots \\ \int_{t-\frac{h}{2}}^t C_d X(s) \mathcal{L}_N(2\frac{t-s}{h}) ds \\ \int_{t-h}^{t-\frac{h}{2}} C_d X(s) \mathcal{L}_N(2\frac{t-s}{h}) ds \end{bmatrix}.$$

L'application du changement de variable  $s = t - \frac{h}{2}x$  au dernier terme intégral de  $V_N$

dans (3.7) amène à l'expression suivante

$$V_N(X_t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ \mathcal{X}_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \mathcal{X}_N(t) \end{bmatrix} + \frac{2}{h} \int_{t-\frac{h}{2}}^t \begin{bmatrix} C_d X(s) \\ C_d X(s - \frac{h}{2}) \end{bmatrix}^\top \left( \tilde{S} + \frac{2}{h} (s - t + \frac{h}{2}) \tilde{R} \right) \begin{bmatrix} C_d X(s) \\ C_d X(s - \frac{h}{2}) \end{bmatrix} ds,$$

où  $\tilde{S} = C_d^\top S C_d$  et  $\tilde{R} = C_d^\top R C_d$  sont deux matrices positives non nécessairement définies. équivalente à la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.

Ces commentaires démontrent le potentiel de la modélisation du système à retard par le système couplé EDO-EDP de transport. Nous avons montré que de simples transformations peuvent avoir un impact important sur l'interprétation des conditions de stabilité développées dans Corollaire 3.1. D'une part, un aspect lié à la réduction de la complexité des LMIs (réduction de la taille et du nombre des variables de décision) quand la matrice du retard  $A_d$  n'est pas de rang plein. D'autre part, pour que la construction d'un modèle augmenté soit possible, la contrainte  $BD^M C = A_d$  doit être vérifiée afin de produire un modèle équivalent au système à retard. Cette décomposition n'est pas unique, et plusieurs autres modèles peuvent être générés. La section suivante produit une formulation générale de cette discrétisation permettant de prolonger ce processus à n'importe quel ordre  $M \in \mathbb{N}$ .

### 4.2.3 Processus général de discrétisation

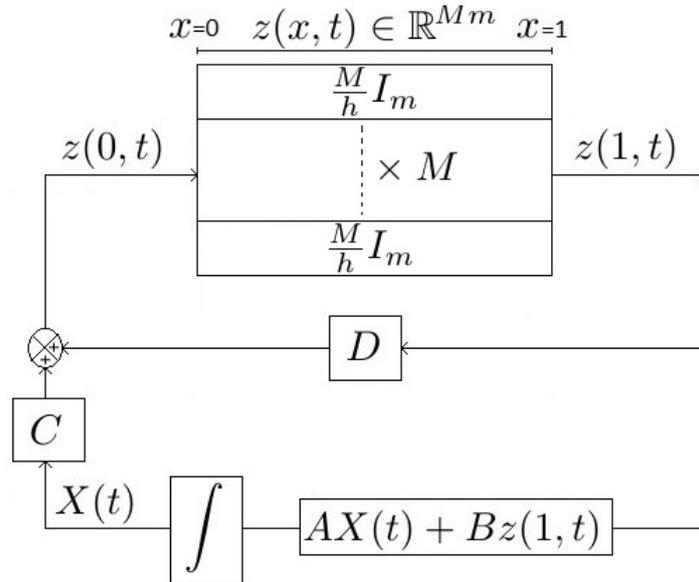


FIGURE 4.4 – Illustration du modèle général discrétisé à l'ordre  $M$ .

Ici, nous définissons un nouveau paramètre  $M$  présentant le nombre des sous-intervalles

$[0, 1]$  considérés. Suivant la même procédure que précédemment, nous définissons le modèle de transformation permettant d'exprimer le système à retard (4.1) à l'aide du système couplé (4.3) avec les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 0_{n,(M-1)m} & B_d \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} C_d \\ 0_{(M-1)m,n} \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0_{m,(M-1)m} & 0_m \\ I_{(M-1)m} & 0_{(M-1)m,m} \end{bmatrix}, & \Lambda &= \frac{M}{h} I_{Mm}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nous remarquons que  $BD^M C = A_d$ . Une interprétation graphique est représentée par Figure 4.4. Nous remarquons également que les conditions initiales imposent les contraintes :

$$\begin{bmatrix} z_1(0, t) \\ z_2(0, t) \\ \vdots \\ z_M(0, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d X(t) \\ z_1(1, t) \\ \vdots \\ z_{M-1}(1, t) \end{bmatrix}.$$

Suivant les mêmes arguments que la section précédente, nous obtenons

$$\forall i = 1, \dots, M-1, \quad z_{i+1}(0, t) = z_i(1, t) = z_i(0, t - \frac{h}{M}),$$

où nous avons utilisé les solutions de l'équation de transport. Par l'injection et la ré-injection de ces expressions, nous obtenons donc

$$\forall i = 1, \dots, M, \quad z_i(0, t) = C_d X(t - \frac{(i-1)h}{M})$$

et  $z_M(1, t) = C_d X(t - h)$ .

Ce modèle de transformation par le système couplé EDO-EDP permet d'introduire plusieurs valeurs intermédiaires de l'état  $X_t$ . Notons également que les fonctionnelles de Lyapunov associées peuvent être exprimées sous la forme des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii comme nous l'avons montré dans la section précédente. Elles peuvent être calculées suivant la même procédure que précédemment.

Enfin, un dernier commentaire concernant la complexité des conditions de stabilité. L'accroissement de  $N$  et de  $M$  augmente notamment la taille des LMIs, ainsi que le nombre de variables de décision. Ce nombre de variables de décision  $DV$ , variant par rapport à l'entier  $M$  de discrétisation et à l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre, est donné par l'expression suivante :

$$DV = \frac{1}{2}(n^2 + n + Mm(3N + 5) + (Mm)^2((N + 1)^2 + 2)) \quad (4.6)$$

À partir de cette expression, nous remarquons que le nombre de variables de décision  $DV$  ne dépend pas de la même manière des variables  $M$  de discrétisation et  $N$  de la projection

polynomiale. La dépendance en  $M$  est plus puissante que celle en  $N$  vu que le terme carré  $(Mm)^2$  permet un accroissement rapide de la valeur de  $DV$ . Par conséquent, les conditions de stabilité deviennent de plus en plus complexe par l'augmentation  $M$ .

La méthode de discrétisation a déjà été utilisée, d'une manière différente, dans des travaux d'étude de stabilité des systèmes à retard. Par exemple, dans [GCK03] la discrétisation est appliquée sur la fonctionnelle de Lyapunov. Le principe est de diviser le domaine de définition des matrices  $Q$ ,  $R$  et  $S$  de la fonctionnelle de Lyapunov en petites régions et choisir pour chacune de ces matrices des fonctions continues et linéaires par morceaux. Cela divise indirectement l'intervalle du retard en plusieurs sous-intervalles. Dans notre approche, cette division est faite directement sur l'intervalle du retard par la manipulation du modèle couplé EDO-équation de transport permettant d'exprimer le système à retard.

### 4.3 Analyse de stabilité

#### 4.3.1 Rappel de la stabilité du système couplé au sens $L^2$

La stabilité exponentielle au sens de la norme  $L^2$  du système couplé (4.3) est donnée par les inégalités :

$$\varepsilon_1 E(X(t), z(t)) \leq V_N(X(t), z(t)) \leq \varepsilon_2 E(X(t), z(t)), \quad (4.7)$$

$$\dot{V}_N(X(t), z(t)) + 2\delta V_N(X(t), z(t)) \leq -\varepsilon_3 E(X(t), z(t)), \quad (4.8)$$

en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov générale suivante

$$V_N(X(t), Z_N(t)) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z_N(t) \end{bmatrix} + \int_0^1 z^\top(x, t) e^{-2\delta x \Lambda^{-1}} (S + (1-x)R) z(x, t) dx. \quad (4.9)$$

L'existence des scalaires  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  telle que la fonctionnelle de Lyapunov (4.9) satisfait les inégalités (4.7) et (4.8), est donnée par les LMIs  $\Phi_N(\Lambda, \delta)$  et  $\Psi_N(\Lambda, \delta)$  du théorème suivant :

**Théorème 4.1.** *Considérons le système couplé (4.3) une matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée. Si il existe un entier  $N > 0$  tel qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $P \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $Q_N \in \mathbb{R}^{n, (N+1)m}$ ,  $T_N \in \mathbb{S}^{(N+1)m}$ ,  $S$  et  $R \in \mathcal{M}_\Lambda^m$ , vérifiant les LMIs suivantes :*

$$\Phi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} P & Q_N \\ * & T_N + S^N(\Lambda) \end{bmatrix} \succ 0, \quad \Psi_N(\Lambda, \delta) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.10)$$

où

$$\begin{aligned}
\Psi_{11} &= \text{He}(PA + Q_N \mathbf{1}_N^*(\Lambda)C) + C^\top \Lambda(R + S)C + 2\delta P, \\
\Psi_{12} &= PB + Q_N(\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda)) + C^\top \Lambda(R + S)D, \\
\Psi_{13} &= A^\top Q_N + C^\top \mathbf{1}_N^{*\top}(\Lambda)T_N + Q_N L_N(\Lambda) + 2\delta Q_N, \\
\Psi_{22} &= -e^{-2\delta\Lambda^{-1}} \Lambda S + D^\top \Lambda(R + S)D, \\
\Psi_{23} &= B^\top Q_N + (\mathbf{1}_N^*(\Lambda)D - \mathbf{1}_N(\Lambda))^\top T_N, \\
\Psi_{33} &= \text{He}(T_N L_N(\Lambda)) - R^N(\Lambda) + 2\delta T_N,
\end{aligned}$$

alors le système est exponentiellement stable. Plus précisément, pour cette matrice de transport  $\Lambda \in \mathbb{D}_+^m$  donnée, il existe une constante  $K > 0$  et une vitesse de convergence  $\delta^* > \delta$  telles que l'énergie du système vérifie,  $\forall t > 0$ ,

$$E(t) \leq K e^{-2\delta^* t} (|z^0(0)|^2 + \|z^0\|_{L^2((0,1);\mathbb{R}^m)}). \quad (4.11)$$

Nous allons exploiter ce théorème pour l'étude de stabilité du système à retard (4.1) au sens de la norme  $L^2$ , en utilisant la représentation du système couplé (4.3) équivalente. En effet, la stabilité au sens de la norme  $L^2$  de cette représentation équivalente implique la stabilité de Lyapunov-Krasovskii, utilisant la norme supérieure, du système à retard (4.1). La section suivante détaille plus le lien entre la stabilité de Lyapunov-Krasovskii et la stabilité au sens  $L^2$ .

### 4.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov vs. Lyapunov-Krasovskii

Nous avons vu dans ce chapitre que l'on peut utiliser un modèle couplé EDO-EDP de transport pour développer une méthode simple pour construire des fonctionnelles de Lyapunov pour des systèmes à retard qui utilisent à la fois la méthode issue de l'inégalité de Bessel et de discrétisation de l'intervalle de retard. Cela étant, le Théorème 4.1 ne représente pas un résultat temporelle "classique" pour les systèmes à retard puisqu'il ne se réfère pas à l'application du Théorème de Lyapunov-Krasovskii (voir par exemple [GCK03]. Ce théorème requiert que la fonctionnelle vérifie les inégalités suivantes

$$\bar{\varepsilon}_1 |X(t)|_n^2 \leq V_N(X, z) \leq \bar{\varepsilon}_2 \eta \sup_{s \in [-h, 0]} |X(s)|_n^2,$$

et

$$\dot{V}_N(X, z) + 2\delta V_N(X, z) \leq -\bar{\varepsilon}_3 |X(t)|_n^2.$$

pour des scalaires positifs  $\bar{\varepsilon}_1$ ,  $\bar{\varepsilon}_2$  et  $\bar{\varepsilon}_3$  et, généralement,  $\delta$  est pris égal à zéro, pour obtenir un critère de stabilité asymptotique. Ce théorème est plus contraignant que l'application du théorème de Lyapunov en norme  $L^2$ , puisqu'il est basé sur la norme suprémum de la fonction d'état  $X$ .

Cela étant, il est possible de faire un lien entre les deux théorèmes, puisque pour un système à retard modélisé sous forme d'un couplage EDO-EDP, nous savons que l'état  $X(t - \theta)$  peut

être relié facilement à la fonction  $z(x, \frac{\theta}{h})$ , ce qui nous assure les inégalités suivantes

$$|X(t)|_n^2 \leq E(t) \leq \eta \sup_{s \in [-h, 0]} |X(s)|_n^2, \quad \forall t > 0.$$

Ainsi, nous pouvons prouver que le Théorème 4.1, garantit aussi la stabilité du système à retard initial au sens de Lyapunov-Krasovskii.

## 4.4 Applications numériques

Considérons le système à retard suivant

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X(t-h)$$

Les représentations équivalentes de ce système à retard en utilisant le modèle général de discrétisation du système couplé (4.3) sont

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 0_{2,2(M-1)} & A_d \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} I_2 \\ 0_{2(M-1),2} \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0_{2,2(M-1)} & 0_2 \\ I_{2(M-1)} & 0_{2(M-1),2} \end{bmatrix}, & \Lambda &= \frac{M}{h} I_{2M}. \end{aligned}$$

Pour ce système, nous avons montré que la vitesse de convergence maximale de l'énergie est  $\delta_{max} = 4.35$  correspondant au retard  $h = \frac{1}{3.5}$  (see [SBS17a]). En utilisant Théorème 4.1, nous avons effectué plusieurs simulations affichées dans le Tableau 4.1. Ce tableau donne l'estimation de  $\delta$  pour plusieurs valeurs de la paire  $(M, N)$  et pour un retard  $h = \frac{1}{3.5}$ .

For $h = \frac{1}{3.5}$	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$M = 1$	$\delta = 1.3404$	$\delta = 2.6038$	$\delta = 3.4402$	$\delta = 4.0883$	$\delta = 4.3558$
$M = 2$	$\delta = 1.3729$	$\delta = 3.1009$	$\delta = 3.9252$	$\delta = 4.3577$	$\delta = 4.3884$
$M = 3$	$\delta = 1.3841$	$\delta = 3.3478$	$\delta = 4.1134$	$\delta = 4.3821$	$\delta = 4.3895$
$M = 4$	$\delta = 1.4294$	$\delta = 3.5316$	$\delta = 4.2958$	$\delta = 4.3870$	$\delta = 4.3897$
$M = 5$	$\delta = 1.4337$	$\delta = 3.6463$	$\delta = 4.3346$	$\delta = 4.3885$	$\delta = 4.3897$

TABLE 4.1 – La vitesse de convergence  $\delta$  en fonction de  $(M, N)$ .

Nous remarquons dans le Tableau 4.1 que l'accroissement de l'entier  $M$  de la discrétisation temporelle du retard, pour un ordre  $N$  des polynômes de Legendre, améliore l'estimation de la vitesse de convergence  $\delta$ . Pour des valeurs de  $M$  fixées, nous obtenons de meilleurs résultats en augmentant l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre, mais qui restent loin de la valeur maximale. Néanmoins, l'utilisation des deux méthodes à la fois, et la  $M$ -discrétisation et  $N$ -projections sur les polynômes de Legendre, permet d'obtenir de meilleurs résultats plus proches de la valeur maximale  $\delta_{max} = 4.35$ .

Maintenant, pour mieux évaluer l'évolution de la vitesse de convergence  $\delta$ , nous définissons une  $\delta$ -erreur d'efficacité par  $\epsilon_\delta = 1 - \frac{\delta_{\text{Th1}}}{\delta_{\text{freq}}}$ , représentant la distance manquante pour atteindre le cas  $\frac{\delta_{\text{Th1}}}{\delta_{\text{freq}}} = 1$ , et comparant la vitesse de convergence  $\delta_{\text{Th1}}$  trouvée par Théorème 4.1 et  $\delta_{\text{freq}}$  donnée par les analyses temporelles (voir [BMV15]) qui sont exactes. La Figure 4.5 affiche l'amélioration de  $\epsilon_\delta$  par rapport au nombre de variables de décision DV dépendant de la paire  $(M, N)$ .

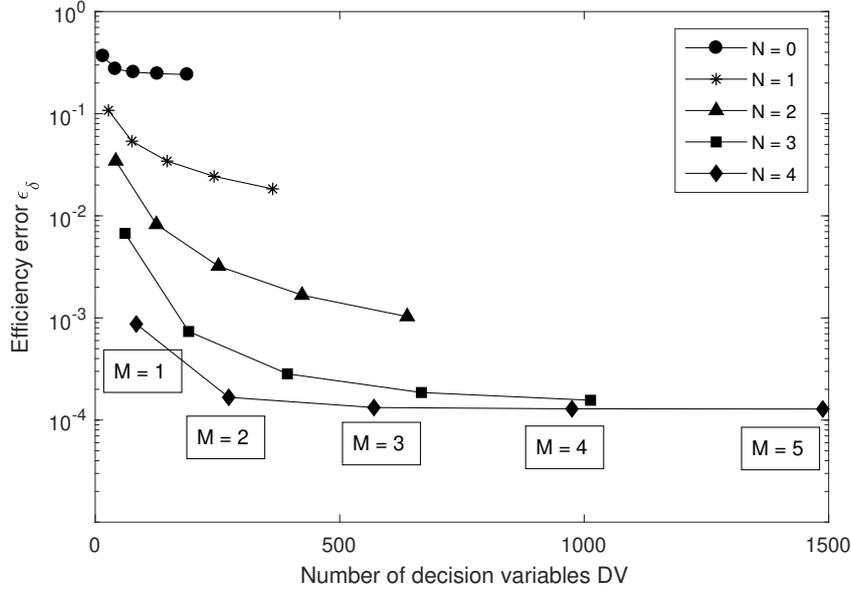


FIGURE 4.5 – L'erreur d'efficacité  $\epsilon_\delta$  de l'estimation de la vitesse de convergence  $\delta_{\text{Th1}}$  comparée aux résultats fréquentiels  $\delta_{\text{freq}}$  en fonction du nombre de variables de décision DV.

Pour mieux expliquer comment interpréter les résultats de la Figure 4.5, nous allons donner un exemple d'une paire  $(M, N)$  appropriée permettant d'atteindre une erreur d'efficacité  $\epsilon_\delta$  fixée.

Si nous décidons par exemple d'imposer un intervalle à l'erreur d'efficacité à  $\epsilon_\delta \leq 10^{-3}$ , le meilleur compromis entre l'objectif de l'efficacité et le nombre de variables de décision DV est clairement  $(M, N) = (1, 4)$  (mieux que le résultat de la paire  $(2, 3)$ ), car nous atteignons l'objectif avec moins de complexité (le nombre DV est plus petit).

En effet, l'accroissement de la paire  $(M, N)$  permet d'améliorer les résultats, mais rend le problème plus complexe en augmentant le nombre de variables de décision DV. Tableau 4.2 détaille l'évolution de la complexité du problème, exprimée par le nombre de variables de décision DV dépendant de la paire  $(M, N)$ .

Dans le tableau 4.2, nous remarquons que le problème LMI devient rapidement plus complexe en augmentant la valeur de  $M$  de la discrétisation, alors qu'il le devient légèrement par la croissance de l'ordre  $N$  des polynômes de Legendre. Par exemple, si nous considérons la paire

nombre de variables de décision DV	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$M = 1$	16	27	42	61	84
$M = 2$	41	75	125	191	273
$M = 3$	78	147	252	393	570
$M = 4$	127	243	423	667	975
$M = 5$	188	363	638	1013	1488

TABLE 4.2 – Le nombre de variables de décision DV en fonction de la paire  $(M, N)$ .

$(M, N) = (1, 2)$  comme une référence, nous remarquons bien que le nombre de variables de décision DV augmente seulement par 19 variables au prochain ordre de  $N$  ( $(M, N) = (1, 3)$ ), alors qu'il augmente par 83 variables à la valeur suivante de  $M$  ( $(M, N) = (2, 2)$ ).

Enfin, pour évaluer l'efficacité du Théorème 4.1 en terme du retard maximal  $h_{max}$  pour lequel le système reste stable, nous définissons une  $h$ -erreur d'efficacité  $\epsilon_h = 1 - \frac{h_{max_{Th1}}}{h_{max_{freq}}}$ , comparant le retard maximal  $h_{max_{Th1}}$  déterminé par Théorème 4.1 et  $h_{max_{freq}}$  donné par les analyses fréquentielles (voir [GCK03]). La Figure 4.6 donne l'évolution de  $\epsilon_h$  par rapport au nombre de variables de décision DV. L'observation de la Figure 4.6 permet de déduire que la paire  $(M, N) = (2, 2)$  donne le meilleur résultat de retard maximal  $h_{max_{Th1}}$  pour lequel le système reste stable, dans l'intervalle  $\epsilon_h \leq 10^{-4}$  avec moins de variables de décision.

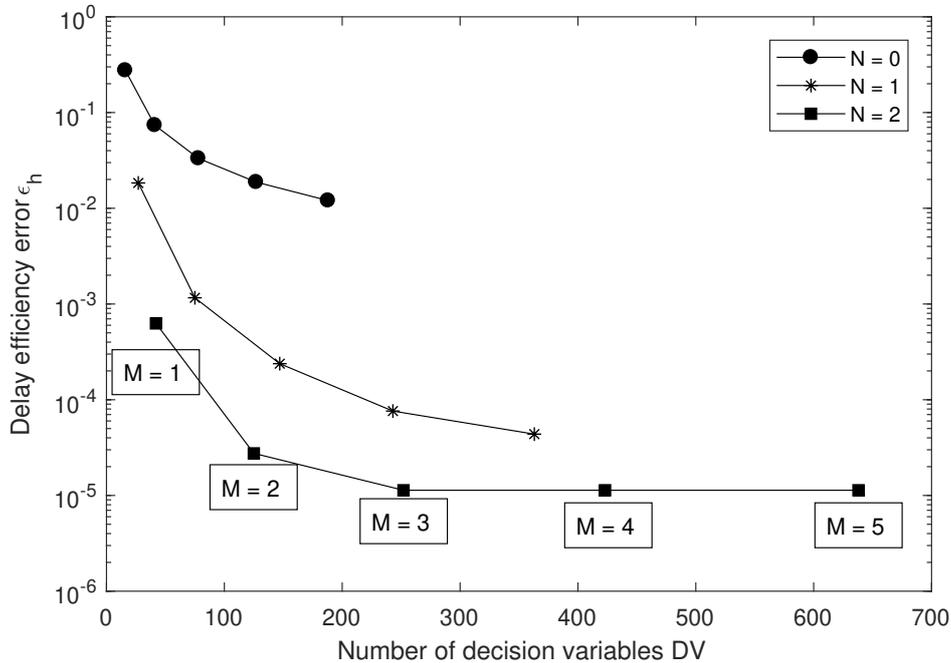


FIGURE 4.6 – L'erreur d'efficacité  $\epsilon_h$  du retard  $h_{Th1}$  comparée aux résultats fréquentiels  $h_{freq}$  en fonction du nombre de variables de décision DV.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous produisons une nouvelle approche de l'étude de stabilité du système à retard (4.1) en utilisant le système couplé (4.3) et en exploitant le résultat de stabilité obtenu dans le Théorème 4.1 basé sur la méthode de Lyapunov. En plus de la projection de l'état  $z(x, t)$  de l'EDP sur les  $N + 1$  premiers polynômes de Legendre, un processus de discrétisation est aussi appliqué en discrétisant l'intervalle du retard  $[-h, 0]$  en  $M$  sous-intervalles. Nous concluons sur les figures 4.5 et 4.6 que l'utilisation des deux méthodes, et la  $M$ -discrétisation et la  $N$ -projection sur les polynômes de Legendre, permet d'atteindre rapidement l'objectif avec moins de complexité.



# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié des systèmes couplant des équations différentielles ordinaires et des équations de transport. Ces systèmes peuvent représenter plusieurs systèmes réels (transportation d'un flux de gaz, réseaux de communication, circulation routière...). Nous avons produit une nouvelle approche, utilisant des projections sur une base de polynômes et l'inégalité de Bessel, approche qui permet l'étude de stabilité de ce type de systèmes en utilisant la méthode de Lyapunov.

Afin de mener cette étude de stabilité, nous avons également proposé de nouvelles structures de fonctionnelles de Lyapunov dépendant des différents paramètres des systèmes couplés étudiés. Pour chaque type de système couplé, et suivant la méthode de Lyapunov, nous avons produit des conditions suffisantes de stabilité sous forme d'inégalité matricielles.

Les contributions de cette thèse ont été abordées de la manière suivante :

- Dans le Chapitre 2, nous avons traité un couplage simple d'une équation différentielle ordinaire et d'une équation de transport possédant une seule vitesse constante. Pour ce cas particulier, une fonctionnelle de Lyapunov est proposée et des conditions suffisantes de stabilité sont produites. Les résultats obtenus sont appliqués à des exemples académiques.
- Dans le Chapitre 3, nous avons considéré la représentation plus générale de système couplant des EDOs avec des équations de transport à plusieurs vitesses. Une approche générale de l'étude de stabilité est fournie et des cas particuliers en sont déduits. En particulier, le cas d'un système sans couplage interne entre les EDPs vérifie un résultat très important, à savoir la hiérarchie des conditions de stabilité. Autrement dit, l'augmentation de l'ordre de la projection polynômiale ne peut qu'améliorer les résultats de stabilité garantie. Des simulations numériques de chaque cas particulier sont présentées.
- Dans le Chapitre 4, le lien des systèmes couplés précédemment étudiés avec les systèmes à retard est détaillé. Une discrétisation de la représentation du système couplé est proposée et des modèles de transformation en sont déduits. Des conditions de stabilité sont données et appliquées à des exemples numériques.

## Perspectives

Plusieurs travaux de recherche peuvent faire suite aux résultats de cette thèse. Dans ce contexte, citons quelques perspectives envisageables.

Un premier axe peut consister à permettre une variation en temps de la vitesse de l'équation de transport. Cela revient à considérer le modèle couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bz(1, t), & t > 0, \\ \partial_t z(x, t) + \Lambda(t)\partial_x z(x, t) + Fz(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ z(0, t) = CX(t) + Dz(1, t), & t > 0, \\ z(x, 0) = z^0(x), & x \in (0, 1) \\ X(0) = X^0. \end{cases} \quad (4.12)$$

La dépendance de la matrice de transport  $\Lambda$  par rapport au temps est une difficulté supplémentaire qui a l'avantage de pouvoir faire le lien avec les systèmes à retards variables [Fri14]. Ce lien permettra d'exploiter les outils utilisés pour les systèmes à retards variables ([FSR04]) afin de produire une nouvelle approche pour l'étude de ce type plus général de système couplé. Le développement de la méthode de Lyapunov pour ce système couplé est plus compliqué, puisque la matrice de transport  $\Lambda$  dépend aussi de la variable de temps. Le calcul de la dérivée temporelle de la fonctionnelle de Lyapunov nécessitera donc l'utilisation d'autres outils et supposera probablement d'imposer des contraintes sur les fonctions  $t \mapsto \Lambda(t)$ . La technique utilisée pour les systèmes à retards variables consiste par exemple à borner les retards par des valeurs constantes et à travailler avec celles-ci. Cela peut être un choix judicieux pour simplifier les calculs de cette dérivée en limitant les vitesses de transport.

Parmi les perspectives les plus attractives concernant ces résultats se trouvent dans le challenge de prouver le caractère nécessaire des conditions de stabilité produites. Dans cette thèse nous produisons des conditions suffisantes de stabilité des systèmes couplés étudiés. Cela est dû à la fonctionnelle de Lyapunov considérée, qui ne permet pas de traiter toutes les informations de l'état de dimension infinie. Nous n'utilisons en effet qu'une partie finie de cet état d'ordre  $N$  en se servant de la projection polynômiale

$$Z_N(t) = \begin{bmatrix} \int_0^1 z(x, t)\mathcal{L}_0(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 z(x, t)\mathcal{L}_N(x) dx \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)m} \quad (4.13)$$

En effet, les coefficients  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{T}$  de la fonctionnelle de Lyapunov (3.7) ont été décomposés et projetés sur les polynômes de Legendre de la manière suivante :

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{k=0}^N Q(k)\mathcal{L}_k(x), \quad \mathcal{T}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N T(i, j)\mathcal{L}_i(x_1)\mathcal{L}_j(x_2).$$

Ainsi, la fonctionnelle de Lyapunov originelle (2.5) qui s'inspirait de celle de Gu [GCK03], ne peut plus être complète, au sens où elle ne donnera pas de conditions nécessaires de stabilité. Les questions qui se posent sont alors les suivantes :

- Pourrions-nous avoir une fonctionnelle de Lyapunov complète menant à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité, comme pour les systèmes à retard [GCK03], remplaçant  $N$  par  $+\infty$  ?
- Pourrions-nous obtenir l'intégralité des zones de stabilité grâce à cette fonctionnelle de Lyapunov complète ?

Autrement dit,

- Si nous savons qu'un système couplé donné est stable, pourrions-nous montrer qu'il existe un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $V_{N_0}$  définie en (2.11) soit une fonctionnelle de Lyapunov ?
- Si  $N$  tend vers  $+\infty$ , sommes-nous assurés de couvrir toutes les zones de stabilité ?

Avec le même type d'approche que celle développée dans cette thèse, le couplage avec une EDP de la chaleur a été étudié dans [Bau+17]. Si nous regardons des applications en mécanique ou si nous voulons modéliser des phénomènes vibratoires, il est pertinent de considérer un couplage d'EDO avec une équation des poutres, par exemple en écrivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B\partial_x z(1, t), & t > 0, \\ z_{tt}(x, t) = \rho z_{xxxx}(x, t), & x \in (0, 1), t > 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

et où nous devons ajouter des conditions de bord. Le couplage d'une EDO avec l'équation des ondes a déjà été étudié dans [Bar+17] avec le même type d'approche que celles racontées dans ce manuscrit. Une équation des poutres modélise aussi un phénomène vibratoire et est de degré quatre en la variable d'espace. Le couplage avec une EDO pourra s'écrire de différentes manières selon le cadre applicatif concerné. Ici par exemple, nous suggérons la prise en compte de la vitesse de la poutre en  $x = 1$  dans l'EDO ( $B\partial_x z(1, t)$ ) et nous pouvons imaginer un second couplage à travers une des quatre conditions aux bords de l'EDP de la forme  $z(0, t) = CX(t)$ . Comme pour les ondes dans [Bar+17], il nous faudra probablement mettre un terme d'amortissement à la frontière du domaine pour gérer ce type de comportement vibratoire. Le nombre de dérivées en espace et en temps de cette nouvelle EDP impliquera un travail technique (sur les projections de la solution sur les polynômes de Legendre) attentif.

La synthèse d'une commande de stabilisation est une phase légitime après une étude de stabilité. Les méthodes sont nombreuses et la plus proche de notre domaine d'étude de stabilité est le backstepping, puisqu'elle se base aussi sur la méthode de Lyapunov. Nous pouvons imaginer l'introduction d'une commande finie dans le couplage en rassemblant les dynamiques une par une, et en stabilisant les boucles de la plus petite (boucle interne) à la plus grande (boucle externe).



# Outils

---

Cette annexe aborde, d'une manière générale, tous les outils utilisés dans cette étude de stabilité. Les polynômes de Legendre utilisés pour construire une approximation polynômiale d'un vecteur de dimension infinie. L'inégalité de Bessel, déterminant la différence entre la norme d'un vecteur et ses projections sur une base orthogonale, et l'inégalité de Grönwall assurant la décroissance exponentielle d'une fonction donnée. De plus, le chapitre définit une nouvelle notation du produit scalaire, permettant la projection d'un vecteur sur une fonction donnée.

Pour plus de détails concernant ces outils et leurs démonstrations, nous pouvons renvoyer par exemple aux livres de référence suivants : [BCL99], [CT61] ou [RN55].

## A.1 Polynômes de Legendre

Dans l'objectif de construire une base hilbertienne polynomiale de l'espace  $L^2(0, 1)$ , nous allons rappeler ici la définition des polynômes de Legendre. Ils représentent des solutions particulières de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_k(x)] + k(k+1)P_k(x) = 0,$$

pour tout entier naturel  $k \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $x \in [-1, 1]$ .

Les expressions des premiers polynômes de Legendre pour  $k = 0, 1, 2, 3$  et  $4$  sont données par :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned}$$

La représentation graphique de ces polynômes est affichée sur la Figure A.1, et l'expression générale de ces solutions est présentée par la formule de Rodrigues suivante :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k].$$

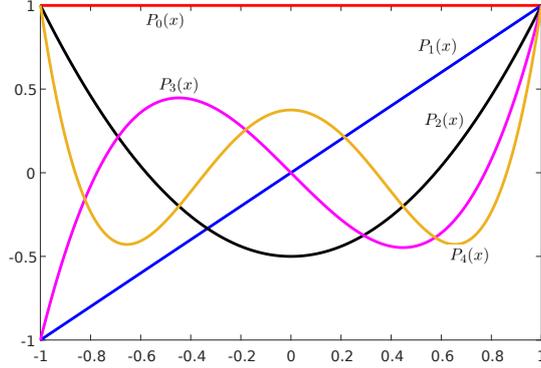


FIGURE A.1 – Représentation graphique des cinq premiers polynômes de Legendre  $P_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  et 4.

Nous allons exploiter les polynômes de type Legendre sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous les noterons  $\mathcal{L}_k(x)$  et ils sont obtenus par une transformation affine. La fonction  $x \mapsto 2x - 1$  permet d'effectuer une bijection de  $[0, 1]$  vers  $[-1, 1]$  tout en respectant les propriétés d'orthogonalité. Nous avons donc  $\mathcal{L}_k(x) = P_k(2x - 1)$  et la formule de Rodrigues de ces nouveaux polynômes de Legendre est donnée par :

$$\mathcal{L}_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - x)^k].$$

La Figure A.2 représente les premiers polynômes de Legendre décalés suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) &= 1 \\ \mathcal{L}_1(x) &= 2x - 1 \\ \mathcal{L}_2(x) &= 6x^2 - 6x + 1 \\ \mathcal{L}_3(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 \\ \mathcal{L}_4(x) &= 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1. \end{aligned}$$

Ces nouveaux polynômes sont orthogonaux selon le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_j, \mathcal{L}_k \rangle &= \int_0^1 \mathcal{L}_j(x) \mathcal{L}_k(x) dx = \frac{1}{2k+1} \delta_{jk} \\ \langle \mathcal{L}_k, \mathcal{L}_k \rangle &= \|\mathcal{L}_k\|^2 = \frac{1}{2k+1}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où  $\delta_{jk}$  représente le coefficient de Kronecker, égal à 1 si  $j = k$  et 0 sinon. Ils se caractérisent par deux propriétés, les valeurs aux bords

$$\mathcal{L}_k(0) = (-1)^k, \quad \mathcal{L}_k(1) = 1. \quad (\text{A.2})$$

et la formule de la dérivée temporelle

$$\mathcal{L}'_k(x) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \sum_{j=0}^{k-1} \ell_{kj} \mathcal{L}_j(x), & k \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

où

$$\ell_{kj} = \begin{cases} (2j+1)(1-(-1)^{k+j}), & \text{if } j \leq k-1, \\ 0, & \text{if } j \geq k. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

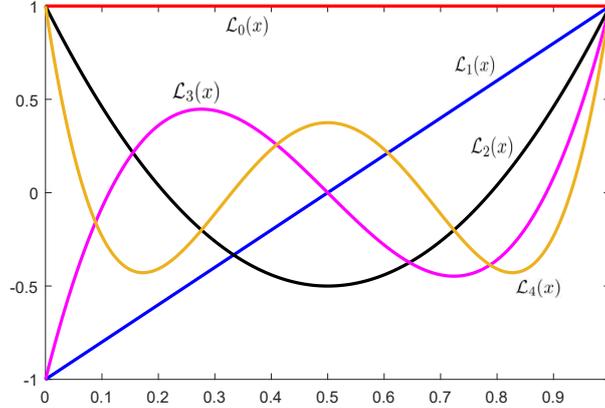


FIGURE A.2 – Représentation graphique des cinq premiers polynômes de Legendre décalés  $\mathcal{L}_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  et 4.

## A.2 Inégalité de Bessel

**Lemme.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme associée  $\| \cdot \|$ . Considérons une base hilbertienne de  $H$  notée  $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Pour tout élément  $x$  de  $H$ , l'inégalité de Bessel s'écrit :

$$\sum_{i=0}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (\text{A.5})$$

## A.3 Inégalité de Grönwall

**Lemme.** Soit  $f(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue et dérivable sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$ . Considérant une fonction continue  $g(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , si l'inégalité  $\dot{f}(t) \leq f(t)g(t)$  est vérifiée, alors quelque soit  $t \in [t_0, t_1]$ ,

$$f(t) \leq f(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right). \quad (\text{A.6})$$

## A.4 Inégalité de Young

**Lemme.** *Pour tous réels  $a, b$  positifs et tous réels  $p, q$  strictement positifs tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , nous avons l'inégalité suivante*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (\text{A.7})$$

*Le cas le plus classique de cette inégalité est celui de l'exposant 2 ( $p = q = 2$ ) :*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad (\text{A.8})$$

*et nous avons de cette dernière, pour tout  $\epsilon > 0$  :*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}. \quad (\text{A.9})$$

# Bibliographie

- [Aur+18] J. AURIOL et al. « Delay-robust stabilization of a hyperbolic PDE–ODE system ». In : *Automatica* 95 (2018), p. 494-502 (cf. p. 14).
- [AVP14] M. AHMADI, G. VALMORBIDA et A. PAPACHRISTODOULOU. « Input-output analysis of distributed parameter systems using convex optimization ». In : *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*. IEEE, 2014, p. 4310-4315 (cf. p. 20).
- [Bar+17] M. BARREAU et al. « Lyapunov stability analysis of a string equation coupled with an ordinary differential system ». In : *arXiv preprint arXiv :1706.09151* (2017) (cf. p. 79).
- [Bas+07] G. BASTIN et al. « Lyapunov stability analysis of networks of scalar conservation laws ». In : *Networks and Heterogeneous media* 2.4 (2007), p. 749 (cf. p. 5).
- [Bau+17] L. BAUDOIN et al. « Lyapunov stability analysis of a linear system coupled to a heat equation. » In : *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), p. 11978-11983 (cf. p. 79).
- [BC15] G. BASTIN et JM. CORON. « Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems ». In : *Preprint* (2015) (cf. p. 22).
- [BC16] G. BASTIN et J-M. CORON. *Stability and boundary stabilization of 1-d hyperbolic systems*. Springer, 2016 (cf. p. 1, 43, 59).
- [BCL99] H. BREZIS, P-G. CIARLET et J-L. LIONS. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. T. 91. Dunod Paris, 1999 (cf. p. 81).
- [BCN+09] G. BASTIN, J-M. CORON, B. d’Andréa NOVEL et al. « On Lyapunov stability of linearised Saint-Venant equations for a sloping channel. » In : *NHM* 4.2 (2009), p. 177-187 (cf. p. 2).
- [BLK13] N. BEKIARIS-LIBERIS et M. KRSTIC. *Nonlinear control under nonconstant delays*. T. 25. SIAM, 2013 (cf. p. 20, 22).
- [BMV15] D. BREDI, S. MASET et R. VERMIGLIO. *Stability of linear delay differential equations : A numerical approach with MATLAB*. SpringerBriefs in Control, Automation and Robotics T. Basar, A. Bicchi and M. Krstic eds. Springer, 2015 (cf. p. 73).
- [BSS16] L. BAUDOIN, A. SEURET et M. SAFI. « Stability analysis of a system coupled to a transport equation using integral inequalities ». In : *IFAC Conference on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Bertinoro, Italy* (2016) (cf. p. 65).
- [Car96] LAV. CARVALHO. « On quadratic Liapunov functionals for linear difference equations ». In : *Linear Algebra and its applications* 240 (1996), p. 41-64 (cf. p. 61).
- [Cas+15] F. CASTILLO et al. « Fresh air fraction control in engines using dynamic boundary stabilization of LPV hyperbolic systems ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 23.3 (2015), p. 963-974 (cf. p. 2).

- [Cas+16] F. CASTILLO et al. « Dynamic Boundary Stabilization of First Order Hyperbolic Systems ». In : *Recent Results on Time-Delay Systems*. 2016, p. 169-190 (cf. p. 46, 56).
- [CGP05] G-M. COCLITE, M. GARAVELLO et B. PICCOLI. « Traffic Flow on a Road Network ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 36.6 (2005), p. 1862-1886. eprint : <https://doi.org/10.1137/S0036141004402683> (cf. p. 65).
- [Che95] J. CHEN. « On computing the maximal delay intervals for stability of linear delay systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 40.6 (1995), p. 1087-1093 (cf. p. 15, 63).
- [Col+09] R-M. COLOMBO et al. « Optimal control in networks of pipes and canals ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 48.3 (2009), p. 2032-2050 (cf. p. 2).
- [Cor07] J-M CORON. *Control and nonlinearity*. 136. American Mathematical Soc., 2007 (cf. p. 1, 5, 6, 11, 22, 24, 60).
- [CT61] H. CARTAN et R. TAKAHASHI. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. T. 115. Hermann Paris, 1961 (cf. p. 81).
- [CWD12] F. CASTILLO, E. WITRANT et L. DUGARD. « Contrôle de température dans un flux de Poiseuille ». In : *IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Grenoble, France*. 2012 (cf. p. 3).
- [CZ12] R.F. CURTAIN et H. ZWART. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. T. 21. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 22).
- [DGL10] M. DICK, M. GUGAT et G. LEUGERING. « Classical solutions and feedback stabilization for the gas flow in a sequence of pipes. » In : *NHM* 5.4 (2010), p. 691-709 (cf. p. 2).
- [DMVK13] F. DI MEGLIO, R. VAZQUEZ et M. KRSTIC. « Stabilization of a system of  $n+1$  coupled first-order hyperbolic linear PDEs with a single boundary input ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 58.12 (2013), p. 3097-3111 (cf. p. 46).
- [EM14] A. EGOROV et S. MONDIÉ. « Necessary stability conditions for linear delay systems ». In : *Automatica* 50.12 (2014), p. 3204-3208 (cf. p. 46).
- [Esp+16] N. ESPITIA et al. « Event-based control of linear hyperbolic systems of conservation laws ». In : *Automatica* 70 (2016), p. 275-287 (cf. p. 4, 11).
- [Esp+17a] N. ESPITIA et al. « Dynamic boundary control synthesis of coupled PDE-ODEs for communication networks under fluid flow modeling ». In : *Decision and Control (CDC), 2017 IEEE 56th Annual Conference on*. IEEE. 2017, p. 1260-1265 (cf. p. 4).
- [Esp+17b] N. ESPITIA et al. « Fluid-flow modeling and stability analysis of communication networks ». In : *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), p. 4534-4539 (cf. p. 4).
- [Eva98] L. C. EVANS. « Partial differential equations ». In : *Graduate Studies in Mathematics* 19 (1998) (cf. p. 2).
- [Fei+17] M. FEINGESICHT et al. « Sliding Mode Control for Turbulent Flows ». In : *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), p. 2690-2695 (cf. p. 2).

- [Fri14] E. FRIDMAN. *Introduction to time-delay systems : Analysis and control*. Springer, 2014 (cf. p. 9, 12-15, 20, 22, 63, 78).
- [FS02] E. FRIDMAN et U. SHAKED. « A descriptor system approach to  $H_\infty$  control of linear time-delay systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.2 (2002), p. 253-270 (cf. p. 64).
- [FSR04] E. FRIDMAN, A. SEURET et J-P. RICHARD. « Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach ». In : *Automatica* 40.8 (2004), p. 1441-1446 (cf. p. 78).
- [GCK03] K. GU, J. CHEN et V. L. KHARITONOV. *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003 (cf. p. 9, 14, 15, 20, 22, 52, 63, 70, 71, 74, 79).
- [GDL11] M. GUGAT, M. DICK et G. LEUGERING. « Gas Flow in Fan-Shaped Networks : Classical Solutions and Feedback Stabilization ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 49.5 (2011), p. 2101-2117. eprint : <https://doi.org/10.1137/100799824> (cf. p. 65).
- [GN00] K. GU et S.-I. NICULESCU. « Additional dynamics in transformed time-delay systems ». In : *IEEE Transactions on automatic control* 45.3 (2000), p. 572-575 (cf. p. 63, 64).
- [Gu00] K. GU. « An integral inequality in the stability problem of time-delay systems ». In : *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*. T. 3. IEEE. 2000, p. 2805-2810 (cf. p. 16).
- [Gu01] K. GU. « A further refinement of discretized Lyapunov functional method for the stability of time-delay systems ». In : *International Journal of Control* 74.10 (2001), p. 967-976 (cf. p. 16).
- [Gu97] K. GU. « Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems ». In : *International Journal of Control* 68.4 (1997), p. 923-934 (cf. p. 16).
- [GW04a] H. GAO et C. WANG. « A delay-dependent approach to robust  $H_\infty$  filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 52.6 (2004), p. 1631-1640 (cf. p. 63).
- [GW04b] Huijun GAO et Changhong WANG. « A delay-dependent approach to robust  $H_\infty$  filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 52.6 (2004), p. 1631-1640 (cf. p. 15).
- [Het+17] L. HETEL et al. « Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling : an overview ». In : *Automatica* 76 (2017), p. 309-335 (cf. p. 22).
- [HNX07] J.P. HESPANHA, P. NAGHSHTABRIZI et Y. XU. « A survey of recent results in networked control systems ». In : *Proceedings of the IEEE* 95(1) (2007), p. 138-162 (cf. p. 22).
- [JKW06] D. JACQUET, M. KRSTIC et C. Canudas de WIT. « Optimal control of scalar one-dimensional conservation laws ». In : *American Control Conference, 2006*. 2006 (cf. p. 2).

- [Kha96] H-K. KHALIL. « Nonlinear systems ». In : *Prentice-Hall, New Jersey* 2.5 (1996), p. 5-1 (cf. p. 1, 6-8).
- [Krs09] M KRSTIC. *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer, 2009 (cf. p. 2, 14, 19, 22, 64).
- [LL+17] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE et al. « Systems & Control for the future of humanity, research agenda : Current and future roles, impact and grand challenges ». In : *Annual Reviews in Control* 43 (2017), p. 1 -64 (cf. p. 2).
- [MK+05] S. MONDIE, V.L. KHARITONOV et al. « Exponential estimates for retarded time-delay systems : an LMI approach ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.2 (2005), p. 268-273 (cf. p. 15, 63).
- [MKS05] S. MONDIE, V. L. KHARITONOV et O. SANTOS. « Complete type Lyapunov-Krasovskii functionals with a given cross term in the time derivative ». In : *IEEE Conference on Decision and Control*. T. 44. 5. IEEE; 1998. 2005, p. 5060 (cf. p. 46).
- [Nic01] S-I NICULESCU. *Delay effects on stability : a robust control approach*. T. 269. Springer Science & Business Media, 2001 (cf. p. 14, 20, 22).
- [Pee14] M. M. PEET. « LMI parametrization of Lyapunov functions for infinite-dimensional systems : A framework ». In : *American Control Conference (ACC), 2014*. IEEE. 2014, p. 359-366 (cf. p. 16, 20).
- [PP06] A. PAPACHRISTODOULOU et M. M. PEET. « On the analysis of systems described by classes of partial differential equations ». In : *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, CA, USA*. 2006, p. 747-752 (cf. p. 2, 20).
- [PPL09] M. M. PEET, A. PAPACHRISTODOULOU et S. LALL. « Positive forms and stability of linear time-delay systems ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 47.6 (2009), p. 3237-3258 (cf. p. 16, 46).
- [PWB08] C. PRIEUR, J. WINKIN et G. BASTIN. « Robust boundary control of systems of conservation laws ». In : *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 20.2 (2008), p. 173-197 (cf. p. 2, 19).
- [Ric03] J.-P. RICHARD. « Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems ». In : *automatica* 39.10 (2003), p. 1667-1694 (cf. p. 14, 22, 63).
- [RN55] F. RIESZ et B-v-Sz. NAGY. « Leçons d'analyse fonctionnelle 3ème éd ». In : *Gauthier-Villars, Paris* (1955) (cf. p. 81).
- [SBS17a] M. SAFI, L. BAUDOUIN et A. SEURET. « Refind exponential stability analysis of a coupled system ». In : *IFAC Conference, TOULOUSE, FRANCE* (2017) (cf. p. 43, 52, 72).
- [SBS17b] M. SAFI, L. BAUDOUIN et A. SEURET. « Tractable sufficient stability conditions for a system coupling linear transport and differential equations ». In : *Systems & Control Letters* 110 (2017), p. 1 -8 (cf. p. 2, 54, 65).
- [SCK10] A. SMYSHLYAEV, E. CERPA et M. KRSTIC. « Boundary stabilization of a 1-D wave equation with in-domain antidamping ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 48.6 (2010), p. 4014-4031 (cf. p. 19).

- [SG12] A. SEURET et F. GOUAISBAUT. « Reducing the gap of Jensen’s inequality by using Wirtinger inequality ». In : (2012) (cf. p. 14).
- [SG13a] A. SEURET et F. GOUAISBAUT. « Jensen’s and Wirtinger’s inequalities for time-delay systems ». In : *11th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*. 2013, 6p (cf. p. 14).
- [SG13b] A. SEURET et F. GOUAISBAUT. « Wirtinger-based integral inequality : application to time-delay systems ». In : *Automatica* 49.9 (2013), p. 2860-2866 (cf. p. 14, 16, 28, 38).
- [SG14] A. SEURET et F. GOUAISBAUT. « Complete quadratic Lyapunov functionals using Bessel-Legendre inequality ». In : *Control Conference (ECC), 2014 European*. IEEE. 2014, p. 448-453 (cf. p. 16, 20).
- [SG15] A. SEURET et F. GOUAISBAUT. « Hierarchy of LMI conditions for the stability analysis of time-delay systems ». In : *Systems & Control Letters* 81 (2015), p. 1-7 (cf. p. 13, 14, 16, 20).
- [SGA15] A. SEURET, F. GOUAISBAUT et Y. ARIBA. « Complete quadratic Lyapunov functionals for distributed delay systems ». In : *Automatica* 62 (2015), p. 168-176 (cf. p. 16, 20).
- [SGK10] A. SUSTO GIAN et M. KRSTIC. « Control of PDE–ODE cascades with Neumann interconnections ». In : *Journal of the Franklin Institute* 347.1 (2010), p. 284-314 (cf. p. 2, 19).
- [Sip+11] R. SIPAHI et al. « Stability and stabilization of systems with time delay ». In : *Control Systems, IEEE* 31.1 (2011), p. 38-65 (cf. p. 13, 14, 22, 37, 58, 59).
- [SK05] A. SMYSHLYAEV et M. KRSTIC. « On control design for PDEs with space-dependent diffusivity or time-dependent reactivity ». In : *Automatica* 41.9 (2005), p. 1601-1608 (cf. p. 19).
- [TM17] Y. TANG et G. MAZANTI. « Stability analysis of coupled linear ODE-hyperbolic PDE systems with two time scales ». In : *Automatica* 85 (2017), p. 386 -396 (cf. p. 23).
- [TPG15] Y. TANG, C. PRIEUR et A. GIRARD. « Stability analysis of a singularly perturbed coupled ODE-PDE system ». In : *Conference on Decision and Control, Osaka, Japan*. 2015 (cf. p. 2, 14, 23, 46, 56).
- [Tri+15] H. TRINH et al. « Refined Jensen-based inequality approach to stability analysis of time-delay systems ». In : *IET Control Theory & Applications* 9.14 (2015), p. 2188-2194 (cf. p. 14).
- [Wit+07] E. WITRANT et al. « A control-oriented model of the current profile in tokamak plasma ». In : *Plasma Physics and Controlled Fusion* 49.7 (2007), p. 1075 (cf. p. 2).
- [XLY01] S. XU, J. LAM et C. YANG. « Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay ». In : *Systems & Control Letters* 43.2 (2001), p. 77 -84 (cf. p. 16, 63).

- [XLZ06] S. XU, J. LAM et M. ZHONG. « New exponential estimates for time-delay systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.9 (2006), p. 1501-1505 (cf. p. 15, 63).
- [Zam08] S. ZAMPIERI. « A survey of recent results in Networked Control Systems ». In : *Proc. 17<sup>th</sup> IFAC World Congress*. Seoul, Korea, 2008 (cf. p. 22).
- [Zha+09] Y. ZHAO et al. « Stability and stabilization of delayed T-S fuzzy systems : a delay partitioning approach ». In : *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17.4 (2009), p. 750-762 (cf. p. 16).
- [ZKT01] J. ZHANG, C.R. KNOPSE et P. TSIOTRAS. « Stability of time-delay systems : Equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 46.3 (2001), p. 482-486 (cf. p. 13, 37).

---

**Résumé** — Les travaux développés dans cette thèse concernent la théorie du contrôle ont pour objectif de proposer une nouvelle approche pour l'étude de stabilité d'un système de dimension infinie où une équation différentielle ordinaire est couplée à une équation de transport par les termes de bord du domaine spatial.

L'idée est d'exploiter des travaux récents effectués dans le cadre des systèmes à retard pour quantifier la stabilité d'un système couplant une équation aux dérivées partielles à des équations différentielles. Ces travaux s'appuient sur les polynômes de Legendre et l'inégalité de Bessel, pour construire une approche de la stabilité par la méthode de Lyapunov et l'utilisation d'inégalités matricielles linéaires. Les polynômes de Legendre servent à la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov basée en partie sur une approximation polynomiale de l'état de l'équation de transport (qui est de dimension infinie).

Le manuscrit s'articule en plusieurs étapes. Après la présentation d'un simple modèle couplant des équations différentielles ordinaires avec une équation de transport, l'approximation de l'état de dimension infinie utilisant une projection sur les polynômes de Legendre est décrite. La méthode de Lyapunov est ensuite développée et son fonctionnement nécessite la production de conditions de stabilité sous forme d'inégalités matricielles linéaires. Ces conditions permettent des tests numériques effectués sur des exemples académiques.

Des cas plus difficiles sont abordés au fil du document, allant d'une unique équation de transport à plusieurs équations aux vitesses différentes, la prise en compte d'un terme de couplage entre celles ci via un potentiel ou via le bord du domaine.

Enfin, un tel couplage avec une équation de transport pouvant être une description alternative d'un système à retard, une étude de la stabilité de ce dernier est développée en utilisant des modèles différents du système couplé, dans le but de réduire la complexité des conditions de stabilité données sous forme des inégalités matricielles.

**Mots clés :** Systèmes à retards, équation de transport, équations aux dérivées partielles, théorème de Lyapunov, systèmes à paramètres distribués.

---

---

**Abstract** — This thesis in control theory aims at proposing a novel approach for the stability study of an infinite dimensional system where an ordinary differential equation is coupled to a transport equation through boundary terms.

The idea is to exploit recent works on delay systems to quantify the stability of a system coupling a partial differential equations to ordinary differential equations. These works rely on Legendre's polynomials and Bessel's inequality to construct a novel approach of stability by the Lyapunov method and the use of linear matrix inequalities. Legendre's polynomials allow construct a new structure of Lyapunov functional based partly on a polynomial approximation of the state of the transport equation (which is of infinite dimension).

The manuscript is divided into several stages. After the presentation of a simple model coupling ordinary differential equations with one transport equation, the approximation of the infinite dimensional state using projection on Legendre polynomials is described. The Lyapunov method is then developed and it requires the production of stability conditions taking the shape of linear matrix inequalities. These conditions allow the production of numerical tests performed on academic examples.

More difficult cases are discussed throughout the document, from a single equation of transport to several equations with different speeds, taking into account a term of coupling between them via a potential or the boundary of the domain.

Finally, since such a coupling of a finite dimensional system with a transport equation can be an alternative description of a delay system, a study of the stability of the latter is developed using different models of the coupled system, in order to reduce the complexity of the stability conditions given in the form of matrix inequalities.

**Keywords :** Time-delay systems, transport equation, Partial differential equations, Lyapunov theorem, Distributed parameter systems.

---

Laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes  
7 Avenue du Colonel Roche, 31400  
Toulouse